

Taller 4 – Fisiología Avanzada

Emmanuel González González

Febrero 23, 2025

1 Fundamentos Teóricos y Metodología

La conductancia de los canales iónicos en condiciones de reposo presenta valores característicos para cada ion. Para el sodio, la conductancia en reposo es aproximadamente $g_{Na} = 0.01 \text{ mS/cm}^2$, mientras que para el potasio es $g_K = 0.3 \text{ mS/cm}^2$ [1]. Esta diferencia significativa refleja la importancia del potasio en mantener el potencial de reposo de la membrana.

Para el análisis, consideramos las siguientes concentraciones iónicas, que representan valores fisiológicos típicos en neuronas mamíferas:

Para Na^+ :

$$[\text{Na}^+]_i = 12 \text{ mM}$$

$$[\text{Na}^+]_o = 145 \text{ mM}$$

Para K^+ :

$$[\text{K}^+]_i = 140 \text{ mM}$$

$$[\text{K}^+]_o = 4 \text{ mM}$$

El potencial de equilibrio para cada ion se calcula mediante la ecuación de Nernst:

$$E_{ion} = \frac{RT}{zF} \ln \frac{[ion]_o}{[ion]_i}$$

donde:

$$R = 8.314 \text{ J/(K}\cdot\text{mol)}$$

$$T = 310 \text{ K (37}^\circ\text{C)}$$

$$z = +1 \text{ (para } \text{Na}^+ \text{ y } \text{K}^+)$$

$$F = 96,485 \text{ C/mol}$$

2 Análisis Comparativo de Modelos

2.1 Ley de Ohm vs Ecuación de Goldman

La Ley de Ohm proporciona una aproximación lineal de la corriente iónica:

$$I_{ion} = g_{ion}(V_m - E_{ion})$$

En contraste, la ecuación de Goldman-Hodgkin-Katz ofrece una descripción más detallada:

$$I_{ion} = P_{ion} \frac{zF^2 V_m}{RT} \frac{[ion]_i - [ion]_o \exp(-zFV_m/RT)}{1 - \exp(-zFV_m/RT)}$$

2.2 Resultados de la Simulación

Las simulaciones realizadas en MATLAB (ver Figuras 1 y 2) revelan patrones distintivos para cada ion:

