ZS 2022/2023	BIK-LA1 : ZÁPOČTOVÁ PÍSEMKA	26. LISTOPADU 2022				
ANNA JUNGMANNOVÁ	P 1	P 2	P 3	P 4	P 5	$\sum$
	1	8	8	4	/	21

Příklad 1. (8 bodů) Převeďte následující soustavu do maticového tvaru a rozhodněte, zda existuje nějaké její řešení $x, y, z, u \in \mathbb{Z}_5$. Pokud existuje, a je jediné, najděte ~~alespoň~~ dvě. Pokud není jediné, najděte jich co nejvíce. Jasně zdůvodněte, jak jste ke svým závěrům došli.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z + u &= 1, \\ x + y + 3z + 3u &= 2, \\ 2x + y + 2z + u &= 2. \end{aligned}$$

Příklad 2. (8 bodů) Zjistěte, pro které hodnoty $a \in \mathbb{Z}_5$ je soubor $((3,2,2),(1,2,3),(0,2,2+a))$ vektorů z $\mathbb{Z}_5^3$ lineárně závislý.

Řádně vysvětlete svůj postup: Pokud budete například řešit soustavu rovnic, napište, co jsou proměnné a odkud se vzaly koeficienty. Vysvětlete také, jak z výpočtu plynou závěry, které uděláte.

Příklad 3. (8 bodů) Doplňte soubor vektorů $((1,3,1,0),(2,1,1,1))$ na bázi $\mathbb{R}^4$. Ve výsledné bázi najděte souřadnice vektoru $(3,-1,1,2)$.

Řádně vysvětlete svůj postup: Pokud budete například řešit soustavu rovnic, napište, co jsou proměnné a odkud se vzaly koeficienty. Vysvětlete také, jak z výpočtu plynou závěry, které uděláte.

Příklad 4. (8 bodů) Napište definici dimenze podprostoru a definici báze.

Mějme dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ z T^n. Ukažte, že $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle$ je podprostorem T^n.

Příklad 5. (8 bodů) Najděte matici $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}_3^{2,5}$ a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}_3^2$ takové, že soustava rovnic

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

má v množině řešení vektor $(1,0,2,0,2)$ i vektor $(2,0,1,0,0)$. Řádky matice $\mathbf{A}$ chápané jako vektory ze $\mathbb{Z}_3^5$ musí navíc tvořit lineárně nezávislý soubor.

***

Příklad 1

$\mathbb{Z}_5$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{5r_1+5r_3 \\ ?}]{r_1+3r_2} \begin{array}{ccccc} x & y & z & u & \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

násobení 5 je násobení nulou!

vedlejší řádek

$\Rightarrow$ soustava má více řešení

$y + z = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{c|c|c} \text{a)}\ y=1 & \text{b)}\ y=0 & \text{c)}\ y=2 \\ z=1 & z=2 & z=0 \end{array}\right.$

a) $2x + 3 \cdot 2 + u = 1$

$\Rightarrow$ $x=0$, $u=1$ | $x=1$, $u=4$ | $x=2$, $u=2$ | $x=3$, $u=0$ | $x=4$, $u=3$

b) $2x + 0 + 2 \cdot 2 + u = 1$ $+1$

$2x + u = 2$

$\Rightarrow$ $x=0$, $u=2$ | $x=1$, $u=0$ | $x=2$, $u=3$ | $x=3$, $u=1$ | $x=4$, $u=4$

c) $2x + 2 \cdot 3 + 0 + u = 1$

$2x + u = 0$

$x=0$, $u=0$ | $x=1$, $u=3$ | $x=2$, $u=1$ | $x=3$, $u=4$ | $x=4$, $u=2$

řešení např. $(0,1,1,1)$, $(0,0,2,2)$, $(1,1,1,4)$, $(1,0,2,0)$, $(2,1,1,2)$, $(2,0,2,3)$, $(3,1,1,0)$, $(3,0,2,1)$, $(4,1,1,3)$, $(4,0,2,4)$, $(0,2,0,0)$, $(\cancel{0},2,0,3)$, $(2,2,0,1)$, $(3,2,0,4)$, $(4,2,0,2)$

Příklad 4 definice dimenze a báze podprostoru

0,5 Báze ~~nast~~ vznikla kdyz soubor vektorů je lineárně nezávislý a generuje.

?

generuje co?

Dimenze $\to$ $P \subset\subset T^n$ (~~pa~~ P je podprostor tělesa T^n ; $n \in \mathbb{N}$)

1 $\dim P = 0$ pokud všechny ~~soubor~~ vektory o délce 1 jsou lineárně závislé

Čeho?

