BIK-TZP.21 – Technologické základy počítačů

ZS 2021/22
1. sobota

doc. Ing. Kateřina Hyniová,CSc.
hyniova@fit.cvut.cz
Katedra číslicového návrhu, FIT ČVUT v Praze

Přednáška 1C

Metoda uzlových napětí (MUN)

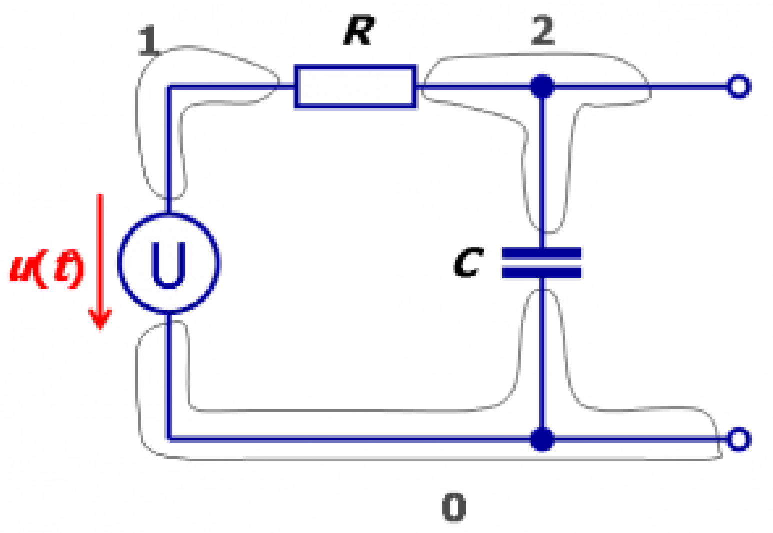
1. Úvod
2. Co musíme znát k analýze obvodu MUN
3. Metoda uzlových napětí
4. Příklady

1. Metoda uzlových napětí Úvod

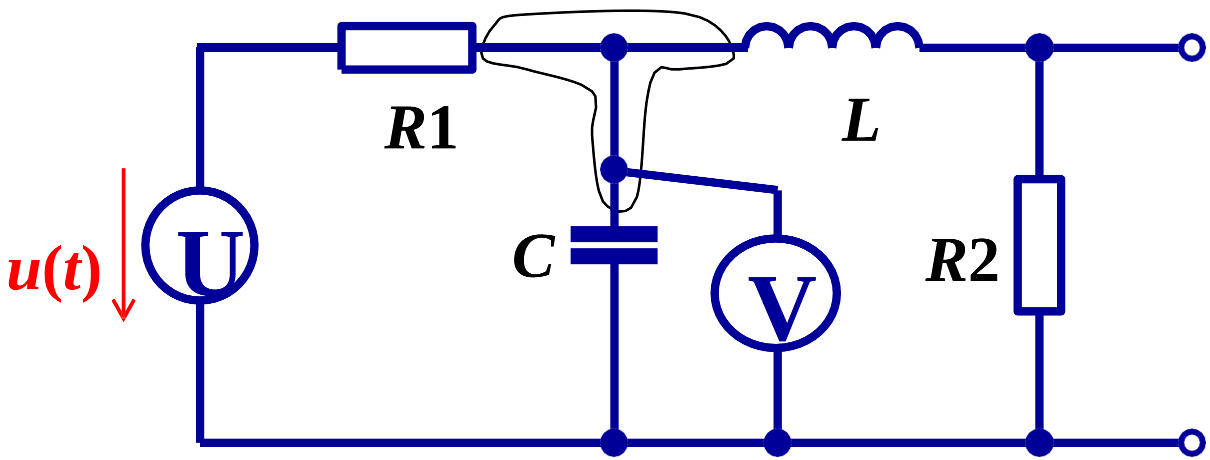
- **MUN je jednou z metod analýzy obvodu. Umožňuje sestavit množinu algebraických a diferenciálních rovnic, jejich řešením můžeme zjistit všechny el. veličiny (napětí a proudy) v obvodu.**
- **MUN umožňuje určit všechny proudy tekoucí obvodem a všechna uzlová napětí z nich snadno určíme napětí na jednotlivých prvcích obvodu.**
- **V MUN jsou za elektrické prvky chápány nejen R, L a C, ale i napěťové a proudové zdroje**
- **Při analýze obvodu metodou uzlových napětí budeme uvažovat pouze ideální el. prvky a ideální vodiče.**

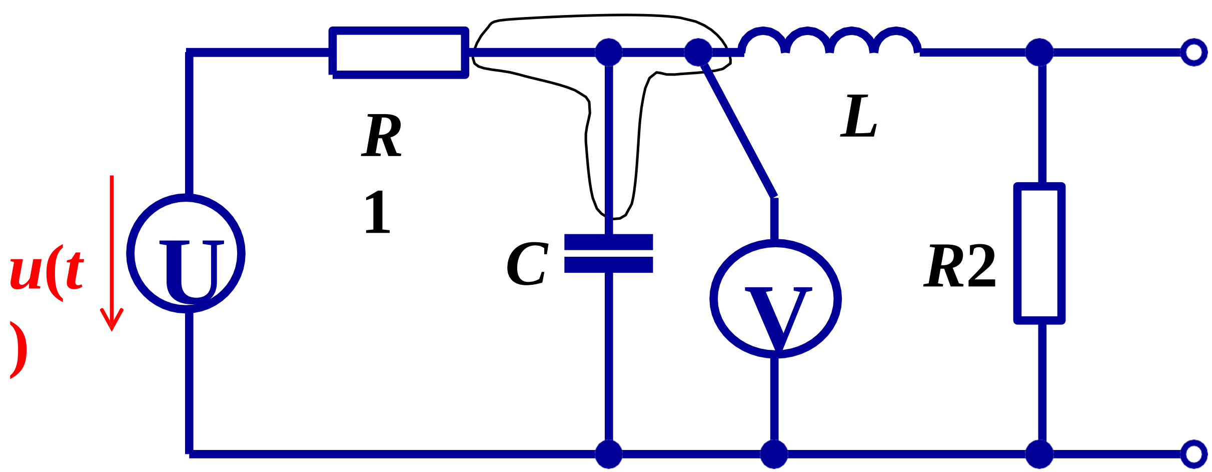
Uzel obvodu

- Uzel je místem (bodem) zapojení, v němž se spojují vývody alespoň 2 prvků
- Uzel zahrnuje: - samotný spoj
  - vodiče mezi vývody el. prvků
- Všechna místa uzlu mají stejný el. potenciál. Tato místa ohraničujeme smyčkou.



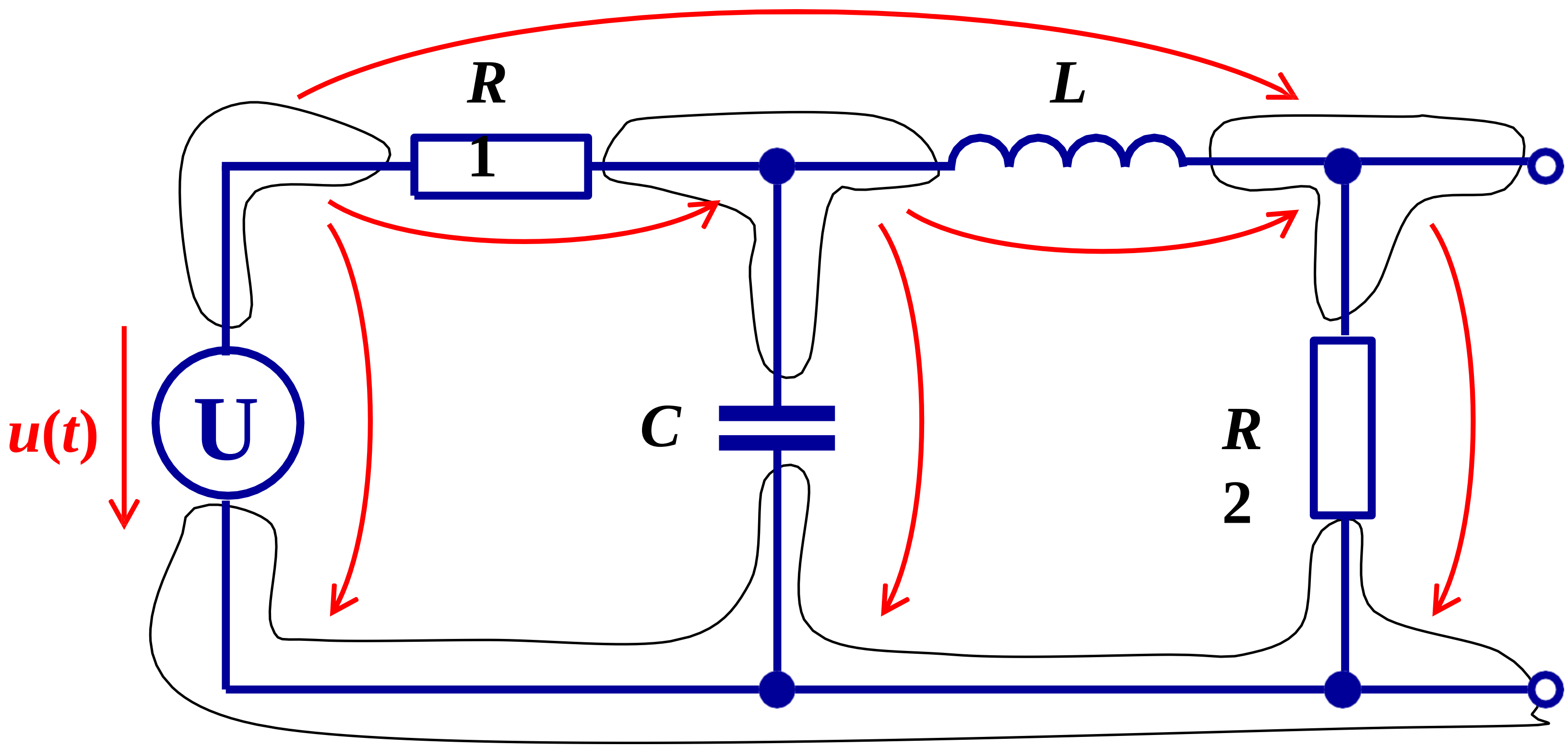
- **Všechna místa uzlu mají stejný el. potenciál (tj. i stejné napětí vůči jinému uzlu).**





Kolik různých napětí je mezi N uzly?

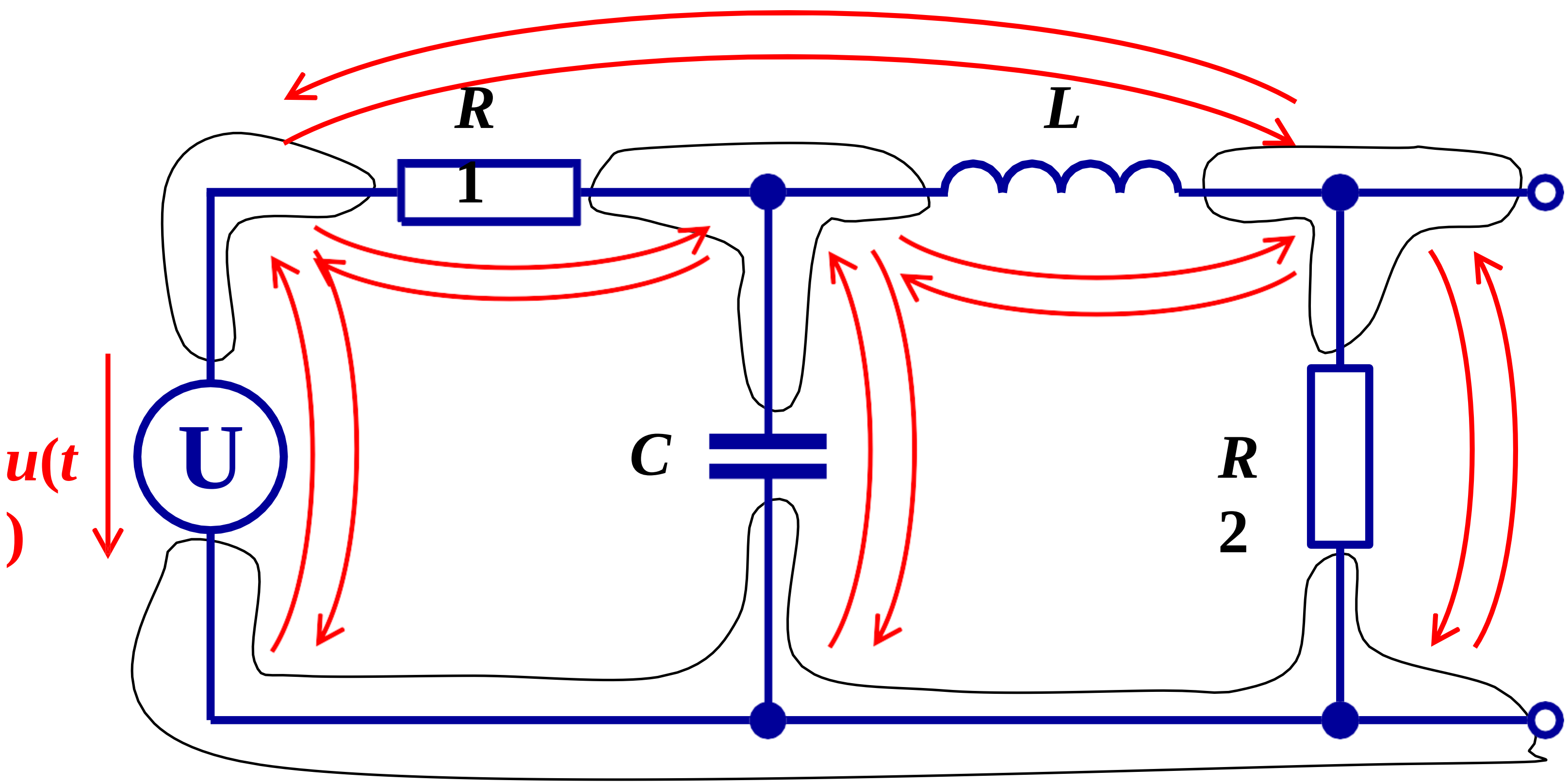
- Mezi N uzly je $\frac{N \cdot (N-1)}{2}$ různých napětí



Kolik různých napětí je mezi N uzly?

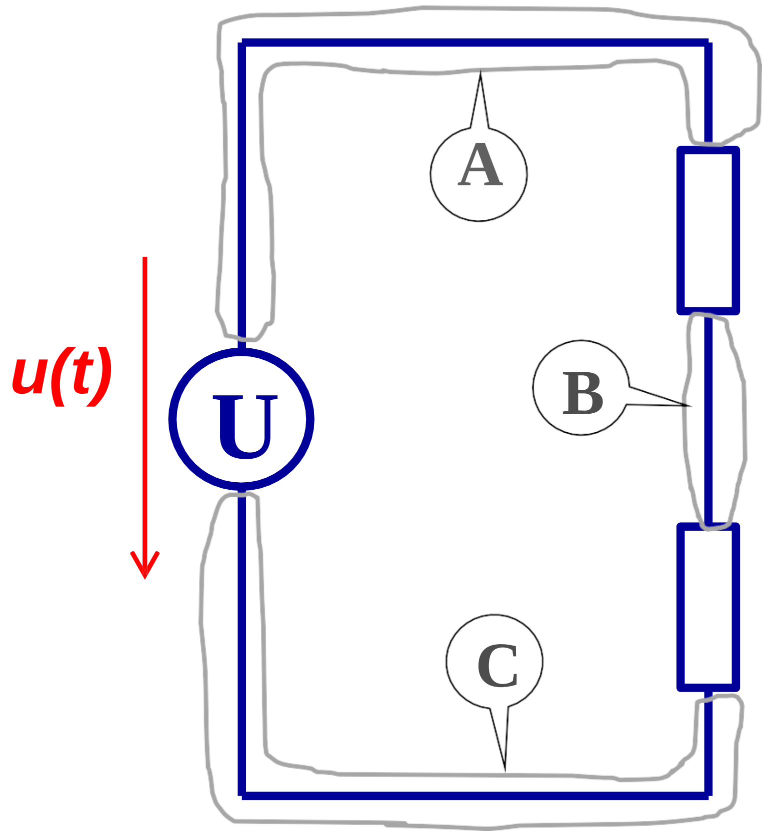
- Mezi N uzly je $\frac{N \cdot (N-1)}{2}$ různých napětí

- Měříme-li obě orientace napětí, je mezi N uzly $N \cdot (N-1)$ různých napětí



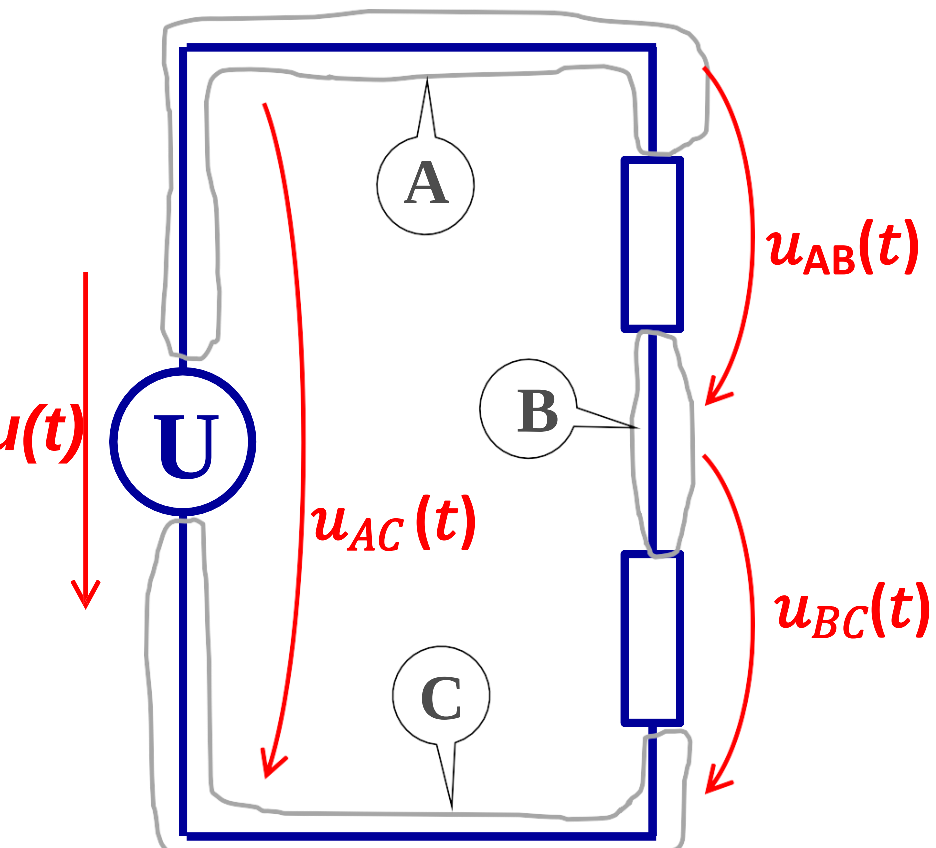
Kolik různých napětí je mezi N uzly?

