

## Exercice 1

Donnée: Considérons une variable aléatoire  $X$  dont la fonction de densité est  $f_x(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq u \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Calculez les probabilités :

a)  $P(X = \frac{3}{4})$

La probabilité  $P(X = \frac{3}{4}) = 0$

b)  $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} du \\ &= \frac{u}{2} \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

c)  $P(X \leq \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x) dx &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} du \\ &= \frac{u}{2} \Big|_{-1}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

d)  $P(X^2 \geq \frac{1}{4})$

Premièrement, observons que le problème est équivalent à :  $P(|X| \geq \frac{1}{2})$ . Il s'en suit,

$$|X| \geq \frac{1}{2} \iff \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } X \geq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } X < 0. \end{cases} \text{ Finalement,}$$

$$\begin{aligned}
P(X^2 \geq \frac{1}{4}) &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} F(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 F(x)dx \\
&= \frac{u}{2} \Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}} + \frac{u}{2} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= -\frac{1}{4} - (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} - (\frac{1}{4}) \\
&= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

e)  $P(X \in A)$  où  $A = [-\frac{1}{2}, 0] \cup [\frac{3}{4}, 2]$

$$\begin{aligned}
P(X \in A) &= \int_{-\frac{1}{2}}^0 F(x)dx + \int_{\frac{3}{4}}^1 F(x)dx \\
&= \frac{u}{2} \Big|_{-\frac{1}{2}}^0 + \frac{u}{2} \Big|_{\frac{3}{4}}^1 \\
&= 0 - (-\frac{1}{4}) + \frac{1}{2} - (\frac{3}{8}) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

## Exercice 2

Donnée: Considérons une variable aléatoire  $\mathcal{X}$  dont la fonction de densité est  $f_x(u) = \begin{cases} e^{-u} & \text{si } u \geq 1 \\ x & 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Calculez les probabilités :

- a) Déterminer la fonction de répartition de  $\mathcal{X}$  et tracer son graphe
- b) Calculer les probabilités  $P(\mathcal{X} < 4)$  et  $P(1 < \mathcal{X} < 2.5)$
- c) Déterminer le nombre réel positif  $x$  tel que  $P(\mathcal{X} > x) = 0.1$

## Exercice 3

Donnée:

## Exercice 4

Donnée:

## Exercice 5

Donnée: