



UNIVÉRSITÉ ABDELMALEK ESSAADI

FACULTÉ DES SCIENCES-TETOUAN

Master de mathématiques

(MAF/MSAM/MLIA)

Rapport du projet : Modélisation Avancée

Systemes Dynamiques et Analyse de Stabilité

Réalisé par :

ABIA Ramzi
BOUYESSEF Hamza
ATTAOUI Mehdi

Encadré par :

Dr. FERRAHI Bouchaib

Année universitaire : 2025–2026

Table des matières

Introduction	3
1 Étude mathématique des systèmes dynamiques en dimension finie	4
1.1 Définition générale d'un système dynamique	4
1.2 Classification des systèmes dynamiques	4
1.3 Problème de Cauchy	6
1.4 Trajectoires et interprétation	8
1.5 Point d'équilibre et notion de stabilité	9
1.5.1 Point d'équilibre d'un système	9
1.5.2 Stabilité des systèmes autonomes	11
1.5.3 Stabilité des systèmes non autonomes	14
1.5.4 Stabilité et linéarisation	18
2 Méthodes numériques et stabilité numérique	21
2.1 Motivation et cadre général	21
2.2 Discrétisation en temps : principe général, schéma général et choix du pas de temps	21
2.3 Méthodes de type Euler	23
2.4 Méthodes de type Runge-Kutta	24
2.5 Stabilité numérique	25
2.6 Problèmes raides et limites des schémas explicites	27
3 Étude de modèles et simulations numériques	30
3.1 Cadre général et démarche d'étude	30
3.2 Modèle de croissance logistique à une dimension	31
3.3 Modèle SIR	36
3.4 Oscillateur de Van der Pol	38
Conclusion générale	42

Introduction

Les systèmes dynamiques constituent un cadre mathématique fondamental pour la modélisation de phénomènes évolutifs dépendant du temps. Ils apparaissent naturellement dans de nombreux domaines tels que la mécanique, la biologie, l'économie, la chimie ou encore l'ingénierie. Dans ces contextes, l'état du système à un instant donné est représenté par un vecteur appartenant à un espace de dimension finie, et son évolution temporelle est décrite par des équations différentielles ordinaires.

L'étude des systèmes dynamiques repose sur deux aspects complémentaires. Le premier est une analyse mathématique théorique, visant à garantir l'existence et l'unicité des solutions, à comprendre la structure des trajectoires, et à caractériser le comportement asymptotique du système, notamment à travers la notion de stabilité. Le second est une approche numérique, indispensable dans la majorité des cas, car les systèmes non linéaires ne possèdent généralement pas de solutions analytiques explicites. Un point essentiel, souvent sous-estimé, est que la stabilité d'un système dynamique continu n'implique pas nécessairement la stabilité de sa discrétisation numérique. En effet, un schéma numérique mal choisi ou un pas de temps inadapté peut engendrer des comportements artificiels, tels que des oscillations ou une divergence, même lorsque le système continu est asymptotiquement stable. Cette problématique est centrale en modélisation mathématique et constitue l'axe principal de ce projet. Dans un cadre fonctionnel plus général, l'évolution des systèmes dynamiques peut être étudiée à l'aide de la théorie des semi-groupes d'opérateurs. Toutefois, afin de privilégier une approche concrète et directement exploitable pour la simulation numérique, ce travail se limite volontairement au cas des systèmes dynamiques en dimension finie, décrits par des équations différentielles ordinaires.

L'objectif de ce mini-projet est donc d'établir un cadre mathématique rigoureux pour l'étude des systèmes dynamiques en dimension finie, puis d'analyser l'impact des méthodes numériques sur la stabilité des solutions. Ce rapport est organisé comme suit : le Chapitre 1 est consacré à l'étude mathématique des systèmes dynamiques continus et discrets ; les chapitres suivants traiteront des méthodes numériques et de leur application à des modèles concrets.

Étude mathématique des systèmes dynamiques en dimension finie

1.1 Définition générale d'un système dynamique

Définition 1

On appelle *système dynamique en temps continu* toute équation différentielle ordinaire de la forme

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

où :

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système à l'instant t ,
- $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs,
- $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle de temps.

La notation $x'(t)$ désigne la dérivée temporelle de $x(t)$.

Exemple :

Pour $n = 1$,

$$x'(t) = -kx(t)$$

modélise un phénomène de dégradation (refroidissement ou amortissement simple).

1.2 Classification des systèmes dynamiques

1.2.1 Système général

La forme la plus générale d'un système dynamique en temps continu est

$$x' = f(t, x).$$

Exemple :

$$x'(t) = \sin(t) - x^3(t)$$

dépend explicitement du temps et de manière non linéaire de l'état.

1.2.2 Systèmes autonomes et non autonomes

- Système autonome

$$x' = f(x).$$

- Système non autonome

$$x' = f(t, x).$$

Exemple :

- Autonome : $x' = -x^3$.
- Non autonome : $x' = -x + t$.

1.2.3 Systèmes linéaires et non linéaires

- Système linéaire

$$x' = A(t)x + b(t),$$

où $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice et $b(t) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur source.

- Système linéaire autonome

$$x' = Ax \quad \text{ou} \quad x' = Ax + b.$$

- Système non linéaire

$$x' = f(x).$$

Exemple :

- Linéaire :

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

- Non linéaire :

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = -x_1^3.$$

1.2.4 Autres classifications usuelles

Systèmes discrets.

$$x_{k+1} = F(k, x_k), \quad x_k \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple :

$$x_{k+1} = 0.5 x_k.$$

Systèmes avec contrôle.

$$x' = f(x, u),$$

où $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est une entrée de contrôle.

Exemple :

$$x' = x + u.$$

Systèmes stochastiques.

$$dX_t = f(X_t) dt + \sigma dW_t,$$

où $X_t \in \mathbb{R}^n$ est un processus aléatoire, $W_t \in \mathbb{R}^n$ un mouvement brownien, et $\sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice de diffusion.

Exemple :

$$dX_t = -X_t dt + \sigma dW_t.$$

Cas étudié.

Dans ce rapport, on se concentre sur les systèmes dynamiques déterministes en temps continu et discret

$$x'(t) = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

et

$$x_{k+1} = F(k, x_k), \quad x_k \in \mathbb{R}^n.$$

1.3 Problème de Cauchy

1.3.1 Formulation du problème de Cauchy

Considérons le système dynamique continu

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in I,$$

où $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée et $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle de temps.

Le problème de Cauchy associé consiste à déterminer une fonction $x : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$, dérivable, telle que

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

où $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ représentent la condition initiale du système.

La condition initiale fixe l'état du système à l'instant initial et détermine de manière unique, sous certaines hypothèses sur f , l'évolution temporelle du système. L'étude du problème de Cauchy constitue la base de l'analyse des systèmes dynamiques, car elle permet de garantir que le modèle est bien posé, c'est-à-dire que son évolution est bien définie et prévisible à partir d'un état initial donné.

1.3.2 Existence et unicité des solutions

Considérons le problème de Cauchy associé au système dynamique

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

où $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle de temps.

L'existence et l'unicité des solutions garantissent que l'évolution du système est *bien définie* à partir d'une condition initiale.

Théorème (Cauchy–Lipschitz).

Si

- $f(\cdot, x)$ est continue en t (pour x fixé),
- $f(t, \cdot)$ est *localement lipschitzienne* en x , c'est-à-dire : pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, il existe $L_K > 0$ tel que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L_K \|x - y\|, \quad \forall x, y \in K, \quad \forall t \in I,$$

alors, pour toute condition initiale (t_0, x_0) , il existe un intervalle $I_0 \subset I$ contenant t_0 sur lequel le problème de Cauchy admet une *solution unique*.

Conséquences (interprétation).

Ce résultat implique notamment :

- **Déterminisme** : pour un état initial donné, l'état futur est entièrement déterminé.
- **Non-croisement des trajectoires** : deux solutions issues de la même condition initiale ne peuvent pas diverger ; en particulier, deux trajectoires ne peuvent pas se couper à au même instant.
- **Sens en modélisation** : la loi d'évolution f définit une dynamique cohérente au voisinage de toute condition initiale.