- Mezi N uzly je $\frac{N\cdot(N-1)}{2}$ různých napětí
- Stačí změřit pouze N **- 1** napětí, zbytek můžeme dopočítat.



Kolik různých napětí je mezi N uzly?

Stačí změřit pouze ***N* - 1** napětí, protože můžeme dopočítat zbytek.



Podle Kirchhoffova napěťového zákona(KNZ):

$$u_{AB}(t)+u_{BC}(t)=u_{AC}(t)$$

- ***3 uzly v uzavřené smyčce***
- ***2 napětí změříme***
- ***1 napětí dopočítáme pomocí KNZ.***

Metoda uzlových napětí

je jednou z metod analýzy obvodů. Jejím cílem je určit obvodové veličiny (tj. napětí a proudy) v obvodu.

Co potřebujeme k analýze obvodu znát?

1. Schéma obvodu
2. Parametry obvodu:
   - vstupní veličiny (napětí a/nebo proudy zdrojů a jejich orientace)
   - parametry prvků (R,L,C, $u_i(t)$, i=1,…n - napětí všech napěťových zdrojů , $i_i(t)$, i=1,…,m - proudy všech proudových zdrojů)
3. Ohmův zákon, Kirchhoffovy zákony
4. Rovnice pro popis chování el. prvků R,L a C

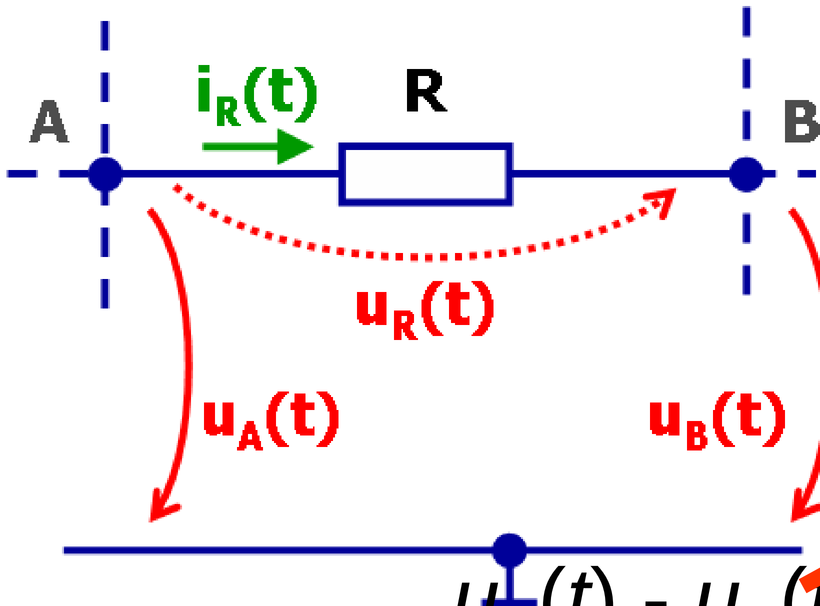
Rovnice popisující chování el. prvků R, L a C

Vyjadřují vztah napětí u(t) a proudu i(t) na prvku:

- ***Rezistor*** $$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$
- ***Induktor*** $$u_L(t) = L \cdot i_L'(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$
- ***Kapacitor*** $$i_C(t) := C \cdot u_C'(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$$

V rovnicích pro el. prvky ale budeme všechna napětí VŽDY zapisovat formou tzv. uzlových napětí *(slidy 12-16).*

Rezistor – rovnice prvku



Napětí na rezistoru budeme vždy vyjadřovat pomocí uzlových napětí

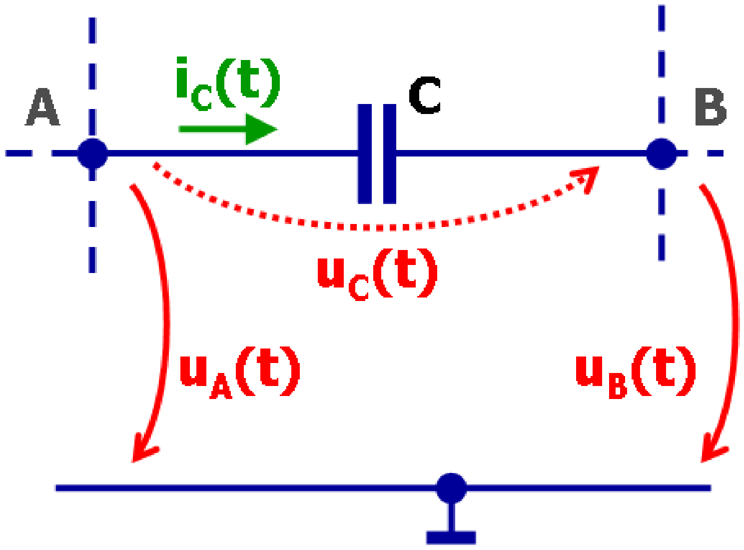
$u_A(t)$ - $u_B(t)$ =R*i_R(t)

Nikoli $u_R(t)$ =R*i_R(t)

tj. Ohmův zákon

Orientace toku proudu se shoduje s orientací napětí (protože rezistor je spotřebič- pasivní prvek).

Kapacitor – rovnice prvku

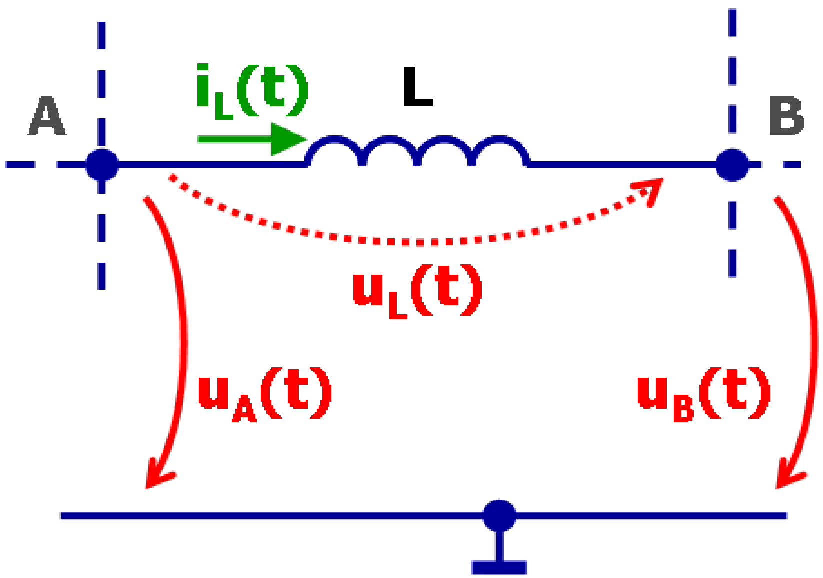


Napětí na kapacitoru budeme vždy vyjadřovat pomocí uzlových napětí

$$i_C(t) = C \cdot \frac{\mathrm{d}\left(u_A(t) - u_B(t)\right)}{\mathrm{d}t}$$

Orientace toku proudu se shoduje s orientací napětí (protože kapacitor je spotřebič- pasivní prvek).

Induktor – rovnice prvku



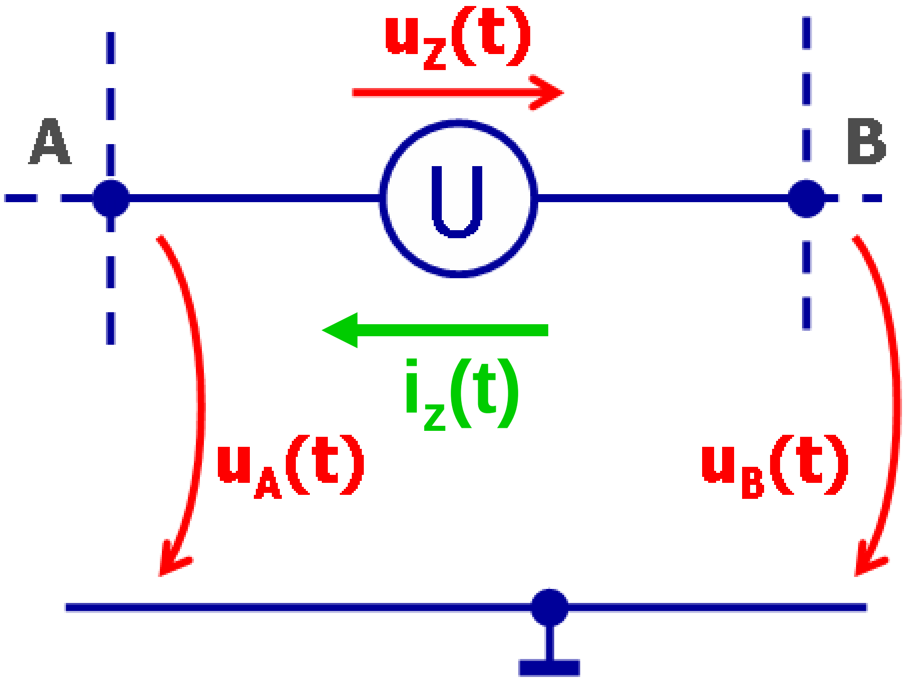
Napětí na induktoru budeme vždy vyjadřovat pomocí uzlových napětí

$$u_A(t) - u_B(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$

Orientace toku proudu se shoduje s orientací napětí (protože induktor je spotřebič- pasivní prvek).

Zdroj napětí – rovnice prvku

Pozn.: Zdroje napětí a zdroje proudu považujeme za elektronické prvky.

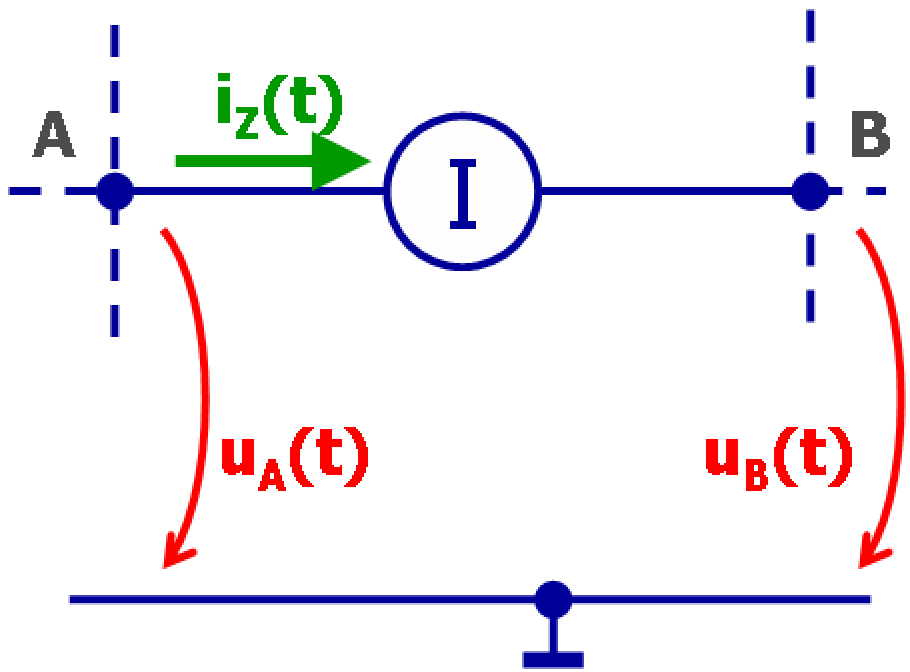


Napětí zdroje napětí budeme vždy vyjadřovat pomocí uzlových napětí

$$u_A(t) - u_B(t) \;=\; u_Z(t)$$

Orientace toku proudu je u zdroje napětí opačná než je orientace napětí (zdroj napětí je aktivní prvek).

Zdroj proudu



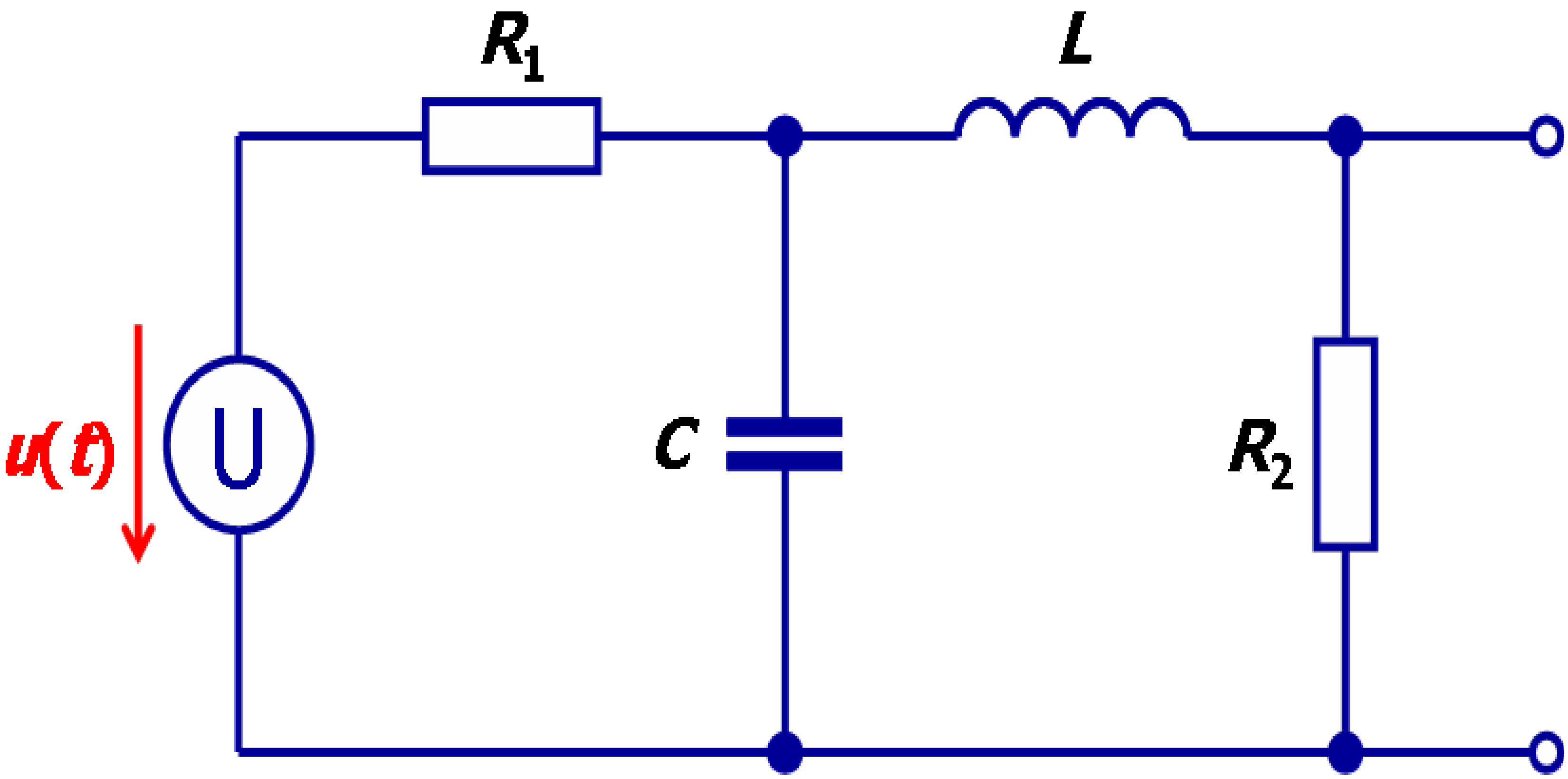
U zdrojů proudu není mezi velikostí generovaného proudu a uzlovými napětími souvislost, proto zdroj proudu nepopisujeme žádnou obvodovou rovnicí.

Počáteční podmínky

- Chování kapacitorů a induktorů je popsáno diferenciálními rovnicemi.
- Pro jejich řešení je nezbytné znát tzv.počáteční podmínky, tedy napětí na kapacitoru v čase t=0 resp. proud tekoucí induktorem v čase t=0. Bez počátečních podmínek by byla analýza obvodu neřešitelná.
- Pro jednoduchost budeme většinou definovat nulové počáteční podmínky, tedy:
- $\mathbf{u_c(t=0)=u_c(0)= 0\ V}$ resp. $\mathbf{i_L(t=0)=i_L(0)= 0\ A}$
- I zde musí být u_c vyjádřeno formou uzlových napětí, tedy počáteční podmínku zapíšeme jako:
- $\mathbf{u_A(0)-u_B(0)=0V}$
- Počáteční podmínku definujeme vždy pro tu veličinu, která je v rovnici derivována. Tedy u kapacitoru napětí $u_A(0) - u_B(0)$ a u induktoru proud $i_L(0)$.

Metoda uzlových napětí postup

Příklad #1 **u(t), R_1,R_2,L a C jsou dány.**



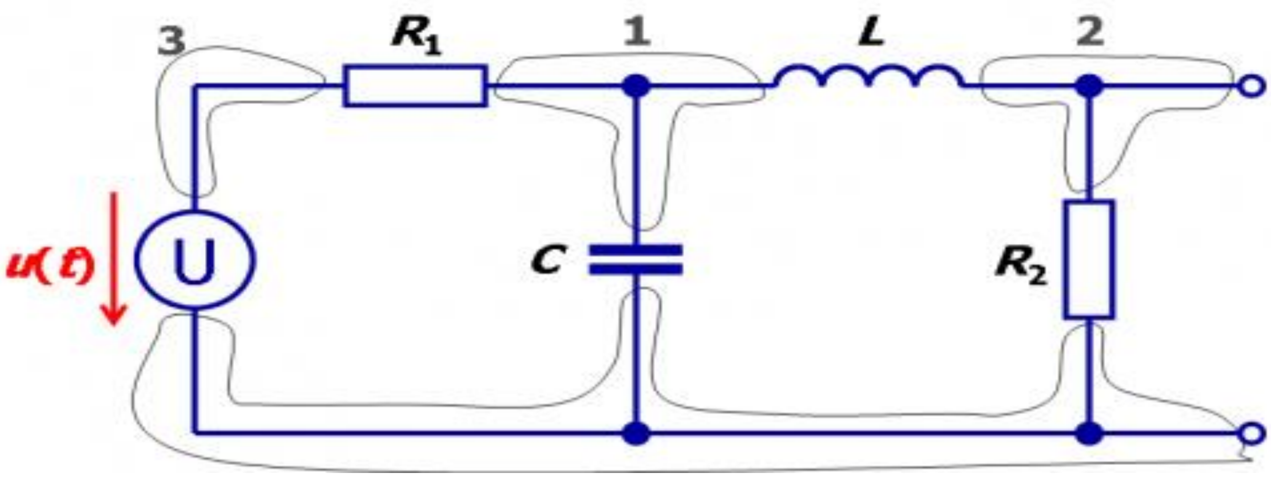
Krok 1 :

►Zvolíme referenční uzel (označíme ho jako 0).
Zpravidla jím je uzel připojený na zem napěťového zdroje popř. uzel, v němž se stýká co nejvíce větví obvodu. Jeho potenciál položíme definitoricky roven nule.

► Očíslujeme libovolně zbývající uzly. I mezi dvěma prvky zapojenými v sérii je uzel, i když ho na první pohled nevidíme (uzel 3 na obrázku).

►Uzly zakroužkujeme smyčkou uvnitř které mají všechny body obvodu stejný el. potenciál)

Pamatujte si , že každý el. prvek MUSÍ ležet mezi dvěma uzly!! Zkontrolujte každý prvek, abyste na žádný uzel nezapomněli.

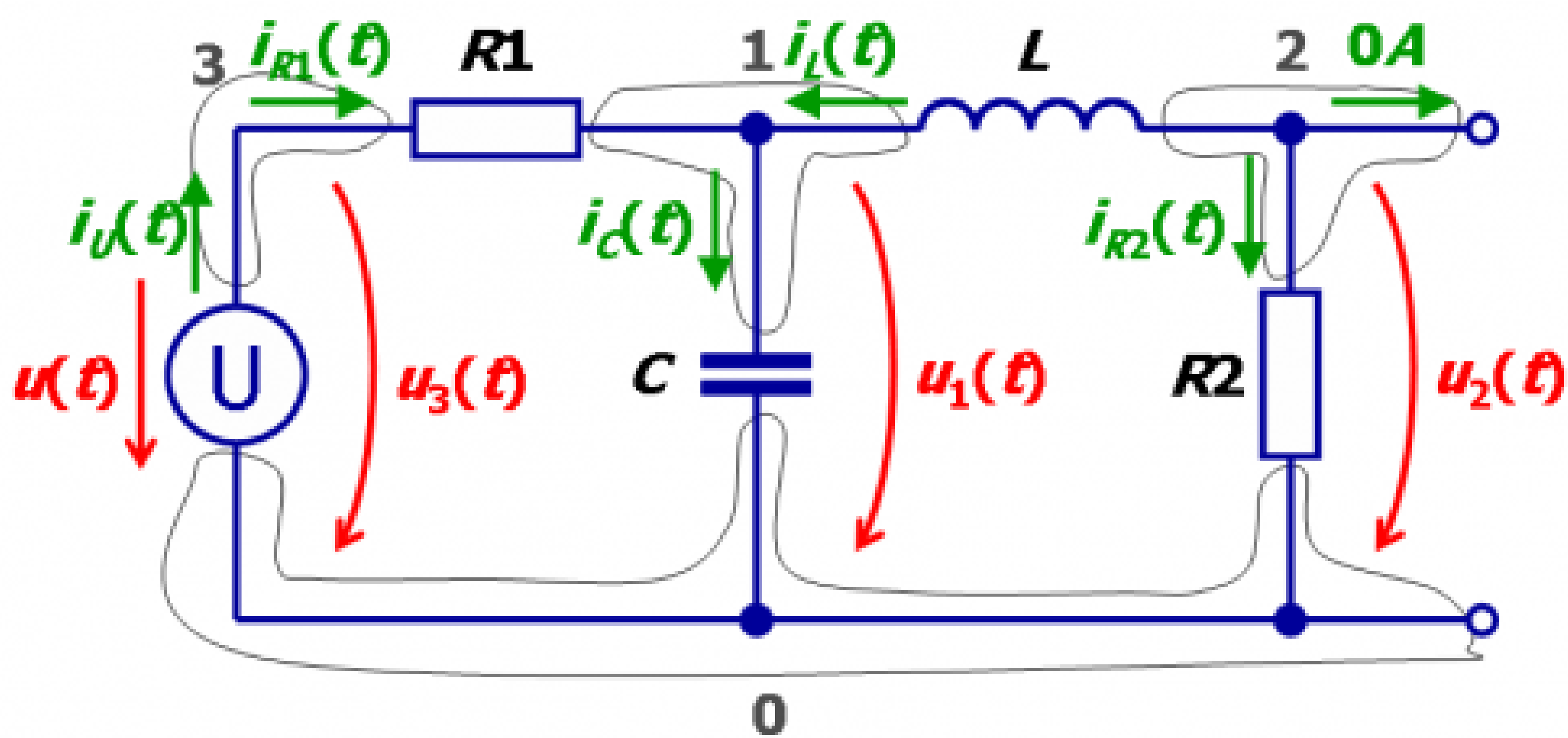


0 (referenční uzel)

Krok 2:

► a) Označíme elektrická napětí všech jednotlivých uzlů vůči referenčnímu uzlu 0 a jejich orientaci od vyššího potenciálu k nižšímu. Referenční uzel má nejnižší(nulový) potenciál.

► **b)** Označíme elektrické proudy tekoucí jednotlivými prvky a jejich orientaci.



… ještě ke kroku 2…

a) U napěťových zdrojů (je to přeci aktivní prvek v obvodu) je orientace proudu opačná, než je orientace napětí, kterou máme vždy zadanou.

b) U proudových zdrojů je orientace proudu známá (zadaná), tam není co řešit

c) U pasivních prvků (R,L a C) teče proud od vyššího potenciálu k nižšímu (čili orientace napětí a proudů je stejná).

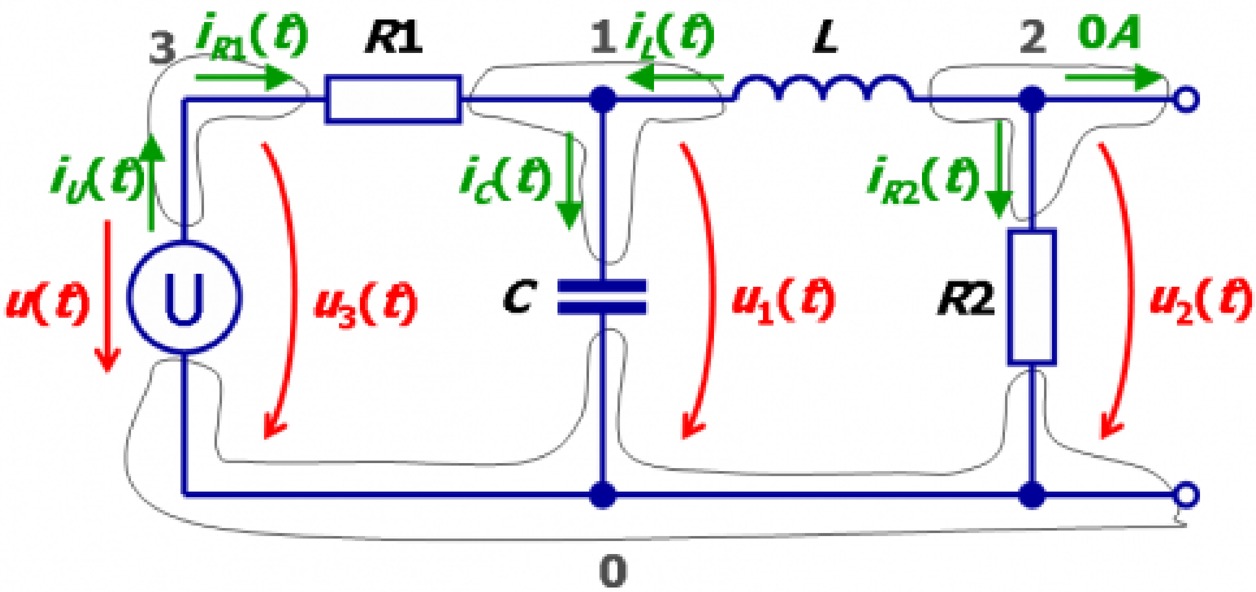
…a ještě ke kroku 2…

U některých prvků (v našem příkladu u induktoru L) neumíme s jistotou říct, který potenciál je vyšší (zda uzlu 1 nebo uzlu 2). Tam pak orientaci proudu zvolíme libovolně. Když pak necháme (třeba Mathematicou) číselně velikost všech proudů a uzlových napětí vypočítat, vyjde nám velikost proudů buď kladná nebo záporná. Je-li kladná, je to v pořádku, proud teče skutečně tím směrem, který jsme si ve schématu zvolili a označili. Záporná velikost proudu nás upozorňuje na to, že zvolená orientace proudu byla špatná a proud teče ve skutečnosti obráceným směrem. Směr šipky proto musíme v takovém případě ve schématu obrátit a velikost proudu pak má kladné znaménko.

… a poslední poznámka ke kroku 2…

- Na výstup obvodu není připojena žádná zátěž, a tedy zde není žádná uzavřená smyčka , kterou by mohl proud protékat. El. Proud nemůže téci „do nikam“ nebo na konec vodiče a tam se „zastavit“. Z tohoto důvodu je proud na výstupu roven 0A, což jsme ve schématu (slide 20) označili. Je to užitečné zejména kvůli sestavování proudové rovnice pro uzel 2 podle Kirchoffova proudového zákona.

Krok 3: ► **Podle Kirchhoffova proudového zákona sestavíme proudové rovnice pro jednotlivé uzly obvodu. Pro referenční uzel 0 žádnou rovnici nesestavujeme. Byla by redundantní!!!**



Uzel 1 : $$i_{R1}(t)+i_L(t)=i_C(t)$$

Uzel 2 : $$0=i_L(t)+0+i_{R2}(t)$$

Uzel 3 : $$i_U(t)=i_{R1}(t)$$

Počet rovnic musí být shodný s počtem nenulových uzlů. Toto zkontrolujeme, abychom na nic nezapomněli.

Krok 4:

► Sestavíme rovnice el. prvků (vyjadřující vztah mezi napětím na prvku a proudem prvkem protékajícím) pro všechny prvky v obvodu (krom zdrojů proudu) podle již známých rovnic:

Pro rezistor: $$u_A(t) - u_B(t) = R i_R(t)$$

Pro kapacitor: $$i_C(t) = C \frac{d(u_A(t) - u_B(t))}{dt}$$

Pro induktor: $$u_A(t) - u_B(t) = L \frac{d i_L(t)}{dt}$$

Pro zdroj napětí: $$u_Z(t) = u_A(t) - u_B(t)$$

Napětí na prvcích vyjadřujeme výlučně pomocí uzlových napětí !!!!!

Čili v rovnicích prvků se nevyskytují žádná napětí u_{R1}=...., u_{R2}=.... u_L=......, u_C=....., ale napětí na prvcích jsou vyjádřena pomocí rozdílu uzlových napětí uzlů $u_A(t) - u_B(t)$ =... resp. $u_B(t) - u_A(t)$ =... mezi kterými je daný prvek zapojen.

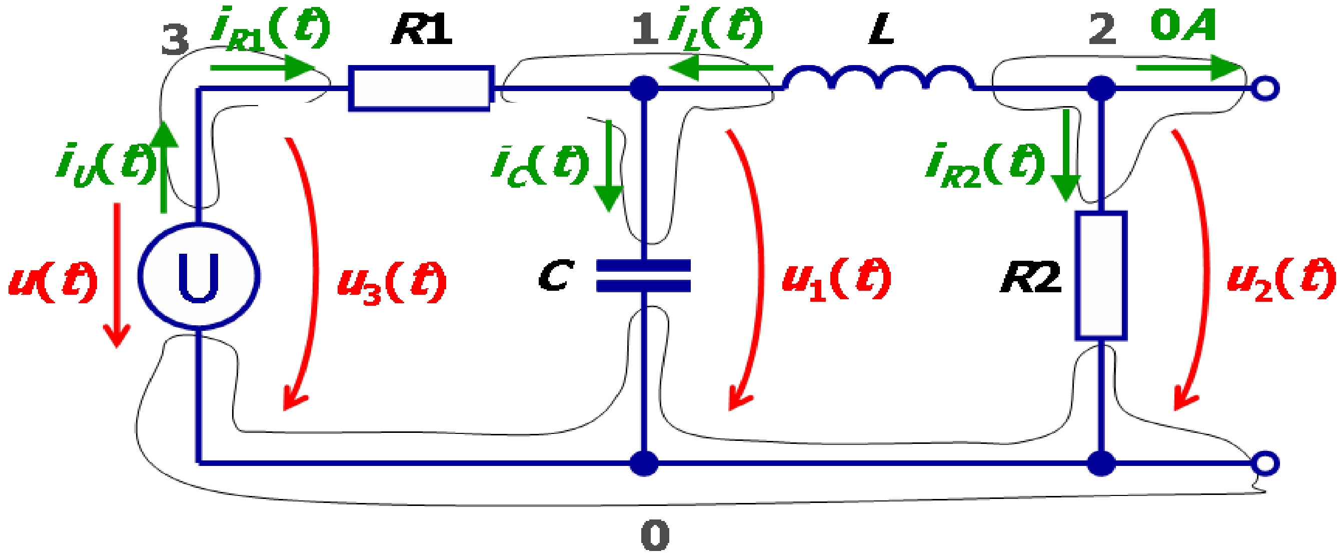
- Teče-li proud, jehož orientaci jsme vyznačili ve schematu, z uzlu A do uzlu B, je el. potenciál $u_A(t)$ nutně vyšší než el. potenciál $u_B(t)$ uzlu B a napětí na prvku vyjádříme jako:

$$u_A(t) - u_B(t) = \ldots$$

- Teče-li proud, jehož orientaci jsme vyznačili ve schematu, z uzlu B do uzlu A, je el. potenciál $u_B(t)$ uzlu B nutně vyšší než el. potenciál $u_A(t)$ uzlu A a napětí na součástce vyjádříme jako:

$$u_B(t) - u_A(t) = \ldots$$

Krok #4
v příkladu 1



Všechna napětí na součástkách budeme vyjadřovat pomocí uzlových napětí uzlů, mezi kterými je součástka zapojena, tedy:

L: $$u_2(t) - u_1(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

C: $$i_C(t) = C.\frac{du_1(t)}{dt}$$

R1: $$u_3(t) - u_1(t) = R_1 i_{R1}(t)$$

R2: $$u_2(t) = R_2 i_{R2}(t)$$

U: $$u(t) = u_3(t)$$

Důležitá poznámka ke kroku 4

- Metoda uzlových napětí se jmenuje podle toho, že napětí na všech prvcích vyjadřujeme pomocí rozdílu napětí na uzlech mezi kterými je ten který prvek zapojen. Jak ale poznáme, které napětí od kterého odečítat? Podívejme se třeba na rezistor $R_{1.}$ Ten je zapojen mezi uzly 3 a 1 s uzlovými napětími $u_3(t)$ resp. $u_1(t)$. Bude správně rovnice, popisující chování rezistoru R_1:

  ► $u_3(t)-u_1(t) = R_{1.}\, i_{R1}(t)$

  nebo

  ► $u_1(t)-u_3(t) = R_{1.}\, i_{R1}(t)$

  ?

Rezistor je pasivní el. prvek, orientace proudu je proto shodná s orientací napětí na něm. Proud teče od vyššího potenciálu k nižšímu a tedy je správně 1. rovnice. Takto postupujeme u každého el. prvku.

Důležitá poznámka ke kroku 4 - pokračování

- U zdroje napětí je orientace dána zadáním a shoduje se v našem příkladu s uzlovým napětím $u_3(t)$. Proto:

$$u_3(t)=u(t)$$

- Je-li ve schématu zapojen zdroj proudu, žádnou rovnici pro něj nepíšeme.

Krok 5: Stanovíme počáteční podmínky pro všechny diferenciální rovnice z kroku 4 (pro neznámé, vyskytující se v rovnicích v derivaci) . Počáteční podmínky volíme obvykle, ale ne nutně, nulové.

$$\boxed{i_C(t) = C\frac{du_1(t)}{dt}} \longrightarrow u_1(0)=0V$$

$$\boxed{u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}} \longrightarrow i_L(0)=0A$$

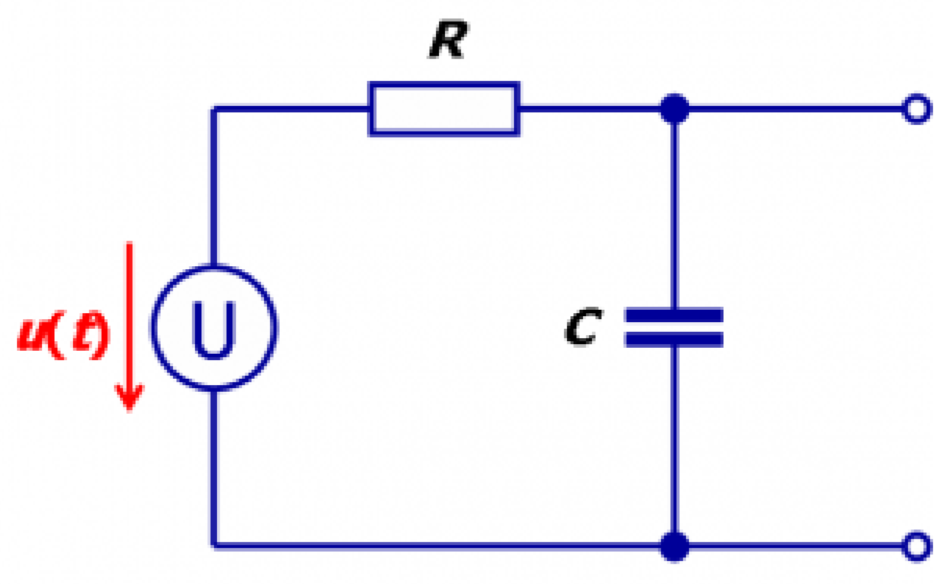
Znamená to, že na počátku experimentu v čase t=0 byly všechny kapacitory vybity a induktory neprotékal žádný proud, což většinou odpovídá realitě.