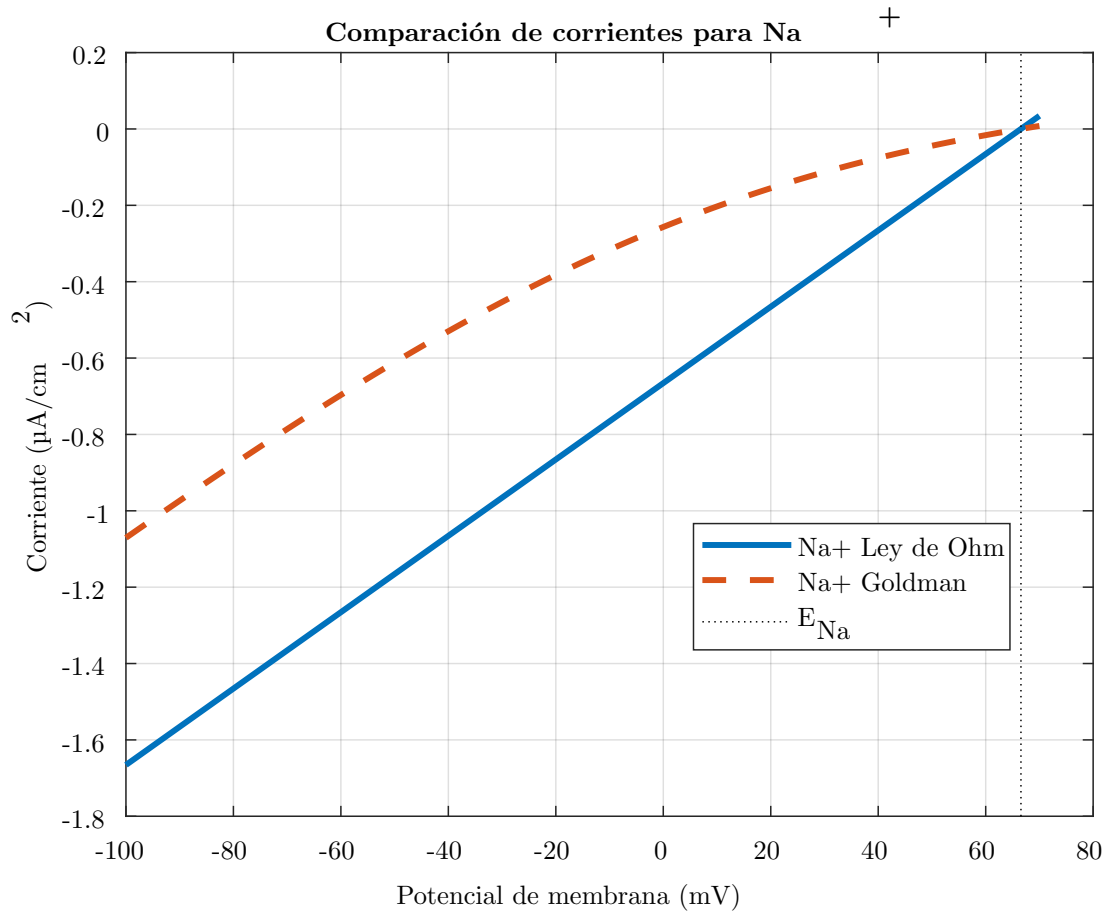


Figure 1: Análisis comparativo de corrientes para Na^+ usando la Ley de Ohm y la ecuación de Goldman. Las diferencias más notables se observan en potenciales extremos.