1.3.3 Existence globale

La solution fournie par le théorème de Cauchy–Lipschitz est en général locale, c'est-à-dire définie sur un intervalle de temps I_0 contenant t_0 , qui peut être borné. On dit qu'une solution est globale si elle est définie pour tout $t \geq t_0$.

Condition suffisante classique.

Une condition suffisante pour garantir l'existence globale est la lipschitzianité globale de la fonction f par rapport à la variable d'état. Plus précisément, s'il existe une constante $L > 0$ telle que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in I,$$

alors la solution du problème de Cauchy existe et est unique pour tout temps $t \geq t_0$.

Critère de non-explosion en temps fini.

Une autre condition importante assurant l'existence globale est l'absence d'explosion en temps fini. On dit qu'une solution explose en temps fini si sa norme devient infinie en un temps fini, c'est-à-dire s'il existe $t^* < \infty$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \|x(t)\| = \infty.$$

Si la solution reste bornée pour tout temps fini, c'est-à-dire si pour tout $T > t_0$, il existe une constante $M_T > 0$ telle que

$$\|x(t)\| \leq M_T, \quad \forall t \in [t_0, T],$$

alors la solution peut être prolongée pour tout temps et est donc globale.

Interprétation.

L'absence d'explosion en temps fini signifie que le système ne présente pas de divergence infinie en un temps fini. Cette propriété est essentielle en modélisation, car elle garantit que le modèle reste physiquement et mathématiquement cohérent sur tout intervalle de temps.

Remarque.

En pratique, la lipschitzianité globale n'est pas toujours vérifiée. Cependant, d'autres conditions, telles que des estimations a priori ou des conditions de croissance modérée de la fonction f , peuvent également garantir l'existence globale des solutions.

Cette propriété est particulièrement importante pour l'étude du comportement asymptotique et de la stabilité des systèmes dynamiques.

Exemple :

Considérons le système dynamique

$$x'(t) = -x^3(t), \quad x(0) = x_0.$$

Ce système admet la solution explicite

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 + 2x_0^2 t}}.$$

On observe que cette solution est définie pour tout $t \geq 0$ et reste bornée. En particulier, elle ne devient jamais infinie en un temps fini. Il n'y a donc pas d'explosion en temps fini, et la solution est globale.

Cependant, la fonction $f(x) = -x^3$ n'est pas globalement lipschitzienne sur \mathbb{R} . Cet exemple montre que l'existence globale peut être garantie par l'absence d'explosion en temps fini, même si la condition de Lipschitz global n'est pas vérifiée.

1.4 Trajectoires et interprétation

Une solution $x(t)$ du système dynamique est appelée *trajectoire* associée à la condition initiale x_0 . Elle décrit l'évolution temporelle de l'état du système dans l'espace des phases \mathbb{R}^n .

1.4.1 Lecture géométrique et qualitative.

L'étude des trajectoires consiste à comprendre *comment* le système évolue, sans nécessairement disposer d'une solution explicite. On s'intéresse notamment à :

- la **forme** des trajectoires dans l'espace des phases ;
- leur **comportement à long terme** (tendance vers un état stationnaire, persistance dans une région, éloignement) ;
- la **sensibilité** aux conditions initiales (deux points initiaux proches restent-ils proches?).

1.4.2 Interprétation en modélisation.

Dans la majorité des modèles non linéaires :

- les solutions explicites sont rarement accessibles ;
- ce sont les **propriétés qualitatives** (stabilité, convergence, régimes permanents) qui sont pertinentes ;
- les trajectoires motivent naturellement l'introduction des **points d'équilibre** et des notions de **stabilité** (au sens de Lyapunov).

1.5 Point d'équilibre et notion de stabilité

Un des concepts les plus importants en théorie des systèmes est celui de la stabilité. Un système instable est sans usage et potentiellement dangereux. Qualitativement un système est stable si chaque fois qu'il est perturbé de son point d'équilibre, il reste autour de ce point d'équilibre par la suite.

L'analyse de la stabilité d'un système dynamique repose sur plusieurs approches. Dans ce travail, nous nous appuyons principalement sur la définition de la stabilité au sens de Lyapunov, qui caractérise le comportement des trajectoires au voisinage d'un point d'équilibre. Nous utiliserons également la méthode de linéarisation, qui permet d'étudier la stabilité locale à partir de la matrice jacobienne du système. La méthode directe de Lyapunov basée sur la construction d'une fonction de Lyapunov ne sera pas développée dans ce travail.

L'objet de ce chapitre est de présenter, pour des systèmes décrits par une équation d'état (ou représentation interne), la théorie de stabilité et d'illustrer son application à diverses classes de systèmes dynamiques.

1.5.1 Point d'équilibre d'un système

S'il est possible que la trajectoire d'un système corresponde, à partir d'un certain moment, uniquement à un point, un tel point est appelé point d'équilibre. Nous allons voir que les problèmes de stabilité sont naturellement formulés par rapport aux points d'équilibre.

Considérons le système dynamique continu

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.5.1)$$

respectivement le système discret

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), k) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.5.2)$$

où f fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est telle que (1.5.1) (respectivement (1.5.2)) admet au moins une solution.

Définition 2

Le vecteur $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est dit point d'équilibre du système (1.5.1) (respectivement (1.5.2)) si $f(\bar{x}, t) = 0$ pour tout $t \geq 0$ (respectivement $\bar{x} = f(\bar{x}, k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$).

Interprétation mathématique et physique.

Un point d'équilibre $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ représente un état stationnaire du système dynamique, c'est-à-dire un état pour lequel l'évolution temporelle est nulle. En effet, si la condition initiale est exactement égale à \bar{x} , alors la solution du système reste constante pour tout temps :

$$x(t) = \bar{x}, \quad \forall t \geq 0.$$

Ainsi, un point d'équilibre correspond à une solution constante du système dynamique.

D'un point de vue géométrique, dans l'espace des phases \mathbb{R}^n , un point d'équilibre est un point fixe. Les trajectoires du système peuvent converger vers ce point, s'en éloigner, ou rester dans son voisinage, selon la nature du système et la stabilité de ce point.

D'un point de vue physique et en modélisation, un point d'équilibre représente un état permanent ou un régime stationnaire du système, c'est-à-dire une situation où les variables du système ne varient plus au cours du temps. Par exemple :

- dans un modèle de croissance de population, un point d'équilibre correspond à une population constante ;
- dans un modèle épidémiologique, il peut représenter l'absence de maladie ou un état endémique ;
- dans un système mécanique, il correspond à une position de repos ou d'équilibre.

L'étude des points d'équilibre est fondamentale, car elle permet de comprendre le comportement à long terme du système et constitue le point de départ de l'analyse de stabilité.

Exemple :

Considérons le système régi par l'équation

$$x'(t) = a \left[1 - \frac{x(t)}{c} \right] x(t) \quad \text{où } a > 0; \ c > 0$$

Les points d'équilibre de ce système sont solutions de l'équation algébrique

$$a \left[1 - \frac{\bar{x}}{c} \right] \bar{x} = 0,$$

ce qui donne deux points d'équilibre $\bar{x} = 0$ et $\bar{x} = c$.

Exemple :

Considérons le système discret suivant

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \alpha x_1(k) + x_2(k)^2 \\ x_2(k+1) = x_1(k) + \beta x_2(k) \end{cases}$$

Un point d'équilibre de ce système est un vecteur $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ solution du système

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \alpha \bar{x}_1 + \bar{x}_2^2 \\ \bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \beta \bar{x}_2 \end{cases}$$

ce qui donne deux points d'équilibre

$$\bar{x} = (0, 0) \quad \text{et} \quad \bar{x} = ((1 - \alpha)(1 - \beta)^2, (1 - \alpha)(1 - \beta)).$$

1.5.2 Stabilité des systèmes autonomes

Définitions et Exemples

Lors de l'analyse d'un système, l'étude de la stabilité revêt une importance primordiale, et bien que cette notion soit assez usuelle, elle peut avoir plusieurs interprétations selon l'application envisagée, ce qui conduit à des définitions appropriées mais en général liées au système considéré.

