Thème : Variables aléatoires Solution de la Série 5

Exercice 1

Donnée: *Considérons une variable aléatoire X dont la fonction de densité est* $f_x(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si\ -1 \leq u \leq 1 \\ 0 & sinon. \end{cases}$
Calculez les probabilités :

a) $P(X = \frac{3}{4})$

La probabilité $P(X = \frac{3}{4}) = 0$

b) $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F(x)dx &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}du \\ &= \frac{u}{2}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} - (-\frac{1}{4}) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

c) $P(X \leq \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\frac{1}{2}} F(x)dx &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}du \\ &= \frac{u}{2}\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} - (-\frac{1}{2}) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

d) $P(X^2 \geq \frac{1}{4})$

Premièrement, observons que le problème est équivalent à : $P(|X| \geq \frac{1}{2})$. Il s'en suit,

$|X| \geq \frac{1}{2} \iff \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } X \geq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } X < 0. \end{cases}$ Finalement,

$$
\begin{aligned}
P(X^2 \geq \frac{1}{4}) &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} F(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} F(x)dx \\
&= \frac{u}{2}\Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}} + \frac{u}{2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} \\
&= -\frac{1}{4} - (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} - (\frac{1}{4}) \\
&= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

e) $P(X \in A)$ *où* $A = [-\frac{1}{2}, 0] \cup [\frac{3}{4}, 2]$

$$
\begin{aligned}
P(X \in A) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} F(x)dx + \int_{\frac{3}{4}}^{1} F(x)dx \\
&= \frac{u}{2}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} + \frac{u}{2}\Big|_{\frac{3}{4}}^{1} \\
&= 0 - (-\frac{1}{4}) + \frac{1}{2} - (\frac{3}{8}) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

Exercice 2

Donnée: *Considérons une variable aléatoire X dont la fonction de densité est* $f_x(u) = \begin{cases} e^{-u} & \text{si } u > 0 \\ x & 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Calculez les probabilités :

a) *Déterminer la fonction de répartition de X et tracer son graphe*

Pour commencer, il faut se rappeler de la définition de la fonction de répartition :

$$
\begin{aligned}
P(X \leq x) = F_x(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_x(u)du \\
&= \int_{0}^{x} e^{-u}du \\
&= -e^{-u}\Big|_{0}^{x} \\
&= -e^{-x} + e^{0} \\
&= 1 - e^{-x}
\end{aligned}
$$

Finalement la fonction de répartition $F_x(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

b) *Calculer les probabilités* $P(X < 4)$ *et* $P(1 < X < 2.5)$

$$P(X < 4) = P(X \leq 4) = F_x(4) = 1 - e^{-4} \approx 0.98$$

$$\begin{aligned} P(1 < X < 2.5) &= P(X \leq 2.5) - P(X \leq 1) \\ &= F_x(2.5) - F_x(1) \\ &= 1 - e^{-2.5} - 1 + e^{-1} \\ &= e^{-1} - e^{-2.5} \approx 0.29 \end{aligned}$$

c) *Déterminer le nombre réel positif* x *tel que* $P(X > x) = 0.1$

$$\begin{aligned} P(X > x) &= 1 - P(X \leq x) \\ &= 0.1 \\ &\iff \\ 1 - F_x(x) &= 0.1 \\ F_x(x) &= 0.9 \\ 1 - e^{-x} &= 0.9 \\ e^{-x} &= 0.1 \\ x &= -\ln 0.1 \approx 2.3 \end{aligned}$$

Exercice 3

Donnée:

Exercice 4

Donnée:

Exercice 5

Donnée: