特殊相対性理論ミニマム

高柳　旋

2025 年 6 月 13 日

目次

第 1 章　ローレンツ変換 3

1.1 基本原理 3

1.2 慣性系同士を結ぶ変換 5

1.3 ガリレイ変換 6

1.4 ローレンツブースト 7

1.5 光速度不変の原理の言い換え 10

1.6 ローレンツ変換の性質 13

1.7 世界間隔と固有時 14

第 2 章　相対論的な物理法則 16

2.1 基底の変換としての特徴付け 16

2.2 相対論的な場 17

記号の意味

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\} =$（自然数全体の集合）
- $\mathbb{Z} =$（整数全体の集合）
- $\mathbb{R} =$（実数全体の集合）
- $\mathbb{R}^{d+1} =$（$d+1$ 次元ユークリッド空間：d は空間、1 は時間の次元を表す）
- $a \in \mathbb{R}$: a は $\mathbb{R}$ に属する
- $a \coloneqq b$: a を b で定義する
- $\boldsymbol{v}$：ベクトル（bold 表記：空間成分のみとする）
- $\vec{v}$：ベクトル（arrow 表記）（どちらの表記も 3 次元ベクトルを表すことにする）
- $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$：ベクトルの内積
- $|\boldsymbol{v}| \coloneqq \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}$：ベクトルの絶対値

公式

これは定義・定理・公式を書くときの箱です。
式変形が苦手な人は、この箱だけを追って行けば大体の内容は掴めます。

要請

これは要請を書くときの箱です。
要請とは、物理の理論を構築する上で仮定する必要がある事柄で、自然現象から類推できるものを指します。

第 1 章

ローレンツ変換

1.1 基本原理

特殊相対論の発見に関わる歴史的経緯や重要な実験などはひとまず置いて、ここではよく議論される事柄の式変形のみを扱うことにする。

Einstein は二つの原理を掲げて特殊相対論を構築した。一つは「特殊相対性原理」、もう一つは「光速度不変の原理」である。特殊相対性原理が求める要請は「全ての物理法則はどのような慣性系で見ても不変」、光速度不変の原理が求める要請は「光速度はどのような慣性系で見ても不変」というものである。言葉の意味などを確認しつつ、この原理を説明していく。ここで考える物理法則とは、とりあえず古典論を指すことにする。すなわち、

- Newton の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}$$

- Maxwell 方程式：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} &= 0 \\
\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} &= \mu_0\boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

を考える。また、慣性系とは以下で定義する。

定義：慣性系

外力の加わっていない粒子（自由粒子）が、等速直線運動をし続けるような座標系のことを慣性系という。

座標系という言葉の意味も決めておく必要がある。

定義：座標系

物理における座標系とは、

- 空間に備わった基底（x 軸 y 軸 z 軸みたいなやつ）
- 観測者の位置（原点の位置）

という二つを与えて決まるものである。

座標系を与えることで、ベクトルの成分（つまり基底にかけられた係数）を書き下すことができる。ベクトルの成分を並べたものを**座標**という

Newton 力学では空間座標と時間は切り離して考える。したがって、座標は数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ 上に与える。

最も単純な慣性系はデカルト座標系である。すなわち、自然に備わる正規直交基底

$$\boldsymbol{e}_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を有しており、観測者は $(0,0,0)$ で静止している座標系である。この座標系での位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ は、

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と表せられる。Newton 力学ではそれぞれの成分 x_i が時間 t に依存して変化し、時間 t は独立に与えられるという立場を取る。

さて、Einstein が与えた特殊相対性理論の二つの原理を書き下す。

要請 1：特殊相対性原理

全ての物理法則はどのような慣性系で見ても不変である。
すなわち、ある慣性系の座標を別の慣性系の座標へ変換したときに物理の基礎方程式の形が不変に保たれることを要請する。

要請 2：光速度不変の原理

光速度はある有限値 c を取り、c はどのような慣性系で見ても不変である。
すなわち、ある慣性系の座標を別の慣性系の座標へ変換したときに光速度が不変に保たれることを要請する。

この要請を用いて理論を展開していくが、まずは慣性系を別の慣性系へ移す写像を構成する必要がある。

1.2　慣性系同士を結ぶ変換

慣性系同士を結ぶ変換を構成することを考える。その後、要請 1,2 をきちんと満たす場合（特殊相対論的な場合）に制限する。変換の前後で余分な加速度が生まれてしまうと、余分な力が生じて等速運動の範疇を超えてしまう。

まず、不連続・微分不可能な座標変換は排除される。物理の基礎方程式は微分方程式で与えられるが、不連続・微分不可能な座標変換を行うと基礎方程式を満たさなくなって要請 1 に矛盾するためである。