Les systèmes considérés dans cette section sont régis par l'équation

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.5.3)$$

pour le système continu autonome et par

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k)) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.5.4)$$

pour le système discret autonome.

Soit \bar{x} un point d'équilibre du système (1.5.3) (respectivement (1.5.4)).

Définition 3

1. \bar{x} est dit stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que,

$$\|x_0 - \bar{x}\| \leq \eta \implies \|x(t) - \bar{x}\| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } t > 0$$

(respectivement $\|x(k) - \bar{x}\| \leq \varepsilon$ pour tout $k \in \mathbb{N}$). Dans le cas contraire il est dit instable.

2. \bar{x} est dit asymptotiquement stable (a.s) s'il est stable et si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0$$

(respectivement $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - \bar{x}\| = 0$).

3. \bar{x} est dit marginalement stable (m.s) s'il est stable mais non (a.s).
4. \bar{x} est dit exponentiellement stable (e.s) s'il existe deux constantes positives α et β telles que

$$\|x(t) - \bar{x}\| \leq \alpha e^{-\beta t} \|x_0 - \bar{x}\|$$

Exemple :

L'équation de croissance d'une population

$$x'(t) = a \left[1 - \frac{x(t)}{c} \right] x(t)$$

où $a > 0$ et $c > 0$ a deux points d'équilibre $\bar{x} = 0$ et $\bar{x} = c$. Le point $\bar{x} = 0$ est instable et $\bar{x} = c$ est asymptotiquement stable.

Exemple :

Considérons le système discret qui apparaît en génétique

$$x(k+1) = \frac{x(k)}{1+x(k)}$$

Dans ce cas, $\bar{x} = 0$ est un point d'équilibre. Si $x(0) > 0$, $x(k) \rightarrow 0$ et si $x(0) < 0$, $x(k) \rightarrow 0$; d'où \bar{x} est instable.

Les définitions formulées ci-dessus caractérisent le comportement local du système, c'est-à-dire l'évolution de l'état lorsqu'il est perturbé de son point d'équilibre. Le concept de la stabilité globale est donné par la définition suivante.

Définition 4

1. \bar{x} est dit globalement asymptotiquement stable (g.a.s) s'il est (a.s) et pour tout x_0 ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0$$

(respectivement $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - \bar{x}\| = 0$).

2. \bar{x} est dit globalement exponentiellement stable (g.e.s) s'il existe deux constantes positives α et β telles que, pour tout x_0 , on a

$$\|x(t) - \bar{x}\| \leq \alpha e^{-\beta t} \|x_0 - \bar{x}\|.$$

Exemple :

Considérons le système

$$x' = -x + x^2 \quad x(0) = x_0$$

La solution de cette équation est

$$x(t) = \frac{x_0}{x_0 + (1 - x_0)e^t}.$$

Le système a deux points d'équilibre $x = 0$ et $x = 1$. Le point 1 est instable et 0 est (a.s) mais non globalement asymptotiquement stable.

Remarque :

Pour les systèmes linéaires autonomes, la stabilité asymptotique est toujours globale et exponentielle.

Stabilité des systèmes linéaires

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'étude de la stabilité des systèmes linéaires continus régis par l'équation

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.5.5)$$

respectivement des systèmes linéaires discrets

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.5.6)$$

où A est une matrice carrée de dimension $n \times n$.

Définition 5

Le système continu (1.5.5) ou discret (1.5.6) est dit stable si l'origine est stable et il est dit asymptotiquement stable si l'origine est asymptotiquement stable. Dans ce cas, la matrice du système A est dite stable ou asymptotiquement stable.

La stabilité des systèmes linéaires continus et discrets est caractérisée par le résultat suivant.

Proposition :

- Le système (1.5.5) est stable si et seulement si
 1. $\Re(\lambda) \leq 0$ pour toute valeur propre λ de A .
 2. S'il existe une valeur propre λ de multiplicité k telle que $\Re(\lambda) = 0$ alors $\dim E_\lambda = k$, où E_λ est le sous espace propre associé à λ .
- Le système (1.5.6) est stable si et seulement si pour toute valeur propre λ de A on a $|\lambda| \leq 1$.

Pour le cas continu, la démonstration se base essentiellement sur la décomposition de la matrice du système sous forme de Jordan. Pour le cas discret, la solution s'écrit $x(k) = A^k x_0$ et, dans ce cas, le système est stable si et seulement si, pour toute valeur propre λ de A , on a $|\lambda| \leq 1$.

Exemple :

Considérons le système

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) - 2x_2(t) \end{cases}$$

Les valeurs propres de A , $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -1$, sont simples, d'où le système est stable.

Exemple :

Considérons le système

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = 0 \end{cases}$$

La seule valeur propre de A est 0 de multiplicité 2 et $\dim E_0 = 1$, donc le système est instable.

Pour la stabilité asymptotique, on a le résultat suivant :

Proposition :

Le système (1.5.5) est (a.s) si et seulement si pour toute valeur propre λ de A on a

$$\Re(\lambda) < 0.$$

Le système (1.5.6) est (a.s) si et seulement si pour toute valeur propre λ de A on a

$$|\lambda| < 1.$$

Démonstration.

Soient λ_j , $j = 1, \dots, p$, les valeurs propres distinctes de A , la solution du système (1.5.5) s'écrit

$$x(t) = \sum_{j=1}^p g_j(t) e^{\lambda_j t},$$

où $g_j(t)$ est un polynôme en t , donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \Re(\lambda_j) < 0, \text{ pour } j = 1, \dots, p.$$

Dans le cas discret, la solution s'écrit

$$x(k) = A^k x_0$$

et donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x(k) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad |\lambda_j| < 1, \text{ pour } j = 1, \dots, p.$$

■

1.5.3 Stabilité des systèmes non autonomes

Considérons le système dynamique non autonome continu suivant

$$x'(t) = f(x(t), t) \quad (1.5.7)$$

respectivement discret

$$x(k+1) = f(x(k), k) \quad (1.5.8)$$

Définitions et exemples

Soit \bar{x} un point d'équilibre du système (1.5.7) (respectivement du système (1.5.8)).

Définition 6

Un point d'équilibre \bar{x} du système (1.5.7) (respectivement du système (1.5.8)) est dit stable à t_0 si pour tout $R > 0$ il existe $r = r(R, t_0) > 0$ tel que

$$\|x(t_0) - \bar{x}\| < r \implies \|x(t) - \bar{x}\| < R, \quad \text{pour tout } t \geq t_0$$

(respectivement il existe $r = r(R, k_0) > 0$ tel que

$$\|x(k_0) - \bar{x}\| < r \implies \|x(k) - \bar{x}\| < R, \quad \text{pour tout } k \geq k_0$$

Dans le cas contraire le point d'équilibre \bar{x} est dit instable.

