BIK-DML Domácí úkol

ZS 2022/2023

Za domácí úkol můžete získat **maximálně 19 bodů** (celkových 22 bodů je jako rezerva v případě chyb nebo pro možnost výběru úloh). Nemusíte řešit všechny úlohy či podúlohy. Vypracování odevzdávejte najednou osobně nebo do příslušného Assignment v MS Teams ve formátu **jednoho pdf**, a to nejpozději **17.12.2022**. Pište celé postupy a své kroky důsledně zdůvodňujte, aby bylo zřejmé, jak jste při řešení přemýšleli. Nedostatečně zdůvodněný i správný výsledek nemusí být hodnocen plným počtem bodů. V případě jakýchkoliv nejasností se mě neváhejte zeptat.

Příklad 1. *(4,5 bodu)*

a) Převeďte následující tvrzení z českého jazyka na formuli predikátové logiky. Poté vytvořte negaci v predikátové logice a tu převeďte zpět do českého jazyka (snažte se o přirozenou formulaci). Užijte k tomu unární predikát $p(x)$–*x je z Prahy*, a binární predikát $k(x, y)$–*x má kamaráda y*, pro proměnné z universa všech studentů FITu přičemž předpokládáme, že je tu jediný Adam.

„Každý kromě Adama má kamaráda z Prahy.“

(*Nápověda: Tvrzení lze přeformulovat jako „Každý, kto není Adam, má kamaráda z Prahy a Adam nemá kamaráda z Prahy.“ neboli „Pro každého platí, že pokud není Adam, potom má kamaráda z Prahy, a pokud je Adam, potom nemá kamaráda z Prahy.“ Pro zjednodušení si můžete pomocí zavedeného jazyka, tedy predikátů $p(x)$ a $k(x, y)$, nejdřív definovat další unární predikát $m(x)$–x má kamaráda z Prahy.*)

b) Pomocí DNT nebo KNT vyšetřete, zda je mezi níže uvedenými formulemi vztah logického důsledku nebo dokonce logické ekvivalence. V jednotlivých krocích odvození DNT/KNT uvádějte, jaká pravidla nebo známé logické ekvivalence požíváte. Pokud některý vztah neplatí, najděte pravdivostní ohodnocení prvotních formulí, které o tom svědčí.

$$(\neg A \vee B) \Leftrightarrow (\neg C \wedge D) \qquad \neg((A \wedge B) \Rightarrow (C \vee \neg D))$$

Příklad 2. *(4 body)* Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ takové, že $0 < b < a$. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}^+$ platí

$$a^n - b^n \leq na^{n-1}(a - b).$$

Příklad 3. *(4,5 bodu)* Na množině $X = \{a, b, c, d\}$ uvažujme binární relaci

$$R = \{(a, b), (b, b), (b, d), (c, a), (d, c)\}.$$

a) Zapište maticovou reprezentaci a diagram relace R. Rozhodněte, zda je R reflexivní, ireflexivní, tranzitivní, symetrická, antisymetrická, asymetrická. Vlastnost buď dokažte, nebo uveďte protipříklad.

b) Najděte nejmenší (z hlediska mohutnosti) relaci S na množině X takovou, aby relace $S \circ R$ byla ekvivalencí na množině X. Odvoďte faktorovou množinu $X/(S \circ R)$.

c) Najděte nejmenší (z hlediska mohutnosti) relaci T na množině X takovou, aby relace $R^2 \cup T$ byla symetrická.

Příklad 4. *(4,5 bodu)* Máme následující písmena:

$$A\ N\ A\ K\ O\ N\ D\ A$$

a) Kolik různých řetězců délky sedm je možné vytvořit z uvedených písmen?

b) Kolik různých řetězců začínajících nebo končících písmenem A je možné vytvořit, použijeme-li všechna uvedená písmena? Připomínáme, že “nebo” není vylučující spojka.

c) Kolik různých řetězců, ve kterých jsou všechny A za sebou, je možné vytvořit, použijeme-li všechna uvedená písmena?

Příklad 5. *(4,5 bodu)* Najděte množinu všech řešení následující soustavy kongruencí

$$362714^{723}x \equiv 987 \pmod 9$$
$$25 + 8x \equiv 7 \pmod{30}.$$

November 16, 2022