Úvod do komplexní algebry na žofínském prostoru

Definice 1 (Žofínský časoprostor). Nehť parametr $r \in \mathbb{N}$ a zobrazení $m(r) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, d(r) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jsou po řadě rok, měsíc a den konání matfyzákého (filosoficko-matfyzákého) plesu v roce r, přičemž $m(r)$ a $d(r)$ jsou definovány spolkem Matfyzák vždy v roce $r-1$. Nehť ΔT je časový interval

$$\Delta T := [d(r).m(r).r19 : 30h; (d(r)+1).m(r) : r2 : 00h].$$

Označme T jednorozměrný čas a $\check{\mathcal{Z}}_3$ třídimensionální prostor paláce Žofín, Slovanský ostrov 226, Praha 1. Potom žofínský časoprostor $\check{\mathcal{Z}}$ je čtyřrozměrný prostor definovaný direktním součtem $\check{\mathcal{Z}} = \check{\mathcal{Z}}_3 \oplus T$, který splňuje:

(a) žofínský časoprostor je nad Vltavou, přičemž prostor $\check{\mathcal{Z}}_3$ je nad Vltavou skoro jistě;

(b) v intervalu ΔT je žofínský časoprostor otevřený, jinak je uzavřený;

(c) žofínský časoprostor je normovaný (se standardní normou společenského hování);

(d) žofínský časoprostor je dobře a úplně definovaný.

Definice 2 (Abstraktní žofínský prostor, zkr. žofínský prostor). Symbolem C označujme těleso komplexníh čísel. Potom $\check{\mathcal{Z}}_C^r$ nazveme abstraktní žofínský prostor nad tělesem komplexníh čísel (zkráeně žofínský prostor), který splòuje:

(a) $\check{\mathcal{Z}}_C^r$ je omezený;
(b) $\check{\mathcal{Z}}_C^r$ je dobře definovaný pro daný rok r.

Definice 3 (Struktura žofínského časoprostoru). Označme podprostory $\check{\mathcal{Z}}$ následovně:

(a) $\mathcal{R}, \mathcal{R} \subset \check{\mathcal{Z}}$, RYTÍŘSKÝ sál paláce Žofín,
(b) $\mathcal{M}, \mathcal{M} \subset \check{\mathcal{Z}}$, MALÝ sál paláce Žofín,
(c) $\mathcal{H}, \mathcal{H} \subset \check{\mathcal{Z}}$, HLAVNÍ sál paláce Žofín,
(d) $\mathcal{P}, \mathcal{P} \subset \check{\mathcal{Z}}$, PŘÍSÁLÍ hlavního sálu paláce Žofín,
(e) $\mathcal{S}, \mathcal{S} \subset \check{\mathcal{Z}}$, PRIMÁTORSKÝ SALÓNEK paláce Žofín,

(f) $\mathcal{G}, \mathcal{G} \subset \check{\mathcal{Z}}$, GALERIE paláce Žofín a konečně

(g) $\mathcal{U}$,$\mathcal{U} \subset \check{\mathcal{Z}}$, MUŠLE paláce Žofín.

Označme dále Π libovolně zvolený podprostor $\check{\mathcal{Z}}$ z podprostorů definovanýh v (a) až (g). Nehť Σ je libovolný pevně zvolený stůl žofínského časoprostoru z borelovského systému [1] stolů S určenýh pro návštěvníky plesu. Potom platí

$$\forall r \in N \forall \Sigma \in S \exists ! \Pi \subset \check{\mathcal{Z}} : \Sigma \in \Pi$$

(To znamená, že každý stůl Σ se vždy nahází právě v jednom z podprostorů definovanýh v seznamu (a)-(g).)

Značení. Nehť $s \in \check{\mathcal{Z}}^r_C$. Symbolem $\Im(s)$ rozumíme imaginární část a $\Re(s)$ reálnou část komplexního čísla s.

Definice 4 (Struktura žofínského prostoru). Nehť $s \in \check{\mathcal{Z}}^r_C$. Nehť $\Im(s) > 0$. Potom pro každý stůl $\Sigma \in \mathfrak{S}$ platí:

(a) $\Re(s) = -10 \Leftrightarrow \Sigma \in \mathcal{R}$;

(b) $\Re(s) = 0 \Leftrightarrow \Sigma \in \mathcal{M}$;

(c) $\Re(s) = 10 \Leftrightarrow \Sigma \in \mathcal{P}$;

(d) $\Re(s) = 11 \Leftrightarrow \Sigma \in \mathcal{H}$;

(e) $\Re(s) = 12 \Leftrightarrow \Sigma \in \mathcal{S}$;

(f) $\Re(s) = 20 \Leftrightarrow \Sigma \in \mathcal{G}$;

(g) $\Re(s) = 21 \Leftrightarrow \Sigma \in \mathcal{U}$.