慣性系同士を結ぶ変換：性質 1

慣性系同士の座標変換は連続かつ微分可能である。
すなわち、慣性系 S 系から S' 系への変換：

$$x'^{\mu} = f^{\mu}(x^{\nu})$$

が連続かつ微分可能である。（できれば C^{∞} 級だけを考えたい...）

慣性系を保つという性質は、慣性系の定義より、もともと加速度ゼロだった粒子が座標変換後に加速度を持たないという風に言い換えることができる。つまり、

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{\nu}}{\mathrm{d}t^2} = 0 \implies \frac{\mathrm{d}^2 x'^{\mu}}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

が成り立っていればよい。$x^{\nu} = (t, x, y, z)$ を変数に持つ C^{∞} 級関数 f^{μ} を考える。$x^{\nu} = (t, x, y, z)$ は t で二階微分したらゼロになることを仮定する。f^{μ} をマクローリン展開すると、多項式に書き換えられる。係数は実定数なので $c^{\mu}, c^{\mu}_{0}, ...$ などという適当な記号で置いて、

$$f^{\mu}(t, x, y, z) = c^{\mu} + c^{\mu}_{0}t + c^{\mu}_{1}x + c^{\mu}_{2}y + c^{\mu}_{3}z + c^{\mu}_{01}tx + c^{\mu}_{02}ty + \ldots$$

第六項以降は二次以上の多項式である。これを t で二階微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}^2 f^{\mu}}{\mathrm{d}t^2} = 2c^{\mu}_{0}1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2c^{\mu}_{02}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \ldots$$

慣性系を保つためには、$\frac{\mathrm{d}^2 f^{\mu}}{\mathrm{d}t^2} = 0$ でなければいけないので、$c^{\mu}, c^{\mu}_{0}, c^{\mu}_{1}, c^{\mu}_{2}, c^{\mu}_{3}$ 以外の係数は全てゼロでなければいけない。したがって、座標変換関数 f^{μ} は線形変換 + 並進変換の形で書ける。

慣性系同士を結ぶ変換：性質 2

慣性系同士の座標変換は線形変換 + 並進という形で書ける。
すなわち、慣性系 S 系から S' 系への変換は

$$x'^{\mu} = A^{\mu}_{\nu}x^{\nu} + a^{\nu}$$

で書ける。ただし A^{μ}_{ν}, a^{ν} は全て定数である。

これを行列の形で書くと、

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0_0 & A^0_1 & A^0_2 & A^0_3 \\ A^1_0 & A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_0 & A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_0 & A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$$

となる。これは慣性系を保つ座標変換の最も一般的な形でアフィン変換と呼ばれる。アフィン変換ができることは、

- 慣性系を別の慣性系へ移す。

だけである（つまり要請 1,2 どちらも完全には満たしていない)。

1.3 ガリレイ変換

アフィン変換の中で特別な例として、ブースト変換を考えてみる。ある慣性系を、速度を持った観測者から見た座標系へ変換することを**ブースト変換**という。Newton 運動方程式を不変に保つブースト変換は**ガリレイ変換**と呼ばれ、要請 1,2 を満たすようなブースト変換はローレンツ・ブースト変換と呼ばれる。

Newton 力学的な世界観では時間と空間は切り離して考える。三次元空間の原点から見た座標 $\boldsymbol{x}$ を x 方向に速さ V で等速運動する観測者から見たものを $\boldsymbol{x'}$ と書く。この変換は、

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x - Vt \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と書ける。線形変換なのでアフィン写像である。ガリレイ変換の性質をいくつか示す。

ガリレイ変換：性質 1

自由粒子 ($\boldsymbol{F} = 0$) の Newton 運動方程式はガリレイ変換によって不変である。

証明. y, z 座標は変わらないので t, x のみの変換を考える。時間微分の変換は、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}$$

従って、

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x'}}{\mathrm{d}t'^2} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x'}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

よって運動方程式はガリレイ変換に対して不変。 ■

ガリレイ変換：性質 2

光の速度はガリレイ変換によって変化する。

証明. 時刻 $t=0$ で原点から光が放出されたとする。時刻 t での光の波面の座標を S 系で (x,y,z) と与える。このとき、光の速度を c と置くと、

$$c=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right|=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

一方、ガリレイ変換で与えられる S' 系の光の波面の座標は (x',y',z') と与え、このときの光の速さを c' とすると、

$$c'=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x'}}{\mathrm{d}t}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}-V\boldsymbol{e_1}\right|=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-V\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

となるため、$V>0$ なら $c'<c$、$V<0$ なら $c'>c$ となって光速度が変わる。 ■

よってこの変換は要請 2 を満たさないことが分かる。

1.4 ローレンツブースト

光速度不変の原理を満たすようなブースト変換を構成する。そのような変換をローレンツブーストという。ローレンツ変換という言葉は、ローレンツブーストと空間回転を組み合わせた変換として後で定義する。簡単のため、観測者は x 軸方向にのみ動くとする。S' 系の観測者の速度を V とおく。ローレンツブーストも慣性系同士を繋ぐ変換であるのでアフィン変換から出発する。座標に依らない定ベクトルの足し算は時空の並進変換しか与えないので、ここではゼロとする。観測者は x 軸方向にしか動かないので y,z は不変とする。従って、

$$\begin{pmatrix}t'\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^0_0&A^0_1&0&0\\A^1_0&A^1_1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