$\dim P = d$; $d \in \mathbb{N}$ pokud všechny vektory souboru o délce $d+1$ jsou lineárně závislé a zároveň existuje vektor souboru o délce d který je lineárně nezávislý ✓

$x, y, z \in T^n$ ž $\langle x, y, x+y \rangle$ je podprostor T^n $(\langle x, y, x+y \rangle \subset\subset T^n)$

1,5 podprostor = není prázdný ✓

= odolný vůči sčítání vektorů $(\forall x, y \in T^n)(x+y = z)(z \in T^n)$ ✓ proč

= odolný vůči násobení vektoru skalárem ✓ proč?

$(\forall x \in T^n)(\forall \alpha)(\alpha x \in T^n)$

$\Rightarrow$ předpoklady pro existenci podprostoru jsou splněné $\Rightarrow$ soubor vektorů je podprostor

Příklad 2) soubor $((3,2,2),(1,2,3),(0,2,2+a))$ i $a\in \mathbb{Z}_5$ → aby byl LZ

$$\alpha\cdot(3,2,2)+\beta\cdot(1,2,3)+\gamma\cdot(0,2,2+a)=(0,0,0)$$

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2+a \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+r_3]{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3^{6} & 2^{4} \\ 0 & 4 & 2+a \end{pmatrix} \xrightarrow{2r_2+r_3} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix}$$

$1+4=5 \vee 0$ ⇒ vznikne vedlejší ⇒ bude LZ

⇒ pro $a=4$ bude soubor lineárně závislý.

Příklad 3) doplnit na bázi $\mathbb{R}^4$ soubor vektorů: $((1,3,1,0),(2,1,1,1))$

nejsem si úplně jistá na bullet proof postup → možná budu trochu zmatkovat i párkrát

→ doplnění pomocí triviálních vektorů i např. $(0,0,0,1),(0,0,1,0)$

co to je

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

← nejsem si jistá že tento soubor je ekvivalentní ~~báze ag~~ „druhý" vektor $(2,1,1,1) \sim (0,5,1,-1)$ takže budu pokračovat ve svém snažení

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1-r_3]{3r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{5}\,1^{\cdot\frac{1}{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-r_4]{r_2-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

soubor: $((1,3,1,0),(2,1,1,1),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$ je báze $\mathbb{R}^4 = B$

souřadnice vektoru $v=(3,-1,1,2)$

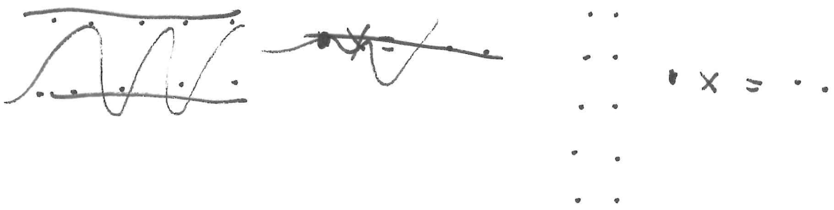
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1-r_3]{3r_1-r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \cancel{5}\,1^{\cdot\frac{1}{5}} & 0 & 0 & \cancel{10}\,2^{\cdot\frac{1}{5}} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-r_4]{r_2-r_3} \begin{array}{cccc} x & y & z & v \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to x=-1 \\ \to y=2 \\ \to z=0 \\ \to v=0 \end{array}$$

$1x+2\cdot 2+0+0=3$
$x=3-4$
$x=-1$

$$((v))_B=(-1,2,0,0)$$

⇒ Moje myšlenky/postup: doplnila jsem zadaný soubor vektorů pomocí triviálních vektorů z prostoru $\mathbb{R}^4$ a následně ověřila jestli je opravdu báze (LN + generuje). Následně jsem dosadila vektor v do báze B abych získala jeho souřadnice $((v))_B$

Příklad 5, matice $A \in \mathbb{Z}_3^{2,5}$ a vektor $b \in \mathbb{Z}_3^2$



v množině řešení má být vektor $(1,0,2,0,2)$; $(2,0,1,0,0)$ i A musí být LN

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = b$$

A can be theoretically: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r1+r2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

→ pokud soubor vektorů $((1,0,2,0,2),(2,0,1,1,0))$ je x pak A může být soubor vektorů $((1,2),(0,0),(2,1),(0,0),(2,0))$ dle:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r1+r2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ}$$

⇒ potom výpočet b:

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}}}}$$

1+1+1   1+1

nesedí rozměry

~ nejsem si tímto vůbec jistá jen to jenom tip