BI-LA1 – poznámky k 1. zápočtové písemce

Hanka Řada

---

1. úloha, násobení matic

Nepište =, pokud se věci nerovnají. Typicky

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{AB} + \mathbf{BB}$$

a to ani v tom případě, že takto postupně napočítáváte výsledek.

Asi tak polovina studentů neumí číst zadání!!! A proto úlohy počítá v $\mathbb{R}$ a ne například v $\mathbb{Z}_5$. (Mimochodem se fakt divím, že se Vám s těmi velkými čísly chce počítat.) Nemalá část studentů také neumí opsat zadání, či si přečíst, co sami napsali.

A pak samozřejmě pozor na numerické chyby.

2. úloha, soustava LAR

Velký pozor si dejte na práci s množinami. Tyto $\{\}$ závorky označují množinu. Platí, že S je množina řešení soustavy, tedy $S = \{\vec{v_1}, \dots\}$. Pokud tedy má soustava více než dvě řešení a vy naleznete dvě konkrétní řešení $\vec{v_1}$ a $\vec{v_2}$, tak můžete zapsat $S = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots\}$. Co ale zapsat nemůžete (protože to není pravdivý výrok) je $S = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ ani $\vec{v_1} = S$, $\vec{v_2} = S$ a podobně. Nic takového neplatí!!! (První výraz by znamenal, že soustava má právě tyto dvě řešení a žádné jiné, ty druhé dva výrazy nedávají smysl. Lze psát $S = \{\vec{v_1}\}$ a to ovšem znamená´, že soustava má právě jedno řešení.) Samozřejmě lze také psát $\vec{v_1} \in S$, tedy, že vektor leží v množině řešení S. Další častá chyba byla, že jste psali $S = \{\emptyset\}$. To neplatí. Prázdná množina ($\emptyset$) je množina, a proto píšeme $S = \emptyset$. Obdobně i množina řešení homogenní soustavy S_0 je množina a tedy $\mathbf{x_0} \in S_0$.

Pokud máte soustavu s konečně proměnnými v konečném tělese, tak nemůže mít nekonečně řešení.

Věta "matice má ... řešení"je blbost. Hledáme řešení soustavy rovnic, kterou převedeme na rozšířenou matici soustavy. Dostaneme ale řešení soustavy (matice není úloha ani soustava ani nic podobného).

To, že má soustava více řešení nelze zdůvodnit tím, že nám vyšel nulový řádek (například pro soustavu 4 rovnic o 3 neznámých to nemusí platit). Pokud chcete argumentovat tímto způsobem, tak musíte dopsat, že se to stalo pro soustavu o stejně řádcích jako proměnných a že přitom je sloupec pravé strany vedlejším sloupcem.

Pokud Vám úloha nejde upravit do HST, je to Váš problém, nikoli signál, že úloha nemá řešení. Každá soustava jde převést do HST. Části studentů dělalo problém upravit soustavu s rozšířenou maticí zhruba tohoto tvaru:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Zde si musíte uvědomit, že pokud je tato soustava v $\mathbb{R}$, tak můžete dělit (například první řádek vydělit 4). Pokud jste v konečných tělesech, tak můžete násobit inverzním prvkem (tedy například pokud je soustava v $\mathbb{Z}_5$, tak je vhodné přenásobit první řádek $4^{-1} = 4$.)

U jistého malého procenta studentů se vyskytovala ta chyba, že si v rozšířené matici soustavy znázornili HST pomocí "shodů"přesto, že soustava v HST nebyla. Někteří to dělali jako mezivýpočet a jiní dokonce tak, že na čísla, která byla pod čárou pak prostě zapomněli. To první je špatně a to druhé je hrubá chyba. Lomená čára je pouze pomůcka (nedělejte ji proto matoucím způsobem). Není to kouzelné zaklínadlo. Také nevyrábějte nenuly na vedoucích pozicích v řádku (tj. pokud v i-tém řádku v prvním sloupci je nula, tak k němu nebudu přičítat něco, co má v prvním sloupci nenulu)!!!

3. teoretická úloha

Pokud je $\mathbf{x_0}$ řešením přidružené homogenní soustavy, tak z toho neplyne, že $\mathbf{x_0} = \theta$. Nulový vektor sice vždy řeší přidruženou homogenní soustavu, ale nemusí to být jediné její řešení! (Obecně platí, že když má soustava alespoň jedno řešení, tak poté existuje $\mathbf{x_0}$, $\theta \neq \mathbf{x_0} \in S_0$ právě tehdy když má soustava více než jedno řešení.)

Pro obecnou matici platí, že $\mathbf{A} \in T^{m,n}$, kde T je těleso a $m, n \in \mathbb{N}$. Pokud tuto matici chceme násobit číslem, tak to číslo musíme brát z T, nikoli z $\mathbb{R}$. (Ano, ne všechna čísla jsou reálná a pokud máme matici například z $\mathbb{Q}$, tak poté není definovaná násobení číslem $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$.) Mnoho studentů psalo $\mathbf{A}^{m,n}$ místo $\mathbf{A} \in T^{m,n}$. To první je blbost!!!!

Přirozená čísla značíme $\mathbb{N}$ a nikoli $\mathcal{N}$ (podobně pro další číselné obory). Nelze použít velká psací písmena místo tučných tiskacích.

U úlohy: Napište, jak je definován součet vektoru **a** a množiny vektorů M... mnoho studentů zapsalo vektory v množině M za sebe a udělalo z nich matici a snažilo se sečíst vektor s maticí. To je uplně špatně. Množina není matice!!! A součet vektoru a matice (o více než jednom sloupci) není definován. V této úloze nešlo o to, jak se sčítají dva vektory, ale o to, jak se zapíše součet vektoru a množiny vektorů. Tímto součtem je množina, která má právě tolik prvků, kolik měla množina M. Tedy nevyjde pouze vektor. Tuto úlohu si projděte ve skriptech, budeme ji potřebovat k obecnému řešení soustav LAR s více řešeními.

Tato rovnost:

$$\alpha \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\alpha \mathbf{x})$$

plyne z definice násobení matice číslem (vektor je zde brán jako jednosloupcová matice), distributivity a komutativity v tělese. Nikoli z distributivního zákona pro matice, protože výraz $\mathbf{A}\alpha$ není definovaný.

Pokud hledáme transpozici součinu dvou matic, tak platí: Nechť $\mathbf{A} \in T^{m,n}, \mathbf{B} \in T^{n,p}$, kde T je těleso a $m, n, p \in \mathbb{N}$. Dále nechť $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, $C \in T^{m,p}$. Poté platí

$$(\mathbf{C})^{\mathbf{T}} = (\mathbf{AB})^{\mathbf{T}} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \mathbf{C}^{\mathbf{T}} \in T^{p,m}.$$

Projděte si, prosím, všechny teoretické úlohy ve skriptech, ať příště víte, jak na ně.