に現れる 4 つの係数の決定に帰着する。分かりやすくするため y,z 成分を除いて、係数は A,B,C,D と置き直す。すると、

$$\begin{pmatrix}t'\\x'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}At+Bx\\Ct+Dx\end{pmatrix}\tag{1.1}$$

のように書ける。この係数を光速度不変の原理から決定する。まずは光速度不変の原理の書き換えを行う。今は加速度系を考えないので、$v^i=x^i/t$ と書ける。従って光の波面の座標 (x,y,z) に対して、

$$\begin{aligned}c^2&=(x/t)^2+(y/t)^2+(z/t)^2\\\therefore\quad 0&=-c^2t^2+x^2+y^2+z^2\end{aligned}\tag{1.2}$$

を得る。これは光の波面（球面）が満たす方程式である。つまり光速度不変の原理とは、式 (1.2) の形を不変に保つことだと言い換えられる。

ローレンツブースト

式 (1.1) で与えられる x 方向のブースト変換の中で、光速度不変の原理を満たすものは、

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(-\beta ct + x) \end{aligned}$$

と書ける。ただし、

$$\beta \coloneqq \frac{V}{c}, \quad \gamma \coloneqq \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

である。

証明. まずは原点の x 座標の変換について考える。S' 系の原点の座標は S' 系から見ると $x' = 0$、S 系から見ると $x = Vt$ である。これを式 (1.1)（下）に代入して、

$$0 = Ct + DVt \quad \therefore \quad C = -DV$$

求める変換は、

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} At + Bx \\ D(-Vt + x) \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

と書ける。光速度不変の原理と式 (1.3) より、

$$\begin{aligned} -c^2t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 &= -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \\ \therefore \quad -c^2t'^2 + x'^2 + y^2 + z^2 &= -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \\ \therefore \quad -c^2(At + Bx)^2 + \big(D(-Vt + x)\big)^2 &= -c^2t^2 + x^2 \\ \therefore \quad \big(-c^2A^2 + D^2V^2\big)t^2 - 2\big(ABc^2 + D^2V\big)tx + \big(-c^2B^2 + D^2\big)x^2 &= -c^2t^2 + x^2 \end{aligned}$$

この関係が任意の t, x で成り立つため、t^2, tx, x^2 の係数を比較して、三元連立方程式を得る。

$$\begin{cases} -c^2A^2 + D^2V^2 = -c^2 \\ ABc^2 + D^2V = 0 \\ -c^2B^2 + D^2 = 1 \end{cases}$$

方程式を解くと、

$$
\begin{cases}
-c^2A^2+D^2V^2=-c^2 \\
ABc^2+D^2V=0 \\
-c^2B^2+D^2=1
\end{cases}
\iff
\begin{cases}
-c^2A^2+\left(1+c^2B^2\right)^2V^2=-c^2 \\
ABc^2+\left(1+c^2B^2\right)^2V=0 \\
D^2=1+c^2B^2
\end{cases}
$$

$$
\iff
\begin{cases}
-c^2V^2\left(\frac{1}{c^2B}+B\right)^2+\left(1+c^2B^2\right)^2V^2=-c^2 \\
A=-V\left(\frac{1}{c^2B}+B\right) \\
D^2=1+c^2B^2
\end{cases}
$$

$$
\iff
\begin{cases}
B=-\frac{\beta\gamma}{c}=-\frac{V}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} \\
A=-V\left(\frac{1}{c^2B}+B\right) \\
D^2=1+c^2B^2
\end{cases}
$$

$$
\iff
\begin{cases}
B=-\frac{\beta\gamma}{c} \\
A=\gamma \\
D=\gamma
\end{cases}
$$

となる。ただし、$V=0$ の時に $x=x', t=t'$ とするために $A, D>0$ と符号を決め、$B<0$ とした。この結果を式 (1.3) に代入して、一行目を c 倍すれば、

$$
\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct-\beta\gamma x \\ -\beta\gamma ct+\gamma x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}
$$

を得る。 ■

こうして、光速度を不変に保つようなブースト変換が得られた。x 方向のローレンツブーストを時間も含めた 4×4 数ベクトルの変換行列として表すと、

$$
\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}
$$

と書ける。同様に y, z 方向のローレンツブーストは、

$$
\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}
$$

と書ける。

ローレンツブーストができることは、

- 慣性系 S を別の慣性系 S' へ移す。
- S' 系の観測者が速度 V を持つ場合の座標の変換を与える。
- 光速度を不変に保つ。

である。最後に x 方向ローレンツブーストの逆変換 (逆行列) を求める。

逆ローレンツブースト

ローレンツブーストにより移った座標 (ct', x') をもとの (ct, x) に対応付けるためには、

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

とすればよい。

証明. 2×2 行列の逆行列の公式：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

を用いて、

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\gamma}{\gamma^2(1-\beta^2)} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$$

■

1.5 光速度不変の原理の言い換え

光速度不変の原理の三つの言い換えを紹介する。時刻 $t = 0$ に原点から光が放出されて時刻 t では x, y, z に到達しているものとする。このとき、ある座標変換に対して光速度が不変であることは、以下のように言い換えられる。

- 光速度 (定義通り) が不変

$$c = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}\right)^2}$$

- 光の波面の方程式が不変

$$0 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -c^2t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2$$

- ダランベルシアンが不変[*1]

$$\Box := -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}$$

[*1] 波動方程式を説明する章で示す。

これらを眺めていると、特殊相対性理論が要求する座標変換が本質的に何を満たせばいいのかが分かってくる。そのために、時間と空間を等価に扱える時空座標の四次元表示を与える。

四元ベクトル

時空点を四次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の要素として、

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

と与える。これを四元ベクトルという。

四成分を代表して、$x^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$ と書いたものを四元ベクトルと呼ぶこともある。

また、添え字が上についているベクトルを**反変ベクトル**と呼ぶ。

　ボールド表記で書かれたベクトル $\boldsymbol{x}$ は空間三次元のベクトルであり、通常表記 x では四元ベクトルを表すことに注意する。四元ベクトルを用いて、光の波面の方程式を書き出すと、

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \\ &= {}^{\mathrm{t}}x\eta x \end{aligned} \tag{1.4}$$

という二次形式で書けることが分かる。ただし、

$$\eta \coloneqq \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

と定義した。η はミンコフスキー計量と呼ばれ、成分のみで $\eta_{\mu\nu}$ 書くことが多い。式 (1.4) は、ユークリッド空間上に備えられた標準内積とは似て非なるものである。標準内積を考えるならば、どの成分も符号が反転することはないが、この式では第 0 成分の符号が反転している。また、

$$x_\mu \coloneqq \left({}^{\mathrm{t}}x\eta\right)_\mu$$

として、これを**共変ベクトル**と呼ぶことにすると、式 (1.4) は、

$${}^{\mathrm{t}}x\eta x = x^\nu \eta_{\nu\mu} x^\mu = x_\mu x^\mu$$

と書ける。ただし、同じ上付き添え字と下付き添え字が現れたら和を取るという**縮約記法**を用いた。さて、この量を新しい内積として定義する。この内積の備わった空間をミンコフスキー時空という。

ミンコフスキー時空

四次元の数ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ に、以下のような内積 (x, y) を持たせたものをミンコフスキー時空 $\mathcal{M}$ と呼ぶ。

$$(x, y) \coloneqq x_\mu y^\mu = x^\nu \eta_{\nu\mu} y^\mu$$

この内積をミンコフスキー内積と呼ぶ。

ブースト変換に限らず、一般にミンコフスキー内積を不変に保つような (慣性系同士を繋ぐ) 座標変換のことを**ローレンツ変換**と呼ぶことにする。ローレンツ変換により、形の変わらないものを**ローレンツ不変量**と呼ぶ。ローレンツ不変量の簡単な例が時空座標のミンコフスキー内積である。ミンコフスキー時空における諸性質を列挙する。

ミンコフスキー計量の逆行列

ミンコフスキー計量 η の逆行列は η 自身である。

証明.

$$\eta\eta = E$$

ただし E は 4×4 単位行列。よって $\eta^{-1} = \eta$ が成り立つ。この関係を E の成分を δ^μ_ν として成分表示すると、$\eta^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu$ となる。 ■

添え字の上げ下げ規則

上付き添え字成分を下付き添え字成分にするためには、

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$$

とすればよく、その逆は、

$$x^\rho = \eta^{\rho\mu} x_\mu$$

となる。

証明. 最初の式は定義通りである。この式の両辺に $\eta^{\rho\mu}$ をかけて二式目を得る。

$$\eta^{\rho\mu} x_\mu = \eta^{\rho\mu}\eta_{\mu\nu} x^\nu = \delta^\rho_\nu x^\nu = x^\rho$$

■

1.6 ローレンツ変換の性質

ローレンツ変換を表す行列を Λ と書き、その成分を Λ^μ_ν とする。時空座標のローレンツ変換は、

$$x' = \Lambda x \quad \text{or} \quad x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

と書ける。ローレンツ変換が満たすべき条件は光速度を不変に保つこと、あるいはミンコフスキー内積を不変に保つことであると言った。そして、その条件は次の最も簡潔な表記に集約される。

