Thème : probabilités élémentaires

Solution de la Série 1

Exercice 1

Donnée: *Un groupe de consommateurs a réalisé une étude pour analyser le service offert par 200 employés de divers restaurants. On s'intéresse à une possible relation entre la qualité du service et la qualification du personnel (diplômé d'une école hôtelière ou non). Les résultats de l'enquête figurent dans le tableau ci-dessous :*

	Bon service	*mauvais service*
Diplôme	*61*	*28*
Sans diplôme	*30*	*81*

Rappel : $P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$

a) *Calculer les probabilités d'avoir choisi une personne :*

1. dont le service est qualifié bon.

   Ici on réunis les bons services des personnes avec et sans diplôme. On a donc :
   $$\text{Cas fav.} = 61 + 30 = 91$$
   Ensuite on calcul les cas possibles. On a donc :
   $$\text{Cas tot.} = 61 + 28 + 30 + 81 = 200$$
   On applique la formule et on obtient :
   $$\frac{91}{200} = 0,455$$

2. non diplômée.

   Ici on réunis les personnes sans diplôme, peut importe la qualité du service. On a donc :
   $$\text{Cas fav.} = 30 + 81 = 111$$
   Ensuite on calcul les cas possibles. On a donc :
   $$\text{Cas tot.} = 61 + 28 + 30 + 81 = 200$$
   On applique la formule et on obtient :
   $$\frac{111}{200} = 0,555$$

3. diplômé dont le service est bon.

   Ici on réunis les personnes avec diplôme et une bonne qualité de service. On a donc :
   $$\text{Cas fav.} = 61$$
   Ensuite on calcul les cas possibles. On a donc :
   $$\text{Cas tot.} = 61 + 28 + 30 + 81 = 200$$
   On applique la formule et on obtient :
   $$\frac{61}{200} = 0,305$$

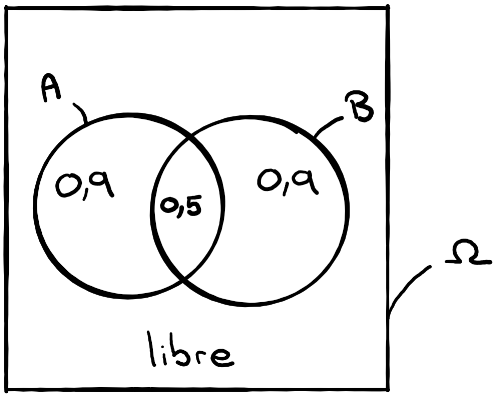
b) *Quelle hypothèse faites-vous pour déterminer ces probabilités ?*

Toutes les probabilités sont **équiprobables**. C'est pour cela qu'on peut utiliser la formule énnoncée dans les rappels de l'exercice.

Exercice 2

Donnée: *Sur le chemin de l'école, un étudiant de la HEIG–VD s'arrête toujours à la même station-service pour faire le plein d'essence. Il a constaté que les deux pompes de la station notées A et B ont la même probabilité d'être occupées. De plus, la probabilité que l'une des deux pompes au moins soit utilisée vaut 0.9 et celle que toutes les deux soient simultanément occupées est 0.5.*

Pour faciliter la compréhension de cet exercice, on peut réaliser un diagramme de Venn.



Premièrement, posons que :

AO = La pompe A est occupée	AL = La pompe A est libre	BO = La pompe B est occupée	BL = La pompe B est libre

$$\Omega = \{(AL, BL), (AO, BL), (AL, BO), (AO, BO)\}$$, évènements pas équiprobable!!!

On sait que les probabilités que A soit libre sont les mêmes pour B. On note :

$$P(\{AL\}) = P(\{BL\})$$

On sait aussi que :

P(au moins une pompe soite occupée) = 0.9

P(les deux pompes soient occupées) = 0.5

$P(\Omega) = 1$

a) *Calculer la probabilité que les deux pompes soient disponibles.*

Parmis les évènements probables on sait que :

$$P\{(AO, BL), (AL, BO), (AO, BO)\} = 0.9$$

Puisque nous cherchons la probabilité du couple manquant ($P\{(AL, BL)\}$), on pose :

$$P(\Omega) = P\{(AL, BL)\} + P\{(AO, BL), (AL, BO), (AO, BO)\}$$

En remplaçant les probabilités connues par leurs valeurs, on obtient :

$$1 = P\{(AL, BL)\} + 0.9$$

On peut donc en conclure que $P\{(AL, BL)\} = 0.1$ et donc que la probabilité que la pompe A et B soient libre est de 0.1

b) *Déterminer la probabilité que la pompe A soit libre.*

Rappel : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Premièrement, on pose la formule énoncée dans le rappel en remplaçant avec nos valeurs :

$$P(AL \cup BL) = P(AL) + P(BL) - P(AL \cap BL)$$

Maintenant, essayons d'exprimer $P(AL \cup BL)$ avec ce que nous connaissons :
Avec la Loi de De Morgan on a :

$$P(\overline{AL \cup BL}) = P(\overline{AL} \cap \overline{BL}) = P(AO \cap BO)$$

