Katedra číslicového návrhu
Fakulta informačních technologií
ČVUT v Praze

BIK-TZP.21

Technologické základy počítačů

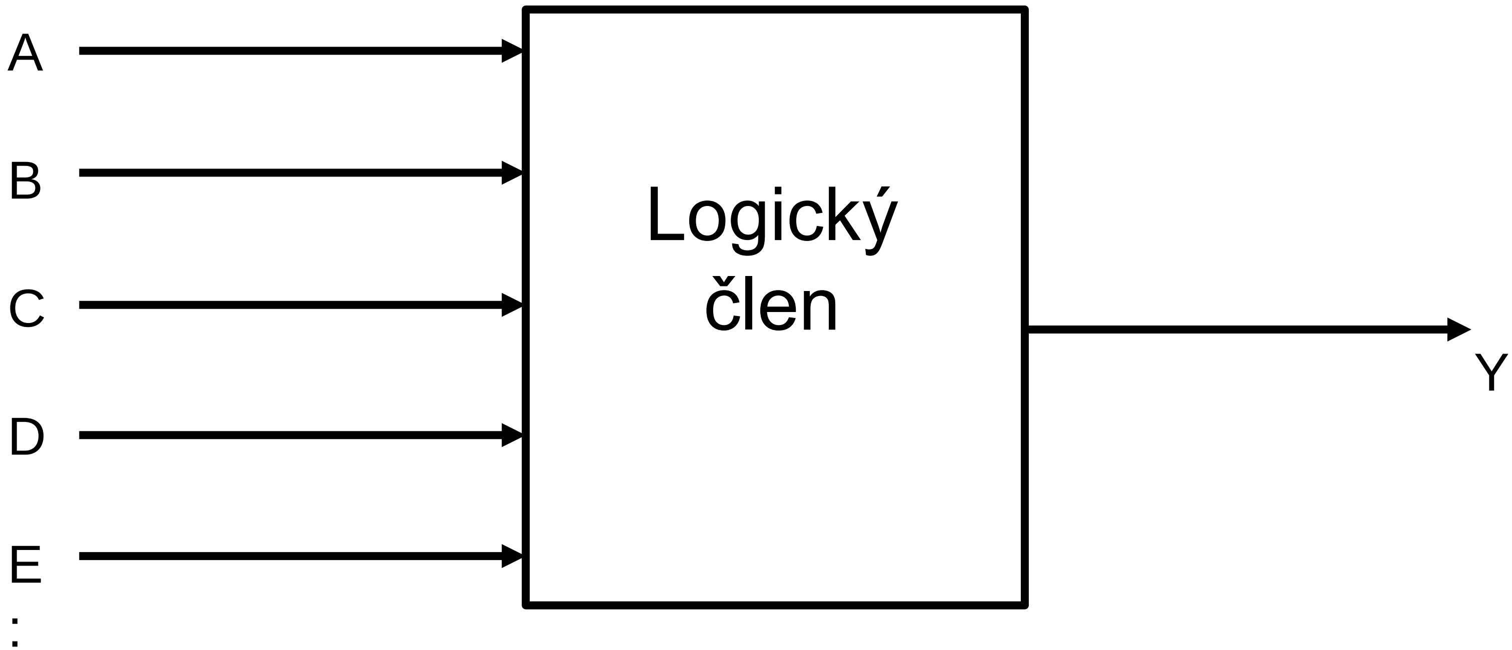
2022/23

6. Základní logické členy (hradla)

Doc.Ing. Kateřina Hyniová, CSc.
hyniova@fit.cvut.cz
Katedra číslicového návrhu, FIT ČVUT
ThA:1031

Základní logické členy

- **Logický člen** neboli **hradlo** je základní stavební prvek logických obvodů, který vyčísluje logickou funkci.
- Typicky má jeden či více vstupů a jediný výstup.
- Hodnota na výstupu logického členu je funkcí 1,2 či více hodnot vstupních: Y=f(A,B,C,D,E…..)



Booleova algebra

Booleova algebra je algebraická struktura, která je přímo aplikovatelná při návrhu číslicových obvodů. Zahrnuje pravidla a teorémy pro operace s logickými proměnnými a funkcemi. Pracuje s dvouprvkovou množinou (**0 a 1).** Tyto 2 hodnoty představují 2 různé stavy **bitu v číslicových obvodech,** kde jsou tyto hodnoty reprezentovány dvěma úrovněmi napětí.

V číslicových obvodech jsou logické hodnoty 0 a 1 využívány pro:

- **binární kódování čísel** a **matematické operace**
- **dvouhodnotovou logiku** jako **TRUE a FALSE and logické operace.**

ANO	TRUE	1
NE	FALSE	0

Logické výrazy

Teoretický prostředek pro návrh (syntézu) logických obvodů s požadovaným chováním tvoří logické (Booleovy) výrazy.

Logické výrazy využívají operátory **AND, NAND, OR, NOR, XOR, XNOR and NOT** a po vyhodnocení výrazu vrací výsledek log0 nebo log1.

- každá z těchto operací má 2 vstupní operandy a 1 výstupní, krom operace NOT (negace), která má pouze 1 vstupní operand a 1 výstupní
- Operace AND, OR, NAND a NOR mohou být zobecněny na operace s libovolným počtem vstupních operandů a jedním výstupním.

Booleovské funkce (operace)

(A,B jsou logické proměnné)

NOT	Negace	$\overline{A}$
AND	Logický součin	$A . B$
OR	Logický součet	$A + B$
NAND	Negace logického součinu	$\overline{(A . B)}$
NOR	Negace logického součtu	$\overline{(A + B)}$
XOR	Non-ekvivalence	$A \oplus B$
XNOR	Ekvivalence	$\overline{(A \oplus B)}$

Základní logická hradla

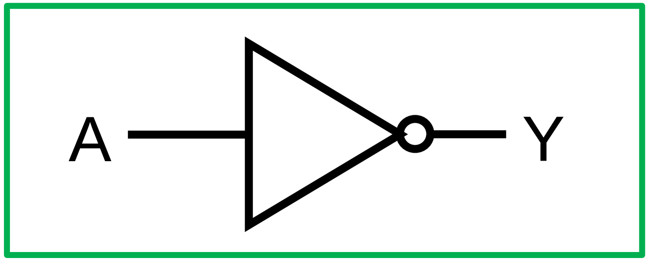
- **Každé základní logické hradlo implementuje odpovídající Booleovskou operaci** a tato operace je indikována příslušným symbolem (elektrotechnickou značkou).

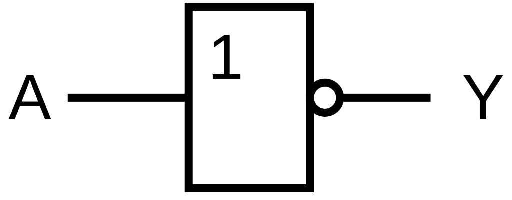
- Ze základních Booleovských operací na Booleovských proměnných můžeme skládat složitější Booleovské výrazy. Jejich implementace základními hradly se rovněž nazývá **hradlo** popř. **kombinační logický obvod**.

