David Nápravník

Diskrétní matematika

Zadáno 15. 11. 2018

Příklad 14

Podmnožin je celkem 2^n , protože:

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Pak lichých je $\sum_{k=1}^{n/2} \binom{n}{2k-1} = \frac{2^n}{2}$

A sudých je $\sum_{k=0}^{n/2} \binom{n}{2k} = \frac{2^n}{2}$

Příklad 15

Dokažme indukcí přes *n*

Pro n = r:

$$\sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} = \sum_{i=r}^{r} \binom{i}{r} = \binom{r}{r} = 1 = \binom{n+1}{r+1}$$

Ik:

$$\sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

Důkaz:

$$\sum_{i=r}^{n+1} \binom{i}{r} = \sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} + \binom{n+1}{r} = \binom{n+1}{r+1} + \binom{n+1}{r} = \binom{n+2}{r+1}$$

Příklad 16

Převedeme do zlomkového tvaru

$$\frac{n!}{m!\,(n-m)!} * \frac{m!}{r!\,(m-r)!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} * \frac{(n-r)!}{(m-r)!\,\big(n-r-(m-r)\big)!}$$

Vykrátíme a dopočítáme

$$\frac{n!}{(n-m)!} * \frac{1}{r!\,(m-r)!} = \frac{n!}{r!} * \frac{1}{(m-r)!\,(n-m)!}$$

$$\frac{n!}{1} * \frac{1}{r!\,(m-r)!} = \frac{n!}{r!} * \frac{1}{(m-r)!}$$

$$\frac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{r!\,(m-r)!}} = \frac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{r!\,(m-r)!}}$$

Příklad 17

Mějme pravděpodobnostní množinu A’, s *m* prvky.

Pravděpodobnost na celou množiny je 1.

Vyberme podmnožinu A množiny A’ s *n* prvky.

Pak v této podmnožině bude stále pravděpodobnost rovná jedné (ale pravděpodobnosti jednotlivých prvků se nám lineárně zvýší).

Důkaz sporem:

Nechť suma na n prvcích má pravděpodobnost 1 a pravděpodobnost sjednocení je větší než jedna.
Pak musí existovat dvojice (a,b), kde Pa+Pb=c a P(a∪b)>c což je ale **spor**.

Příklad 18

Důkaz sporem:
Máme pravděpodobnostní prostor (Ω, P) pak závislé jevy jsou takové jejichž průnik pravděpodobnosti je nenulový.
Mějme tedy takovou dvojici, aby byla závislá. Pak by existoval prvek (krom jedničky), který tyto prvky mají společný, to je ale spor podle definice prvočísel a jejich nesoudělnosti.

Příklad 19

Možností jak vybrat *n* pevných bodů je $\binom{n}{i}$ kde *n* je počet prvků a *i* je počet pevných bodů.
Celkový počet permutací je 2^n.
Potom pravděpodobnost pro X(π) = $\frac{\binom{n}{i}}{2^n}$

Příklad 20

Vycházejme že $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X]^2$
Potom dokažme, že $(X - \mathbb{E}[X])^2 \geq 0$

To je primitivní (jsme v reálných číslech)

A předpoklad tohoto výrazu bude též větší roven nule.