
Thème : probabilités élémentaires

Solution de la Série 1

Exercice 1

Donnée: *Un groupe de consommateurs a réalisé une étude pour analyser le service offert par 200 employés de divers restaurants. On s'intéresse à une possible relation entre la qualité du service et la qualification du personnel (diplômé d'une école hôtelière ou non). Les résultats de l'enquête figurent dans le tableau ci-dessous :*

	<i>Bon service</i>	<i>mauvais service</i>
<i>Diplôme</i>	61	28
<i>Sans diplôme</i>	30	81

Rappel : $P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$

a) *Calculer les probabilités d'avoir choisi une personne :*

1. dont le service est qualifié bon.

Ici on réunit les bons services des personnes avec et sans diplôme. On a donc :

$$\text{Cas fav.} = 61 + 30 = 91$$

Ensuite on calcul les cas possibles. On a donc :

$$\text{Cas tot.} = 61 + 28 + 30 + 81 = 200$$

On applique la formule et on obtient :

$$\frac{91}{200} = 0,455$$

2. non diplômée.

Ici on réunit les personnes sans diplôme, peu importe la qualité du service. On a donc :

$$\text{Cas fav.} = 30 + 81 = 111$$

Ensuite on calcul les cas possibles. On a donc :

$$\text{Cas tot.} = 61 + 28 + 30 + 81 = 200$$

On applique la formule et on obtient :

$$\frac{111}{200} = 0,555$$

3. diplômé dont le service est bon.

Ici on réunit les personnes avec diplôme et une bonne qualité de service. On a donc :

$$\text{Cas fav.} = 61$$

Ensuite on calcul les cas possibles. On a donc :

$$\text{Cas tot.} = 61 + 28 + 30 + 81 = 200$$

On applique la formule et on obtient :

$$\frac{61}{200} = 0,305$$

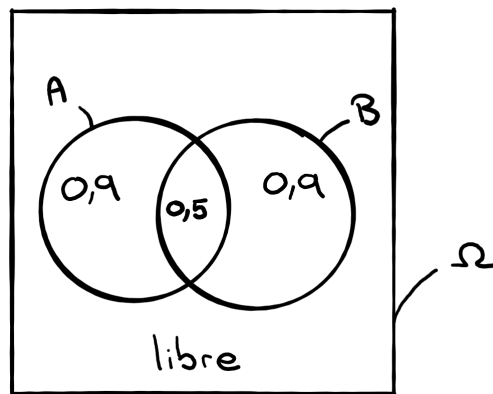
b) Quelle hypothèse faites-vous pour déterminer ces probabilités ?

Toutes les probabilités sont **équiprobables**. C'est pour cela qu'on peut utiliser la formule énoncée dans les rappels de l'exercice.

Exercice 2

Donnée: Sur le chemin de l'école, un étudiant de la HEIG-VD s'arrête toujours à la même station-service pour faire le plein d'essence. Il a constaté que les deux pompes de la station notées A et B ont la même probabilité d'être occupées. De plus, la probabilité que l'une des deux pompes au moins soit utilisée vaut 0.9 et celle que toutes les deux soient simultanément occupées est 0.5.

Pour faciliter la compréhension de cet exercice, on peut réaliser un diagramme de Venn.



Premièrement, posons que :

A = A est occupée

\bar{A} = A est libre

B = B est occupée

\bar{B} = B est libre

$\Omega = \{(\bar{A}, \bar{B}), (A, \bar{B}), (\bar{A}, B), (A, B)\}$, évènements non équiprobable

On sait que les probabilités que A soit libre sont les mêmes pour B. On note :

$$P(\{\bar{A}\}) = P(\{\bar{B}\})$$

On sait aussi que :

$$P(\text{au moins une pompe soit occupée}) = 0.9$$

$$P(\text{les deux pompes soient occupées}) = 0.5$$

$$P(\Omega) = 1$$

a) Calculer la probabilité que les deux pompes soient disponibles.