Définition 7

Un point d'équilibre \bar{x} est dit uniformément stable (u.s) si pour tout $R > 0$ il existe $r = r(R) > 0$ indépendant de t_0 (respectivement de k_0) tel que, pour tout t_0 (respectivement pour tout k_0)

$$\|x(t_0) - \bar{x}\| < r \implies \|x(t) - \bar{x}\| < R, \text{ pour tout } t \geq t_0$$

(respectivement

$$\|x(k_0) - \bar{x}\| < r \implies \|x(k) - \bar{x}\| < R, \text{ pour tout } k \geq k_0$$

Définition 8

1. Le point d'équilibre \bar{x} est asymptotiquement stable (a.s) pour le système (1.5.7) à t_0 (respectivement (1.5.8) à k_0) s'il est stable et s'il existe $r(t_0) > 0$ tel que si $\|x(t_0) - \bar{x}\| < r(t_0)$ alors $\|x(t) - \bar{x}\| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ (respectivement $r(k_0) > 0$ tel que si $\|x(k_0) - \bar{x}\| < r(k_0)$ alors $\|x(k) - \bar{x}\| \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$).
2. Le point d'équilibre est globalement asymptotiquement stable (g.a.s) si, pour tout t_0 et $x(t_0)$, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$ (respectivement pour tout k_0 et $x(k_0)$, alors $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \bar{x}$).
3. Le point d'équilibre est exponentiellement stable (e.s) s'il existe α, β positifs tels que pour $x(t_0)$ proche de \bar{x} on a

$$\|x(t) - \bar{x}\| \leq \alpha \|x(t_0) - \bar{x}\| e^{-\beta(t-t_0)}, \text{ pour tout } t \geq t_0$$

4. Le point d'équilibre est globalement exponentiellement stable (g.e.s), s'il existe α, β positifs tels que pour tout t_0 et $x(t_0)$

$$\|x(t) - \bar{x}\| \leq \alpha \|x(t_0) - \bar{x}\| e^{-\beta(t-t_0)}, \text{ pour tout } t \geq t_0$$

Exemple :

Considérons le système

$$x'(t) = -a(t)x(t)$$

La solution est

$$x(t) = x(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(r) dr\right).$$

On en conclut que

1. Le système est stable si $a(t) \geq 0$ pour tout $t \geq t_0$.
2. Le système est (a.s) si $\int_0^\infty a(r) dr = \infty$.
3. Le système est (e.s) s'ils existent $T > 0$, $M > 0$ tels que pour tout $t \geq 0$, on a

$$\int_T^{t+T} a(r) dr \geq M.$$

Cas particuliers :

1. Si $a(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$, alors le système est stable mais non (a.s).
2. Si $a(t) = \frac{1}{(1+t)}$, alors le système est (a.s) et non (e.s).
3. Si $a(t) = t$, alors le système est (e.s).

Exemple :

Considérons le système

$$x'(t) = -t(x - 1)$$

La solution est donnée par

$$x(t) - 1 = \lambda e^{-\frac{t^2}{2}}$$

et le point d'équilibre 1 est (e.s).

Exemple :

Considérons le système

$$x(k+1) = a(k)x(k)$$

de solution

$$x(k+1) = \prod_{i=0}^k a(i) x(0)$$

et on a

Définition 9

Le point d'équilibre \bar{x} est localement uniformément asymptotiquement stable (u.a.s) si

1. Il est uniformément stable.
2. Il existe $R_0 > 0$ tel que pour tout R_1, R_2 avec $0 < R_2 < R_1 \leq R_0$, il existe $T(R_1, R_2) > 0$ tel que pour tout $t_0 \geq 0$, on a

$$\|x(t_0) - \bar{x}\| < R_1 \implies \|x(t) - \bar{x}\| < R_2, \text{ pour tout } t \geq t_0 + T.$$

Remarque :

La stabilité asymptotique uniforme implique la stabilité asymptotique mais la réciproque n'est pas vraie.

Exemple :

Soit le système

$$x'(t) = \frac{-x(t)}{1+t}$$

La solution de ce système est donnée par

$$x(t) = \frac{1+t_0}{1+t} x(t_0).$$

D'où le système est (a.s) mais non (u.a.s).

Cas des systèmes linéaires

Rappelons qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système linéaire autonome soit (a.s) est que toutes les valeurs propres de la matrice (décrivant la dynamique) du système aient leur partie réelle strictement négative. Cependant ce résultat n'est pas vrai pour les systèmes linéaires non autonomes d'équation

$$x'(t) = A(t)x(t) \quad (1.5.9)$$

En effet, considérons le système

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + e^{2t}x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_2(t) \end{cases}$$

(-1) est une valeur propre double de la matrice du système, pour tout $t \geq 0$. La solution de ce système est

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-t}x_1(0) + \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})x_2(0) \\ x_2(t) = e^{-t}x_2(0) \end{cases}$$

On a $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \infty$, pour $x_2(0) \neq 0$, d'où le système est instable.

Cependant, il existe des théorèmes qui assurent la stabilité asymptotique des systèmes linéaires non autonomes.

Un résultat important est le suivant.

Théorème :

Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$ et pour toute valeur propre λ de $A(t) + A(t)^T$, on a $\lambda \leq -\alpha$, alors le système (1.5.9) est asymptotiquement stable.

Démonstration. Soit la fonction $V(x) = x^T x$. Le long de la trajectoire on a

$$V' = x^T x' + x'^T x = x^T A(t)x + x^T A(t)^T x = x^T [A(t) + A(t)^T]x.$$

Par conséquent $V' \leq -\alpha x^T x = -\alpha V$. Donc pour tout $t \geq 0$,

$$0 \leq x^T(t)x(t) = V(x(t)) \leq V(x(0))e^{-\alpha t}$$

et par conséquent $x(t)$ tend vers 0 exponentiellement. ■

Notons que cette condition est suffisante mais non nécessaire.

Exemple :

Soit le système linéaire d'équation

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + e^{\frac{t}{2}}x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_2(t) \end{cases}$$

On a

$$A(t) + A(t)^T = \begin{pmatrix} -2 & e^{\frac{t}{2}} \\ e^{\frac{t}{2}} & -2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $A(t) + A(t)^T$ sont $(-2 - e^{\frac{t}{2}})$ et $(-2 + e^{\frac{t}{2}})$. La condition du théorème ci-dessus n'est donc pas vérifiée. Cependant la solution du système est donnée par

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-t}x_1(0) + 2[e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}]x_2(0) \\ x_2(t) = e^{-t}x_2(0) \end{cases}$$

On a $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0$. Donc le système est (a.s).

1.5.4 Stabilité et linéarisation

Nous avons vu que la propriété de stabilité dépend de la nature du système autour du point d'équilibre, il est donc naturel pour l'étude de la stabilité d'un système non linéaire, de remplacer ce système par une approximation linéaire autour du point d'équilibre. Souvent une approximation linéaire est suffisante pour l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre. La linéarisation d'un système non linéaire est basée sur la linéarisation de la fonction f au voisinage d'un point d'équilibre \bar{x} .

Considérons le système régi par l'équation ci-dessous,

$$x'(t) = f(x(t), t) \quad (1.5.11)$$

de point d'équilibre \bar{x} .

On pose $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ et $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et on suppose que f est continûment différentiable par rapport à x . Pour t fixé, on considère l'approximation

$$\begin{aligned} f_i(\bar{x}_1 + y_1, \bar{x}_2 + y_2, \dots, \bar{x}_n + y_n, t) &\simeq f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, t) \\ &+ \frac{\partial f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, t)}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, t)}{\partial x_2} y_2 \\ &+ \dots + \frac{\partial f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, t)}{\partial x_n} y_n. \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$f(\bar{x} + y, t) \simeq f(\bar{x}, t) + F(t)y$$

où $F(t)$ est la matrice jacobienne de f au point \bar{x} donnée par

$$F(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (1.5.12)$$

Le système (1.5.11) s'écrit

$$y' = F(t)y + h(t, y)$$

où $y = x - \bar{x}$.

Si la fonction f peut être approchée par $F(t)$, autrement dit si, pour tout t positif, on a

$$\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \sup \frac{\|h(t, y)\|}{\|y\|} = 0,$$

alors le système

$$y' = F(t)y \quad (1.5.13)$$

est appelé le linéarisé du système non linéaire (1.5.11) autour du point d'équilibre \bar{x} . Dans certains cas, la stabilité du système linéarisé assure la stabilité du système lui-même.

Théorème :

Si le système linéarisé (1.5.13) est uniformément asymptotiquement stable, alors le point d'équilibre \bar{x} de (1.5.11) est aussi uniformément asymptotiquement stable.

Notons que si le système (1.5.13) est seulement (a.s), alors on ne peut pas conclure à la stabilité du point d'équilibre.

Dans le cas d'un système discret

$$x(k+1) = f(x(k), k) \quad (1.5.14)$$

on pose $x(k) = \bar{x} + y(k)$ et y est solution de l'équation

$$y(k+1) = F(k)y(k)$$

où $F(k)$ est donnée par (1.5.12).

C'est l'approximation linéaire valable pour une petite perturbation $y(k)$ du point d'équilibre \bar{x} . Dans le cas discret ou continu, l'approximation linéaire du système non linéaire admet F comme matrice du système.