ローレンツ変換の満たすべき式

ローレンツ変換 Λ の満たすべき式は、

$$^{\mathrm{t}}\Lambda\eta\Lambda = \eta$$

が必要十分である。

証明. ローレンツ変換によって反変ベクトルは次のように変換される。

$$x' = \Lambda x \quad \text{or} \quad x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

これに計量 η を掛けて転置を取れば共変ベクトルが得られるのだった。もしくは添え字の上げ下げ則により成分を与えれば、

$$^{\mathrm{t}}(\eta x') = {}^{\mathrm{t}}(\eta\Lambda x) \quad \text{or} \quad x'_\mu = \eta_{\mu\rho}x'^\rho = \eta_{\mu\rho}\Lambda^\rho_\nu x^\nu$$

これによって S' 系と S 系においてそれぞれ時空座標のミンコフスキー内積を与えると、

$$\begin{aligned}(x', x') &= {}^{\mathrm{t}}(\eta x')x' = {}^{\mathrm{t}}x\,{}^{\mathrm{t}}\Lambda\,{}^{\mathrm{t}}\eta\Lambda x \\ (x, x) &= {}^{\mathrm{t}}(\eta x)x = {}^{\mathrm{t}}x\,{}^{\mathrm{t}}\eta x \\ &\text{or} \\ x'_\mu x'^\mu &= \eta_{\mu\rho}\Lambda^\rho_\sigma x^\sigma \Lambda^\mu_\nu x^\nu \\ x_\nu x^\nu &= x^\sigma \eta_{\sigma\nu} x^\nu\end{aligned}$$

ローレンツ変換によってミンコフスキー内積が保存されると仮定すれば、
$(x', x') = (x, x) \quad \text{or} \quad x'_\mu x'^\mu = x_\nu x^\nu$ が成り立つ。時空座標 x は任意に与えられるので係数比較して、

$$^{\mathrm{t}}\Lambda\eta\Lambda = \eta \quad \text{or} \quad \eta_{\mu\rho}\Lambda^\rho_\sigma\Lambda^\mu_\nu = \eta_{\sigma\nu}$$

が得られる。ここでミンコフスキー計量の転置不変性 ($^{\mathrm{t}}\eta = \eta$) を用いた。逆にこの関係を認めれば内積を保存することが分かるので必要十分である。 ■

1.7 世界間隔と固有時

ミンコフスキー時空上のある点を、ある粒子の時刻と位置を与えるものとして解釈してみよう。時刻と座標をセットにしたものをここでは事象と呼ぶ。事象を具体的に書き下すと、

- 原点 $(0,0,0,0) \to$ 粒子が時刻 0 で原点に存在するという事象
- 時空点 $(ct,x,y,z) \to$ 粒子が時刻 t で空間座標 (x,y,z) に存在するという事象

事象の差の絶対値の二乗を世界間隔と呼ぶことにする。ただし x の絶対値とはミンコフスキー内積のルートを取ったもの $\sqrt{(x,x)}$ と定義する。ある事象 x とそこから微小にずらした事象 $x+\mathrm{d}x$ の世界間隔 $(\mathrm{d}s)^2$ は、

$$(\mathrm{d}s)^2 := -c^2(dt)^2 + (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2 = (dt)^2\big(v^2 - c^2\big)$$

と書ける（ただし粒子の速さを v と置いた）。これは前節の議論より、ローレンツ不変量である。このことからまず、光速度と粒子の速度の大小関係はローレンツ変換によって変えることができないことが分かる。つまり、光速を超えない速度を持つ粒子は別の慣性系から見ても光速以上で動くようなことは決してない。また、光速以下で動く粒子がたどり着ける事象と絶対にたどり着けない事象領域があることが分かる。こうして時空の領域を分類することができる。

- $(\mathrm{d}s)^2 < 0, dt > 0 \to$ 原点を出発した光速以下の粒子が、将来たどり着くことのできる事象 (絶対未来)
- $(\mathrm{d}s)^2 < 0, dt < 0 \to$ 原点で観測された光速以下の粒子が、過去にいたとしても矛盾しないような事象 (絶対過去)
- $(\mathrm{d}s)^2 = 0 \to$ 原点を出発した光が到達できる事象 (光的領域)
- $(\mathrm{d}s)^2 > 0 \to$ 原点を出発した光速以下の粒子が決して到達できない事象 (空間領域)

光速以下の粒子の運動を考える場合、粒子自身に備わった時計が与える時刻として固有時というものを考える。$(\mathrm{d}s)^2$ を用いて時間の次元を持つ量を作り出す。$(\mathrm{d}s)^2 < 0$ であるので、

$$\mathrm{d}\tau := \sqrt{-\frac{(\mathrm{d}s)^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

とすればよい[*2]。粒子自身に備わった時間が τ である。従って、動いている粒子の時間は遅れることになる。また固有時を使って相対論的に力学を再構成することも可能であるが省略する。