Označíme-li dále $\pi(\Pi)$ celkový počet stolů v podprostoru Π, potom platí

$$\forall s \in \check{\mathcal{Z}}^r_{\mathbb{C}} \forall \Sigma \in (\mathfrak{S} \cap \Pi) : \Im(s) \in \{1, 2, ..., \pi(\Pi)\}.$$

Definice 5 (Značení vstupenek na ples). Označme Λ_r množinu všech vstupenek na ples v roce r. Nehť funkce $n(\Sigma) : \mathfrak{S} \to \mathbb{N}$ určuje počet židlí u stolu Σ. Speciálně pro $\Sigma = \emptyset$ určuje počet vstupenek na stání. Potom platí

$$\forall r \in \mathbb{N} \forall \Sigma \mathfrak{S} \exists \mathcal{I}_\Sigma = \{1, 2, ..., n(\Sigma)\} \text{tak, že} \forall i \in \mathcal{I}_\Sigma \exists ! \lambda^{\Sigma,i}_r \in \Lambda_r$$

a vstupenka $\lambda^{\Sigma,i}_r$ má všehny náležitosti definované spolkem Matfyzák pro rok r. Navíc, je-li $\Sigma \neq \emptyset$ pak platí:

(a) na každé vstupence $\lambda^{\Sigma,i}_r$ je uvedeno číslo $s \in \check{\mathcal{Z}}^r_{\mathbb{C}}$, které závisí na Σ, nikoli na i;

(b) $\Re(s)$ určuje příslušný podprostor Π;

(c) $\mathfrak{S}(s)$ určuje návštěvníkem vybrané číslo stolu v podprostoru Π.

[1]Prosíme, neověřujte uzavřenost na sjednoení!

Lemma 1. Existuje prosté zobrazení (abstraktního) žofínského prostoru $\check{\mathcal{Z}}^r_{\mathbb{C}}$ na žofínský časoprostor $\check{\mathcal{Z}}$

Důkaz. Důkaz si laskavý čtenář provede sám za domácí cvičení.

Lemma 2 (Brom-Kavalír). Nehť $s \in \check{\mathcal{Z}}^r_{\mathbb{C}}$. Označme $p \in \{-1, 0, 1, 2\}$ patro Žofínského paláce (v rozumném slova smyslu, kde $p = 0$ značí přízemní podprostor časoprostoru $\check{\mathcal{Z}}$). Potom stůl Σ najdeme v p-tém patře, kde

$$p = \left\lfloor \frac{\Re(s)}{10} \right\rfloor$$

Zde $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část reálného čísla x.

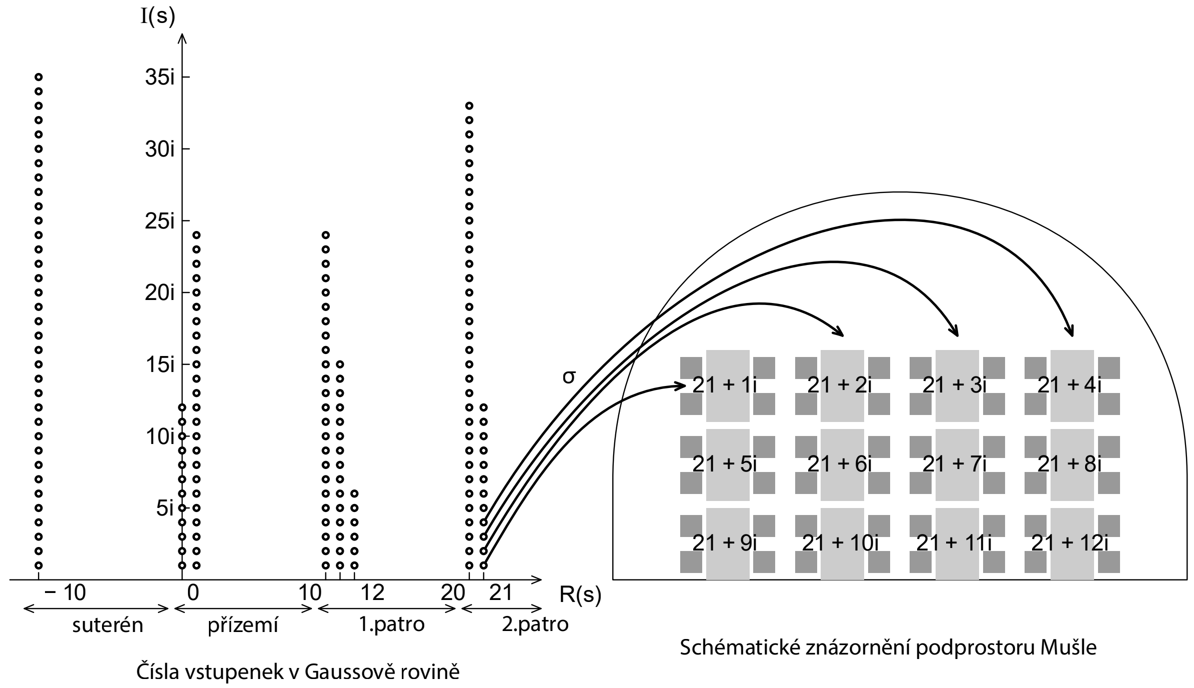
Důkaz. Důkaz plyne z definice. (Konkrétně definice 4 a intuitivní definice "patra".)