Parmi les évènements probables on sait que :

$$P\{(A, \bar{B}), (\bar{A}, B), (A, B)\} = 0.9$$

Puisque nous cherchons la probabilité du couple manquant ($P\{(\bar{A}, \bar{B})\}$), on pose :

$$P(\Omega) = P\{(\bar{A}, \bar{B})\} + P\{(A, \bar{B}), (\bar{A}, B), (A, B)\}$$

En remplaçant les probabilités connues par leurs valeurs, on obtient :

$$1 = P\{(\overline{A}, \overline{B})\} + 0.9$$

On peut donc en conclure que $P\{(\overline{A}, \overline{B})\} = 0.1$ et donc que la probabilité que la pompe A et B soient libre est de 0.1

b) *Déterminer la probabilité que la pompe A soit libre.*

$$\text{Rappel : } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Premièrement, on pose la formule énoncée dans le rappel en remplaçant avec nos valeurs :

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$$

Maintenant, essayons d'exprimer $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ avec ce que nous connaissons :
Avec la Loi de De Morgan on a :

$$P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(A \cap B)$$

On sait que $P\{(A, B)\} = 0.5$ donc que $P(A \cap B) = 0.5$, on peut donc poser :

$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$$

À présent on sait que :

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.5$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.1 \text{ , voir exercice a)}$$

On peut donc compléter la formule $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$ avec les valeurs :

$$0.5 = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - 0.1$$

Comme énoncé en début d'exercice, on a $P(\overline{A}) = P(\overline{B})$. On peut donc poser :

$$\begin{aligned} 2P(\overline{A}) &= 0.6 \\ P(\overline{A}) &= 0.3 \end{aligned}$$

On peut donc conclure que les probabilités que la pompe A soit libre sont de 0.3

c) *Calculer la probabilité que la pompe A soit occupée mais la pompe B disponible*

Posons simplement la somme des probabilités que A soit occupée

$$P(A) = P(A \cap A) + P(A \cap \overline{B})$$

Sachant que $P(\overline{A}) = 0.3$, on déduit que $P(A) = 0.7$. On peut donc retourner la formule au-dessus pour obtenir :

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap A)$$

En remplaçant par les valeurs connues on a :

$$P(A \cap \overline{B}) = 0.7 - 0.5 = 0.2$$

On peut donc dire que la probabilité que la pompe A soit occupée et que la pompe B disponible est de 0.2

Exercice 3

Donnée: Dix personnes attendent l'ascenseur au rez-de-chaussée d'un immeuble formé de 6 étages (sans le rez-de-chaussée). La probabilité qu'une personne quitte l'ascenseur à l'un des six étages est la même pour tous les étages. Observateurs de l'expérience, nous supposons que les personnes sortent au hasard de l'ascenseur indépendamment les une des autres; une fois sorties, elles n'y rentrent plus.

a) Déterminer la probabilité qu'aucune personne sortira de l'ascenseur au 5ième étage.

La probabilité peut être vu comme $\frac{\text{nombre de cas favorables (1)}}{\text{nombre de cas totaux (2)}}$

- (1) Les cas favorables sont les cas où les personnes descendent à un autre étage que le 5ième. Autrement dit combien existe-il de possibilité pour 10 personnes de sortir sur les 5 autres étages? Pour la première personne, elle a 5 choix (les 5 étages restants) la seconde a aussi 5 choix etc. On a donc 5^{10} cas favorables
- (2) les cas totaux sont simplement 6^{10} puisque on autorise à sortir à l'étage 5

On a donc

$$a) \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$$

b) Dédurre de a) la probabilité que l'ascenseur s'arrêtera au 5ième étage

On nous demande ici de compter la probabilité qu'on s'arrête au 5ième étage. C'est à dire, qu'une personne s'y arrête ou que 2 personnes s'y arrêtent ou que 3 personnes etc. Il est plus simple de faire l'inverse : 1 - la probabilité que personne ne s'arrête au 5ième. Et cette dernière probabilité est justement celle que nous avons calculé en (a).

$$b) 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$$

c) Une autre manière de voir l'exo a)

Nous avons l'équi-probabilité : $P(\text{sortir à l'étage } i) = \frac{1}{6}$

1. Soit A_1 l'événement la personne 1 sort à l'étage 5. ($P(A_1) = \frac{1}{6}$)
2. Soit A_k l'événement la personne $k, k \in 1..10$ sort à l'étage 5.

Nous avons $\overline{A_k}$ l'évènement "la personne k ne sorte PAS à l'étage 5" $P(\overline{A_k}) = 1 - \frac{1}{6}$ Pour que personne ne sortent à l'étage 5 il faut que la première personne ne sorte pas à cet étage NI que les personnes suivantes etc.

