Thème : Variables aléatoires Solution de la Série 5

Exercice 1

Donnée: *Considérons une variable aléatoire X dont la fonction de densité est* $f_x(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si\ -1 \leq u \leq 1 \\ 0 & sinon. \end{cases}$
Calculez les probabilités :

a) $P(X = \frac{3}{4})$

La probabilité $P(X = \frac{3}{4}) = 0$

b) $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F(x)dx &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}du \\ &= \frac{u}{2}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} - (-\frac{1}{4}) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

c) $P(X \leq \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\frac{1}{2}} F(x)dx &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}du \\ &= \frac{u}{2}\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} - (-\frac{1}{2}) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

d) $P(X^2 \geq \frac{1}{4})$

Premièrement, observons que le problème est équivalent à : $P(|X| \geq \frac{1}{2})$. Il s'en suit,
$|X| \geq \frac{1}{2} \iff \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } X \geq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } X < 0. \end{cases}$ Finalement,

$$
\begin{aligned}
P(X^2 \geq \frac{1}{4}) &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} F(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} F(x)dx \\
&= \frac{u}{2}\Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}} + \frac{u}{2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} \\
&= -\frac{1}{4} - (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} - (\frac{1}{4}) \\
&= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

e) $P(X \in A)$ *où* $A = [-\frac{1}{2}\,, 0] \cup [\frac{3}{4}\,, 2]$

$$
\begin{aligned}
P(X \in A) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} F(x)dx + \int_{\frac{3}{4}}^{1} F(x)dx \\
&= \frac{u}{2}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} + \frac{u}{2}\Big|_{\frac{3}{4}}^{1} \\
&= 0 - (-\frac{1}{4}) + \frac{1}{2} - (\frac{3}{8}) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

Exercice 2

Donnée: *Considérons une variable aléatoire* X *dont la fonction de densité est* $f_x(u) = \begin{cases} e^{-u} & si\ u > 0 \\ x & 0\ sinon. \end{cases}$
Calculez les probabilités :

a) *Déterminer la fonction de répartition de* X *et tracer son graphe*

Pour commencer, il faut se rappeler de la définition de la fonction de répartition :

$$
\begin{aligned}
P(X \leq x) = F_x(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_x(u)du \\
&= \int_{0}^{x} e^{-u}du \\
&= -e^{-u}\Big|_{0}^{x} \\
&= -e^{-x} + e^{0} \\
&= 1 - e^{-x}
\end{aligned}
$$

Finalement la fonction de répartition $F_x(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

b) *Calculer les probabilités* $P(X < 4)$ *et* $P(1 < X < 2.5)$

$$P(X < 4) = P(X \leq 4) = F_x(4) = 1 - e^{-4} \approx 0.98$$

$$\begin{aligned} P(1 < X < 2.5) &= P(X \leq 2.5) - P(X \leq 1) \\ &= F_x(2.5) - F_x(1) \\ &= 1 - e^{-2.5} - 1 + e^{-1} \\ &= e^{-1} - e^{-2.5} \approx 0.29 \end{aligned}$$

c) *Déterminer le nombre réel positif* x *tel que* $P(X > x) = 0.1$

$$\begin{aligned} P(X > x) &= 1 - P(X \leq x) \\ &= 0.1 \\ &\iff \\ 1 - F_x(x) &= 0.1 \\ F_x(x) &= 0.9 \\ 1 - e^{-x} &= 0.9 \\ e^{-x} &= 0.1 \\ x &= -\ln 0.1 \approx 2.3 \end{aligned}$$

Exercice 3

Donnée: *La durée de vie en heures d'un certain composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire* X *dont la fonction de densité est donnée par* $f_x(u) = \begin{cases} \frac{c}{u^2} & \textit{si } 10 < u < 20 \\ x & 0 \textit{ sinon.} \end{cases}$

a) *Calculez la constante* c.