Jednoduchý test řešitelnosti

- Počet rovnic (tj. Kirchhoffových proudových rovnic pro uzly + rovnic pro el.prvky) musí být roven počtu neznámých veličin v obvodu.
- Počet počátečních podmínek musí být roven počtu diferenciálních rovnic (tj.počtu kapacitorů+induktorů) v obvodu

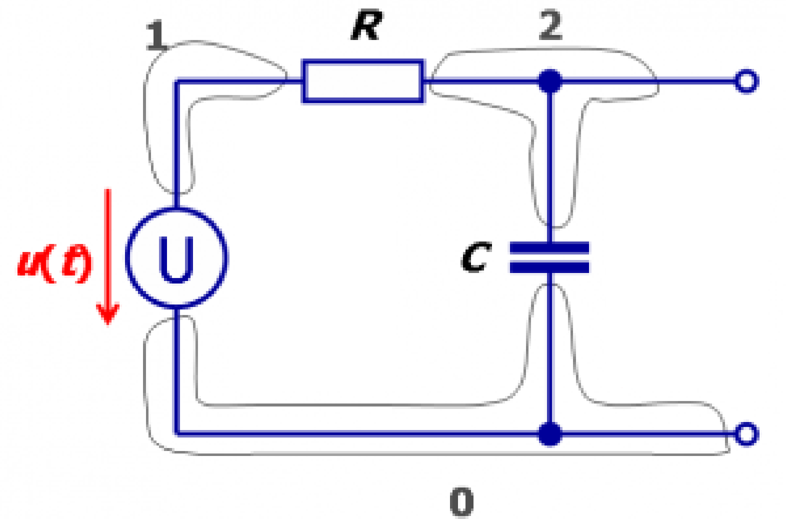
V příkladu #1 máme celkem 8 rovnic (3 proudové rovnice pro uzly a 5 rovnic pro el. prvky) a 8 neznámých proměnných ($u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$, $i_U(t)$, $i_{R1}(t)$, $i_{R2}(t)$, $i_C(t)$, $i_L(t)$) . Pro dvě veličiny v derivaci $u_2'(t)$, $i_L'(t)$) máme 2 počáteční podmínky. Úloha je tedy řešitelná, na nic jsme nezapomněli ☺. Řešení za nás udělá Mathematica.

Příklad #2



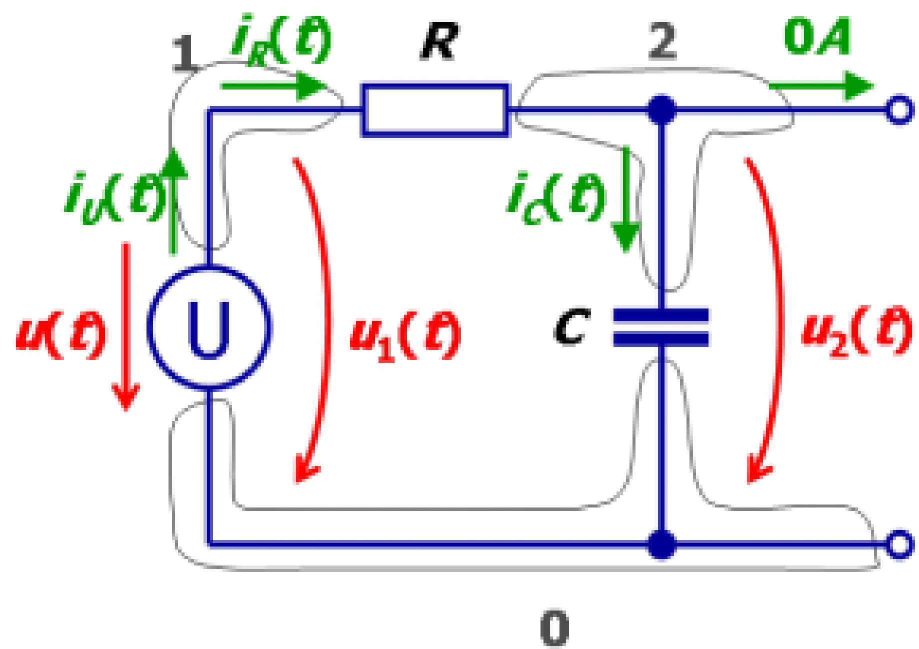
Na tomto příkladu si ukážeme způsob kontroly jednotlivých kroků metody uzlových napětí, abychom se nedopustili zbytečné chyby. Velmi častou chybou je, že na něco zapomeneme.

krok 1 **Označíme a očíslujeme uzly v obvodu**



Kontrola: Každý el. prvek musí ležet mezi dvěma uzly

Krok 2 **Označíme uzlová napětí a proudy včetně jejich orientace**



Kontrola:

- **Počet uzlových napětí = = počet nenulových uzlů v obvodu (tj. krom referenčního uzlu)**
- **Počet el.proudů=počet el. prvků v obvodu**

Krok 3 Sestavíme proudové rovnice uzlů. Pro referenční uzel žádnou rovnici nepíšeme. Zkontrolujte si počet nenulových uzlů (tj. bez referenčního uzlu) s počtem rovnic, abyste na nic nezapomněli!!!

Uzel 1: $i_U(t) = i_R(t)$

Uzel 2: $i_R(t) = 0 + i_C(t)$

Krok 4 Sestavíme rovnice el.prvků . Zkontrolujte si počet el.prvků (včetně zdrojů napětí) s počtem rovnic, abyste na nic nezapomněli!!!

Resistor R: $u_1(t) - u_2(t) = R \cdot i_R(t)$

Kapacitor C : $i_C(t) = C \cdot \frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t}$

Zdroj napětí u(t): $u(t) = u_1(t)$

Krok 6 Pro všechny diferenciální rovnice stanovíme počáteční podmínky. Zkontrolujeme počet kapacitorů+ induktorů s počtem počátečních podmínek!

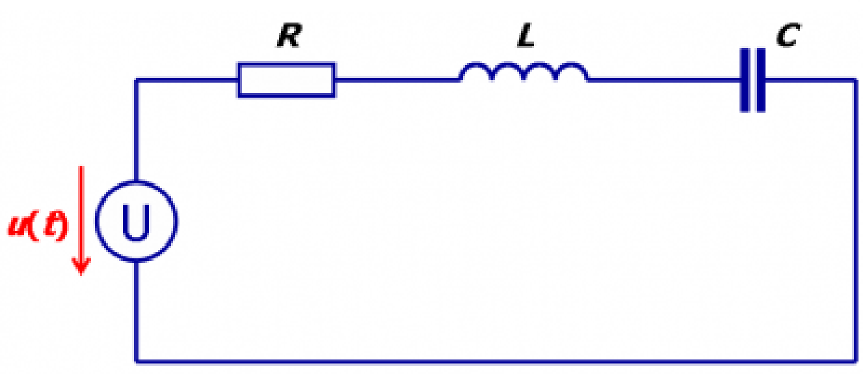
$$i_C(t) = C \cdot \frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} \longrightarrow u_2(0) = 0 \text{ V}$$

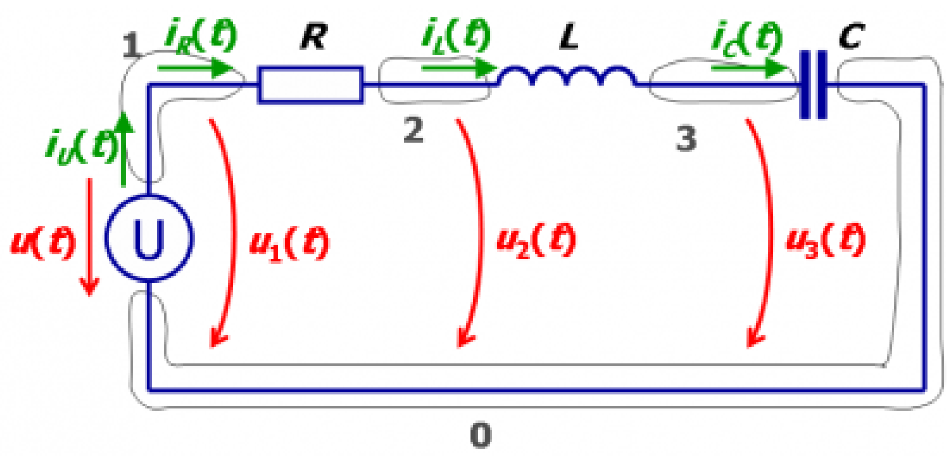
Test řešitelnosti příkladu #2

Celkem máme 5 obvodových rovnic (2 proudové rovnice pro uzly, 3 rovnice pro el.prvky). V obvodu je 5 neznámých proměnných ($\boldsymbol{u_1(t)}$, $\boldsymbol{u_2(t)}$, $\boldsymbol{i_U(t)}$, $\boldsymbol{i_R(t)}$, $\boldsymbol{i_C(t)}$) . Máme jednu počáteční podmínku pro jednu proměnnou v derivaci (d$\boldsymbol{u_2(t)}$/dt). Úloha je tedy řešitelná. Řešíme v Mathematice.