On sait que $P\{(AO, BO)\} = 0.5$ donc que $P(AO \cap BO) = 0.5$, on peut donc poser :

$$P(\overline{AL \cup BL}) = 1 - P(AL \cup BL)$$

À présent on sait que :

$P(AL \cup BL) = 0.5$

$P(AL \cap BL) = 0.1$, voir exercice a)

On peut donc compléter la formule $P(AL \cup BL) = P(AL) + P(BL) - P(AL \cap BL)$ avec les valeurs :

$$0.5 = P(AL) + P(BL) - 0.1$$

Comme ennoncé en début d'exercice, on a $P(AL) = P(BL)$. On peut donc poser :

$$2P(AL) = 0.6$$
$$P(AL) = 0.3$$

On peut donc conclure que les probabilités que la pompe A soie libre sont de 0.3

c) *Calculer la probabilité que la pompe A soit occupée mais la pompe B disponible*

Posons simplement la somme des probabilités que A soit occupée

$$P(AO) = P(AO \cap AO) + P(AO \cap BL)$$

Sachant que $P(AL) = 0.3$, on déduit que $P(AO) = 0.7$. On peut donc retourner la formule au-dessus pour obtenir :

$$P(AO \cap BL) = P(AO) - P(AO \cap AO)$$

En remplaçant par les valeurs connues on a :

$$P(AO \cap BL) = 0.7 - 0.5 = 0.2$$

On peut donc dire que la probabilité que la pompe A soit occupée et que la pompe B disponible est de 0.2

Exercice 3

Donnée: *Dix personnes attendent l'ascenseur au rdc d'un immeuble formé de 6 étages (sans le rez-de-chaussée). La probabilité qu'une personne quitte l'ascenseur à l'un des six étages est la m même pour tous les étages. Observateurs de l'expérience, nous supposons que les personnes sorent au hasard de l'ascenseur indépendamment les une des autres ; une fois sorties, elles n'y rentrent plus.*

a) *Déterminer la probabilité qu'aucune personne sortira de l'ascenseur au 5ième étage.*

La probabilité peut être vu comme $\frac{\text{nombre de cas favorables (1)}}{\text{nombre de cas totaux (2)}}$

(1) Les cas favorables sont les cas où les personnes descendent à un autre étage que le 5ième. Autrement dit combien existe-il de possibilité pour 10 personnes de sortir sur les 5 autres étages ? Pour la première personne, elle a 5 choix (les 5 étages qui restent.) la seconde a aussi 5 choix etc etc. On a donc 5^{10} cas favorables

(2) les cas totaux sont simplement 6^{10} puisque on autorise à sortir à l'étage 5

On a donc

$$a)\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$$

b) *Déduire de a) la probabilité que l'ascenseur s'arretera au 5ième étage*

On nous demande ici de compter la probabilité qu'on s'arrête au 5ième étage. C'est à dire qu'une personne s'y arrete ou que 2 personnes s'y arretent ou que 3 personnes etc etc. Il est plus simple de faire l'inverse : 1 - la probabilité que personne ne s'arrete au 5ième. Et cette dernière probabilité est justement celle que nous avons calculer en (a)

$$b) 1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$$

c) *Une autre manière de voir l'exo a)*

Nous avons l'équi-probabilité : $P(\text{sortir à l'étage i}) = \frac{1}{6}$

1. Soit A_1 l'évenement la personne 1 sort à l'étage 5. ($P(A_1) = \frac{1}{6}$)
2. Soit A_k l'évenement la personne $k, k \in 1..10$ sort à l'étage 5.

Nous avons $\overline{A_k}$ l'évenement "la personne k ne sorte PAS à l'étage 5" $P(\overline{A_k}) = 1 - \frac{1}{6}$ Pour que personne ne sortent à l'étage 5 il faut que la personne 1 ne sorte pas à l'étage 5 ET que la personne 2 ne sorte pas etc.