Calculons l'intégrale de la fonction de densité de 10 à 20 :

$$\begin{aligned} \int_{10}^{20} \frac{c}{u^2} du &= \left. \frac{-c}{u} \right|_{10}^{20} \\ &= \frac{-c}{20} + \frac{c}{10} \\ &= \frac{c}{20} \end{aligned}$$

Nous avons $\int_{-\infty}^{\infty} f_x(u) du = 1.$

Comme, $\int_{-\infty}^{\infty} f_x(u) du = \int_{10}^{20} \frac{c}{u^2} du \iff 1 = \frac{c}{20}$

Finalement, $c = 20$

b) *Déterminez la fonction de répartition de X et tracer son graphe.*

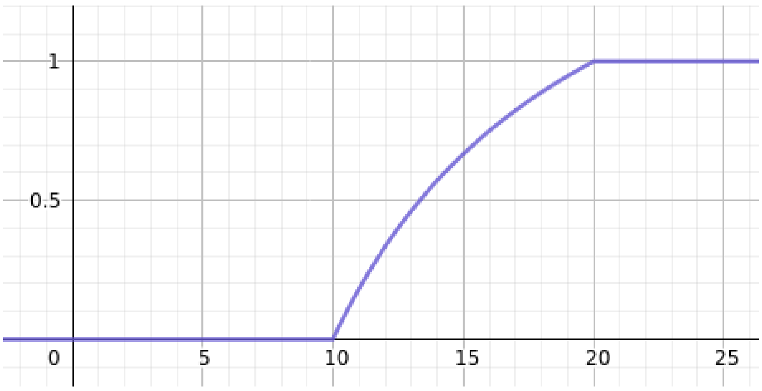
Il faut séparer trois cas :

$$\begin{aligned}
&1) x \in \left]-\infty\,,10\right[\\
&2) x \in [10\,,20]\\
&3) x \in \left]-\infty\,,10\right[
\end{aligned}$$

Prenons le deuxième cas,

$$\begin{aligned}
P(X \leq x) = F_x(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_x(u)du\\
&= \int_{10}^{x} \frac{c}{u^2}du\\
&= \frac{-c}{u}\bigg|_{0}^{x}\\
&= \frac{-c}{x} + \frac{c}{10}\\
&= \frac{-20}{x} + 2
\end{aligned}$$

$$\text{Finalement, } F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 10\\ \frac{-20}{x} + 2 & \text{si } 10 \leq x \leq 20\\ 1 & \text{si } x \geq 20 \end{cases}$$



c) *Calculez la probabilité $P(X > 15)$.*

$$\begin{aligned}
P(X > 15) &= \int_{15}^{20} \frac{c}{u^2}du\\
&= F_x(20) - F_x(15)\\
&= \left(\frac{-20}{20} + 2 - \left(\frac{-20}{15} + 2\right)\right)\\
&= -1 + \frac{4}{3}\\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Deuxième manière,

$$\begin{aligned}
P(X > 15) &= 1 - P(X \leq 15) \\
&= 1 - \int_{10}^{15} \frac{c}{u^2} du \\
&= 1 - (F_x(15) - F_x(10)) \\
&= 1 - \left(\frac{-20}{15} + 2 - \left(\frac{-20}{10} + 2 \right) \right) \\
&= 1 - \left(2 - \frac{4}{3} \right) \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

d) *Calculez la durée de vie espérée d'un composant électronique de ce type.*

Il s'agit de calculer l'espérance. Par définition, elle est définie comme : $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot f(u) du$

$$\begin{aligned}
E(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot f(u) du \\
&= \int_{10}^{20} u \cdot \frac{c}{u^2} du \\
&= \int_{10}^{20} \frac{c}{u} du \\
&= c \cdot \ln u \Big|_{10}^{20} \\
&= c(\ln 20 - \ln 10) \\
&= 20 \cdot \ln 2
\end{aligned}$$