Booleovské funkce jedné proměnné

- **NOT** (negace)
  - Y = ¬A
  - $Y = \overline{A}$
  - Y = not(A)
  - Y = !A

A	$Y = \overline{A}$
false	true
true	false



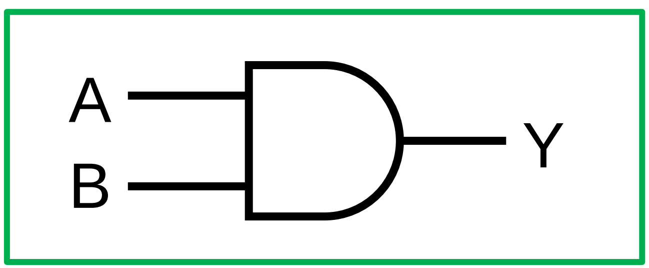


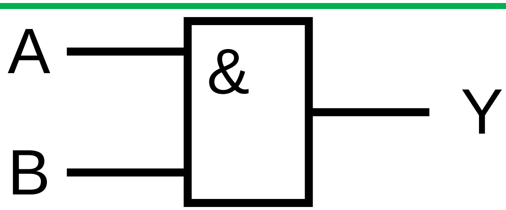
A	$Y = \overline{A}$
0	1
1	0

Booleovské funkce dvou proměnných

- **AND** (logický součin, konjunkce)
  - Y = A ∧ B
  - Y = A.B=AB
  - Y = A and B
  - Y = A & B

A	B	Y = A.B
false	false	false
false	true	false
True	false	false
True	true	true

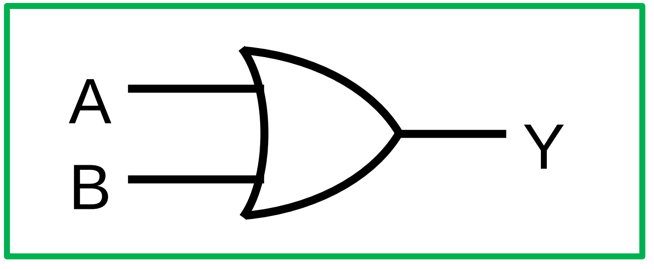


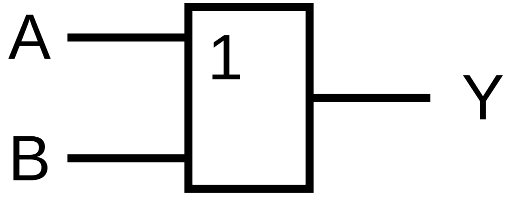


A	B	Y = A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Booleovské funkce dvou proměnných

- **OR** (logický součet, disjunkce)
  - $Y = A \vee B$
  - Y = A+B
  - Y = A or B
  - Y = A || B





A	B	Y = A+B
false	false	false
false	true	true
true	false	true
true	true	true

A	B	Y = A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

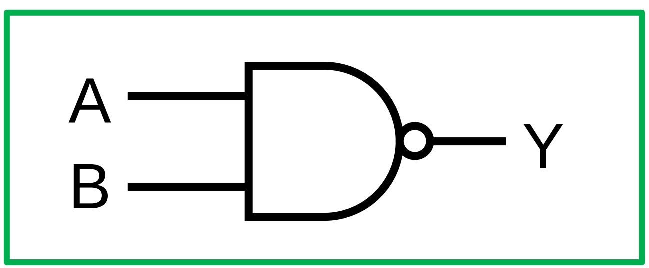
Booleovské funkce dvou proměnných

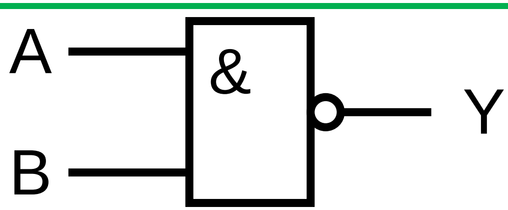
- **NAND**

(Negace logického součinu)

- $Y = \neg (A \wedge B)$
- $Y = \overline{A.B}$
- Y = not (A and B)

A	B	$Y = \neg (A \wedge B)$
false	false	true
false	true	true
true	false	true
true	true	false





A	B	$Y = \overline{AB}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

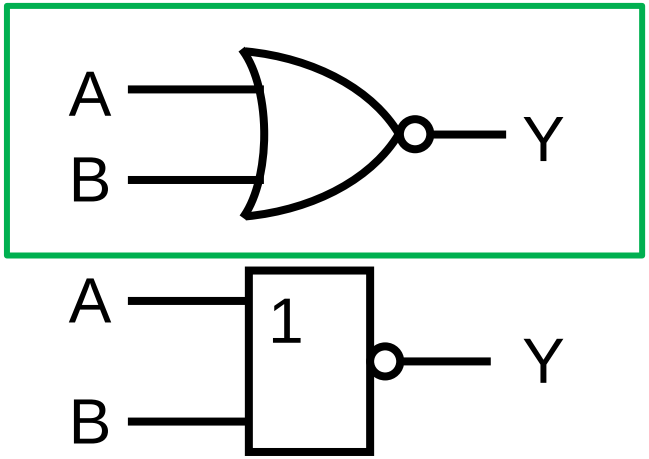
Booleovské funkce dvou proměnných

- **NOR**

(negace logického součtu)

- $Y = \neg (A \vee B)$
- $Y = \overline{A+B}$
- Y = not (A or B)

A	B	$Y = \overline{(A+B)}$
false	false	true
false	true	false
true	false	false
true	true	false



A	B	$Y = \overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

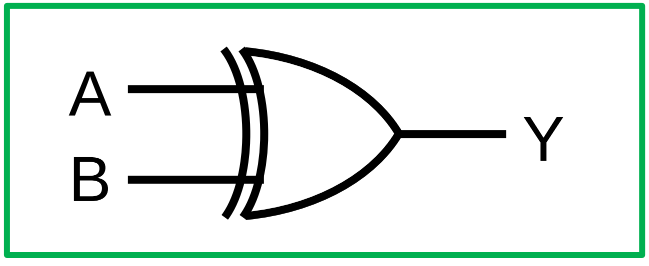
Booleovské funkce dvou proměnných

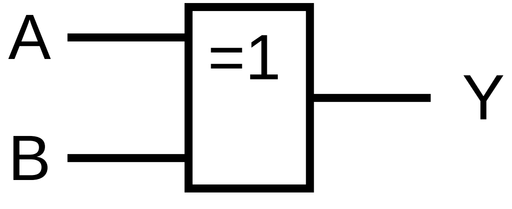
- **XOR**

(exclusive or, nonekvivalence)