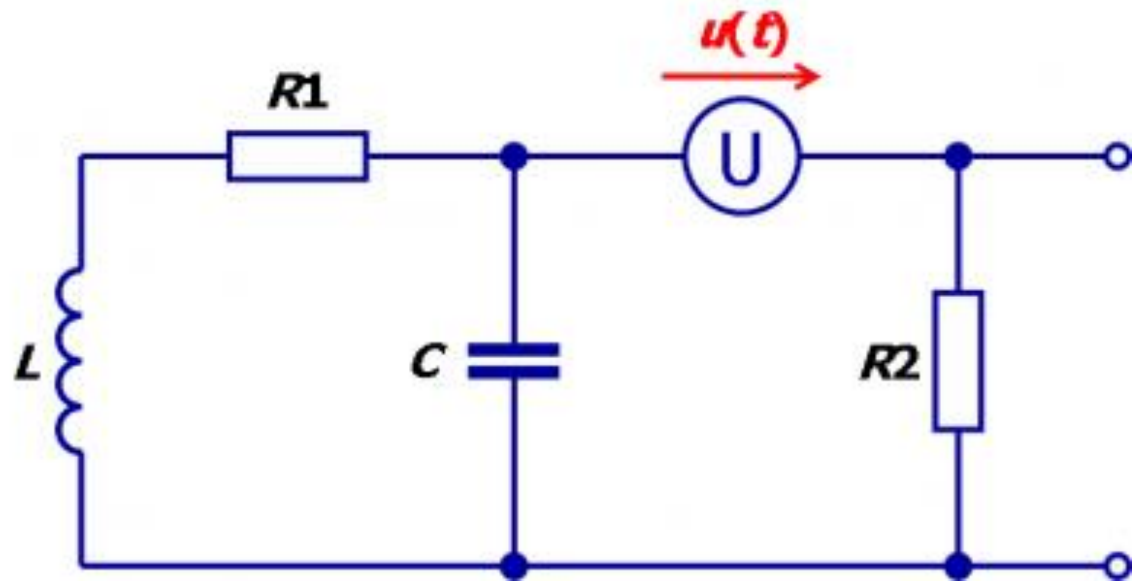
==================================

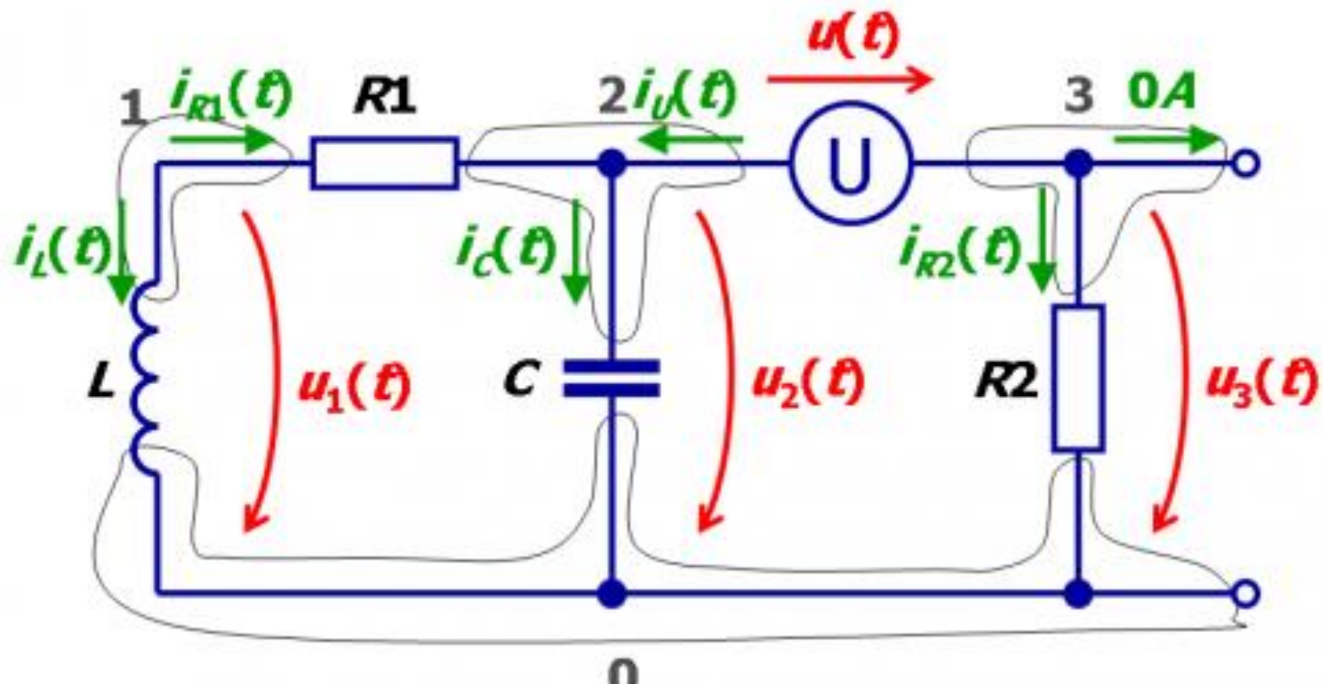
Příklad #3 – k řešení



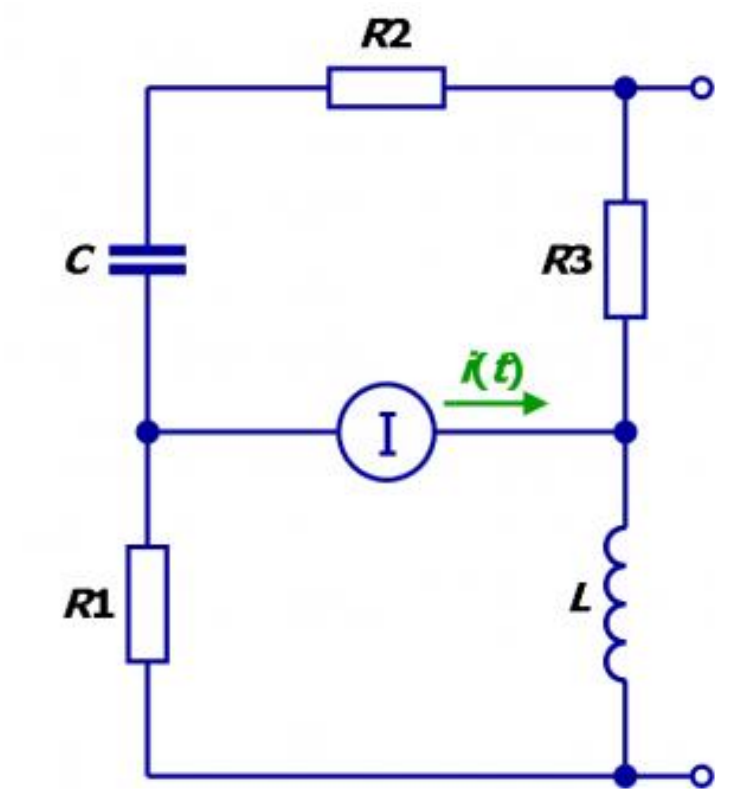


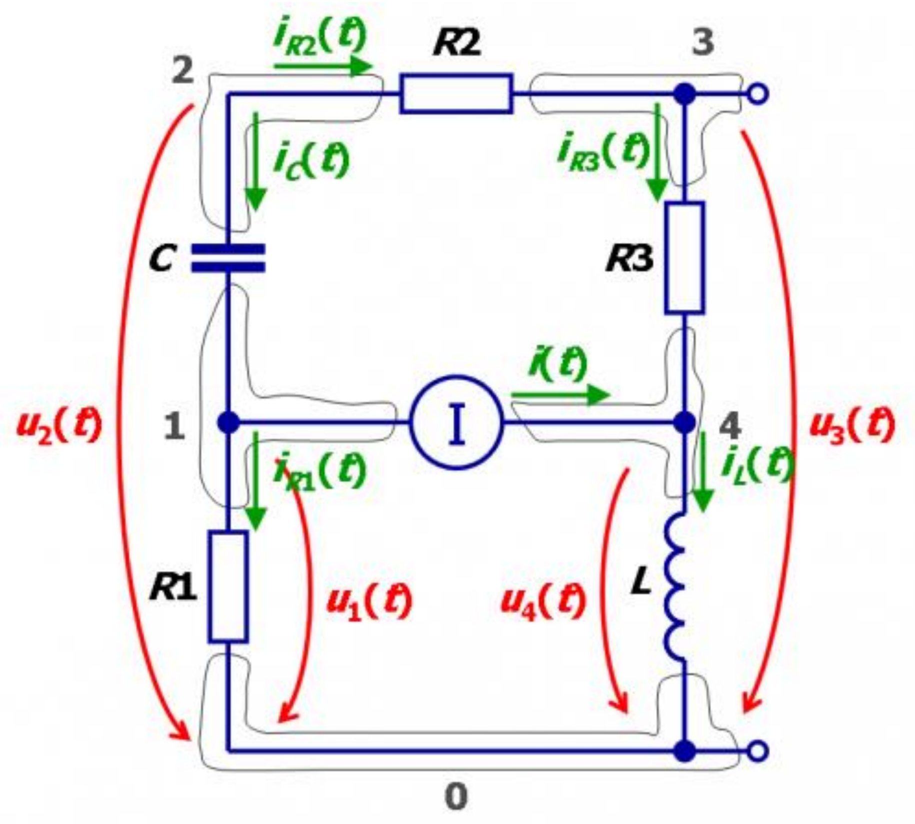
Příklad #4 – k řešení





Příklad #5 – k řešení





Příklad #6 – k řešení