Jungmannová Anna
jungmah1

Příklad 1

a)

"Každý kromě Adama má kamaráda z Prahy"

$(\forall x)((x \neq A) \Rightarrow (\exists y)(k(y,x) \wedge p(y)))$

NEGACE: $(\exists x)((x \neq A) \wedge (\forall y)\neg(k(y,x) \wedge p(y)))$

$\models\!\mid (\exists x)((x \neq A) \wedge (\forall y)(k(y,x) \Rightarrow \neg p(y)))$

"Existuje někdo kdo není Adam a zároveň nemá žádného kamaráda z Prahy"

b) ① $(\neg A \vee B) \Leftrightarrow (\neg C \wedge D)$ — logická ekvivalence k $\Leftrightarrow$

$\models\!\mid ((\neg A \vee B) \wedge (\neg C \wedge D)) \vee (\neg(A \vee B) \wedge \neg(\neg C \wedge D))$ — De Morganovy zákony....

$\models\!\mid ((\neg A \vee B) \wedge (\neg C \wedge D)) \vee (A \wedge B \wedge (C \vee \neg D))$ — distributivita

$\models\!\mid ((\neg A \wedge \neg C \wedge D) \vee (B \wedge \neg C \wedge D)) \vee ((A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg D))$ DNT

② $\neg((A \wedge B) \Rightarrow (C \vee \neg D))$ — stříbrné pravidlo

DNT; KNT

$\models\!\mid (A \wedge B) \wedge \neg(C \vee \neg D) \models\!\mid (A \wedge B) \wedge (\neg C \wedge D) \models\!\mid A \wedge B \wedge \neg C \wedge D$

De Morgan

$\neg((A \wedge B) \Rightarrow (C \vee \neg D)) \models (\neg A \vee B) \Leftrightarrow (\neg C \wedge D)$ PLATÍ

$(\neg A \vee B) \Leftrightarrow (\neg C \wedge D) \models \neg((A \wedge B) \Rightarrow (C \vee \neg D))$ NEPLATÍ

hodnoty např. $a = 0$, $c = 0$, $b = 0$, $d = 1$

Příklad 2

$a, b \in \mathbb{R}$ $\quad 0 < b < a$ $\quad (\forall n \in \mathbb{N}^+)(a^n - b^n \leq n a^{n-1}(a-b))$

Řešení pomocí indukce

① $n = 1 \Rightarrow a^1 - b^1 \leq 1 \cdot a^{1-1}(a-b)$

$a - b \leq a - b$ PLATÍ

② $n+1 \rightarrow a^{n+1} - b^{n+1} \leq (n+1) \cdot a^{(n+1-1)}(a-b)$

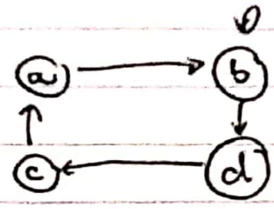
$a^{n+1} - b^{n+1} \leq (n+1) \cdot a^n (a-b)$

Dále nevím jak postupovat. Zkoušela jsem se k důkazu dostat přes vzorec $a^n - b^n = (a-b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a b^{n-2} + b^{n-1})$ ale nikam jsem se nedostala

Příklad 3 množina $X = \{a,b,c,d\}$; binární relace $R = \{(a,b),(b,b),(b,d),(c,a),(d,c)\}$

a)

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



RE X – $\neg(aRa)$; $\neg(cRc)$; $\neg(dRd)$

IR X – (bRb)

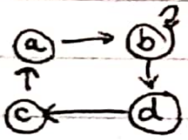
TR X – $(cRa) \wedge (aRb) \not\Rightarrow (cRb)$

SY X – (aRb) ale neexistuje (bRa)

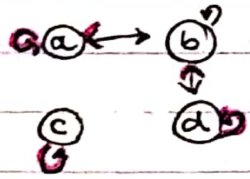
AS X – $(bRb) \not\Rightarrow \neg(bRb)$

AN ✓ – $(\forall x,y \in R)((xRy \wedge yRx) \Rightarrow x=y)$

b) Ekvivalence = symetrie + transitivita + reflexivita



SoR



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \circ S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Relace S je: $\{(a,c),(b,a),(b,b),(c,d)\}$

Nejmenší mohutnost relace S je 4. Každý prvek musí být v SoR reflexivní.

Faktorová množina $X/(S \circ R) = \{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$

c)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R^2$$

dle matice

$R^2 \cup T \Rightarrow$ symetrická $\Rightarrow T = \{(b,a),(d,b)\}$

Příklad 4

A N A K O N D A   8 písmen

A – 3x
N – 2x
K – 1x
O – 1x
D 1x

$\frac{8!}{3!2!}$

a) Zasadím si jedno písmeno na náhodné místo napevno $\frac{8!}{3!2!} = 3360$ (8 písmen; 3A, 2N)

b) 'A' je na začátku nebo na konci   A _ _ _ _ _ _ A

'A' je na začátku : $\frac{7!}{2!2!} = 1260$ 2x ← A je na konci

začínající i končící 'A' : $\frac{6!}{2!} = 360$

$2 \cdot 1260 - 360 = 2160$

c) všechny 'A' za sebou : AAA N N K O D $\frac{6!}{2!} = 360$ (6 písmen; 2N)

Příklad 5

1) $362717^{723} x \equiv 987 \pmod 9$

$5^{723} x \equiv 6$

$5^{723} \to 5 \cdot \underbrace{5 \cdot 5}_{25 \to 7}^{721} \to \underbrace{5 \cdot 7}_{35 \to 8}^{721} \to 8^{721}$

$\to 8 \cdot 8^{720} \to 8 \cdot (8)^{144} \to 8 \cdot (1)^{36}$

$8x \equiv 6$

$x \equiv 6 \cdot 8^{-1}$ → 8

$x \equiv 3 \implies x = 9n + 3 ; n \in \mathbb{Z}$

2) $25 - 8x \equiv 7 \pmod{30}$ +5

$8x \equiv 12$

$4x \equiv 6 \pmod{15}$

$x \equiv 6 \cdot 4^{-1}$ → 4

$x \equiv 9 \implies x = 15n + 9 , n \in \mathbb{Z}$

LCM(15, 9) = 45

$\Rightarrow X_1 = \{3, 12, 21, 30, 39\}$

$X_2 = \{9, 24, 39\}$

$X_1 \cap X_2 = \{39\}$

$x = 45n + 39 ; n \in \mathbb{Z}$