Proposition :

Si la matrice Jacobienne $F(t) = F$ est constante, alors

1. Si les valeurs propres de F sont à parties réelles strictement négatives, le système continu (1.5.11) est asymptotiquement stable au point \bar{x} .
2. S'il existe au moins une valeur propre λ de F telle que $\Re(\lambda) > 0$, le système continu (1.5.11) est instable au point \bar{x} .
3. S'il existe λ telle que $\Re(\lambda) = 0$, le système continu (1.5.11) peut être stable, asymptotiquement stable ou instable.
4. Si les valeurs propres de F sont toutes dans le disque unité ouvert, le système discret (1.5.14) est asymptotiquement stable au point \bar{x} .
5. Si les valeurs propres de F sont dans le disque unité et une valeur propre λ est telle que $\lambda = 1$, le système discret (1.5.14) peut être stable, asymptotiquement stable ou instable.
6. S'il existe au moins une valeur propre λ telle que $|\lambda| > 1$, le système discret (1.5.14) est instable au point \bar{x} .

Exemple :

Considérons le système

$$x'(t) = ax(t) + cx(t)^2$$

0 est un point d'équilibre pour tout a et c . Le système linéaire associé au point 0 est donné par $y(t) = ay(t)$. On a alors

1. Si $a < 0$, le système est asymptotiquement stable.
2. Si $a > 0$, le système est instable.
3. Si $a = 0$, on ne peut rien dire et cela nécessite une étude directe.

Pour $a = 0$, on a $x'(t) = cx(t)^2$. Si $c = 0$, il est clair que 0 est marginalement stable. Si $c \neq 0$ il est facile de déduire que 0 est instable. En effet, la solution s'écrit

$$x(t) = \frac{x(0)}{1 - cx(0)t}$$

Pour $t = \frac{1}{cx(0)}$ la solution n'est pas définie.

Exemple :

Considérons le système discret

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \alpha x_1(k) + x_2(k)^2 \\ x_2(k+1) = x_1(k) + \beta x_2(k) \end{cases}$$

avec $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta < 1$.

Ce système admet deux points d'équilibre

$$\bar{x} = (0, 0) \quad \text{et} \quad \bar{x} = ((1 - \alpha)(1 - \beta)^2, (1 - \alpha)(1 - \beta)).$$

- Pour $\bar{x} = (0, 0)$, on trouve

$$F = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$$

et le système linéaire correspondant s'écrit

$$\begin{cases} y_1(k+1) = \alpha y_1(k) \\ y_2(k+1) = y_1(k) + \beta y_2(k) \end{cases}$$

Les valeurs propres de F sont α et β , on conclut que le point $\bar{x} = (0, 0)$ est asymptotiquement stable.

- Pour $\bar{x} = ((1 - \alpha)(1 - \beta)^2, (1 - \alpha)(1 - \beta))$, on trouve

$$F = \begin{pmatrix} \alpha & 2(1 - \alpha)(1 - \beta) \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de F sont solutions de l'équation

$$(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta) = 2(1 - \alpha)(1 - \beta).$$

Le membre de gauche croît avec λ et plus petit que le membre de droite en $\lambda = 1$. Il est clair qu'il existe une racine $\lambda > 1$. D'où ce point d'équilibre est instable.

Conclusion et transition vers les méthodes numériques

Jusqu'à présent, nous avons étudié la stabilité des systèmes dynamiques continus et discrets au sens théorique, c'est-à-dire en considérant le modèle mathématique exact. Dans la pratique, les solutions de ces systèmes sont généralement approchées par des méthodes numériques, ce qui conduit à introduire une dynamique discrète artificielle dépendant du schéma choisi. Le chapitre suivant est consacré à l'étude des méthodes numériques de résolution des systèmes dynamiques et à l'analyse de leur stabilité, appelée stabilité numérique, qui constitue une notion distincte de la stabilité du système original.

Les méthodes numériques sont introduites uniquement pour approcher les solutions des systèmes continus. Les systèmes discrets sont déjà sous une forme exploitable numériquement et ne nécessitent pas de schéma de discrétisation.

2.1 Motivation et cadre général

Dans la pratique, la résolution analytique des systèmes dynamiques continus est rarement possible. On est alors conduit à approximer les solutions des équations différentielles ordinaires par des méthodes numériques. L'objectif de ce chapitre est :

d'introduire les principaux schémas numériques, d'étudier leurs propriétés de stabilité, de comparer la stabilité numérique à la stabilité théorique du système continu.

2.2 Discrétisation en temps : principe général, schéma général et choix du pas de temps

Lorsque l'on étudie un système dynamique décrit par une équation différentielle ordinaire, on suppose implicitement que la variable indépendante (le temps) est continue, et que la solution recherchée est une fonction suffisamment régulière pour que les dérivées soient bien définies. Cette hypothèse est naturelle dans le cadre théorique, mais elle n'est plus adaptée lorsque l'on cherche à obtenir une solution numérique approchée.

En effet, un calcul numérique ne peut fournir des valeurs de la solution qu'en un nombre fini de points. La résolution numérique d'une équation différentielle consiste donc à remplacer le problème continu par un problème discret, dans lequel la solution est approximée à des instants (ou des points) choisis à l'avance. Cette transformation est appelée *discrétisation*.

2.2.1 Principe de la discrétisation en temps

Considérons un problème de Cauchy pour une équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

La discrétisation en temps repose sur l'introduction d'une grille temporelle uniforme :

$$t_n = t_0 + nh, \quad n \in \mathbb{N},$$

où $h > 0$ est le pas de temps. L'objectif est alors de construire une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ telle que

$$x_n \approx x(t_n).$$

Dans ce cadre, la solution numérique n'a de sens qu'aux instants discrets t_n . Les variables indépendantes et dépendantes, initialement continues, sont ainsi remplacées par des variables discrètes indexées par un entier. Cette idée constitue le fondement de toutes les méthodes numériques pour les équations différentielles ordinaires.

2.2.2 Approximation des dérivées

La discrétisation nécessite également l'approximation des dérivées. Par exemple, la dérivée première d'une fonction $x(t)$ peut être approchée par une différence finie :

$$x'(t_n) \approx \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{t_{n+1} - t_n} = \frac{x_{n+1} - x_n}{h}.$$

Cette approximation correspond à une estimation de la dérivée sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$. Il s'agit d'une approximation locale, valable lorsque le pas de temps h est suffisamment petit. D'autres approximations sont possibles, et le choix de l'approximation conduit à différents schémas numériques.

Ainsi, la discrétisation transforme le problème différentiel continu en une relation de récurrence reliant les valeurs successives de la solution approchée.

2.2.3 Schéma numérique général

De manière générale, un schéma numérique à un pas peut être écrit sous la forme implicite :

$$\Phi(h, t_n, x_n, x_{n+1}) = 0,$$

où Φ est une fonction caractérisant la méthode numérique choisie. Cette relation permet de calculer la solution approchée à l'instant t_{n+1} à partir de la valeur connue à l'instant t_n .

Selon la forme de Φ , on distingue :

- les schémas explicites, pour lesquels x_{n+1} peut être exprimé directement :

$$x_{n+1} = \Psi(h, t_n, x_n),$$

- les schémas implicites, pour lesquels x_{n+1} est défini implicitement et nécessite la résolution d'une équation.

2.2.4 Choix du pas de temps

Le choix du pas de temps h joue un rôle central dans la qualité de la solution numérique. Un pas trop grand peut conduire à :

- une mauvaise approximation de la dérivée,
- une déformation qualitative de la dynamique,
- voire une instabilité numérique, même lorsque le système continu est stable.

À l'inverse, un pas trop petit améliore la précision mais augmente le coût de calcul et peut amplifier les erreurs numériques liées aux arrondis.

Il existe donc un compromis entre précision, stabilité et coût de calcul. Ce compromis dépend à la fois du système étudié et du schéma numérique utilisé. L'influence du pas de temps sur la stabilité de la solution numérique sera analysée plus en détail dans la section consacrée à la stabilité numérique.