- $Y = A \not\Leftrightarrow B$
- $Y = A \oplus B$
- Y = A xor B

A	B	Y = A⊕B
false	false	false
false	true	true
true	false	true
true	true	false



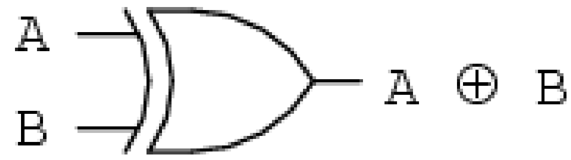


A	B	Y=A⊕B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

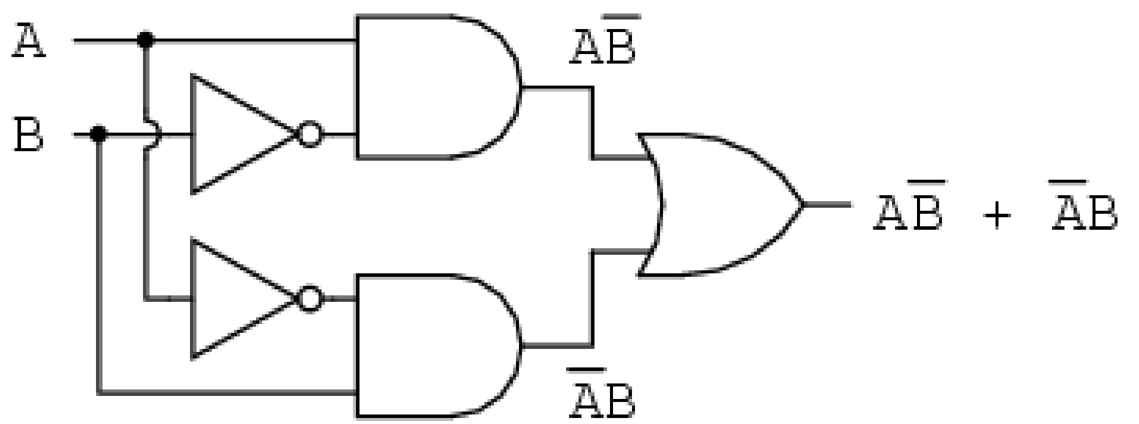
Funkce Exclusive-OR

$$\boxed{A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B}$$

A	B	Y = A⊕B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



….je ekvivalentní….



$$A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B$$

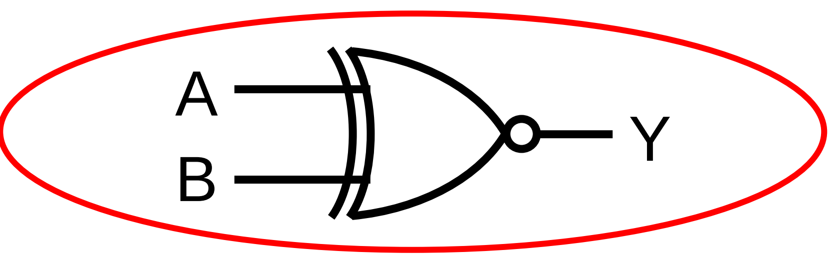
Booleovské funkce dvou proměnných

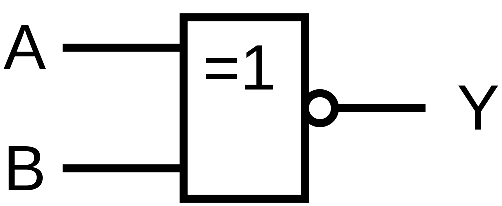
- **XNOR**

(exclusive nor, ekvivalence)

  - $Y = A \Leftrightarrow B$
  - $Y = \overline{A \oplus B}$
  - Y = A xnor B

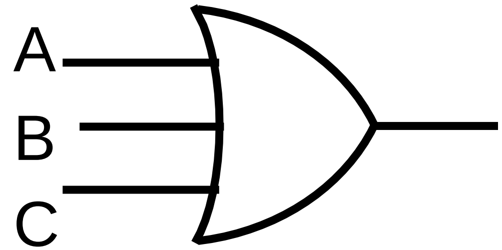
A	B	$Y = \overline{A \oplus B}$
false	false	true
false	true	false
true	false	false
true	true	true





A	B	$Y = \overline{A \oplus B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

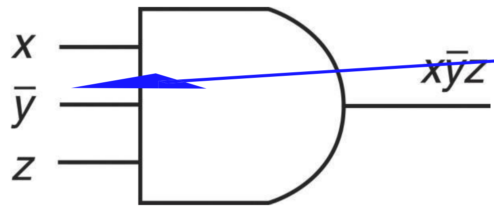
Poznámky

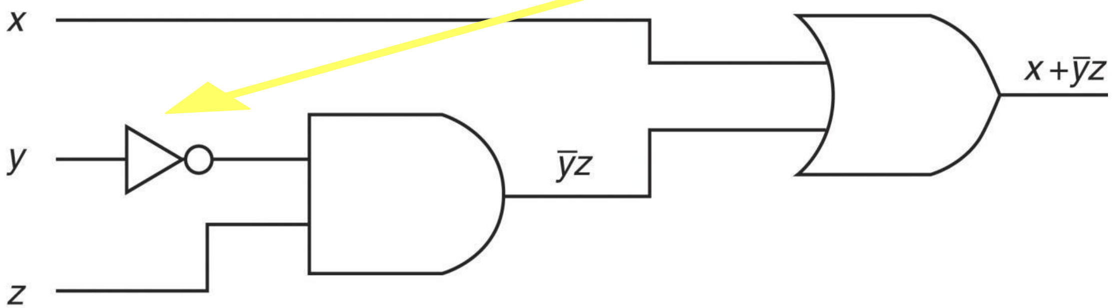


Hradla AND, NAND, OR a NOR mohou mít ve schématech libovolný počet vstupů

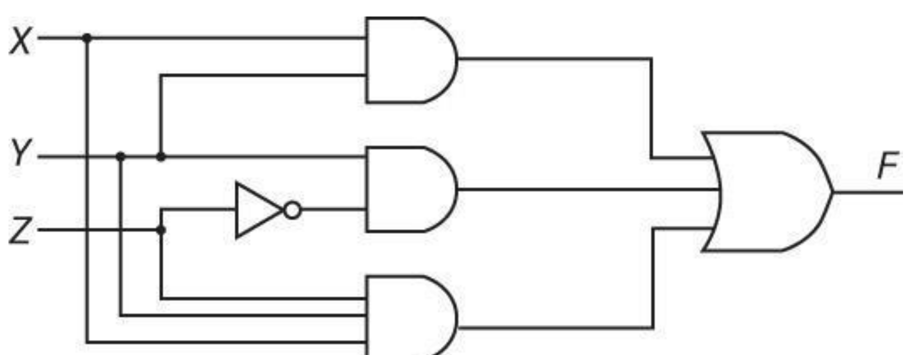
,

Tam, kde je na vstup hradla přiváděna negovaná proměnná $\overline{Y}$ použijeme ve schématu invertor (hradlo NOT)





- **Otázka:** Jaký logický výraz F realizuje schéma?



