

Exercice 1

Donnée: Considérons une variable aléatoire X dont la fonction de densité est $f_x(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq u \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Calculez les probabilités :

a) $P(X = \frac{3}{4})$

La probabilité $P(X = \frac{3}{4}) = 0$

b) $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} du \\ &= \frac{u}{2} \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

c) $P(X \leq \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x) dx &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} du \\ &= \frac{u}{2} \Big|_{-1}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

d) $P(X^2 \geq \frac{1}{4})$

Premièrement, observons que le problème est équivalent à : $P(|X| \geq \frac{1}{2})$. Il s'en suit,

$$|X| \geq \frac{1}{2} \iff \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } X \geq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } X < 0. \end{cases} \text{ Finalement,}$$

$$\begin{aligned}
P(X^2 \geq \frac{1}{4}) &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} F(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 F(x)dx \\
&= \frac{u}{2} \Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}} + \frac{u}{2} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= -\frac{1}{4} - (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} - (\frac{1}{4}) \\
&= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

e) $P(X \in A)$ où $A = [-\frac{1}{2}, 0] \cup [\frac{3}{4}, 2]$

$$\begin{aligned}
P(X \in A) &= \int_{-\frac{1}{2}}^0 F(x)dx + \int_{\frac{3}{4}}^1 F(x)dx \\
&= \frac{u}{2} \Big|_{-\frac{1}{2}}^0 + \frac{u}{2} \Big|_{\frac{3}{4}}^1 \\
&= 0 - (-\frac{1}{4}) + \frac{1}{2} - (\frac{3}{8}) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Exercice 2

Donnée: *Considérons une variable aléatoire X dont la fonction de densité est $f_x(u) = \begin{cases} e^{-u} & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$*
Calculez les probabilités :

a) *Déterminer la fonction de répartition de X et tracer son graphe*

Pour commencer, il faut se rappeler de la définition de la fonction de répartition :

$$\begin{aligned}
P(X \leq x) &= F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(u)du \\
&= \int_0^x e^{-u}du \\
&= -e^{-u} \Big|_0^x \\
&= -e^{-x} + e^0 \\
&= 1 - e^{-x}
\end{aligned}$$

Finalement la fonction de répartition $F_x(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

b) Calculer les probabilités $P(X < 4)$ et $P(1 < X < 2.5)$

$$P(X < 4) = P(X \leq 4) = F_x(4) = 1 - e^{-4} \approx 0.98$$

$$\begin{aligned} P(1 < X < 2.5) &= P(X \leq 2.5) - P(X \leq 1) \\ &= F_x(2.5) - F_x(1) \\ &= 1 - e^{-2.5} - 1 + e^{-1} \\ &= e^{-1} - e^{-2.5} \approx 0.29 \end{aligned}$$

c) Déterminer le nombre réel positif x tel que $P(X > x) = 0.1$

$$\begin{aligned} P(X > x) &= 1 - P(X \leq x) \\ &= 0.1 \\ &\iff \\ 1 - F_x(x) &= 0.1 \\ F_x(x) &= 0.9 \\ 1 - e^{-x} &= 0.9 \\ e^{-x} &= 0.1 \\ x &= -\ln 0.1 \approx 2.3 \end{aligned}$$

Exercice 3

Donnée: La durée de vie en heures d'un certain composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire X dont la fonction de densité est donnée par $f_x(u) = \begin{cases} \frac{c}{u^2} & \text{si } 10 < u < 20 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

a) Calculez la constante c .

Calculons l'intégrale de la fonction de densité de 10 à 20 :

$$\begin{aligned} \int_{10}^{20} \frac{c}{u^2} du &= \left. \frac{-c}{u} \right|_{10}^{20} \\ &= \frac{-c}{20} + \frac{c}{10} \\ &= \frac{c}{20} \end{aligned}$$

$$\text{Nous avons } \int_{-\infty}^{\infty} f_x(u) du = 1.$$

$$\text{Comme, } \int_{-\infty}^{\infty} f_x(u) du = \int_{10}^{20} \frac{c}{u^2} du \iff 1 = \frac{c}{20}$$

Finalement, $c = 20$

b) Déterminez la fonction de répartition de X et tracer son graphe.

Il faut séparer trois cas :

$$1) x \in]-\infty, 10[$$

$$2) x \in [10, 20]$$

$$3) x \in]-\infty, 10[$$

Prenons le deuxième cas,

$$\begin{aligned} P(X \leq x) = F_x(x) &= \int_{-\infty}^x f_x(u) du \\ &= \int_{10}^x \frac{c}{u^2} du \\ &= \left. \frac{-c}{u} \right|_{10}^x \\ &= \frac{-c}{x} + \frac{c}{10} \\ &= \frac{-20}{x} + 2 \end{aligned}$$

$$\text{Finalement, } F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 10 \\ \frac{-20}{x} + 2 & \text{si } 10 \leq x \leq 20 \\ 1 & \text{si } x \geq 20 \end{cases}$$

c) Calculez la probabilité $P(X > 15)$.

$$\begin{aligned} P(X > 15) &= \int_{15}^{20} \frac{c}{u^2} du \\ &= F_x(20) - F_x(15) \\ &= \left(\frac{-20}{20} + 2 - \left(\frac{-20}{15} + 2 \right) \right) \\ &= -1 + \frac{4}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Deuxième manière,

$$\begin{aligned}
P(X > 15) &= 1 - P(X \leq 15) \\
&= 1 - \int_{10}^{15} \frac{c}{u^2} du \\
&= 1 - (F_x(15) - F_x(10)) \\
&= 1 - \left(\frac{-20}{15} + 2 - \left(\frac{-20}{10} + 2 \right) \right) \\
&= 1 - \left(2 - \frac{4}{3} \right) \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

d) Calculez la durée de vie espérée d'un composant électronique de ce type.

Il s'agit de calculer l'espérance. Par définition, elle est définie comme : $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u f(u) du$

$$\begin{aligned}
E(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot f(u) du \\
&= \int_{10}^{20} u \cdot \frac{c}{u^2} du \\
&= \int_{10}^{20} \frac{c}{u} du \\
&= c \cdot \ln u \Big|_{10}^{20} \\
&= c(\ln 20 - \ln 10) \\
&= 20 \cdot \ln 2
\end{aligned}$$

Exercice 4

Donnée: Pour modéliser le maximum annuel des débits d'une certaine rivière, les hydrologues utilisent habituellement une variable aléatoire X issue d'une distribution de Gumbel dont la fonction de répartition est donnée par : $F_x(x) = e^{-e^{-\frac{x-a}{b}}}$ où $x \in \mathbb{R}$. À partir des maxima annuels des débits relevés de 1971 à 1995 à une station située sur la rivière, les paramètres a et b ont été estimés 25.5 et 7.98 respectivement.

a) Calculez la probabilité qu'une année donnée le maximum des débits soit supérieur à $35.5 \text{ m}^3/\text{s}$

b) La période de retour T caractérise la durée moyenne s'écoulant entre deux occurrences consécutives d'un même événement. Plus précisément, elle est définie par $T = \frac{1}{1 - F_x(x)}$. Calculez le débit maximal annuel x correspondant à une période de retour de 100 ans. Ce débit est interprété comme étant le débit maximal annuel qui sera dépassé en moyenne une fois tous les 100 ans.

Exercice 5

Donnée: