**Московский авиационный институт**
**(Национальный исследовательский университет)**

Факультет прикладной математики и физики

Кафедра вычислительной математики и программирования

# Лабораторная работа № 7

по курсу «Численные методы»

Студент: Гаврилов М.С.

Группа: 80-406б

Вариант: 7

Москва, 2022

## Постановка задачи

Решить краевую задачу для дифференциального уравнения эллиптического типа. Аппроксимацию уравнения произвести с использованием центрально-разностной схемы. Для решения дискретного аналога применить следующие методы: метод простых итераций (метод Либмана), метод Зейделя, метод простых итераций с верхней релаксацией. Вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, y)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров $h_x, h_y$.

Вариант 7.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2u \,,$$

$$u(0, y) = \cos y,$$

$$u(\frac{\pi}{2}, y) = 0,$$

$$u(x,0) = \cos x \,,$$

$$u(x, \frac{\pi}{2}) = 0 \,.$$

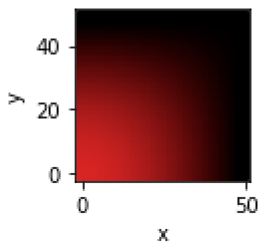
Аналитическое решение: $U(x, y) = \cos x \cos y$.

## Решение

Для отображения результата вычислений используется функция visualize, которая выводит на экран двумерную пространственную сетку, цвет пикселей которой определяются значением соответствующих узлов сетки.

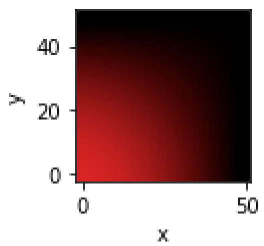
```
def visualise(matr,t_skip,shape = [1,1]):
    pylab.figure(figsize = (shape[0],shape[1]))
    pylab.xlabel("x")
    pylab.ylabel("t")
    for i in range(matr.shape[0]):
        if(i % t_skip != 0):
            continue

        for j in range(matr.shape[1]):

            if(matr[i][j] > 0):
                pylab.plot(j,i,'s',color = (matr[i][j],0,0))
            if(matr[i][j] <= 0):
                pylab.plot(j,i,'s',color = (0,0,-matr[i][j]))
    pylab.show()
```

Аналитическое решение:



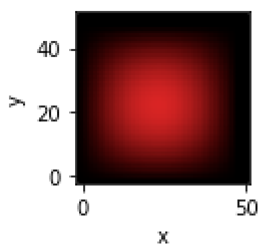

Решение методом Либмана с $\varepsilon = 10^{-4}$:

```
solved in 1561 iterations
```



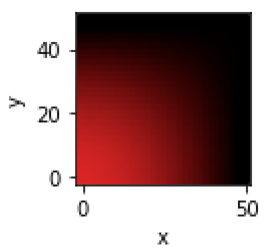

Погрешность метода Либмана:

```
mean abs error: 0.025194735751931874
error map:
```



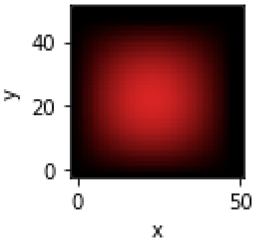

Решение методом Зейделя с $\varepsilon = 10^{-4}$:

```
solved in 992 iterations
```



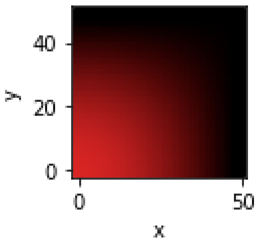

Погрешность метода Зейделя:

```
mean abs error: 0.012591197456895763
error map:
```



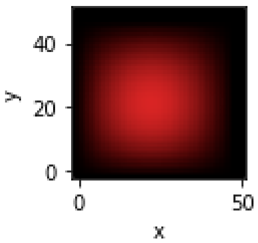

Решение методом простых итераций с верхней релаксацией, $\omega = 1.5$, $\varepsilon = 10^{-4}$:

```
solved in 441 iterations
```



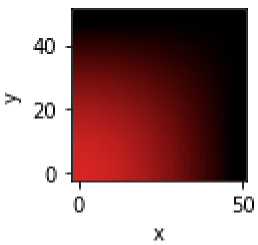

Погрешность метода простых итераций с верхней релаксацией:

```
mean abs error: 0.004170546483655248
error map:
```



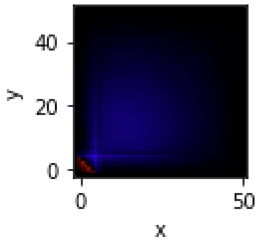

Решение методом простых итераций с верхней релаксацией, $\omega = 1.9$, $\varepsilon = 10^{-4}$:

```
solved in 94 iterations
```



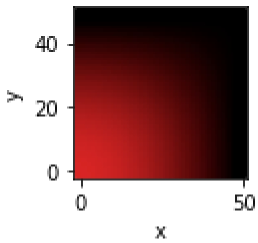

Погрешность метода простых итераций с верхней релаксацией:

```
mean abs error: 2.67028304542239e-05
error map:
```



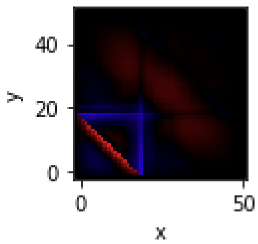

Решение методом простых итераций с верхней релаксацией, ω = 1.95, ε = $10^{-4}$:

```
solved in 178 iterations
```



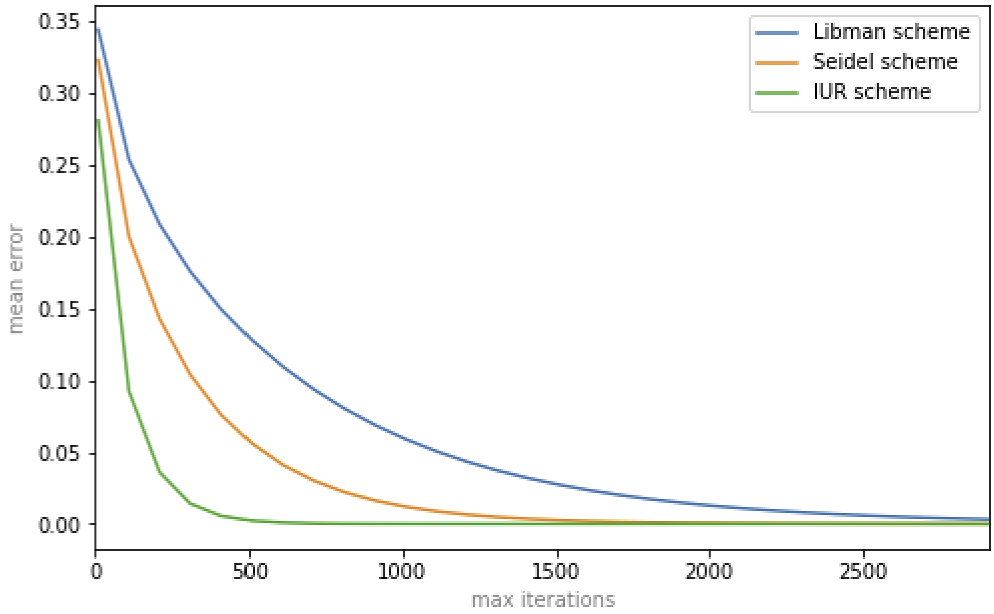

Погрешность метода простых итераций с верхней релаксацией:

```
mean abs error: 9.879087641317382e-06
error map:
```



## Анализ результатов

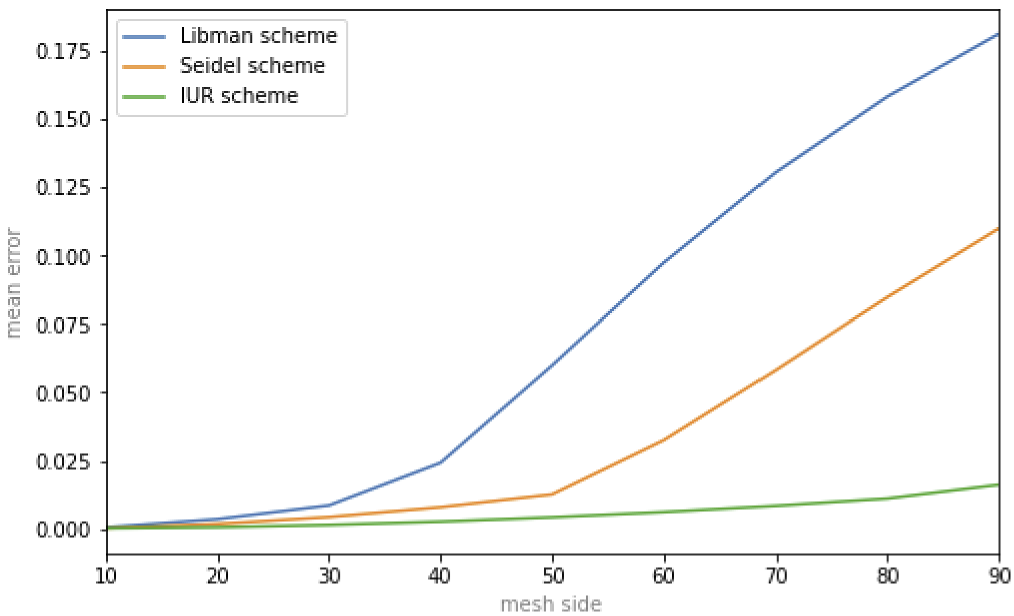
### Исследование зависимости ошибки от числа итераций.

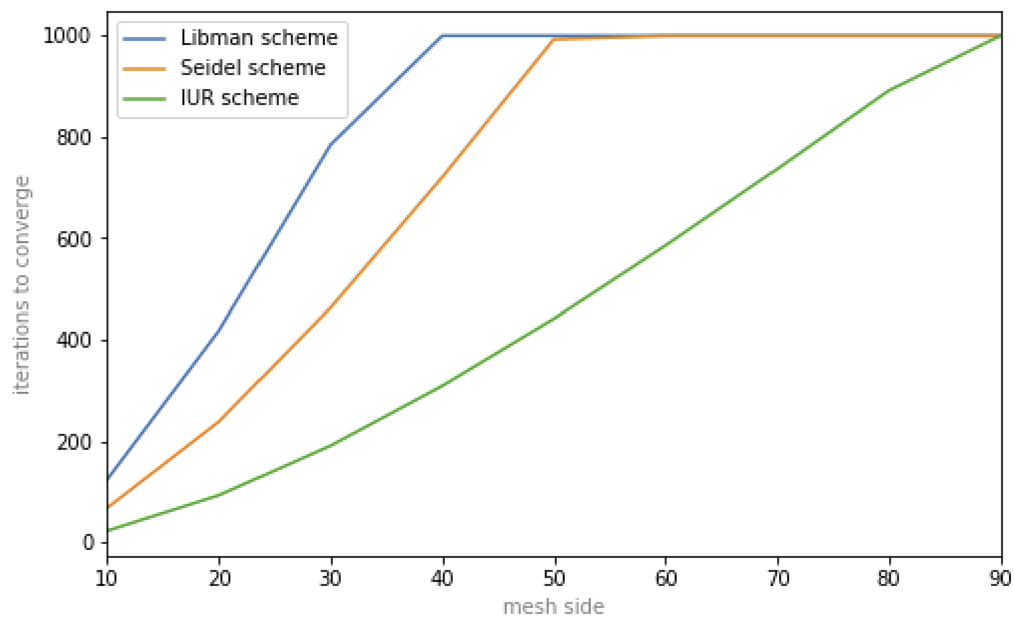



Видим, что метод простых итераций с верхней релаксацией сходится быстрее всего, наиболее медленным является метод Либмана.

### Исследование зависимости погрешности и скорости сходимости от разме ра сетки.

Погрешность измеряется, когда метод завершает итерационный процесс по ус ловию достижения сходимости, либо по достижении 1000 итераций.