Puisque les évènements sont indépendents, on a

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

donc

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{10} \overline{A_k}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$$

Exercice 4

Donnée: *Tous les jours de la semaine, un enseignant se rend à la même heure à l'école où il enseigne en suivant systématiquement le même chemin. Sur son trajet se trouvent deux carrefours où la circulation est réglée par un feu de signalisation ; rouge ou orange, pas d'autres signaux lumineux. La probabilité que le feu du premier carrefour soit au orange lors du passage de l'enseignant vaut p et celle du second 2p. De plus, la probabilité qu'au moins un des deux feux soit orange lors du passage de l'enseignant est 0.28. On suppose que les feux de signalisation des deux carrefours fonctionnent indépendamment l'un de l'autre. Considérons les événements :*

A : "Le feu du premier carrefour est orange" et B : "Le feu du second carrefour est orange".

a) *Traduire l'énoncé en langage probabiliste à l'aide des événements énoncés ci-dessus*

La probabilité que le feu du premier carrefour soit au orange lors du passage de l'enseignant vaut p.

$$P(A) = p$$

La probabilité que le feu du deuxième carrefour soit au orange lors du passage de l'enseignant vaut 2p.

$$P(B) = 2p$$

la probabilité qu'au moins un des deux feux soit orange lors du passage de l'enseignant est 0.28

$$P(A \cup B) = 0.28$$

b) *Calculer la probabilité p*

Puisque les événements sont indépendants, nous avons :

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) && (1) \\ &= p \cdot 2p && (2) \\ &= 2p^2 && (3) \end{aligned}$$

Nous savons aussi que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (4)$$

L'équation (1) est vraie uniquement si les événements sont indépendants. Tandis que la (4) est toujours vrai ! !

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) && (5) \\ &= 0.28 && (6) \\ &= p + 2p - 2p^2 && (7) \end{aligned}$$

Nous devons donc trouver les solutions de l'équation quadratique suivante :

$$2p^2 - 3p + 0.28 = 0$$

Nous avons : $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 0.28$
et $\sqrt{\Delta} = 2.6$

$$\delta^+ = \frac{-(-3) + 2.6}{2 \cdot 2} = 1.4$$

$$\delta^- = \frac{-(-3) - 2.6}{2 \cdot 2} = 0.1$$

p étant une probabilité, son domaine de définition est : $\mathbb{D} = [0; 1]$ et $\delta^+ \notin \mathbb{D}$ Donc $p = 0.1$

Exercice 5

Donnée: *dans une étude on s'intéresse à la capacité que possède un certain hacker pour trouver en un temps donné les mdp permettant d'accéder à trois centres de calculs, La probabilité que le hacker trouve le mot de passe (mdp)des centres de calculs valent respectivement 0.22, 0.3 et 0.28. La probabilité qu'il trouve le mot de passe des deux premiers centres est 0.11, celle pour le premier et le troisième vaut 0.14 et celle pour déterminer le mdp du deuxième et du troisième centre est 0.1. Finalement, le "hacker" identifie les trois mots de passe avec probabilité 0.06*

Commencons par définir des 3 évènements.

1. A le/la hacker casse le mdp du centre 1
2. B le hacker casse le mdp du centre 2
3. C le hacker casse le mdp du centre 3

Modélisons l'énoncé à partir de nos évènements :

- $P(A) = 0.22$
- $P(B) = 0.3$
- $P(C) = 0.28$
- $P(A \cap C) = 0.14$
- $P(A \cap B) = 0.11$
- $P(B \cap C) = 0.1$
- $P(A \cup B \cup C) = 0.06$

a) *Calculer la probabilité que le hacker ne trouvera aucun mot de passe*

La proba de ne trouver aucun mdp est la situation où l'on ne trouve ni le mdp du centre 1, ni le mdp du centre 2, ni le mdp du centre 3. ça revient à trouver la probabilité de tout les événements sauf ceux où un mdp ou plus sont trouvés Autrement dit $1 - P(A \cup B \cup C)$
La probabilité de tous les événements = 1
Et la probabilité d'un mdp ou plus sont trouvés : $P(A \cup B \cup C)$
Il faut donc calculer :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + 4P(A \cap B \cap C) \\ &= 0.22 + 0.3 + 0.28 - 0.11 - 0.1 - 0.14 + 0.06 \\ &= 0.51 \end{aligned}$$

$$1 - 0.51 = 0.49$$

b) *Déterminer la probabilité qu'il identifiera au minimum deux des trois mdp*

A nouveau représentons l'énoncer à l'aide nos événements : Au minimum deux des trois mdp signifie qu'il trouve A et B ou A et C ou B et C Nous avons

$$\begin{aligned} P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - 2P(A \cap B \cap C) &= 0.35 - 2 \cdot 0.06 \\ &= 0.23 \end{aligned}$$