作用素環ノート

高柳　旋

2025 年 11 月 16 日

目次

公式

これは定義・定理・公式を書くときの箱です。
式変形が苦手な人は、この箱だけを追って行けば大体の内容は掴めます。

要請

これは要請を書くときの箱です。
要請とは、物理の理論を構築する上で仮定する必要がある事柄で、自然現象から類推できるものを指します。

第1章

位相空間

まずは、位相空間を定義する。

定義：位相空間

集合 X がある。X の部分集合 A を集めた集合 $\mathcal{P}(X) \coloneqq \{A \mid A \subset X\}$ がある。さて、位相(開集合系)$\mathcal{T}_X \subset \mathcal{P}(X)$ とは、

$$X \in \mathcal{T}_X, \emptyset \in \mathcal{T}_X$$

$$O_1, O_2, \ldots, O_n \in \mathcal{T}_X \implies \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{T}_X$$

$$^\forall \lambda \in \Lambda, \quad O_\lambda \in \mathcal{T}_X \implies \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \in \mathcal{T}_X$$

なる3条件を満たすもののことである。ここで Λ は、添え字の集合を表し、可算無限集合や非可算無限集合を代表するものである。

cap が有限であるのに対し、cup が無限である理由は、次のように解釈すれば良い。そもそも位相 (開集合系) は開集合の集まりを作りたいというモチベーションのもと、定義されている。仮に cap を無限和にしてしまうと、次のような具体例 ($\mathbb{R}$ に位相を入れて開集合・閉集合を定義したとする場合) に対して条件が満たされなくなる。

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$$

という風にできてしまい、左辺は閉区間であるのに対し、右辺は開区間の cap である。従って、cap を無限和にすると開集合系の枠外に出てしまうことが分かる。

定義：連続写像

$(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ を位相空間及びその開集合系とする。写像 $f : X \to Y$ が連続写像とは、

$$^\forall B \in \mathcal{T}_Y, f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$$

が成り立つことである。

定義：位相の強弱

集合 X に位相 $\mathcal{T}, \mathcal{F}$ が定まっている時、

$$\mathcal{T} \text{ は } \mathcal{F} \text{ より強い} :\Leftrightarrow \mathcal{F} \subset \mathcal{T}$$

と定義する。またこの時、$\mathcal{F}$ は $\mathcal{T}$ より弱いという。

命題：位相の強弱と連続性

位相空間 $(X, \mathcal{T})$,$(X, \mathcal{F})$ がある時、

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \Leftrightarrow f : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{F}) \text{ は連続写像である}$$

が成り立つ。

第 2 章

関数解析

ベクトル空間を定義する。

定義：$\mathbb{C}$ 上ベクトル空間

集合 V と複素数体 $\mathbb{C}$ を用意する。さて、V が $\mathbb{C}$ 上ベクトル空間であるとは、ベクトル加法とスカラー乗法という 2 種類の演算が次のように定義される必要がある。
${}^\forall x, y \in V$ に対して、ベクトルの和 $x + y \in V$ が定まり、Abel 群となる：

(1) (結合律)

$$^\forall x, y, z \in V, (x + y) + z = x + (y + z)$$

(2) (単位元の存在)

$$^\exists 0 \in V, {}^\forall x \in V, x + 0 = 0 + x = x$$

(3) (逆元の存在)

$$^\forall x \in V, {}^\exists x' \in V \quad \text{s.t.} \quad x + x' = x' + x = 0$$

このような x' を $-x$ と書く。

(4) (可換性)

$$x + y = y + x$$

また、${}^\forall x, y \in V, a, b \in \mathbb{C}$ について、スカラー倍 $ax \in V$ が定まり、以下を満たす。

(5) $(a + b)x = ax + bx$
(6) $a(x + y) = ax + ay$
(7) $(ab)x = a(bx)$
(8) $1x = x$

ベクトル空間の元同士の間に二項関係を入れたものを代数と呼ぶようである。このノートで代数 (algebra) と言えば、以下で定義する多元環を指すものとする。

定義：$\mathbb{C}$ 上の代数 (多元環)

ベクトル空間の元 $x, y \in V$ に対して、二項演算 $xy \in V$ が定まり、以下の条件を満たすとき V は $\mathbb{C}$ 上の代数と呼ばれる。$x, y, z \in V, c \in \mathbb{C}$ に対して、

(i) $x(yz) = (xy)z$

(ii) $x(y+z) = xy + xz$

(iii) $(x+y)z = xz + yz$

(iv) $c(xy) = (cx)y = x(cy)$

すなわち、環のような積を有するベクトル空間のことを代数と呼ぶ。