De Morganovy zákony

$$1) \quad \overline{x+y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

$$2) \quad \overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$

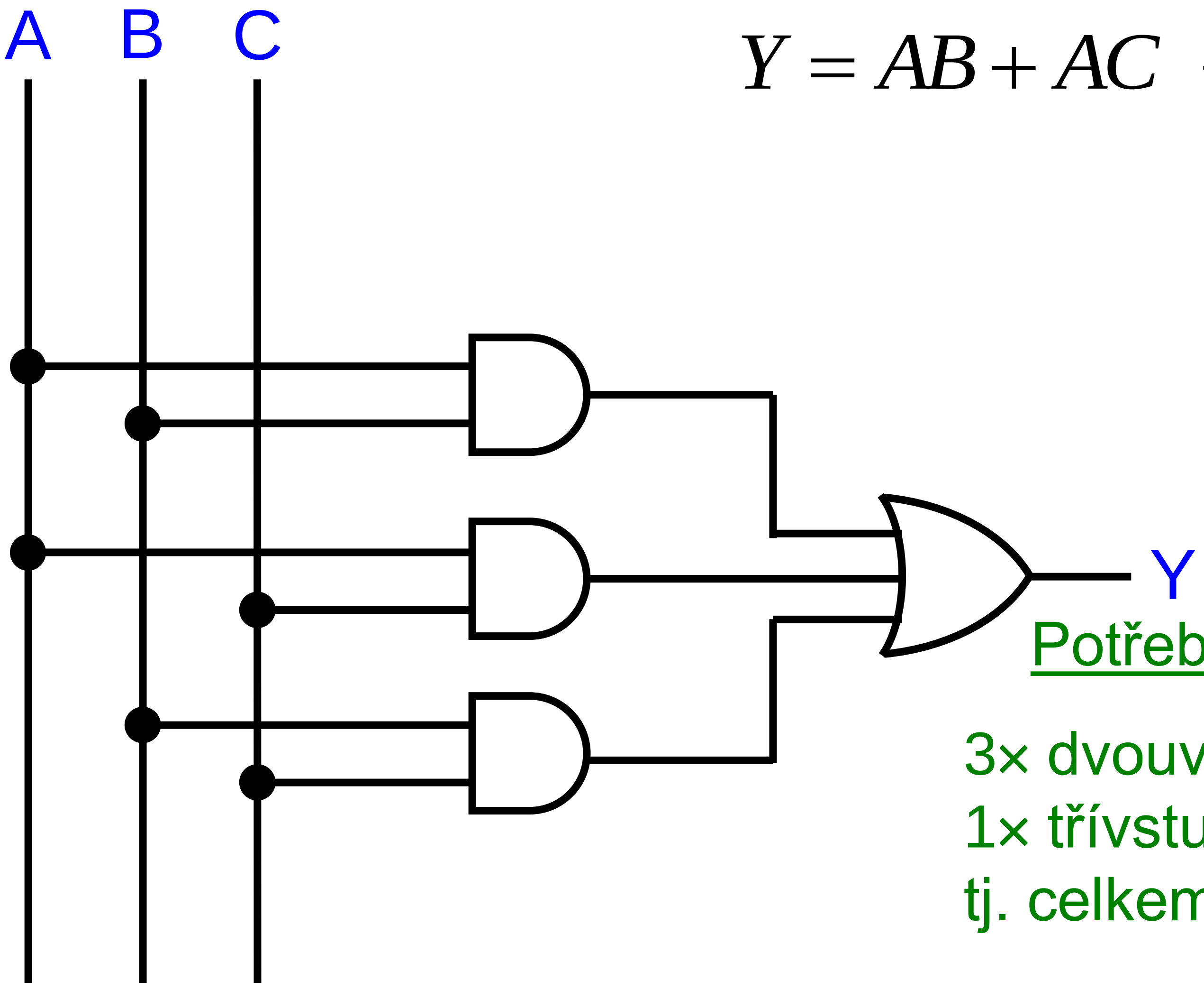
Zákony tedy říkají:

- **1) Negace logického součtu libovolného počtu proměnných je rovna součinu negovaných těchto proměnných.**

- **2) Negace logického součinu libovolného počtu proměnných je rovna součtu negovaných těchto proměnných.**

Příklad 1:

$$Y = AB + AC + BC$$



Potřebné součástky:

3× dvouvstupové AND hradlo
1× třívstupové OR hradlo
tj. celkem 26 tranzistorů

Použijeme-li De Morganovy zákony:

$$Y = AB + AC + BC$$

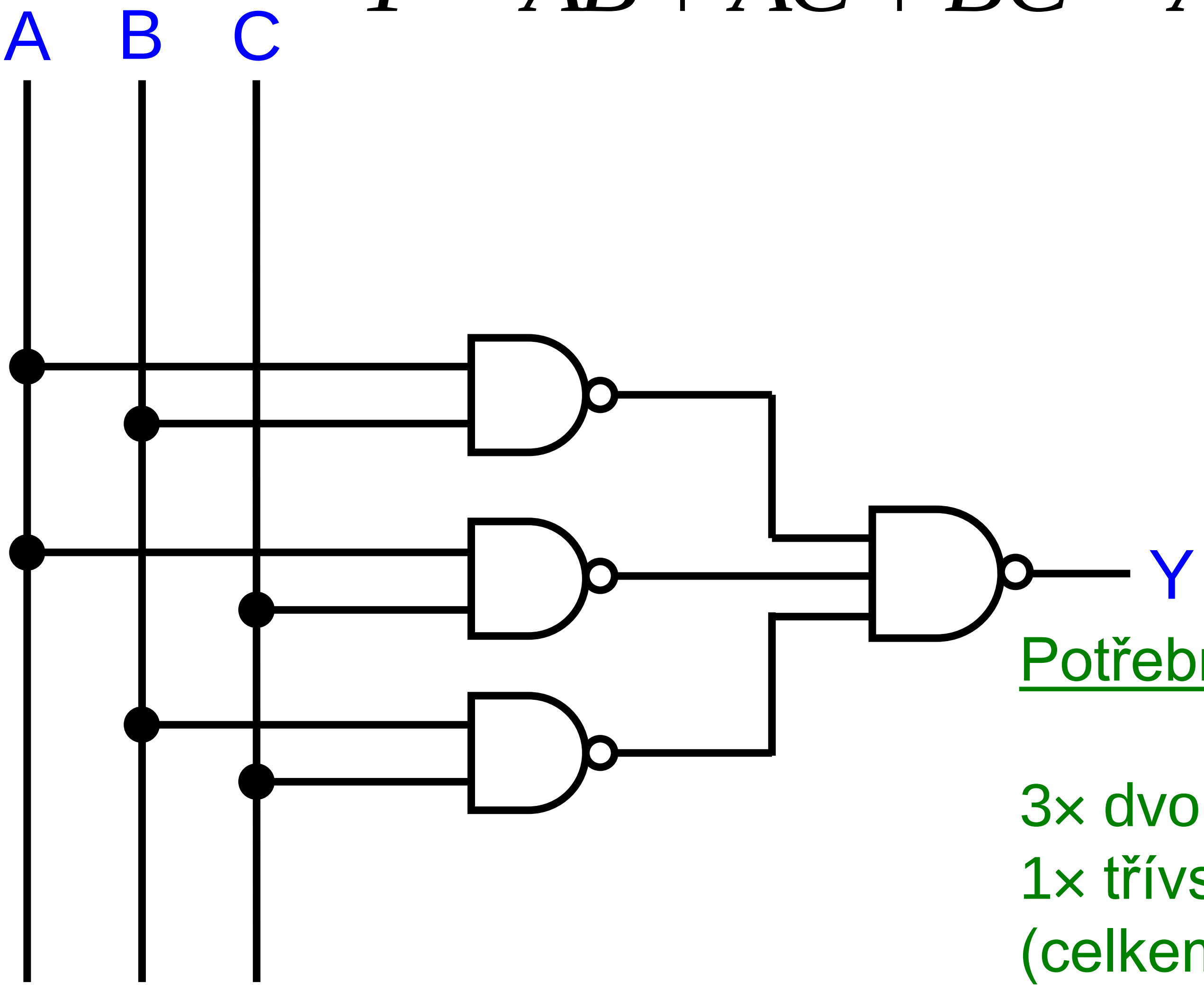
$$Y = \overline{\overline{AB + AC + BC}}$$

$$Y = \overline{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}}$$

$$\overline{\overline{Y}} = Y$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y} \\ \overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y} \end{array}}$$

$$Y = AB + AC + BC = \overline{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}}$$



