Thème : variables aléatoires (3) Série 5

Exercice 1

Considérons une variable aléatoire X dont la fonction de densité est

$$f_X(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad -1 \leq u \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer les probabilités :

a) $P\left(X = \frac{3}{4}\right)$;

b) $P\left(-\frac{1}{2} \leq X < \frac{1}{2}\right)$;

c) $P\left(X \leq \frac{1}{2}\right)$;

d) $P\left(X^2 \geq \frac{1}{4}\right)$;

e) $P\left(X \in A\right)$ où $A = \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cup \left[\frac{3}{4}, 2\right]$.

Exercice 2

Considérons une variable aléatoire X dont la fonction de densité est

$$f_X(u) = \begin{cases} e^{-u} & \text{si} \quad u > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Déterminer la fonction de répartition de X et tracer son graphe.

b) Calculer les probabilités $P\left(X < 4\right)$ et $P\left(1 < X < 2.5\right)$.

c) Déterminer le nombre réel positif x tel que $P(X > x) = 0.1$.

Exercice 3

La durée de vie en heures d'un certain composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire X dont la fonction de densité est donnée par

$$f_X(u) = \begin{cases} \frac{c}{u^2} & \text{si} \quad 10 < u < 20, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Calculer la constante c.

b) Déterminer la fonction de répartition de X et tracer son graphe.

c) Calculer la probabilité $P\left(X > 15\right)$.

d) Calculer la durée de vie espérée d'un composant électronique de ce type.

Exercice 4

Pour modéliser en m^3/s le maximum annuel des débits d'une certaine rivière, les hydrologues utilisent habituellement une variable aléatoire X issue d'une distribution de Gumbel dont la fonction de répartition est donnée par

$$F_X(x) = e^{-e^{\left(-\frac{x-a}{b}\right)}},$$

où $x \in \mathbb{R}$. À partir des maxima annuels des débits relevés de 1971 à 1995 à une station située sur la rivière, les paramètres a et b ont été estimés à 25.5 et 7.98 respectivement.

a) Calculer la probabilité qu'une année donnée le maximum des débits soit supérieur à $35.5\, m^3/s$.

b) La période de retour T caractérise la durée moyenne s'écoulant entre deux occurrences consécutives d'un même événement. Plus précisément, elle est définie par

$$T = \frac{1}{1 - F_X(x)}.$$

Calculer le débit maximal annuel x correspondant à une période de retour de 100 ans. Ce débit est interprété comme étant le débit maximal annuel qui sera dépassé en moyenne une fois tous les 100 ans.

Exercice 5

Considérons deux variables aléatoires X et Y dont les fonctions de densité f_X et f_Y se trouvent dans la Figure 1. En n'effectuant aucun calcul, l'écart-type σ_X de X est-il plus grand que l'écart-type σ_Y de Y ?

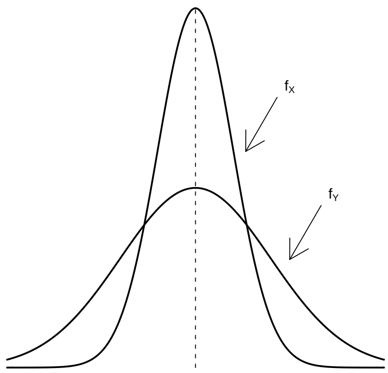

Figure 1: Fonctions de densité de X et de Y.

Exercice 6

Considérons une variable aléatoire X dont la fonction de densité est donnée par

$$f_X(u) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < u < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Désignons par Y la variable aléatoire $Y = e^X$. Déterminer l'espérance de Y.