ZS 2022/2023 BIK-LA1 : ZÁPOČTOVÁ PÍSEMKA 5. 11. 2022						
MICHAL ŠIMEČEK	P 1	P 2	P 3	P 4	P 5	$\sum$
KAREL KLOUDA 5.11.	8	8	8	8	8	40

Příklad 1. (8 bodů) Převeďte následující soustavu do maticového tvaru a rozhodněte, zda existuje nějaké její řešení $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}_3$. Pokud existuje, a je jediné, najděte jej. Pokud není jediné, najděte jich co nejvíce. Jasně zdůvodněte, jak jste ke svým závěrům došli.

$$\begin{aligned} 2x_2 + 2x_4 &= 0, \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 &= 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Příklad 2. (8 bodů) Ve vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^4$ najděte nějakou bázi podprostoru

$$M = \langle (1,0,0,2), (3,3,2,3), (4,1,4,2), (2,1,2,2) \rangle.$$

Vysvětlete, jak jste k Vašemu rozhodnutí došli a proč se jedná o bázi. Kolik vektorů leží v M? A kolik jich v něm neleží?

Příklad 3. (8 bodů) Doplňte soubor $((1,2,2,1),(1,1,0,2))$ na bázi prostoru $\mathbb{R}^4$. Ve výsledné bázi najděte souřadnice vektoru $(1,5,8,-2)$.

Řádně vysvětlete svůj postup: Pokud budete například řešit soustavu rovnic, napište, co jsou proměnné a odkud se vzaly koeficienty. Vysvětlete také, jak z výpočtu plynou závěry, které uděláte.

Příklad 4. (8 bodů) Napište definici podprostoru a definici dimenze podprostoru.

Rozhodněte, zda je množina

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + \ln(1 + |x_3|) = 0\}$$

podprostor $\mathbb{R}^3$. Své tvrzení dokažte.

Příklad 5. (8 bodů) Najděte soubor čtyř vektorů $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$ z prostoru $\mathbb{Z}_3^3$ takový, že vynecháním jakéhokoli z nich vznikne tříčlenný soubor, který je bází $\mathbb{Z}_3^3$. Svou volbu zdůvodněte a řádně vysvětlete, proč má Váš soubor danou vlastnost.

Kolika různými způsoby lze vytvořit vektor $(1,1,1)$ jako lineární kombinaci souboru $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$?

***

MICHAL ŠIMEČEK

1.

$$\begin{aligned} 2x_2 \qquad\quad +2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + \qquad x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \qquad &= 1 \\ 2x_1 + \qquad x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{2x+}{\sim} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \multicolumn{5}{c}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)} \end{array}$$

hlavní

vedlejší

Jelikož existuje více vedlejších sloupců a poslední je sám vedlejší existuje více řešení.

$$x_4 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 \in \{0,1,2\}$$
$$x_1 = -2x_3 \bmod 3 = x_3$$

$$S = \{(0,2,0,1),\ (1,2,1,1),\ (2,2,2,1)\}$$

2.

Převedením vektorů generujících prostor do matice a ~~nástedž~~ následně pomocí GEM zjistíme které vektory jsou LZ na ostatních a tím pádem je lze odebrat.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{2x+}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \overset{+}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{+}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vedlejší

$M = \langle (1,0,0,2), (3,3,2,3), (2,1,2,2) \rangle \Rightarrow ((1,0,0,2),(3,3,2,3),(2,1,2,2))$

O bázi se jedná jelikož soubor generuje M a zároveň je LN. ✓

Vektorů v $\mathbb{Z}_5^4$ je 5^4 a v M leží $5^3 = 125$ tedy v M neleží $5^4 - 5^3 = 500$ vektorů z $\mathbb{Z}_5^4$ ✓

3. $((1,0,0,0),(1,2,2,1),(1,1,0,2),(0,0,0,1))$

Doplnit soubor můžeme například tak, že přidáme vektor $(1,0,0,0)$ a $(0,0,0,1)$ jelikož prostřední dvě souřadnice zadaných vektorů nejsou LZ.

$(2,2)$

$(1,0)$

Převedením vektorů do matice a pomocí GEM najdeme souřadnice zadaného vektoru.

~~1 0 0 0~~

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -9 \end{array}\right) \end{array}$$

$c = -3$ $(0,4,-3,0)$

$d = 0$

$b = 4$

$a = 0$

Zadaný vektor má souřadnice $(0,4,-3,0)$ vůči bázi $((1,0,0,0),(1,2,2,1),(1,1,0,2),(0,0,0$ ✓

MICHAL ŠIMEČEK

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a T je těleso.

4. Podprostor $P \subset T^n$ je množina vektorů z T ~~pro~~ pro kterou ~~ji~~ platí:

a) Není prázdná (obsahuje alespoň θ)

b) Je uzavřená na sčítání vektorů na ní. Tzn.

$$(\forall x, y \in P)(x+y \in P)$$

c) je uzavřená na násobení skalárem z T a vektorem z P na ~~ní~~ ní. Tzn.

$$(\forall x \in P)(\forall \alpha \in T)(\alpha \cdot x \in P)$$

Dimenze podprostoru P je:

a) 0, pokud neexistuje LN soubor vektorů ze P délky 1.

b) $d \in \mathbb{N}$, kde d je ~~soubor vektorů~~ velikost takového LN souboru vektorů pro který platí,

že libovolný soubor vektorů délky $d+1$ ze P je LZ.

V množině leží $(-1,-1,e^2-1)$ ale -1 násobek, neboli $(1,1,-e^2+1)$ již ne. Proto se nejedná o podprostor.

5. $$((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,1))$$

ve $\mathbb{Z}_3^3$

Přidáním libovolného ~~nenulového~~ vektoru do souboru standardní báze daného tělesa, vytvoříme soubor s touto vlastností, za předpokladu že žádná souřadnice ~~ve~~ daného vektoru není 0.

Třeba a to $(1,1,1,0),(0,0,0,1),(2,2,2,2)$. Přidáním LZ vektoru do ~~daného~~ libovolného souboru nad tímto tělesem se toto číslo nezvýší. (×3)