E. Zápočtový test - MA I. (2.2.2018)
David Nápravník

# 1 Spočítejte limitu (n $\in \mathbb{N}$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+\frac{2}{n})^5}{(2n-\frac{1}{n})^6} * \sqrt{2n+3} * \sqrt{3n+2}$$

Nejdříve spojíme vše do jednoho zlomku

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+\frac{2}{n})^5 * \sqrt{2n+3} * \sqrt{3n+2}}{(2n-\frac{1}{n})^6}$$

Jelikož n $\to \infty$ tak $\frac{2}{n} = 0$ a $\frac{1}{n} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+0)^5 * \sqrt{2n+3} * \sqrt{3n+2}}{(2n-0)^6}$$

$(2n)^6 = 64n^6$ a to rovnou zkrátíme s $n^5$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+3} * \sqrt{3n+2}}{64n}$$

Převedeme pod společný zlomek

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{(2n+3)*(3n+2)}{(64n)^2}}$$

Posuneme limitu dovnitř mocniny a vytkneme spodek zlomku

$$\sqrt{\frac{1}{64^2} \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)*(3n+2)}{n^2}}$$

Vypočítáme zlomek

$$\sqrt{\frac{1}{64^2} \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+13n+6}{n^2}}$$

Použijeme L'Hospitala, protože máme $\frac{\infty}{\infty}$

$$\sqrt{\frac{1}{64^2} \lim_{n\to\infty} \frac{12n+13}{2n}}$$

Vykrátíme $n$

$$\sqrt{\frac{1}{64^2} \lim_{n\to\infty} \frac{12+\frac{13}{n}}{2}}$$

Vypočítáme limitu

$$\sqrt{\frac{1}{64^2} * \frac{12}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{32}$$

# 2 Mějme následující číselnou řadu.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^n * 2^n * n}{4^n + (-1)^n * n}$$

Podíváme se zda $\lim a_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + (-1)^n * 2^n * n}{4^n + (-1)^n * n}$$

Pro a » 1 $\lim_{n\to\infty} a^n > \lim_{n\to\infty} n$
A jelikož $4^n >> 3^n + 2^n$ tak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{4^n} = 0$$

Srovnávacím kritériem můžeme odstranit $(-1)^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n * n}{4^n + n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n * n}{4^n - n}$$

jelikož se nedostaneme do záporných hodnot tak pokud nastane neabsolutní konvergence bude zároveň i absolutní.

Dále vypočítáme konvergenci a jelikož $3^n > 2^n * n$ a zároveň $4^n > n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n * n}{4^n + n}$$

Srovnávacím kritériem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n * n}{4^n + n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n * n}{4^n}$$

zkontrolujeme konvergenci pro pravou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n * n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n * n}{4^n}$$

Odmocninovým kritériem:

$$k_1 = \sqrt[n]{\frac{3^n}{4^n}} = 3/4$$

$$k_2 = \sqrt[n]{\frac{2^n * n}{4^n}} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{4^n}} * \sqrt[n]{n} = \frac{2 * 1}{4} = 2/4 \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

pokud je $k < 1$ pak řada konverguje. Takže jelikož obě řady konvergují, tak i jejich součet bude konvergovat. Takže platí srovnávací kritérium a tudíž původní řada **konverguje absolutně i neabsolutně**.

# 3 Mějme funkci f

$$f(x) = \sin^2 \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x}}$$

Kritické body:
$x \neq 0$ kvůli zlomku
$x > 1$ kvůli odmocnině

Definiční obor: $x \in \langle -1, 0) \cup \langle 1, \infty)$ (bez použití komplexních čísel).
Funkce je spojitá na daném definičním oboru. (protože kritický bod x=0 se nenachází v daném definičním oboru)

Derivace:

$$f(x)' = \frac{(2 - \frac{x^2-1}{x^2}) \sin \sqrt{\frac{x^2-1}{x}} \cos \sqrt{\frac{x^2-1}{x}}}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}}$$

kritickými body derivace jsou:
$x = \pm 1$
$x = 0$

pro $x \in (-1,0) \cup (1,\infty)$ existuje derivace f(x)'

Jednostranné derivace: pro $x = 1$

$$\frac{\sin\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}} = \frac{\sin j}{j} = 1, j = \sqrt{\frac{x^2-1}{x}}$$

Po vykrácení sin a jmenovatele nám zbude:

$$\lim_{x\to 1}(2 - \frac{x^2-1}{x^2})\cos\sqrt{\frac{x^2-1}{x}} \overset{VOAL}{=} (2-0)*1 = 2$$

Derivace pro x = -1

$$\lim_{x\to -1}(2 - \frac{x^2-1}{x^2})\cos\sqrt{\frac{x^2-1}{x}} \overset{VOAL}{=} (2-0)*1 = 2$$

# 4 Vyšetřete průběh funkce f

$$f(x) = exp(\frac{x-1}{x})$$

kritické body:
$x = 0$
spočítáme limity zprava,zleva kolem nuly a pak limity do nekonečna

$$\lim_{n\to 0^+} exp(\frac{x-1}{x})$$

$$\lim_{n\to 0^+} exp(1-\frac{1}{x}) \overset{VOAL}{=} e^{1-\infty} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{n\to 0^-} exp(\frac{x-1}{x})$$

$$\lim_{n\to 0^-} exp(1-\frac{1}{x}) \overset{VOAL}{=} exp(1-(\frac{1}{-0})) = exp(1-(-\infty)) = e^{\infty} = \infty$$

$$\lim_{n\to \infty} exp(\frac{x-1}{x})$$

$$\lim_{n\to \infty} exp(1-\frac{1}{x}) \overset{VOAL}{=} exp(1-(\frac{1}{\infty})) = exp(1-(0)) = e^1 = e$$

$$\lim_{n\to -\infty} exp(\frac{x-1}{x})$$

$$\lim_{n\to -\infty} exp(1-\frac{1}{x}) \overset{VOAL}{=} exp(1-(\frac{1}{-\infty})) = exp(1-(-0)) = e^1 = e$$

Najdeme kdy se derivace rovná nule.

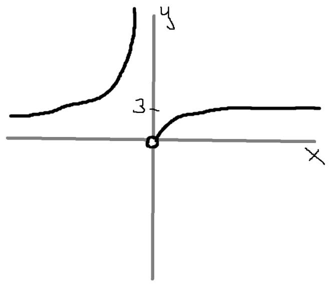
$$f(x)' = \frac{e^{1-\frac{1}{x}}}{x^2}$$

$$exp(1-\frac{1}{y}) = 0, y \in \emptyset$$

jelikož funkce nemá derivaci rovnou nule tak nenabývá lokálního maxima ani minima

pro $a \in \mathbb{R} e^a > 0 \to$ derivace je nezáporná $\to$ původní funkce je na celém DO rostoucí

funkce nemá globální maximum ani minimum
funkce nemá lokální maximum ani minimum


y
3
x