最後に、慣性系をつなぐ変換であって、世界間隔を保存するような変換はローレンツ変換よりも広いクラスに取れることを紹介する。その変換はポアンカレ変換と呼ばれる。

[*2] 考察不足です。雑な導入でごめんなさい

ポアンカレ変換

ローレンツ変換による座標変換に加えて、時空の観測者 (原点) を定ベクトルだけずらす操作 (時空並進) を加えた変換：

$$x' = \Lambda x + a \quad \text{or} \quad x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$$

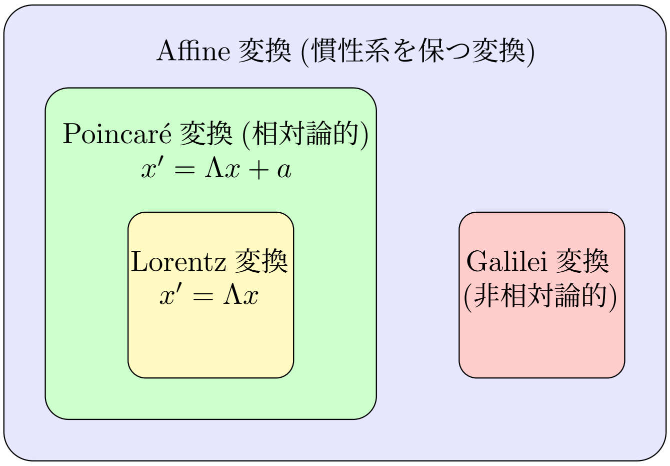
のことを、ポアンカレ変換と呼ぶ。
ポアンカレ変換は世界間隔を不変に保つ。

証明.

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x', \mathrm{d}x') = (\Lambda\,\mathrm{d}x, \Lambda\,\mathrm{d}x) = (x, x)$$

ただし、a が定ベクトルであることと、ミンコフスキー内積のローレンツ不変性を用いた。 ■

この章の締めくくりとして、慣性系を保つ変換たちを拙い図でまとめてみよう。



第 2 章

相対論的な物理法則

ここでの「相対論的」という言葉はあくまで「特殊相対論的」という意味である。

2.1　基底の変換としての特徴付け

多くの本はローレンツ変換を成分表示で議論するのが当たり前になっているが、ずっとこれを続けているとどこからともなくローレンツ変換の行列成分が出てくるような違和感を覚えるかもしれない。そこで (混乱したら申し訳ないが) 基底の変換則としてローレンツ変換を特徴付けてみる。

ミンコフスキー時空 $\mathcal{M}$ 上の基底を、

$$\boldsymbol{e}_0 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で与える。代表して $\boldsymbol{e}_\mu$, $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ と書く。ここで二つのことに注意する。

- $\boldsymbol{e}_\mu$ は下付き添え字だが $\mathcal{M}$ 上のベクトル（反変ベクトル）であること
- これを用いて任意の $x \in \mathcal{M}$ が $x = x^\mu \boldsymbol{e}_\mu$ と書くことができるが、これは内積ではないため符号は出てこないし、ローレンツ不変でもないこと

さて、時空座標を基底で展開した場合のローレンツ変換は以下のようになる。

$$x' = \Lambda x = x^0 \Lambda \boldsymbol{e}_0 + x^1 \Lambda \boldsymbol{e}_1 + x^2 \Lambda \boldsymbol{e}_2 + x^3 \Lambda \boldsymbol{e}_3$$

各成分である $x^0, ..., x^3$ は実数なので行列は通り抜けて基底にのみかかる。そこで基底のローレンツ変換を今まで通り成分で導く。

$$(\Lambda \boldsymbol{e}_\mu \text{の第 } \nu \text{ 成分}) \coloneqq (\Lambda \boldsymbol{e}_\mu)^\nu = \Lambda^\nu_\rho (\boldsymbol{e}_\mu)^\rho = \Lambda^\nu_\rho \delta^\rho_\mu = \Lambda^\nu_\mu$$

となるから、

$$x'^\nu = (\Lambda x)^\nu = x^\mu (\Lambda \boldsymbol{e}_\mu)^\nu = x^\mu \Lambda^\nu_\mu$$

となって、今まで考えていたローレンツ変換に一致する。従って、

$$\Lambda x = x^\mu \Lambda^\nu_\mu \boldsymbol{e}_\nu$$

を得る。以上まとめて、

基底のローレンツ変換

ミンコフスキー空間の標準基底 $\boldsymbol{e}_\mu$ をローレンツ変換すると、

$$\boldsymbol{e}_{\mu'} = \Lambda^\nu_\mu \boldsymbol{e}_\nu$$

となる。

これによって、ローレンツ変換により変換されるのは座標 (成分) ではなく基底であると考えることが本質的であると分かる。また、次の性質も重要である。

基底同士の内積

ミンコフスキー空間の標準基底 $\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}_\nu$ で内積を取ると、

$$(\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}_\nu) = \eta_{\mu\nu}$$