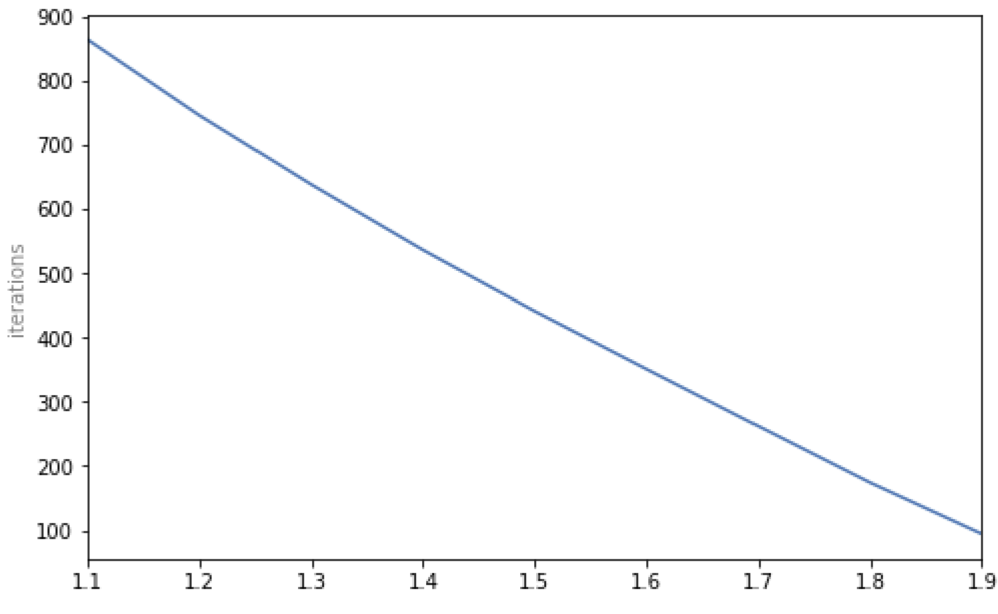


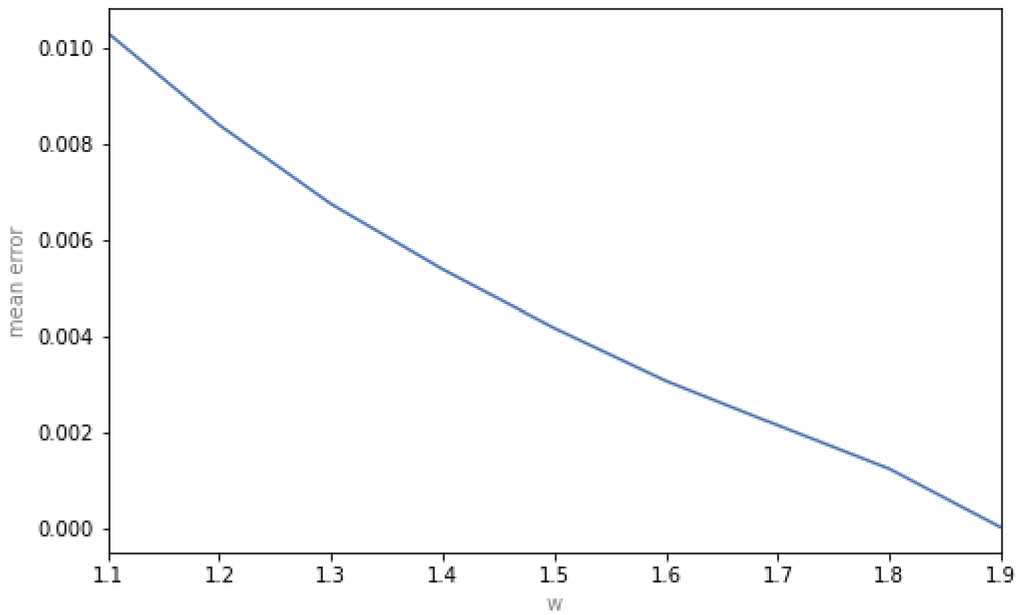



Видно, что, чем больше сетка, тем больше шагов требуется итерационному процессу до того, как условие сходимости будет удовлетворено. Также, на итерации, в которую итерационный процесс завершается, истинная ошибка тем больше, чем больше сетка. Метод простых итераций с верхней релаксацией требует меньше всего итераций, а также обеспечивает наименьший рост погрешности с ростом числа узлов в сетке.

**Исследование метода простых итераций с верхней релаксацией**

Замеряется зависимость скорости сходимости (числа итераций, пройденных до достижения условия сходимости), а также истинной погрешности решения, от параметра ω. Сетка одинакова при всех измерениях.






Видно, что, чем ближе ω к 2, тем лучше.

## Выводы

В ходе выполнения этой лабораторной работы, я ознакомился с различны ми схемами решения дифференциальных уравнений эллиптического типа. Из графиков зависимости ошибки от числа пройденных итераций видно, что мет од Либмана сходится гораздо медленнее, чем метод Зейделя, а метод простой итерации с верхней релаксацией сходится быстрее всего. При исследовании з ависимости скорости сходимости и погрешности от размеров сетки выяснило сь, что, чем сетка больше, тем больше итераций необходимо, чтобы методы с ошлись, а также, на шаге, в который итерационный процесс завершается, (раз ница между значениями на соседних шагах достаточно мала) ошибка метода т ем больше, чем больше узлов в сетке. Метод простой итерации с верхней рел аксацией страдает от вышеперечисленных проблем существенно меньше друг их. В ходе исследования метода простой итерации с верхней релаксацией выя снилось, что метод сходится тем быстрее, чем ближе w к 2, погрешность при этом также уменьшается. Помимо этого, с приближением значений w к 2, на к арте ошибок начинают проступать странные узоры. Если w >= 2, то метод пер естает сходиться.