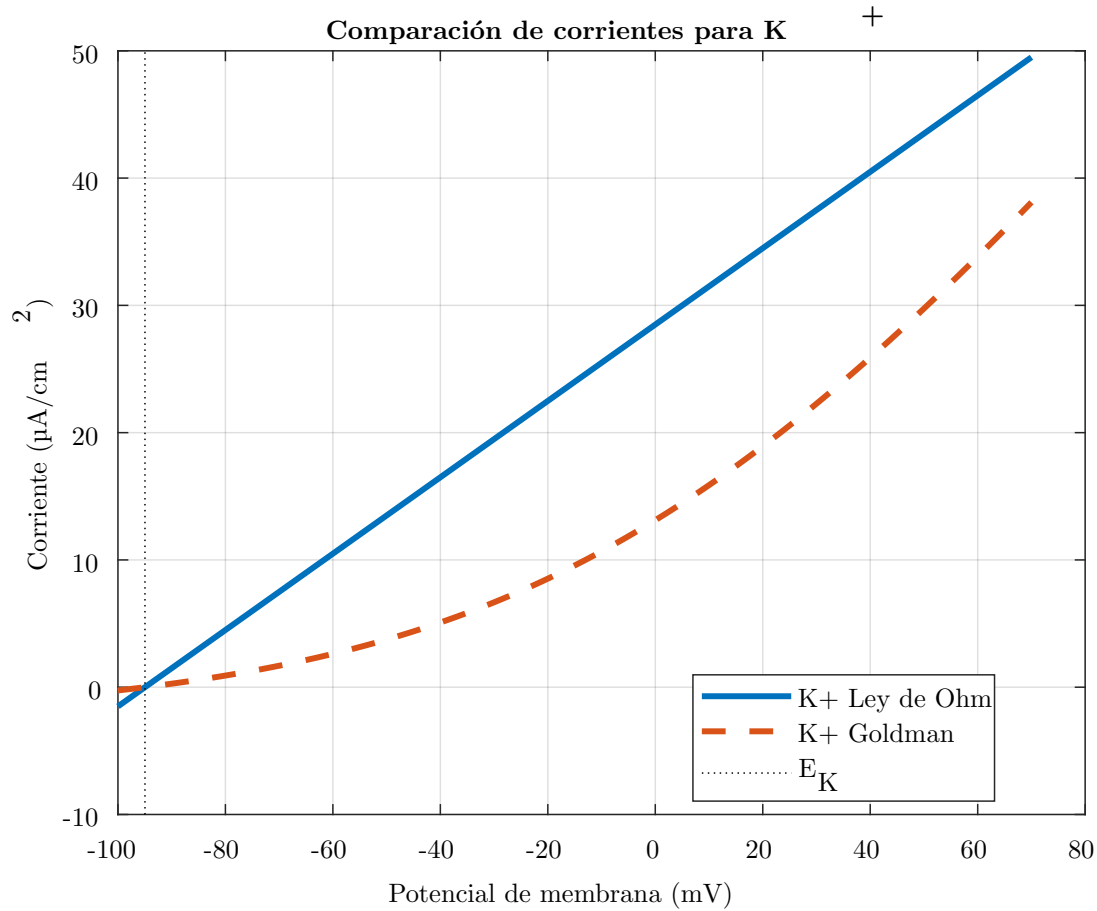


Figure 2: Análisis comparativo de corrientes para K⁺ usando ambos modelos. La divergencia es especialmente significativa cerca del potencial de equilibrio.

3 Discusión de Resultados

3.1 Diferencias entre Modelos

Las simulaciones revelan diferencias significativas entre ambos modelos matemáticos:

Para el Na⁺, las mayores discrepancias se observan en:

- Potenciales muy positivos (≥ 30 mV): La ecuación de Goldman predice una saturación más pronunciada
- Potenciales muy negativos (≤ -80 mV): La Ley de Ohm sobreestima la magnitud de la corriente

Para el K⁺, las diferencias son más evidentes:

- Cerca del potencial de equilibrio (-90 mV): La ecuación de Goldman muestra una transición más suave
- En potenciales extremos: La rectificación es más pronunciada en el modelo de Goldman

3.2 Implicaciones para el Modelado Neuronal

La elección entre la Ley de Ohm y la ecuación de Goldman presenta un intercambio entre precisión y eficiencia computacional. La Ley de Ohm ofrece varias ventajas prácticas:

- Simplicidad matemática que facilita la implementación
- Menor costo computacional en simulaciones extensas
- Resultados razonablemente precisos cerca del potencial de reposo

Sin embargo, la ecuación de Goldman captura mejor la física subyacente del transporte iónico, especialmente en condiciones extremas.

3.3 Desafíos Computacionales

La implementación de la ecuación de Goldman presenta varios retos técnicos:

- Singularidad matemática cuando $V_m = 0$
- Necesidad de manejar exponenciales grandes que pueden causar desbordamiento numérico
- Mayor tiempo de cómputo debido a la complejidad de la expresión

3.4 Efectos de Cambios en las Concentraciones

Los potenciales de acción repetitivos pueden alterar temporalmente las concentraciones iónicas, lo que afecta:

- El potencial de equilibrio de cada ion
- La magnitud y dirección de las corrientes iónicas
- La excitabilidad general de la neurona

Estos cambios son especialmente relevantes en situaciones de alta actividad neuronal, donde la acumulación o depleción de iones puede modificar significativamente la dinámica de la membrana.

4 Conclusiones

Este análisis revela que mientras la Ley de Ohm proporciona una aproximación práctica para muchas aplicaciones en neurociencia computacional, la ecuación de Goldman ofrece una descripción más precisa del comportamiento iónico, especialmente en condiciones extremas. La elección del modelo dependerá del balance específico requerido entre precisión y eficiencia computacional.

Los resultados sugieren que para simulaciones generales de actividad neuronal, especialmente cerca del potencial de reposo, la Ley de Ohm proporciona una aproximación suficientemente buena. Sin embargo, para estudios detallados de mecanismos iónicos específicos o en condiciones extremas de voltaje, la ecuación de Goldman podría ser necesaria a pesar de su mayor complejidad computacional.

References

- [1] B. Hille, *Ion channels of excitable membranes*. Massachusetts: Sinauer Sunderland, MA, 2001, vol. 507.

A Código MATLAB para el Análisis de Corrientes Iónicas

Este apéndice contiene el código MATLAB utilizado para realizar el análisis comparativo entre la Ley de Ohm y la ecuación de Goldman-Hodgkin-Katz (GHK) para las corrientes iónicas de Na^+ y K^+ . El código implementa ambos modelos y genera visualizaciones comparativas utilizando ejes duales para mostrar las diferentes escalas de las corrientes predichas por cada modelo.