2.2.5 Lien avec la suite du chapitre

La discrétisation en temps constitue la première étape de toute simulation numérique. Une fois le problème continu transformé en un problème discret, il devient possible d'introduire des schémas numériques spécifiques pour approcher la solution. Les sections suivantes sont consacrées à la présentation de ces schémas et à l'étude de leur stabilité numérique.

2.3 Méthodes de type Euler

Cette section présente une des méthodes les plus anciennes (sinon la plus ancienne) de résolution d'une EDO du premier ordre : la méthode d'Euler. Il existe deux types de méthodes d'Euler : explicite et implicite (aussi dite méthode d'Euler améliorée). Elles sont présentées dans les sous-sections suivantes. Dans les deux cas, on cherche à résoudre des équations du type :

$$x'(t) = f(x(t), t) \quad (2.1)$$

où f est une fonction connue de x et de t .

2.3.1 Méthode d'Euler explicite

Principe. Dans la méthode d'Euler explicite, l'équation précédente est discrétisée comme suit :

$$\begin{cases} x'(t) \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{h} \\ f(x(t), t) \approx f(x_n, t_n) \end{cases} \quad (2.2)$$

où x_n est la valeur (connue) de x à la date t_n , x_{n+1} est la valeur (encore inconnue) que l'on désire calculer de x à la date t_{n+1} , et $h = t_{n+1} - t_n$ est le pas de temps.

En remplaçant dans l'équation différentielle, il vient :

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = f(x_n, t_n) \quad (2.3)$$

Cette équation se réécrit :

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n, t_n) \quad (2.4)$$

Puisque x_n est connue et que la fonction f l'est aussi, $f(x_n, t_n)$ l'est également. x_{n+1} peut être déterminée directement d'après x_n . La méthode numérique est dite *explicite* car la valeur de x à la date $n + 1$ peut être déterminée explicitement à partir de la valeur de x à la date n .

2.3.2 Méthode d'Euler implicite

Principe. Dans la méthode d'Euler implicite, l'équation est discrétisée comme suit :

$$\begin{cases} x'(t) \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{h} \\ f(x(t), t) \approx f(x_{n+1}, t_{n+1}) \end{cases} \quad (2.5)$$

À la différence de la méthode explicite, f est maintenant calculée à partir de la valeur (inconnue) de x à la date t_{n+1} . En remplaçant dans l'équation différentielle, il vient :

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = f(x_{n+1}, t_{n+1}) \quad (2.6)$$

Cette équation peut être réécrite comme suit :

$$x_{n+1} - hf(x_{n+1}, t_{n+1}) = x_n \quad (2.7)$$

Contrairement au cas explicite, cette formulation lie la valeur (inconnue) x_{n+1} à une fonction de cette valeur même. On dit aussi que x_{n+1} est définie implicitement : la méthode est *implicite*. En général (sauf expression particulièrement simple de la fonction f), la résolution impose d'avoir recours à des méthodes itératives (de type Newton).

2.4 Méthodes de type Runge-Kutta

Les méthodes de type Runge-Kutta permettent d'obtenir une plus grande précision que les méthodes d'Euler (dans le sens où elles donnent en général des solutions numériques plus proches des solutions analytiques que les méthodes d'Euler). Cette précision est obtenue par l'utilisation d'un pas de calcul intermédiaire. On évite alors l'inconvénient de méthodes du type Euler semi-explicite qui demandent le concours de méthodes itératives.

Les deux méthodes de Runge-Kutta les plus employées sont l'algorithme dit *RK2* à deux pas de calcul et l'algorithme dit *RK4* à quatre pas de calcul.

2.4.1 Méthode RK2

Principe. On cherche à résoudre une EDO du type

$$x'(t) = f(x(t), t) \quad (2.8)$$

L'algorithme RK2 se décompose comme suit :

1. Utiliser la méthode d'Euler explicite sur un demi pas de temps de calcul :

$$x_{n+\frac{1}{2}} = x_n + \frac{h}{2}f(x_n, t_n) \quad (2.9)$$

2. Cette valeur intermédiaire est utilisée pour actualiser la valeur de la dérivée :

$$f^{n+\frac{1}{2}} = f(x_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}}) \quad (2.10)$$

3. Utiliser la valeur actualisée de la dérivée dans la méthode d'Euler explicite sur la totalité du pas de temps :

$$x_{n+1} = x_n + hf^{n+\frac{1}{2}} \quad (2.11)$$

2.4.2 Méthode RK4

Principe. L'algorithme de la méthode RK4 est le suivant :

1. Calculer une première variation de x à partir de x_n et t_n :

$$k_1 = hf(x_n, t_n) \quad (2.12)$$

2. Mettre à jour cette variation en se plaçant au milieu du pas de temps :

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{k_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right) \quad (2.13)$$

3. Répéter l'opération :

$$k_3 = hf \left(x_n + \frac{k_2}{2}, t_n + \frac{h}{2} \right) \quad (2.14)$$

4. La dernière variation de x est calculée à partir de la date $n + 1$:

$$k_4 = hf(x_n + k_3, t_n + h) \quad (2.15)$$

La valeur de x à la date t_{n+1} est donnée par :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.16)$$

2.5 Stabilité numérique

Dans cette section, on étudie la stabilité des schémas numériques appliqués aux équations différentielles ordinaires. Cette étude prolonge naturellement celle du Chapitre 1, où la stabilité des systèmes dynamiques continus et discrets a été analysée.

L'idée centrale est la suivante : un schéma numérique transforme un système continu en un système discret, et la stabilité du système continu n'est pas nécessairement préservée par cette discrétisation.

2.5.1 Notations et cadre d'étude

On considère une équation différentielle ordinaire du premier ordre

$$x'(t) = f(x(t)),$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^d$. Dans cette section, on se place essentiellement dans le cadre :

- des systèmes autonomes, pour lesquels la fonction f ne dépend pas explicitement du temps,
- et, pour l'analyse de stabilité, des systèmes linéaires ou localement linéarisés.

Lorsqu'un schéma numérique est appliqué à cette équation, la solution continue $x(t)$ est remplacée par une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie aux instants discrets

$$t_n = t_0 + nh,$$

où $h > 0$ est le pas de temps.

Ainsi, le schéma numérique définit une dynamique discrète au sens du Chapitre 1, et la stabilité numérique s'étudie en analysant le comportement asymptotique de la suite (x_n) lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Consistance - Convergence - Ordre des méthodes numériques

- Les schémas numériques présentés sont consistants au sens où l'erreur locale tend vers zéro lorsque le pas de temps tend vers zéro.

- L'ordre d'une méthode numérique mesure la vitesse de convergence de la solution numérique vers la solution exacte lorsque le pas de temps tend vers zéro.

Plus précisément, une méthode est dite d'ordre p si l'erreur globale vérifie :

$$\|x_n - x(t_n)\| = \mathcal{O}(h^p) \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0.$$

Les méthodes présentées dans ce chapitre possèdent les ordres suivants :

- Euler explicite : ordre 1,
- Euler implicite : ordre 1,
- Runge-Kutta d'ordre 2 (RK2) : ordre 2,
- Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) : ordre 4.

Un ordre plus élevé permet en général d'obtenir une meilleure précision pour un même pas de temps. Cependant, l'ordre ne garantit pas la stabilité numérique.

- Dans le cadre de ce projet, nous nous concentrons principalement sur la stabilité numérique, qui constitue un critère essentiel pour garantir des simulations fiables.

2.5.2 Équation test de Dahlquist

Pour analyser la stabilité des schémas numériques de manière simple et universelle, on introduit l'équation test linéaire

$$x'(t) = \lambda x(t), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

La solution exacte est donnée par

$$x(t) = x(0)e^{\lambda t}.$$

Lorsque $\Re(\lambda) < 0$, la solution continue tend vers zéro lorsque $t \rightarrow +\infty$: le système continu est asymptotiquement stable. L'objectif de la stabilité numérique est alors de déterminer si le schéma numérique reproduit ce comportement qualitatif pour un pas de temps donné.