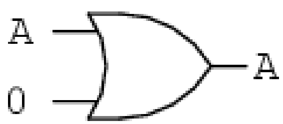
Potřebné součástky:

3× dvouvst. hradlo NAND
1× třívst. hradlo NAND
(celkem 18 tranzistorů)

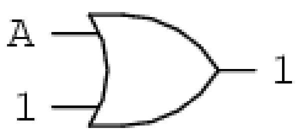
Booleovské algebraické identity

OR (log. součet)

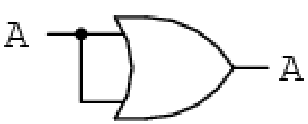
A + 0 = A



A + 1 = 1

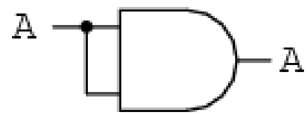


A + A = A

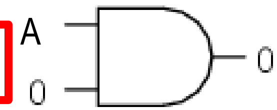


AND (log. součin)

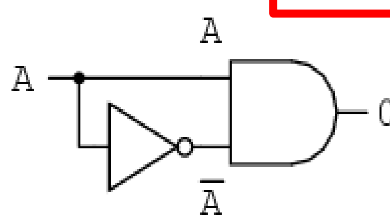
AA = A



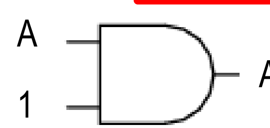
A . 0 = 0

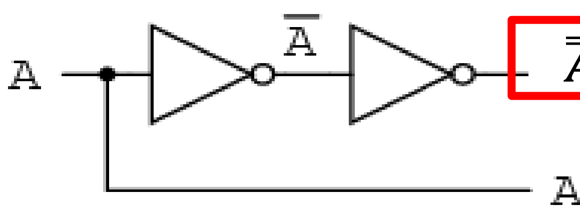


$A\bar{A} = 0$



A . 1 = A





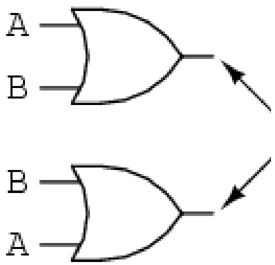
$\bar{\bar{A}} = A$

Vlastnosti Booleovy algebry

komutativní

Logický součet

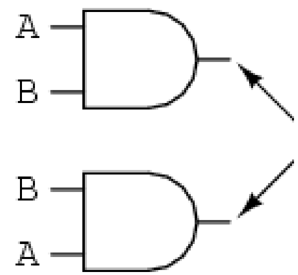
A + B = B + A



ekvivalentní

Logický součin

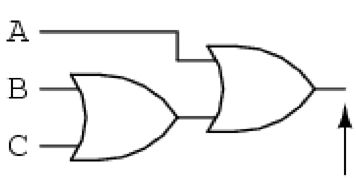
AB = BA



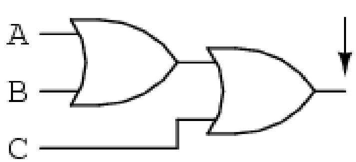
ekvivalentní

asociativní

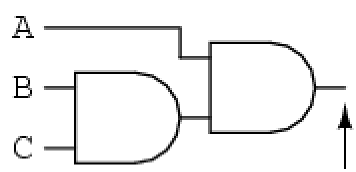
A + (B + C) = (A + B) + C