Věta 1 (O stále pochybujícím matfyzákovi). Žofínský prostor je dobře definovaný.

Důkaz. Je zřejmý. (Návod: použijte definie a lemma 6!)

Věta 2 (Jirotkova plesová). Existuje bijeke $\sigma : \check{\mathcal{Z}}^r_{\mathbb{C}} \leftarrow \mathfrak{S}, s \mapsto \Sigma$. V případě $\Im(s) = 0$, nemá návštěvník plesu nárok na sezení u stolu v žádném podprostoru Π a $\sigma(0) = \emptyset$. Číslo s nazýváme číslem stolu.

Důkaz. Důkaz je triviální. (Plyne takřka ihned z definie 5 a lemmatu 6.)



Obrázek 1: Bijekce σ pro několik hodnot s

Věta 3 (Euler). Pro každé $x \in R$ a $y \in R$ platí

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Důkaz. Důkaz je na deštivý víkend, resp. na dva semestry.

Definice 6 (Značení stolů). Na každém stolu $\Sigma \in \mathfrak{S}$ je v souladu s větou 9 uvedeno číslo stolu s v přesném tvaru $s = \Re(s) + \Im(s)i$, které je vidět jen z určitého směru a dokud jej někdo neodstraní. Z jiné strany stolu může být uvedeno číslo stolu navíc v alternativním zápisu téhož komplexního čísla s s možnou zaokrouhlovaí chybou.

Věta 4 (Hledání stolu). Nechť $\Im(s) > 0$. Potom se matfyzák transportuje do správného patra p Žofínského paláe podle lemmatu 7 a do příslušného podprostoru Π s použitím definie 4, kde podle definie 11 bude hledat stůl číslo s. (U stolu si zvolí židli podle vlastního přání.)

Důkaz. Důkaz je za "plesové"cvičení.

Věta 5 (O zoufalém tanečníkovi). Zoufalý tanečník nemohouí najít svůj stůl použije větu 10 či znovu si přečte definici 11 a prozkoumá značení stolů z jiného pohledu.

Důkaz. Důkaz je zřejmý.

Věta 6 (O zoufalém filosofovi). Nehť filosof zná číslo $s \in \check{\mathcal{Z}}^r_{\mathbb{C}}$, příp. má vstupenku $\lambda \in \Lambda_r$ s tímto číslem. Nechť na matfyzákém plese (v časoprostoru $\check{\mathcal{Z}}$) je alespoò jeden matfyzák. Potom zoufalý filosof zvládne nalézti stůl, jemuž přísluší číslo s.

Nyní předvedeme konstruktivní důkaz věty. Hlavní trik spočívá v tom, že záležitost elegantně převedeme na snadno řešitelný problém.

Důkaz. Předpokládáme, že v žofínském časoprostoru $\check{\mathcal{Z}}$ je alespoò jeden matfyzák (což je zřejmě splněno z předpokladu věty), a současně víme, že počet návštěvníků v $\check{\mathcal{Z}}$ je konečný (pokud to neplyne z definie, plyne to z požárníh předpisů). Proto zoufalý filosof najde matfyzáka v konečném čase, bude-li hledat šikovným způsobem, tj. každého hosta se zeptá nejvýše jednou. Následně matfyzáka poprosí o pomoc s hledáním svého stolu a ukáže mu vstupenku, resp. sdělí požadované číslo stolu s. Když matfyzák zná číslo s, vyřeší problém podle věty 12, popřípadě věty 13. Správné řešení sdělí zoufalému filosovovi (samozřejmě tak, aby jej pochopil), popř. ho ke stolu s dovede (jsme přece na Žofíně, který je normovaný podle definie 1 (c)!). Tak se zoufalý filosof celý šťastný dostane ke stolu $\sigma(s)$. Q.E.D. [2]

[2] Quod Erat Demonstrandum - Což bylo dokázati