となり、ミンコフスキー計量が得られる。

証明. ミンコフスキー内積の定義より自明。 ■

ちなみにユークリッド空間で用いられる計量は $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta^i_j$ なので内積を取るときに符号の変化が起こらない。

2.2 相対論的な場

相対論的な (古典) 物理の理論を展開するにあたって、物理量 (場) をローレンツ変換に対する変換性で分類すると見通しがよい。一般的ではないものの古典論においては有用だと思われる定義を与える。

相対論的な (古典) 場の定義

ミンコフスキー時空上の点 X を考える。ローレンツ変換 Λ で渡り合える基底 $\{\boldsymbol{e}_\mu\}, \{\boldsymbol{e}'_\mu\}$ を用意し、同一点 X の成分表示を二種類与える：

$$x = x^\mu \boldsymbol{e}_\mu, \quad x' = x'^\mu \boldsymbol{e}_{\mu'}$$

ミンコフスキー時空 $\mathcal{M}$ からあるベクトル空間 V への写像 ϕ が次の条件を満たすとき場と呼ばれる：

- ϕ はローレンツ変換によって関数形を ϕ' に変える。

- しかし同一点で比較すればある $\dim V \times \dim V$ 行列の掛け算を除いて一致する。

$$\phi'(x') = D(\Lambda)\phi(x)$$

特に $V = \mathcal{M}^{\otimes n}$ と与えれば実数成分の場を構成できる。ただし、

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{\otimes 0} &\coloneqq \mathbb{R} \\
\mathcal{M}^{\otimes 1} &\coloneqq \mathcal{M} \\
\mathcal{M}^{\otimes 2} &\coloneqq \mathcal{M} \otimes \mathcal{M} \\
&\cdots
\end{aligned}$$

であり、$\otimes$ はテンソル積である。名前のついているものを列挙すると、

$$\begin{aligned}
\text{スカラー場 } f : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} &&; x \longmapsto f(x) \\
\text{ベクトル場 } A : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} &&; x \longmapsto A(x) = A^{\mu}(x)\boldsymbol{e}_{\mu} \\
\text{二階テンソル場 } F : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M}^{\otimes 2} &&; x \longmapsto F(x) = F^{\mu\nu}(x)\boldsymbol{e}_{\mu} \otimes \boldsymbol{e}_{\nu}
\end{aligned}$$

である。スカラーやベクトルが $0, 1$ 階のテンソルと呼ばれるのはこのためであると思われる。

ここで簡単に示せるが奥が深い関係式を紹介する。

$D(\Lambda)$ の満たす式

同一時空点 X の座標をそれぞれ別の基底を用いて x, x', x'' と与える。x, x' 間のローレンツ変換を Λ、x', x'' 間のローレンツ変換を Λ' とする。このとき、

$$D(\Lambda\Lambda') = D(\Lambda)D(\Lambda')$$

が成り立つ。

証明. 場の定義に従って、

$$\phi(x') = D(\Lambda)\phi(x), \quad \phi(x'') = D(\Lambda')\phi(x')$$

これより、

$$\phi(x'') = D(\Lambda')D(\Lambda)\phi(x)$$

一方、$x'' = \Lambda' x' = \Lambda'\Lambda x$ より、

$$\phi(x'') = D(\Lambda'\Lambda)\phi(x)$$

よって示された。 ■

したがって、D はローレンツ変換同士の積の構造を保存する写像であることが分かる。実は、ローレンツ変換の集まりは群であることが知られており (ローレンツ群という)、上のような関係を満たす D は群の表現と呼ばれる。また、場 ϕ の終域 V は表現空間と呼ばれる。線形代数の言葉を

用いれば、D とは基底の変換を特徴づける表現行列である。したがって、本来はローレンツ群の表現 D と表現空間 V の組は同時に与えられ、それらの組を全て決定できれば相対論的な場を決定できたことになる。しかしその議論は難しいので省略して、この考え方が背後に潜んでいるような具体例を構成することにする[*1]。

説明が遅れたが、テンソル積空間を導入する。

定義：テンソル積空間

二つの計量付きベクトル空間 $\mathcal{M}^{(1)}, \mathcal{M}^{(2)}$ を考える。この間にテンソル積 $\otimes$ という演算を考える。$\otimes$ は以下の二つの規則を満たすものとして定義する。$x^{(1)}, w^{(1)} \in \mathcal{M}^{(1)}, \quad x^{(2)}, w^{(2)} \in \mathcal{M}^{(2)}, \quad a \in \mathbb{R}$

- 双線形性

$$
\begin{aligned}
(ax^{(1)}) \otimes x^{(2)} = ax^{(1)} \otimes x^{(2)} &= x^{(1)} \otimes (ax^{(2)}) \\
(x^{(1)} + w^{(1)}) \otimes x^{(2)} &= x^{(1)} \otimes x^{(2)} + w^{(1)} \otimes x^{(2)} \\
x^{(1)} \otimes (x^{(2)} + w^{(2)}) &= x^{(1)} \otimes x^{(2)} + x^{(1)} \otimes w^{(2)}
\end{aligned}
$$

