ZS 2022/2023	BIK-LA1 : ZKOUŠKA					28. 1. 2023
Jungmann Jungman1	P 1	P 2	P 3	P 4	P 5	Σ
Jungmannová Anna	10	10	8	8	X	36

Příklad 1. (12 bodů) Uvažujme matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}.$$

Zjistěte, zda je tato matice diagonalizovatelná. Pokud ano, nalezněte $\mathbf{D}, \mathbf{P} \in \mathbb{C}^{3,3}$, $\mathbf{D}$ diagonální a $\mathbf{P}$ regulární, takové, že $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$.

snad?? Toto dále využijte a odvoďte explicitní vzorec pro $k$tou mocninu zadané matice, tj. $\mathbf{A}^k$, závisející pouze na $k \in \mathbb{N}$.

Příklad 2. (10 bodů) S využitím Frobeniovy věty popište množinu řešení následující soustavy nad tělesem $\mathbb{Z}_5$, jejíž rozšířená matice je

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Řešení zapište ve tvaru variety.

Příklad 3.

5 1. (5 bodů) Definujte pojmy hodnost matice a lineární varieta.

3 2. (4 body) Napište kompletní znění Frobeniovy věty o řešitelnosti a množině řešení soustav lin. rovnic.

0 3. (7 bodů) Dokažte, že pro každý podprostor existuje soustava lineárních rovnic taková, že daný podprostor je jejím řešením.

0 4. (5 body) Napište, jak vypadají variety dimenze 1 v $\mathbb{Z}_5^3$. Zjistěte, kolik takových variet existuje.

Příklad 4.

4 1. (4 body) Napište definici vlastního čísla a spektra matice.

4 2. (5 body) Napište definici charakteristického polynomu a definici algebraické a geometrické násobnosti vlastního čísla.

3. (8 bodů) Dokažte, že vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům stejné matice z $\mathbb{C}^{n,n}$ tvoří lineárně nezávislý soubor.

***

1. diagonalizovatelná? pokud ano P a D dle $A = PDP^{-1}$

Jungmannová Anna

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(-1)^{3+3}\cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(2-\lambda) = (2-\lambda)^2\cdot(3-\lambda)$$

$\Rightarrow \sigma(A) = \{2, 3\}$

① vlastní číslo 2

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 2 & 1 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to S_0 = \langle (1, 0, -1), (0, 1, -2) \rangle$$

$\nu_a(2) = 2$

$\nu_g(2) = 2$

$x_1 = (1, 0, -1)$

$x_2 = (0, 1, -2)$

② vlastní číslo 3:

$$\begin{pmatrix} 3-3 & 2 & 1 \\ 0 & 2-3 & 0 \\ 0 & 0 & 2-3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to S_0 = \langle (1, 0, 0) \rangle$$

after

$\nu_a(3) = 1$

$\nu_g(3) = 1$

$x_3 = (1, 0, 0)$ ✓

diagonalizovatelná? ANO ✓

$\Rightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow$

$AP = PD \longrightarrow$ D ~ na diagonále vlastní čísla ✓

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow LN$$

složeno z LN vlastních vektorů (věta 4.3)

Explicitní vzorec pro k-tou mocninu A^k závislý na $k \in \mathbb{N}$

nejsem si jistá že chápu co mám udělat

~~ale v A^k nemám moc žádné "struktury" takže možná bude~~ haha, nulová hypotéza vyvrácena ~~kalkulovat nepředvídatelných čísel~~

~~zachovaná z velikosti (pochopitelně) ale nevím jestli se soubor vektorů dá odhadnout...~~

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 28 & 19 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = A^3$$

$a_{1,2}{}^k + 1$ $\quad \frac{a_{1,3}{}^k + 1}{2}$ $\quad x^k$

$$A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 3^k+1 & \frac{3^k+1}{2} \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} = PD^kP^{-1}$$

← diagonála je jasná, zbytek nevím proč ale vychází

2. pomocí Frobeniovy věty množina řešení $\mathbb{Z}_5$!

①

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc|c} a & b & c & d & e & f & g & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$g: 2 \cdot 3 = 6 = 1$

$\tilde{x} = (2, 2, 1, 2, 3, 0, 3)$

$4x + 2y + 3 = 2 \quad +2$

$4x + 2y = 4$

$1x + 2y + 3 = 2 \quad /+2$

$x + 2y = 4$

$3x + 2 + 2 + 3 + 3 = 1$

$3x = 1$

②

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow S_0 = \langle (1,1,0,0,1,0,0), (0,2,1,0,0,0,1), (0,0,0,2,1,0,1), (0,0,0,0,0,1,0) \rangle$$

$S = (2,2,1,2,3,0,3) + \langle (1,1,0,0,1,0,0), (0,2,1,0,0,0,1), (0,0,0,2,1,0,1), (0,0,0,0,0,1,0) \rangle$ ✓

3.1. Jungmannová Anna

- hodnost matice:

$A \in T^{m \times n}$, hodnost matice je dimenze ~~[illegible]~~ lineárního obalu souboru řádků matice, značíme $h(A)$

$h(A) = \dim \langle (A_{1:})^T, (A_{2:})^T, \dots (A_{m:})^T \rangle$ ✓

- lineární varieta

množina $W \subseteq T^n$ je lineární varietou právě když existují $a \in T^n$ a $P \subset\subset T^n$ splňující vztah

$W = a + P$

P = zaměření variety W, značíme $Z(W)$

$\dim Z(W)$ = dimenze variety W

→ každý nenulový vektor ze $Z(W)$ je směrový vektor variety W

→ každý vektor a takový že $W = a + Z(W)$ je vektor posunutí variety W.

