

Semestrální domácí úkol

BIK-MA1 2022/2023

Následující domácí úkol slouží jako součást přípravy na zkoušku. Vypracujte jej proto sami za pomoci látky probrané na přednášce či cvičení. Úkol odevzdejte prostřednictvím aplikace MS Teams v teamu BIK-MA1 **nejpozději do 4. 6. 2023**. Pokud chcete jít na zkoušku před tímto termínem, odevzdejte úkol alespoň tři dny před zkouškou.

Svá řešení důkladně zdůvodněte, je-li to možné odkažte se na tvrzení z přednášky. Za vypracování je možno získat nejvýše **40 bodů**. Pro řešení nelze používat matematický software.

Okruh 1. Funkce a jejich vlastnosti

1. (4 body) Nalezněte definiční obor a obor hodnot funkce

$$f(x) = \ln(1 + (x - 1)^2) - 2.$$

Nalezněte její inverzní funkci f^{-1} a určete definiční obor a obor hodnot f^{-1} .

2. (3 body) Určete všechny hodnoty reálného parametru p tak, aby funkce

$$f(x) = (p^2 - 2p + 1)^x$$

byla ostře klesající.

Okruh 2. Reálné posloupnosti

1. (3 body) Rozhodněte o existenci limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \frac{1+n}{n^2}$$

a případně vypočtete její hodnotu.

2. (4 body) Rozhodněte, pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ posloupnost

$$a_n = \frac{n^2 - a^n}{\pi^n + n^6}$$

konverguje. Vaše tvrzení důkladně zdůvodněte.

3. (4 body) Rozhodněte, zda pro posloupnosti

$$a_n = e^{n^2}, \quad b_n = n!$$

platí $a_n = \omega(b_n)$, $b_n = \omega(a_n)$ nebo ani jeden z uvedených vztahů. Svá tvrzení dokažte.

Okruh 3. Limity funkcí a spojitost

1. (4 body) Vypočtete

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{\sin^2(\pi x)}.$$

2. (4 body) Uvažujme funkci

$$f(x) = (1+x)^{\frac{x^2-1}{x^2-x}}.$$

V kterých bodech je f spojitá, resp. spojitá zprava či zleva? Lze ji v případných bodech nespojitosti spojitě dodefinovat? Pokud ano, jak?

Okruh 4. Derivace

1. (4 body) Sestrojte rovnice tečny funkce

$$f(x) = x - \sqrt[3]{1-x^2}$$

v bodech 0 a 1.

Okruh 5. Průběh funkce

1. (7 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = |x| - \frac{\log(x^2)}{x},$$

tj. nalezněte lokální a globální extrémy, rozhodněte o monotonii funkce, nalezněte limity v krajních bodech definičního oboru, rozhodněte o konvexnosti a konkávnosti funkce, nalezněte asymptoty a nakreslete graf f .

2. (3 body) Pro funkci $f(x)$ z předchozího příkladu určete počet řešení rovnice

$$f(x) = a$$

v závislosti na hodnotě parametru $a \in \mathbb{R}$.