- 下のような内積 (,) を持つ

$$
(x^{(1)} \otimes x^{(2)}, w^{(1)} \otimes w^{(2)}) = (x^{(1)}, w^{(1)})(x^{(2)}, w^{(2)})
$$

$\mathcal{M}^{(1)}, \mathcal{M}^{(2)}$ のベクトルのテンソル積を取ったもの、またそれらの線形結合で表されるベクトルを全て集めた空間はベクトル空間となる。これを、テンソル積空間といい、記号 $\mathcal{M}^{(1)} \otimes \mathcal{M}^{(2)}$ と書く。

特殊相対論の範囲内ではミンコフスキー空間同士のテンソル積しか考えないことにする。

さて、それぞれの場についてローレンツ変換に対する変換性を見てみよう。(既に相対論を学んでいる人は混乱するかもしれないが、ここでは最初にローレンツ変換されるのは基底のみで、基底にかかった変換因子を成分に押し付けることで成分の変換則を導くようにしている。)

スカラー場

表現行列が $D(\Lambda) = 1$ で与えられる場をスカラー場という。スカラー場は $\mathcal{M}$ 上の実関数 f を用いて表され、変換則は、

$$
f'(x') = f(x) \quad \text{or} \quad f'(\Lambda x) = f(x) \quad \text{or} \quad f'(x) = f(\Lambda^{-1}x)
$$

となる。

[*1] 表現論によって導入される場としてスピノル場が挙げられる

ベクトル場

スカラー場の変換則、および基底の変換則を用いてベクトル場の変換則を求めよう。ベクトル場は先ほど述べた写像 A を用いて、

$$A(x) = A^{\mu}(x)\boldsymbol{e}_{\mu}$$

と書ける。各成分はスカラー関数なのでスカラー場と同じ変換則を持つ。また基底の変換はローレンツ変換で与えられるのだから、

$$A'(x') = A^{\mu'}(x')\boldsymbol{e}_{\mu'} = A^{\mu}(x)\Lambda^{\rho}_{\mu}\boldsymbol{e}_{\rho} = \Lambda A(x)$$

よって表現行列は $D(\Lambda) = \Lambda$。この式を成分の変換則の式に書き換える (基底の変換則を成分側に押し付ける) と、

$$A^{\nu'}(x') = (A^{\mu}(x)\Lambda^{\rho}_{\mu}\boldsymbol{e}_{\rho})^{\nu} = A^{\mu}(x)\Lambda^{\rho}_{\mu}\delta^{\nu}_{\rho} = A^{\mu}(x)\Lambda^{\nu}_{\mu}$$

となって、物理の本でよく出てくる式を導くことができる。

二階テンソル場

最後に二階テンソルの変換則を導く。二階テンソル F は、

$$F(x) = F^{\mu\nu}(x)\boldsymbol{e}_{\mu} \otimes \boldsymbol{e}_{\mu}$$

と書ける。ベクトル場の時と同じようにまずは成分はスカラー場と同じ変換性を持たせて、基底だけを変化させてみる。

$$F'(x') = F^{\mu'\nu'}(x')\boldsymbol{e}_{\mu'} \otimes \boldsymbol{e}_{\nu'} = F^{\mu\nu}(x)\Lambda^{\rho}_{\mu}\Lambda^{\sigma}_{\nu}\boldsymbol{e}_{\rho} \otimes \boldsymbol{e}_{\sigma}$$

これを成分の変換則の関係式に書き換える。そこで、α, β 成分を抜き出してみることにする。

$$F^{\alpha'\beta'}(x') = (F^{\mu\nu}(x)\Lambda^{\rho}_{\mu}\Lambda^{\sigma}_{\nu}\boldsymbol{e}_{\rho} \otimes \boldsymbol{e}_{\sigma})^{\alpha\beta} = F^{\mu\nu}(x)\Lambda^{\rho}_{\mu}\Lambda^{\sigma}_{\nu}\delta^{\alpha}_{\rho}\delta^{\beta}_{\sigma} = F^{\mu\nu}(x)\Lambda^{\alpha}_{\mu}\Lambda^{\beta}_{\nu}$$

こうして成分の変換則が導けた[*2]。ここで、成分を抜き出すときに基底ベクトルとの内積を取る方法はユークリッド空間でしか使えないので注意する。三階以上のテンソルについても同様の導き方でできると思われる。

[*2] 物理ではどんな基底で展開されていようと、成分を並べたベクトルしか見ていないのでこのような成分の変換式の方が多用されている、という理解をしています。基底が変換される立場では成分はスカラー的な変換則を持つことにしているので、そこが違和感ですが...