3.2. Frobeniova věta

- $A \in T^{m \times n}$, $b \in T^{m}$

soustava ~~množina~~ m lineárních rovnic o n neznámých $Ax=b$ je splnitelná $(S \neq \emptyset)$ právě když

① $h(A) = h(A|b)$ potom $S = \tilde{x} + S_0$

↳ partikulární řešení

② ~~soustava~~ množina řešení homogenní soustavy $Ax=\theta$ je podprostor $V_n - h(A)$ dimenze ?

→ $h(A) = n$ pak $S_0 = \{0\}$ ← množina obsahující nulový vektor

→ $h(A) < n$ pak existuje LN soubor $(z_1, \dots, z_{n-h(A)})$ takový který je řešením S_0

(takže pak $S_0 = \langle (z_1, \dots, z_{n-h(A)}) \rangle$)

3.3.

pro každý podprostor existuje soustava lineárních rovnic taková že daný podprostor je jejím řešením

uvažujme soubor vektorů $\{x_1, \dots, x_n\} \subset\subset \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ ← meaning: $x_1 \to x_n \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle$

$X \in T^{m \times n}$, $A \in T^{m \times n}$

$\langle x_1, \dots, x_n \rangle \subseteq \langle a_1, \dots, a_n \rangle$

$h(X) \leq h(A)$

nejsem si jistá kam dál pokračovat takže radši nebudu zbytečně psát, ale asi bych utilizovala Frobeniovu větu č. 2.

1. ~~[illegible]~~ varieta dimenze 1 v $\mathbb{Z}_5^3$, kolik jich existuje

$W = (1,0,0) + \langle (3,4,0) \rangle$

může jich existovat $5^3 = 125 \cdot$ ~~[illegible]~~ -1 ⇒ může jich existovat 124 $(5^3 - 1)$

úvaha: mám 3 místa kde může být cokoli z $\mathbb{Z}_5$ kromě $(0,0,0)$

proč?

1.1.

vlastní číslo (nei vlastní vektor I guess)

$\lambda \in \mathbb{C}^n$ je vlastní číslo matice $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ právě když existuje nenulový vektor $x \in \mathbb{C}^n$ takový že $Ax = \lambda x$

- spektrum matice ($\sigma(A)$) je množina všech vlastních čísel matice A.
značíme

1.2.

charakteristický polynom matice A (značíme p_A) je zobrazení definované vztahem:

$p_A(z) := \det(A - zE)$; $z \in \mathbb{C}$

algebraická a geometrická násobnost:

$\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo matice $A \in \mathbb{C}^{n,n}$

→ algebraická násobnost matice A je ($\nu_a(\lambda)$) je (kolikanásobný je jeho příslušný kořen charakteristického polynomu) násobnost jako kořen charakteristického polynomu

→ geometrická násobnost matice A ($\nu_g(\lambda)$) je hodnost vlastního podprostoru definovaného vlastním číslem λ_i tj. dimenze všech řešení homogenní rovnice $(A - \lambda E) \cdot x = \theta$

viz příklad

1.3.

vlastní vektory příslušné ~~různým~~ vlastním číslům stejné matice z $\mathbb{C}^{n,n}$ tvoří LN soubor.

~~různé vlastní vektory které mají splňovat $Ax = \lambda x$~~
~~čísla a tudíž různé~~

P :)

- důkaz na příkladu se nedá udělat protože by to bylo nevalidní, takže se velmi nematematicky pokusím vysvětlit proč se co děje když se dostaváme k vlastním vektorům a podobné matici splňující $A = PDP^{-1}$

pro vlastní čísla existují jejich příslušné nenulové vlastní vektory pomocí vztahu $Ax = \lambda x$ ($x \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}^n$, $A \in \mathbb{C}^{n,n}$)

dále že vlastní vektor určuji jako řešení homogenní rovnice $(A - \lambda E) \cdot x = \theta$, kde vlastní vektor (nenulový) s pomocí odečtení příslušného vlastního čísla na diagonále pomůže získat S_0 řešení což jsou vlastní vektory. Když odečítáme na diagonále různé vlastní čísla dostaneme různé řešení vlastních vektorů. Z takovýchto lineárně nezávislých vektorů pak vzniká podobná matice $P \in \mathbb{C}^{n,n}$ takovou že $A = PDP^{-1}$

ne vždy P.

~ vím že jsem nevysvětlil proč jsou LN.

má to něco spojeno s definicí LN souboru

soubor vektorů je lineárně nezávislý právě když řešením homogenní soustavy jsou triviální vektory

takto to zcela jisté není ...