Exercice 4

Donnée: *Pour modéliser le maximum annuel des débits d'une certaine rivière, les hydrologues utilisent habituellement une variable aléatoire X issue d'une distribution de Gumbel dont la fonction de répartition est donnée par :* $F_x(x) = e^{-e^{-\frac{x-a}{b}}}$ *où* $x \in \mathbb{R}$*. À partir des maxima annuels des débits relevés de 1971 à 1995 à une station située sur la rivière, les paramètres a et b ont été estimés* 25.5 *et* 7.98 *respectivement.*

a) *Calculez la probabilité qu'une année donnée le maximum des débits soit supérieur à* 35.5 m^3/s

La fonction de répartition étant déjà donnée avec a et b,

$$\begin{aligned}
P(X > 35.5) &= 1 - P(X \leq 35.5) \\
&= 1 - F_x(35.5) \\
&= 1 - e^{-e^{-\frac{x-7.98}{25.5}}} \\
&\approx 0.248
\end{aligned}$$

b) *La période de retour T caractérise la durée moyenne s'écoulant entre deux occurences consécutives d'un même événement. Plus précisément, elle est définie par* $T = \dfrac{1}{1 - F_x(x)}$. *Calculez le débit maximal annuel x correspondant à une période de retour de 100 ans. Ce débit est interprété comme étant le débit maximal annuel qui sera dépassé en moyenne une fois tous les 100 ans.*

On cherche à calculer T = 100

$$\begin{aligned}
100 &= \frac{1}{1 - F_x(x)} \\
0.99 &= F_x(x) \\
0.99 &= e^{-e^{-\frac{x-a}{b}}} \\
-\ln(0.99) &= e^{-\frac{x-a}{b}} \\
\ln - \ln(0.99) &= -\frac{x-a}{b} \\
b \cdot \ln - \ln(0.99) &= a - x \\
x &= a - b \cdot \ln - \ln(0.99) \\
&= 25.5 - 7.98 \cdot \ln - \ln(0.99) \\
&\approx 62.21
\end{aligned}$$

Exercice 5

Donnée: *Considérons deux variables aléatoires X et Y dont les fonctions de densité* f_x *et* f_y *se trouvent dans la Figure1. En n'effectuant aucun calcul, l'écart type de X est-t-il plus grand que l'écart type de Y ?*

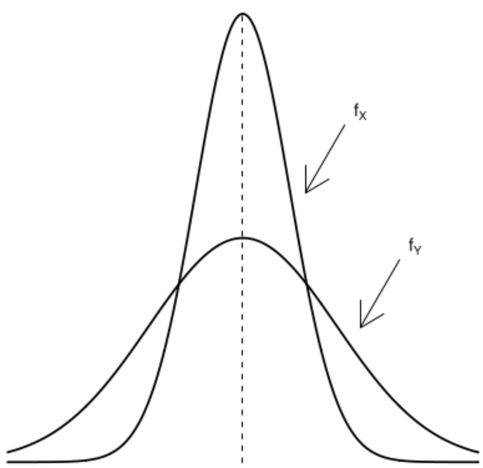


Figure 1: Fonctions de densité de X et de Y.

Non, on peut constater que la courbe f_y est plus applatie (plus grande dispertion). Donc $\sigma_x < \sigma_y$

Exercice 6

Donnée: *Considérons une variable aléatoire X dont la fonction de densité est donnée par* $\begin{cases} 1 & si\ 0 < u < 1 \\ 0 & sinon. \end{cases}$ *Désignons par Y la variable aléatoire $Y = e^X$. Déterminer l'espérance de Y.*

Par définition, l'espérance d'une fonction composée $E(Y(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(u) \cdot f_x(u)du$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} Y(u) \cdot f_x(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^u \cdot f_x(u)du \\ &= \int_{0}^{1} e^u du \\ &= e^u \Big|_0^1 \\ &= e - 1 \end{aligned}$$