Úvod do komplexní algebry na žofínském prostoru

Definice 1 (Žofínský časoprostor). Nehť parametr $r \in \mathbb{N}$ a zobrazení $m(r) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, d(r) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jsou po řadě rok, měsíc a den konání matfyzákého (filosoficko-matfyzákého) plesu v roce r, přičemž $m(r)$ a $d(r)$ jsou definovány spolkem Matfyzák vždy v roce $r - 1$. Nehť ΔT je časový interval

$$\Delta T := [d(r).m(r).r19 : 30h; (d(r) + 1).m(r) : r2 : 00h].$$

Označme T jednorozměrný čas a $_3$ třídimensionální prostor paláce Žofín, Slovanský ostrov 226, Praha 1. Potom žofínský časoprostor je čtyřrozměrný prostor definovaný direktním součtem $\ = {}_3 \oplus T$, který splňuje:

(a) žofínský časoprostor je nad Vltavou, přičemž prostor $_3$ je nad Vltavou skoro jistě;

(b) v intervalu ΔT je žofínský časoprostor otevřený, jinak je uzavřený;

(c) žofínský časoprostor je normovaný (se standardní normou společenského hování);

(d) žofínský časoprostor je dobře a úplně definovaný.

Definice 2 (Abstraktní žofínský prostor, zkr. žofínský prostor). Symbolem C označujme těleso komplexníh čísel. Potom ${}^r_C$ nazveme abstraktní žofínský prostor nad tělesem komplexníh čísel (zkráeně žofínský prostor), který splòuje:

(a) ${}^r_C$ je omezený;

(b) ${}^r_C$ je dobře definovaný pro daný rok r.

Definice 3 (Struktura žofínského časoprostoru). Označme podprostory následovně:

(a) $R, R \subset$, RYTÍŘSKÝ sál paláce Žofín,

(b) $M, M \subset$, MALÝ sál paláec Žofín,

(c) $W, W \subset$, ZIMNÍ ZAHRADA paláce Žofín,

(d) $H, H \subset$, HLAVNÍ sál paláec Žofín,

(e) $P, P \subset$, PŘÍSÁLÍ hlavního sálu paláce Žofín,

(f) $S, S \subset$, PRIMÁTORSKÝ SALÓNEK paláce Žofín,

(g) $G, G \subset$, GALERIE paláce Žofín a konečně

(h) $U, U \subset$, MUŠLE paláce Žofín.

Označme dále Π libovolně zvolený podprostor z podprostorù definovanýh v (a) až (h). Nehť $\sum$ je libovolný pevně zvolený stùl žofínského časoprostoru z borelovského systému stolù S určenýh pro návštěvníky plesu. Potom platí

$$\forall r \in N \forall \sum \in S \exists ! \Pi \subset \ : \sum \in \Pi$$

2 (To znamená, že každý stùl $\sum$ se vždy nahází právě v jednom z podprostorù definovanýh v seznamu (a)(h).)

Značení. Nehť $s \in {}^{r}_{C}$. Symbolem $\Im(s)$ rozumíme imaginární část a $\Re(s)$ reálnou část komplexního čísla s.

Definice 4 (Struktura žofínského prostoru). Nehť $s \in \mathcal{Z}^{r}_{C}$. Nehť $\Im(s) > 0$. Potom pro každý stùl $\sum \in \mathfrak{S}$ platí:

(a) $\Re(s) = 10 \Leftrightarrow \sum \in \mathcal{R}$;

(b) $\Re(s) = 0 \Leftrightarrow \sum \in \mathcal{M}$;

(c) $\Re(s) = 10 \Leftrightarrow \sum \in \mathcal{P}$;

(d) $\Re(s) = 11 \Leftrightarrow \sum \in \mathcal{H}$;

(e) $\Re(s) = 12 \Leftrightarrow \sum \in \mathcal{S}$;

(f) $\Re(s) = 20 \Leftrightarrow \sum \in \mathcal{G}$;

(g) $\Re(s) = 21 \Leftrightarrow \sum \in \mathcal{U}$.

Označíme-li dále $\pi(\Pi)$ celkový počet stolù v podprostoru Π, potom platí

$$\forall s \in Z^r_{\mathbb{C}} \forall \sum \in (\mathfrak{S} \cap \Pi) : \Im(s) \in \{1, 2, ..., \pi(\Pi)\}.$$

Definice 5 (Značení vstupenek na ples) Označme Λr množinu všech vstupenek na ples v roce r. Nehť funke $n(\sum) : \mathfrak{S}$! N určuje počet židlí u stolu $\sum$. Speciálně pro $\sum =$; určuje počet vstupenek na stání. Potom platí $\forall r \in N \forall \sum n \mathfrak{S} \exists I_{\sum} = \{1; 2; :::; n(\sum)\}$ tak, že $\forall i \in I \sum \exists! \lambda \sum; i$ r 2 r a vstupenka $\lambda \sum; i$ r má všehny náležitosti definované spolkem Matfyzák pro rok r. Naví je-li $\sum 6 =$; , pak platí:

(a) na každé vstupene $\lambda \sum; i$ r je uvedeno číslo $s 2 Z^r_C$, které závisí na $\sum$, nikoli na i;

(b) $\Re(s)$ určuje příslušný podprostor Π;

(c) =(s) určuje návštěvníkem vybrané číslo stolu v podprostoru Π.

Lemma 1. Existuje prosté zobrazení (abstraktního) žofínského prostoru $Z^r_{\mathbb{C}}$ na žofínský časoprostor Z

Důkaz. Dùkaz si laskavý čtenář provede sám za domácí vičení.

Lemma 2 (Brom-Kavalír). Nehť $s \in Z^r_{\mathbb{C}}$ Označme p 2 f1; 0; 1; 2g patro Žofínského paláce (v rozumném slova smyslu, kde p = 0 značí přízemní podprostor časoprostoru Z). Potom stùl $\sum$ najdeme v p-tém patře, kde $p =< (s)10$: Zde bx značí dolní elou část reálného čísla x.

Důkaz. Dùkaz plyne z definice. (Konkrétně definice 4 a intuitivní definice þpatra.

Věta 1 (O stále pohybujiím matfyzákovi) Žofínský prostor je dobře definovaný.

Důkaz. Je zřejmý. (Návod: použijte definie a lemma 6!)

Věta 2 (Jirotkova plesová). Existuje bijeke $\sigma : Z^r_{\mathbb{C}}$ $\mathfrak{S}$, s 7! $\sum$. V případě =(s) = 0 nemá návštěvník plesu nárok na sezení u stolu v žádném podprostoru Π a $\sigma(0) =$;. číslo s nazýváme číslem stolu.

Důkaz. Dùkaz je triviální. (Plyne takřka ihned z definie 5 a lemmatu 6.)Císla vstupenek v Gaussově rovině Schématické znázornění podprostoru Mušle *igma* Obr. 1. Bijeke σ pro několik hodnot s

Věta 3 (Euler). Pro každé $x 2 Ray 2 R$ platí

$$ex + iy = ex(osy + isiny)$$

Důkaz. Dùkaz je na deštivý víkend, resp. na dva semestry.

Definice 6 (Značení stolù). Na každém stolu $\sum \in \mathfrak{S}$ je v souladu s větou 9 uvedeno číslo stolu s v přesném tvaru s $=\Re(s) + = (s)i$, které je vidět jen z určitého směru a dokud jej někdo neodstraní. Z jiné strany stolu může být uvedeno číslo stolu naví v alternativním zápisu téhož komplexního čísla s s možnou zaokrouhlovaí hybou.

Věta 4 (Hledání stolu). Nehť $(s) > 0$. Potom se matfyzák transportuje do správného patra p Žofínského paláe pod le lemmatu 7 a do příslušného podprostoru Π s použitím definie 4, kde pod le definie 11 bude hledat stùl číslo s. (U stolu si zvolí žid li pod le vlastního přání.)

Důkaz. Dùkaz je za þplesové vičení.

Věta 5 (O zoufalém tanečníkovi). Zoufalý tanečník nemohouí najít svùj stùl použije větu 10 či znovu si přečte definii 11 a prozkoumá značení stolù z jiného pohledu.

Důkaz. Dùkaz je zřejmý.

Věta 6 (O zoufalém filosofovi). Nehť filosof zná číslo s 2 $Z^r_{\mathbb{C}}$, příp. má vstupenku $\lambda 2r$ s tímto číslem. Nehť na matfyzákém plese (v časoprostoru Z) je alespoò jeden matfyzák. Potom zoufalý filosof zvládne nalézti stùl, jemuž přísluší číslo s. Nyní předvedeme konstruktivní dùkaz věty. Hlavní trik spočívá v tom, že záležitost elegantně převedeme na snadno řešitelný problém.

Důkaz. Předpokládáme, že v žofínském časoprostoru Z je alespoò jeden matfyzák (což je zřejmě splněno z předpokladu věty), a současně víme, že počet návštěvníkù v Z je konečný (pokud to neplyne z definie, plyne to z požárníh předpisù). Proto zoufalý filosof na jde matfyzáka v konečném čase, bude-li hledat šikovným zpùsobem, tj. každého hosta se zeptá nejvýše jednou. Následně matfyzáka poprosí o pomo s hledáním svého stolu a ukáže mu vstupenku, resp. sdělí požadované číslo stolu s. Když matfyzák zná číslo s, vyřeší problém podle věty 12, popřípadě věty 13. Správné řešení sdělí zoufalému filosovovi (samozřejmě tak, aby jej pohopil), popř. ho ke stolu s dovede (jsme přee na Žofíně, který je normovaný podle definie 1 ()!). Tak se zoufalý filosof elý šťastný dostane ke stolu $\sigma(s)$. Q.E.D.2