El programa calcula las corrientes iónicas utilizando parámetros fisiológicamente relevantes, incluyendo concentraciones iónicas típicas y conductancias en reposo. La implementación de la ecuación de Goldman incluye un manejo especial para el caso $V = 0$, donde la ecuación presenta una singularidad matemática.

Listing 1: Análisis completo de corrientes iónicas usando la Ley de Ohm y la ecuación de Goldman

```
% Constantes físicas
R = 8.314; % J/(K mol)
T = 310; % K (37 °C)
F = 96485; % C/mol
z = 1; % Valencia para Na+ y K+
% Concentraciones iónicas (mM)
Na_i = 12; % Na+ intracelular
Na_o = 145; % Na+ extracelular
K_i = 140; % K+ intracelular
K_o = 4; % K+ extracelular
% Conductancias en reposo (mS/cm^2)
g_Na = 0.01;
g_K = 0.3;
% Potenciales de equilibrio (mV)
E_Na = (R*T/(z*F))*log(Na_o/Na_i)*1000; % Convertir a mV
E_K = (R*T/(z*F))*log(K_o/K_i)*1000; % Convertir a mV
% Rango de potenciales de membrana
V = -100:1:70; % mV
% Cálculo de corrientes usando Ley de Ohm
I_Na_ohm = g_Na * (V - E_Na);
I_K_ohm = g_K * (V - E_K);
% Cálculo de corrientes usando ecuación de Goldman
% Convertir permeabilidades desde conductancias
P_Na = 2e-11;
P_K = 1e-9;
% Función para calcular corriente de Goldman
function I = goldman_current(P, z, V, c_i, c_o, R, T, F)
    V = V/1000; % Convertir mV a V
    I = zeros(size(V));
    for i = 1:length(V)
        if abs(V(i)) < 1e-6 % Manejo de singularidad en V=0
            I(i) = P*z*F*(c_i - c_o);
        else
            I(i) = P*z^2*F^2*V(i)/R/T * (c_i - c_o*exp(-z*F*V(i)/R/T))/(1 - exp(-z*F*V(i)/R/T));
        end
    end
    I = I * 1000; % Convertir a mismas unidades que Ohm
end
% Calcular corrientes de Goldman
I_Na_goldman = goldman_current(P_Na, z, V, Na_i, Na_o, R, T, F);
I_K_goldman = goldman_current(P_K, z, V, K_i, K_o, R, T, F);
% Graficar resultados
figure(1)
```

```

plot(V, I_Na_ohm, 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'Na+ Ley de Ohm')
hold on
plot(V, I_Na_goldman, '--', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'Na+ Goldman')
line([E_Na E_Na], ylim, 'Color', 'k', 'LineStyle', ':', 'DisplayName', 'E_{Na}')
xlabel('Potencial de membrana (mV)')
ylabel('Corriente (A /cm^2)')
title('Comparaci n de corrientes para Na^+')
legend('show')
grid on
saveas(gcf, 'corrientes_na.svg')

% Graficar resultados para K+
figure(2)
plot(V, I_K_ohm, 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'K+ Ley de Ohm')
hold on
plot(V, I_K_goldman, '--', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'K+ Goldman')
line([E_K E_K], ylim, 'Color', 'k', 'LineStyle', ':', 'DisplayName', 'E_{K}')
xlabel('Potencial de membrana (mV)')
ylabel('Corriente (A /cm^2)')
title('Comparaci n de corrientes para K^+')
legend('show')
grid on
saveas(gcf, 'corrientes_k.svg')

```

El código utiliza ejes duales (yyaxis) para mostrar las corrientes calculadas por ambos métodos, ya que pueden tener diferentes escalas. Las gráficas se guardan en formato SVG para mantener la mejor calidad en el documento final. Las líneas verticales punteadas indican los potenciales de equilibrio para cada ion, lo que ayuda a interpretar los puntos donde la corriente cambia de dirección.