Puisque les évènements sont indépendants, on a

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

donc

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{10} \overline{A_k}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$$

Exercice 4

Donnée: Tous les jours de la semaine, un enseignant se rend à la même heure à l'école où il enseigne en suivant systématiquement le même chemin. Sur son trajet se trouvent deux carrefours où la circulation est réglée par un feu de signalisation; rouge ou orange, pas d'autres signaux lumineux. La probabilité que

le feu du premier carrefour soit au orange lors du passage de l'enseignant vaut p et celle du second $2p$. De plus, la probabilité qu'au moins un des deux feux soit orange lors du passage de l'enseignant est 0.28. On suppose que les feux de signalisation des deux carrefours fonctionnent indépendamment l'un de l'autre. Considérons les événements :

A : "Le feu du premier carrefour est orange" et B : "Le feu du second carrefour est orange".

a) Traduire l'énoncé en langage probabiliste à l'aide des événements énoncés ci-dessus

La probabilité que le feu du premier carrefour soit au orange lors du passage de l'enseignant vaut p .

$$P(A) = p$$

La probabilité que le feu du deuxième carrefour soit au orange lors du passage de l'enseignant vaut $2p$.

$$P(B) = 2p$$

la probabilité qu'au moins un des deux feux soit orange lors du passage de l'enseignant est 0.28

$$P(A \cup B) = 0.28$$

b) Calculer la probabilité p

Puisque les événements sont indépendants, nous avons :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (1)$$

$$= p \cdot 2p \quad (2)$$

$$= 2p^2 \quad (3)$$

Nous savons aussi que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (4)$$

L'équation (1) est vraie uniquement si les événements sont indépendants. Tandis que la (4) est toujours vrai!!

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (5)$$

$$= 0.28 \quad (6)$$

$$= p + 2p - 2p^2 \quad (7)$$

Nous devons donc trouver les solutions de l'équation quadratique suivante :

$$2p^2 - 3p + 0.28 = 0$$

Nous avons : $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 0.28$

et $\sqrt{\Delta} = 2.6$

$$\delta^+ = \frac{-(-3) + 2.6}{2 \cdot 2} = 1.4$$

$$\delta^- = \frac{-(-3) - 2.6}{2 \cdot 2} = 0.1$$

p étant une probabilité, son domaine de définition est : $\mathbb{D} = [0; 1]$ et $\delta^+ \notin \mathbb{D}$ Donc $p = 0.1$

Exercice 5

Donnée: dans une étude on s'intéresse à la capacité que possède un certain hacker pour trouver en un temps donné les mots de passe permettant d'accéder à trois centres de calculs, La probabilité que le hacker trouve le mot de passe des centres de calculs valent respectivement 0.22, 0.3 et 0.28. La probabilité qu'il trouve le mot de passe des deux premiers centres est 0.11, celle pour le premier et le troisième vaut 0.14 et celle pour déterminer le mot de passe du deuxième et du troisième centre est 0.1. Finalement, le "hacker" identifie les trois mots de passe avec probabilité 0.06

Commençons par définir les 3 événements :

1. A le hacker casse le mot de passe du centre 1
2. B le hacker casse le mot de passe du centre 2
3. C le hacker casse le mot de passe du centre 3

Modélisons l'énoncé à partir de nos événements :

- | | |
|------------------------|-------------------------------|
| — $P(A) = 0.22$ | — $P(A \cap B) = 0.11$ |
| — $P(B) = 0.3$ | — $P(B \cap C) = 0.1$ |
| — $P(C) = 0.28$ | — $P(A \cup B \cup C) = 0.06$ |
| — $P(A \cap C) = 0.14$ | |

a) Calculer la probabilité que le hacker ne trouvera aucun mot de passe

La probabilité de ne trouver aucun mot de passe est la situation où l'on ne trouve ni le mot de passe du centre 1, ni le mot de passe du centre 2, ni le mot de passe du centre 3. Cela revient à trouver la probabilité de tout les événements sauf ceux où un mot de passe ou plus sont trouvés Autrement dit $1 - P(A \cup B \cup C)$
La probabilité de tous les événements = 1

Et la probabilité d'un mot de passe ou plus sont trouvés : $P(A \cup B \cup C)$

Il faut donc calculer :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ &= 0.22 + 0.3 + 0.28 - 0.11 - 0.1 - 0.14 + 0.06 \\ &= 0.51 \end{aligned}$$

$$1 - 0.51 = 0.49$$

b) Déterminer la probabilité qu'il identifiera au minimum deux des trois mots de passe

A nouveau, représentons l'énoncé à l'aide de nos événements : Au minimum deux des trois mots de passe signifie qu'il trouve A et B ou A et C ou B et C Nous avons

$$\begin{aligned} P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - 2P(A \cap B \cap C) &= 0.35 - 2 \cdot 0.06 \\ &= 0.23 \end{aligned}$$