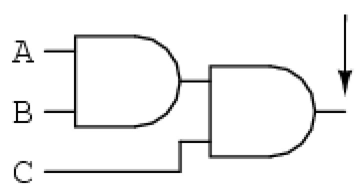
ekvivalentní



A(BC) = (AB)C



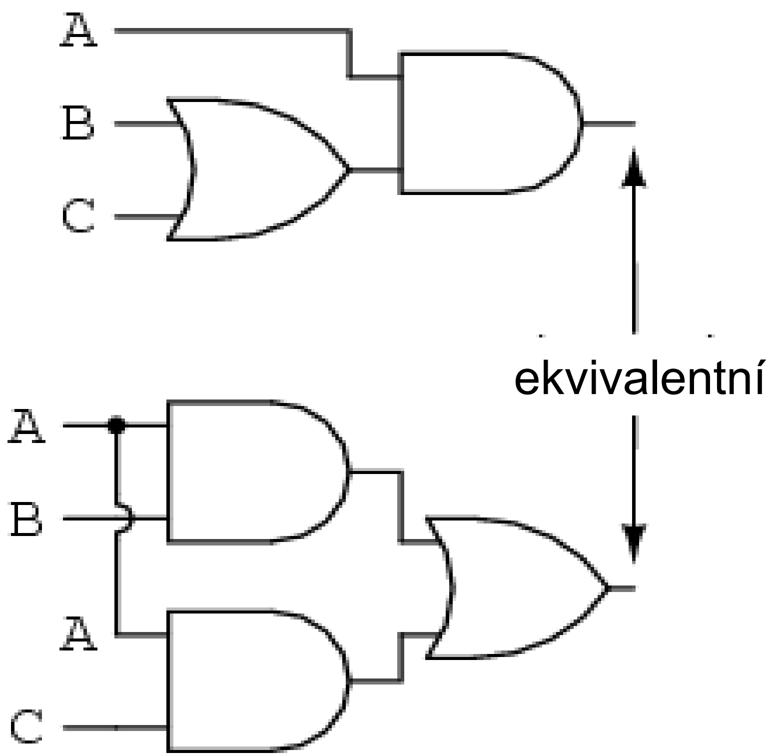
ekvivalentní



Vlastnosti Booleovy algebry

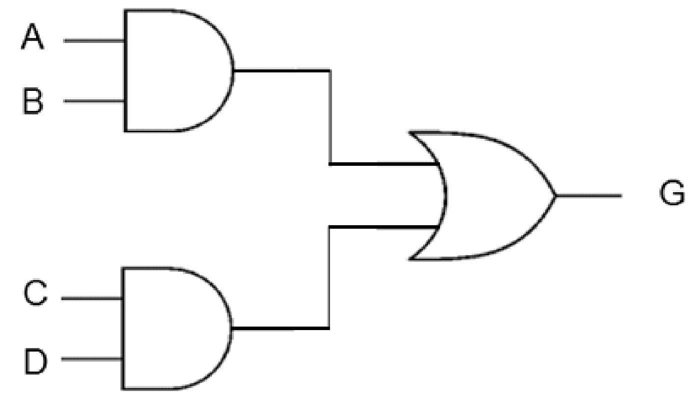
distributivní

$$A(B + C) = AB + AC$$



Návrh kombinačních logických obvodů

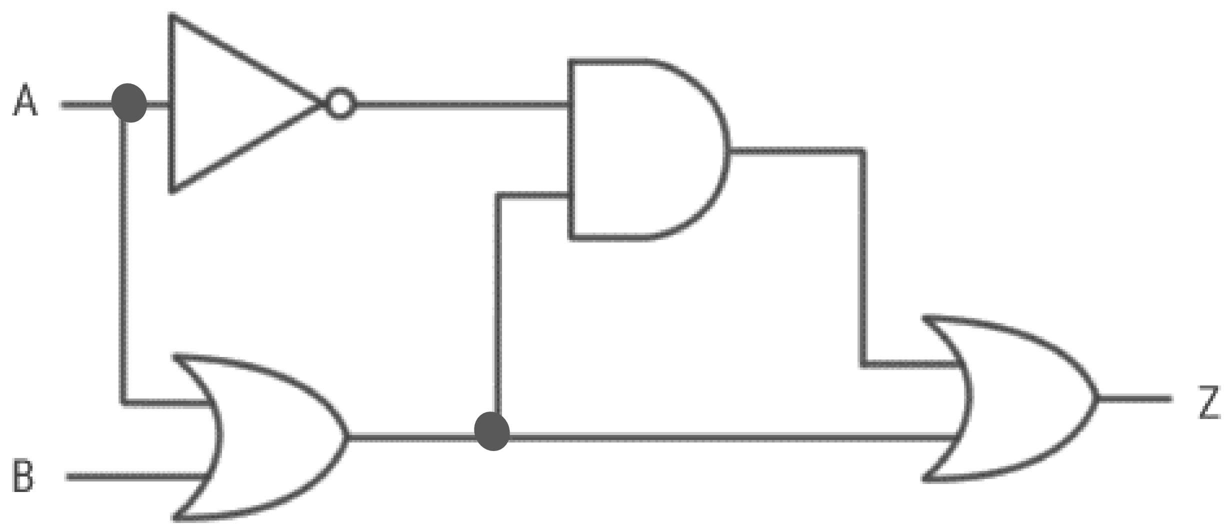
- Pro výpočet výrazu kombinujeme základní logická hradla
  - Např.: $G = A.B + C.D$



- Výsledný obvod je **kombinační obvod**, nazývané rovněž **hradlo**.
  - Kombinací výpočtů základních hradel zjistíme logickou hodnotu na výstupu hradla pro danou kombinaci logických hodnot na vstupu
  - Takto jsou realizovány číslicové obvody, které tvojí ALU (arithmeticko-logickou jednotku) a jiné části počítačů.

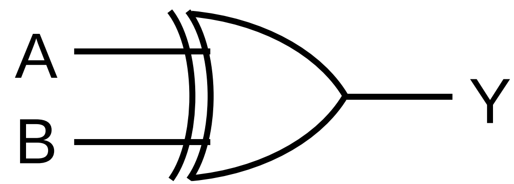
<u>Příklad #2</u>: Implementujte logickou funkci Z(A,B) pomocí základních logických hradel):

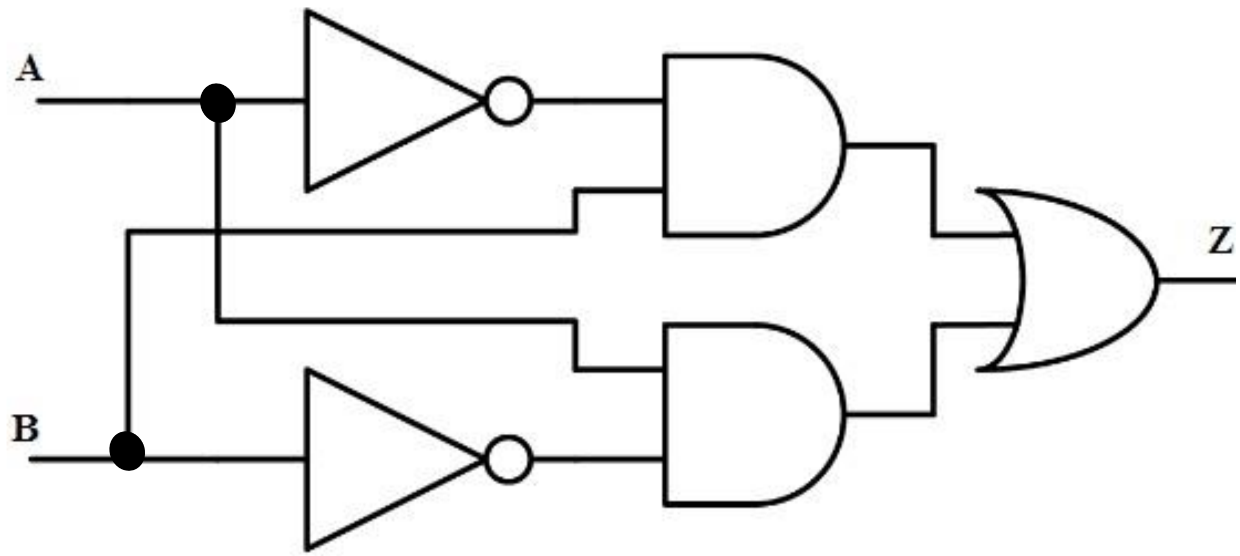
$$Z(A,B)=(A + B).\overline{A} + (A + B)$$



Příklad #3: implementujte logickou funkci Z(A,B) logickými hradly:

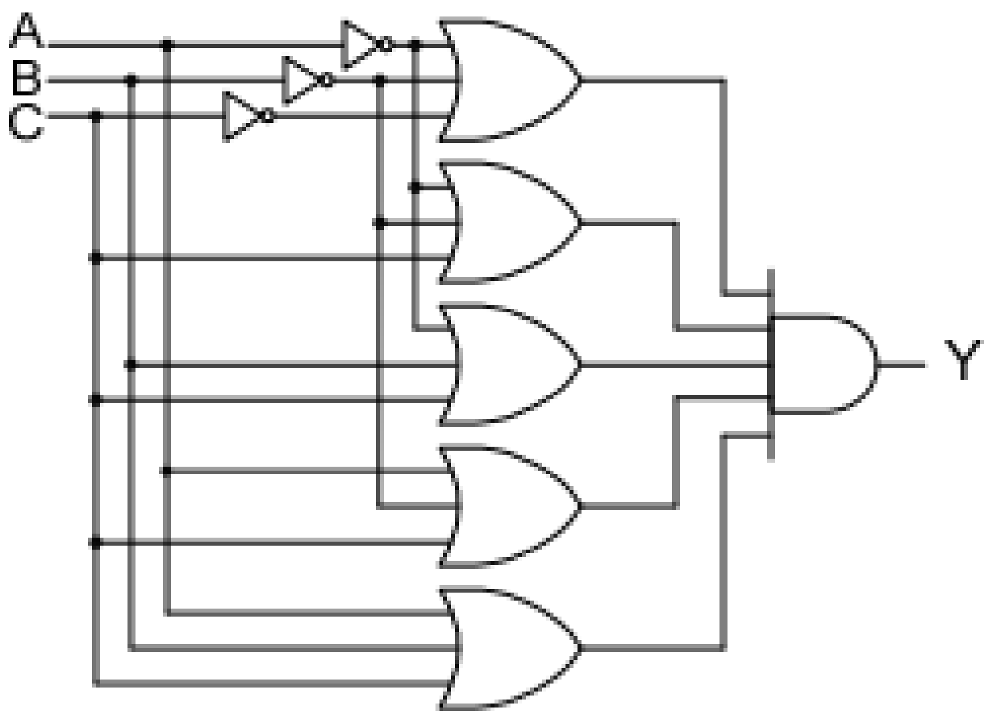
$$Z(A,B)=\overline{A}.B + A.\overline{B}$$





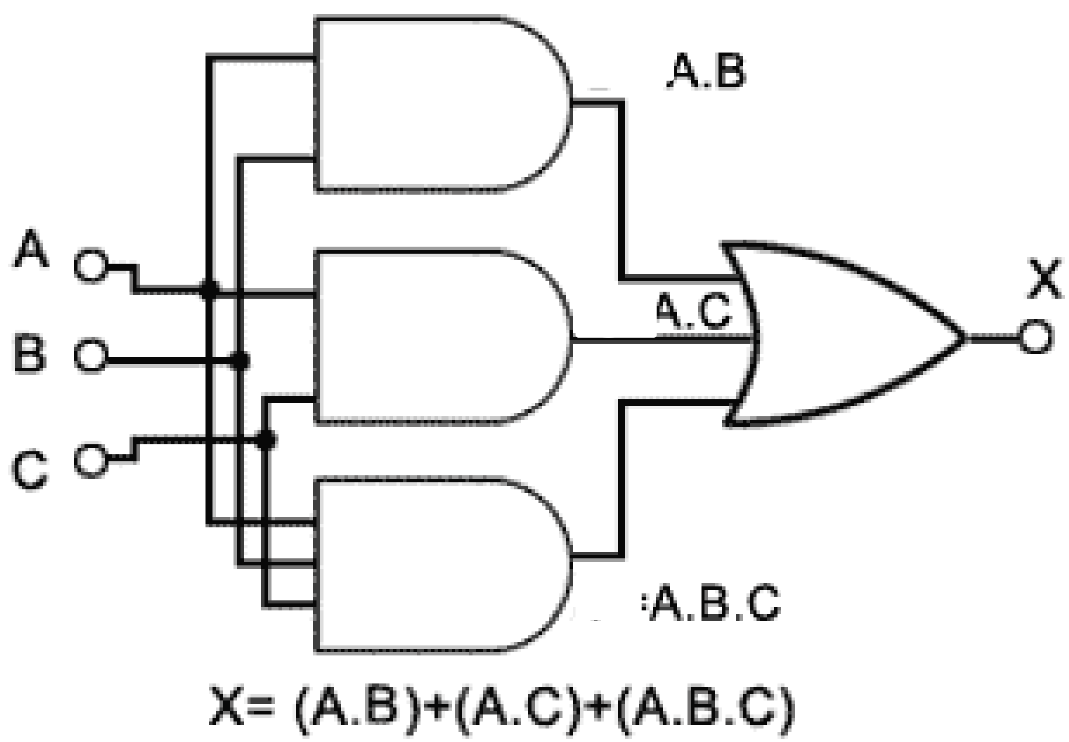
Příklad #4: Implementujte logickou funkci Y(A,B,C) logickými hradly

$$Y = (\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}).\ (\overline{A}+\overline{B}+C).\ (\overline{A}+B+C).\ (A+\overline{B}+C).\ (A+B+C)$$



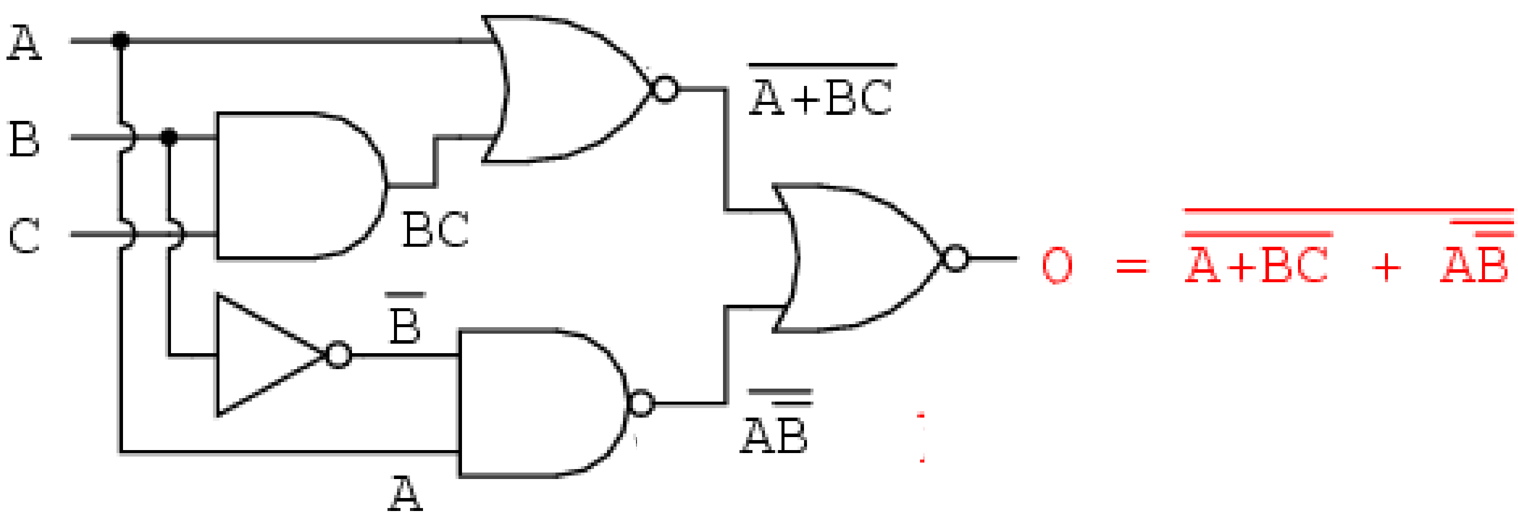
Příklad #5: Implementujte logickou funkci X(A,B,C) logickými hradly

$$X(A,B,C) = (A.B)+(A.C)+(A.B.C)$$



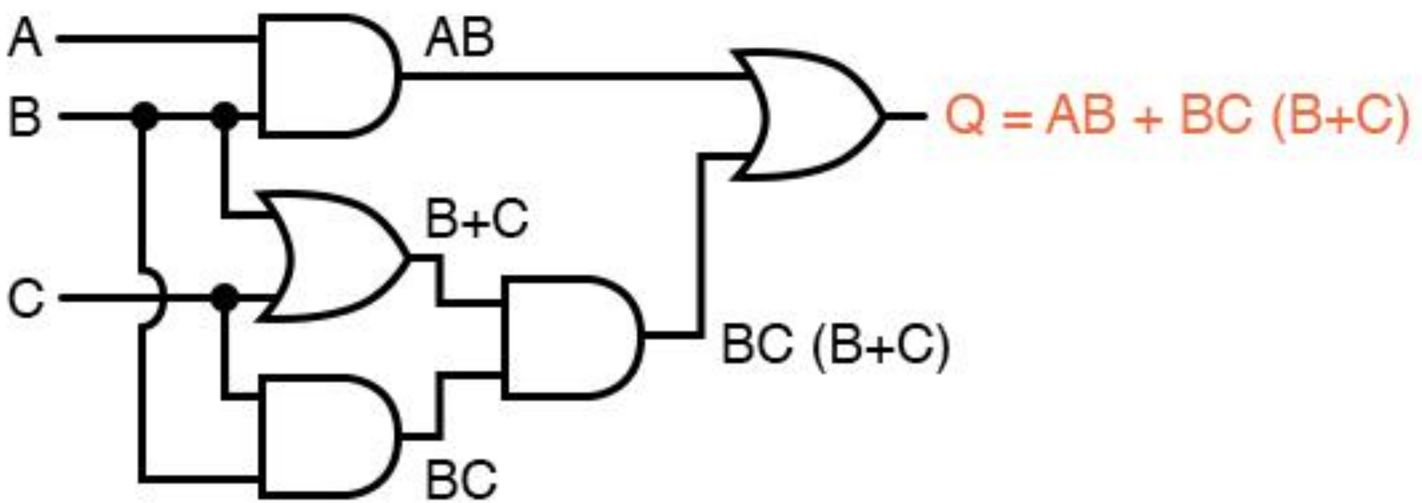
Příklad #6: Implementujte logickou funkci Q(A,B,C) logickými hradly

$$Q(A,B,C) = \overline{\overline{(A+B.C)}+\overline{(A.\overline{B})}}$$



Příklad #7: Implementujte logickou funkci Q(A,B,C) 2-vstupovými logickými hradly

$$Q(A,B,C) = AB+B.C.(B+C)$$



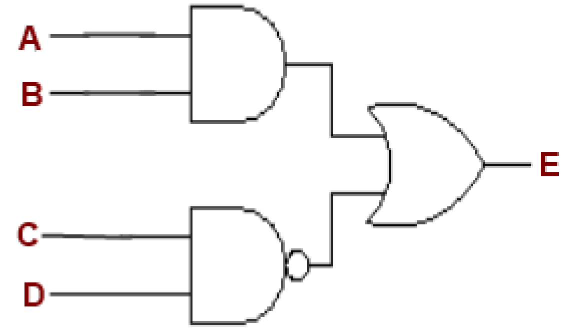
Příklady k řešení

Implementujte logické funkce pomocí základních hradel (hradla mohou mít libovolný počet vstupů)

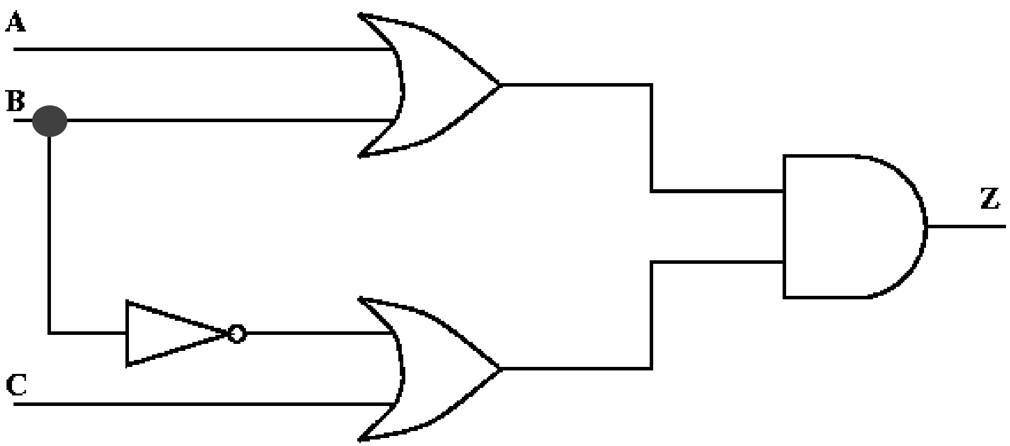
1) $Y=A.\overline{B}.C+D.E\overline{(A+B)}+(C\oplus D)$
2) $Y=(A+\overline{B})\oplus(\overline{C}+\overline{D})$
3) $Y=(A+B).(C+D)$
4) $Y=\overline{(A+B).C+A.B.C}$
5) $Y=(A.B.C)\oplus(C.E.F)$

Které logické funkce implementují hradla na obrázcích?

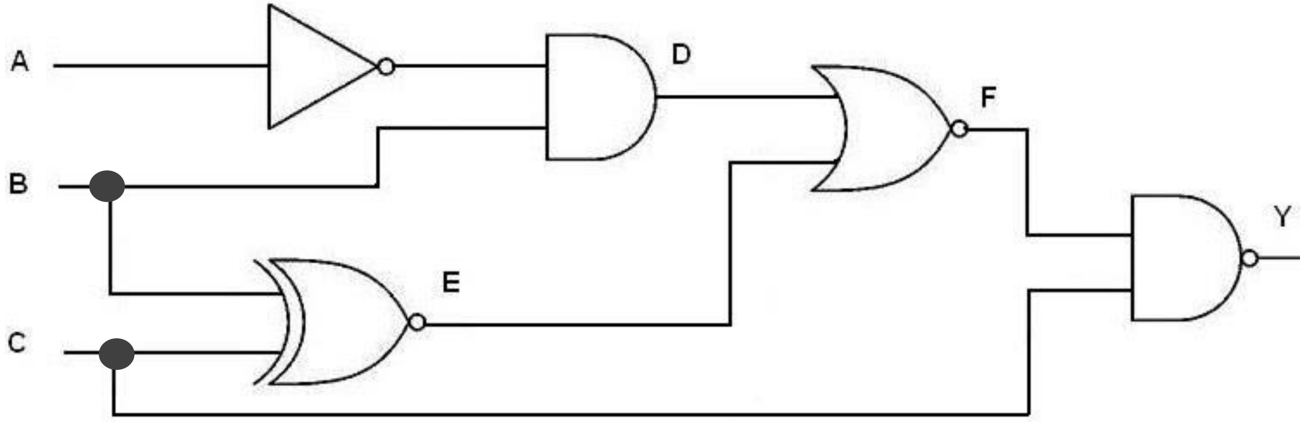
6)



7)



8)



Jaká logická hodnota bude na výstupu X hradla pro vstupní hodnoty proměnných A, B a C:

A=1

B=1

C=0?