2.5.3 Stabilité du schéma d'Euler explicite

Appliqué à l'équation test, le schéma d'Euler explicite conduit à

$$x_{n+1} = (1 + \lambda h)x_n.$$

On obtient ainsi un système discret linéaire. D'après les résultats du Chapitre 1 sur les systèmes discrets, la stabilité asymptotique est assurée si et seulement si

$$|1 + \lambda h| < 1.$$

Interprétation géométrique.

L'inégalité $|1 + \lambda h| < 1$ définit un ensemble dans le plan complexe : c'est le disque de centre -1 et de rayon 1. Cet ensemble est appelé la région de stabilité du schéma d'Euler explicite.

La condition de stabilité dépend donc directement du produit λh . Si le pas de temps est trop grand, un système continu pourtant stable peut devenir instable numériquement. Le schéma d'Euler explicite est ainsi conditionnellement stable.

2.5.4 Stabilité du schéma d'Euler implicite

Pour le schéma d'Euler implicite, on obtient

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 - \lambda h} x_n.$$

La condition de stabilité asymptotique devient

$$\left| \frac{1}{1 - \lambda h} \right| < 1.$$

Lorsque $\Re(\lambda) < 0$, cette inégalité est vérifiée pour tout $h > 0$. La région de stabilité du schéma contient donc tout le demi-plan gauche du plan complexe. Cela signifie que le schéma d'Euler implicite préserve la stabilité du système continu indépendamment du choix du pas de temps.

2.5.5 Stabilité du schéma RK4

Pour le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4, l'application à l'équation test conduit à une relation de la forme

$$x_{n+1} = R(\lambda h)x_n,$$

où R est un polynôme de degré 4 en λh .

La condition de stabilité asymptotique est donnée par

$$|R(\lambda h)| < 1.$$

La région de stabilité de RK4 est nettement plus grande que celle du schéma d'Euler explicite, ce qui permet d'utiliser des pas de temps plus importants tout en conservant la stabilité. Cependant, cette région ne couvre pas tout le demi-plan gauche, et le schéma RK4 n'est donc pas inconditionnellement stable.

Remarques :

- La stabilité numérique est une propriété du système discret induit par le schéma numérique.
- Elle s'analyse à l'aide des mêmes critères que la stabilité des systèmes discrets étudiée au Chapitre 1.
- Le pas de temps joue un rôle central dans la préservation ou la perte de la stabilité du système continu.

2.6 Problèmes raides et limites des schémas explicites

2.6.1 Introduction et motivation

Dans les sections précédentes, nous avons étudié la stabilité numérique des schémas appliqués aux équations différentielles ordinaires et montré que cette stabilité dépend fortement du schéma choisi et du pas de temps. Cependant, dans de nombreuses applications, on rencontre des systèmes dynamiques pour lesquels les méthodes numériques explicites deviennent difficiles à utiliser, voire inefficaces, même lorsque la solution exacte est simple et stable. Ce phénomène est lié à ce que l'on appelle les *problèmes raides* (*stiff problems*).

L'objectif de cette section est d'introduire la notion de raideur, de comprendre pourquoi les schémas explicites échouent dans ce contexte, et de motiver l'utilisation de schémas implicites.

2.6.2 Définition intuitive d'un problème raide

Un problème est dit *raide* lorsqu'il présente plusieurs échelles de temps très différentes : certaines composantes de la solution évoluent très rapidement, tandis que d'autres évoluent lentement. D'un point de vue mathématique, cela se traduit souvent par la présence de valeurs propres de grande partie réelle négative, associées à des dynamiques très rapides.

Il est important de souligner que la raideur n'est pas liée à la complexité de la solution, mais aux contraintes de stabilité imposées aux méthodes numériques.

2.6.3 Exemple simple : cas scalaire ($n = 1$)

Considérons l'équation différentielle scalaire

$$x'(t) = \lambda x(t), \quad \lambda \ll 0.$$

La solution exacte est donnée par

$$x(t) = x(0)e^{\lambda t},$$

qui décroît très rapidement vers zéro. Le système continu est donc fortement stable.

Appliqué à cette équation, le schéma d'Euler explicite s'écrit

$$x_{n+1} = (1 + \lambda h)x_n.$$

La condition de stabilité impose

$$|1 + \lambda h| < 1,$$

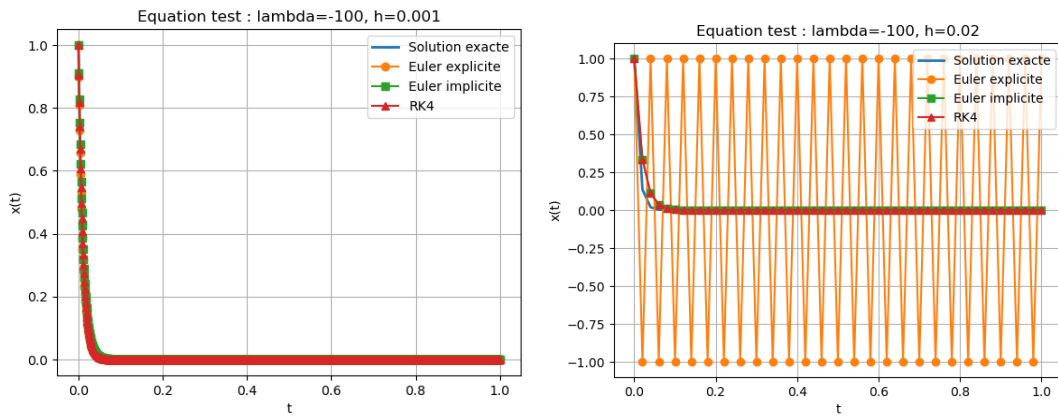
ce qui entraîne une contrainte sévère sur le pas de temps lorsque $|\lambda|$ est grand. Ainsi, pour un problème raide, le pas de temps doit être extrêmement petit afin de garantir la stabilité, ce qui rend la simulation coûteuse et inefficace.

Le schéma d'Euler implicite, en revanche, reste stable quel que soit le pas de temps. Le schéma RK4 permet d'améliorer la précision par rapport à Euler explicite, mais il reste soumis à des contraintes de stabilité et peut également devenir instable pour des pas de temps trop grands.

2.6.4 Illustration numérique : cas scalaire

Ce test met en évidence l'instabilité du schéma explicite pour un pas de temps pourtant raisonnable, alors que le schéma implicite reste stable.

Le schéma RK4 améliore la précision mais ne supprime pas totalement les contraintes de stabilité.

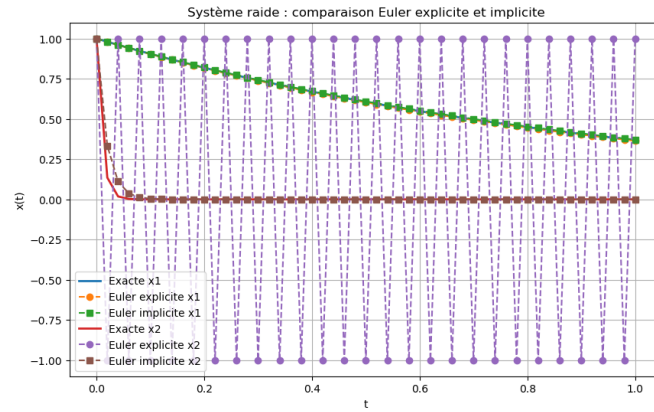


2.6.5 Exemple de système raide ($n = 2$)

Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1' = -x_1, \\ x_2' = -100x_2. \end{cases}$$

Ce système présente deux échelles de temps très différentes : la composante x_2 décroît beaucoup plus rapidement que x_1 . Bien que le système continu soit stable, la présence de la valeur propre -100 impose un pas de temps très petit pour les schémas explicites.



2.6.6 Limites des schémas explicites

Les exemples précédents montrent que les schémas explicites imposent un pas de temps dicté par la dynamique la plus rapide du système, même si cette dynamique n'est pas celle d'intérêt principal. Le problème rencontré n'est donc pas un problème de précision, mais de stabilité numérique.

2.6.7 Intérêt des schémas implicites

Les schémas implicites permettent de conserver la stabilité pour des pas de temps plus grands, ce qui les rend particulièrement adaptés au traitement des problèmes raides. Cette robustesse vis-à-vis de la stabilité numérique justifie leur utilisation dans de nombreuses applications, malgré le coût supplémentaire lié à la résolution d'équations à chaque pas de temps.

2.6.8 Conclusion et transition

Cette étude met en évidence les limites fondamentales des schémas explicites face aux problèmes raides et motive l'utilisation de schémas implicites. Dans le chapitre suivant, ces notions seront illustrées sur des modèles concrets afin de comparer la stabilité théorique et la stabilité numérique observée.

Les chapitres précédents ont permis d'établir un cadre théorique rigoureux pour l'étude des systèmes dynamiques en dimension finie, ainsi que pour l'analyse de la stabilité des méthodes numériques appliquées aux équations différentielles ordinaires. L'intérêt principal de ces outils apparaît pleinement lorsqu'ils sont mis en œuvre dans l'étude de modèles concrets issus de la modélisation mathématique.

Ce chapitre est consacré à l'analyse qualitative de plusieurs systèmes dynamiques non linéaires représentatifs de phénomènes réels. L'objectif est de mettre en évidence le lien entre la dynamique du modèle continu et les notions de stabilité étudiées précédemment, tout en préparant leur exploitation numérique.

Les modèles étudiés sont choisis de complexité croissante.

- Le modèle de croissance logistique à une dimension constitue un premier cadre d'étude fondamental : il s'agit d'un système non linéaire simple, admettant une solution analytique explicite, ce qui permet de valider rigoureusement les résultats théoriques.
- Le modèle SIR, issu de l'épidémiologie, introduit une dynamique de dimension plus élevée et dépourvue de solution explicite fermée.
- Enfin, l'oscillateur de Van der Pol illustre des phénomènes oscillatoires non linéaires et met en évidence des comportements dynamiques plus complexes.

Ce chapitre vise ainsi à illustrer, sur des modèles représentatifs, les notions développées dans les chapitres précédents. Les simulations numériques associées à ces modèles seront introduites ultérieurement afin d'analyser le comportement des solutions approchées et d'illustrer l'influence des schémas numériques et du pas de temps.

3.1 Cadre général et démarche d'étude

Les modèles étudiés dans ce chapitre sont formulés sous la forme de systèmes dynamiques continus autonomes décrits par des équations différentielles ordinaires :

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0,$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état du système et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs généralement non linéaire. Ce cadre est en continuité directe avec les hypothèses introduites au Chapitre 1.

Pour chaque modèle, l'étude repose principalement sur une analyse qualitative du système continu. La démarche suivie est la suivante :

- présentation du modèle et interprétation des variables et paramètres ;
- étude mathématique du système dynamique : existence des solutions, points d'équilibre et stabilité ;
- lorsque cela est possible, exploitation d'une solution analytique explicite afin de décrire le comportement asymptotique.

Les modèles étant en général non linéaires, les solutions analytiques ne sont pas toujours accessibles. Dans ces cas, l'étude qualitative permet néanmoins de dégager les propriétés essentielles de la dynamique. Les simulations numériques associées à ces modèles seront introduites dans une partie ultérieure afin de comparer le comportement du système continu et celui obtenu après discrétisation en temps.

3.2 Modèle de croissance logistique à une dimension

3.2.1 Présentation du modèle

Le modèle de croissance logistique est l'un des modèles fondamentaux en dynamique des populations. Il décrit l'évolution temporelle d'une population en tenant compte d'une croissance initiale proportionnelle à la taille de la population, suivie d'un ralentissement dû à la limitation des ressources.

Le modèle est donné par l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{dx}{dt} = r x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right), \quad x(0) = x_0,$$

où $x(t)$ désigne la taille de la population à l'instant t .

3.2.2 Interprétation des paramètres

Les paramètres du modèle ont une interprétation claire en modélisation :

- $r > 0$ est le taux intrinsèque de croissance de la population ;
- $K > 0$ est la capacité de charge du milieu, représentant la taille maximale soutenable par l'environnement ;
- $x_0 > 0$ est la population initiale.

Lorsque la population est faible devant K , la croissance est presque exponentielle. À mesure que $x(t)$ se rapproche de K , la croissance ralentit et tend vers zéro.

3.2.3 Forme et nature du système dynamique

Ce modèle s'inscrit dans le cadre des systèmes dynamiques continus autonomes :

$$x'(t) = f(x(t)), \quad \text{avec} \quad f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{K} \right).$$

On observe que :

- le système est d'ordre $n = 1$ (équation scalaire) ;
- il est autonome, car la fonction f ne dépend pas explicitement du temps ;
- il est non linéaire, en raison du terme quadratique en x .

3.2.4 Étude mathématique du modèle

Existence locale et unicité des solutions

On considère le modèle de croissance logistique

$$x'(t) = r x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right), \quad x(0) = x_0 > 0.$$

La fonction

$$f(x) = r x \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

est continue et continûment dérivable sur \mathbb{R} . Elle est donc localement lipschitzienne.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe un unique intervalle maximal

$$]t_-, t_+[\quad \text{avec} \quad -\infty \leq t_- < 0 < t_+ \leq +\infty,$$

sur lequel le problème de Cauchy admet une solution unique

$$x :]t_-, t_+[\rightarrow \mathbb{R}.$$

Positivité

On suppose que la condition initiale vérifie $x_0 > 0$.

Le champ de vecteurs s'annule en $x = 0$ et, au voisinage de ce point, il est dirigé vers les valeurs positives. Par unicité de la solution du problème de Cauchy, une trajectoire ne peut pas atteindre ni traverser le point $x = 0$.

Il en résulte que la solution reste strictement positive sur son intervalle de définition :

$$x(t) > 0 \quad \text{pour tout } t \in]t_-, t_+[.$$

Ainsi, le demi-axe $]0, +\infty[$ est invariant par la dynamique.

Invariance de l'intervalle $[0, K]$

On étudie le signe du champ de vecteurs associé au modèle logistique :

$$x' = r x \left(1 - \frac{x}{K}\right).$$

Sur la frontière de l'intervalle $[0, K]$, on a :

- en $x = 0$, $x' = 0$;
- en $x = K$, $x' = 0$.

De plus :

- si $0 < x < K$, alors $x' > 0$;
- si $x > K$, alors $x' < 0$.

Le champ de vecteurs est donc dirigé vers l'intérieur de l'intervalle $[0, K]$. Par conséquent, toute solution issue d'une condition initiale $x_0 \in]0, K]$ reste dans $[0, K]$ pour tout $t \in]t_-, t_+[$.

Bornitude et existence globale

Les résultats précédents montrent que, pour toute condition initiale $x_0 \in]0, K]$, la solution vérifie

$$0 < x(t) \leq K \quad \text{pour tout } t \in]t_-, t_+[.$$

La solution est donc bornée sur son intervalle de définition. Or, pour une équation différentielle dont le champ de vecteurs est continu et localement lipschitzien, la seule obstruction à l'existence globale est une explosion en temps fini.

La bornitude de la solution excluant toute explosion, on en déduit que $t_+ = +\infty$. Ainsi, la solution est définie pour tout $t \geq 0$.

Points d'équilibre

Les points d'équilibre sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$, soit :

$$rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) = 0.$$

On obtient deux points d'équilibre :

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = K.$$

Stabilité des équilibres

On étudie la stabilité à l'aide de la dérivée de f :

$$f'(x) = r \left(1 - \frac{2x}{K}\right).$$

- En $x = 0$, on a $f'(0) = r > 0$, donc l'équilibre $x = 0$ est instable.
- En $x = K$, on a $f'(K) = -r < 0$, donc l'équilibre $x = K$ est asymptotiquement stable.

Ainsi, toute solution issue d'une condition initiale positive converge vers la capacité de charge K .

3.2.5 Solution analytique explicite

Le modèle logistique admet une solution analytique explicite. En séparant les variables, on obtient :

$$x(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-x_0}{x_0}\right) e^{-rt}}.$$

Cette expression décrit explicitement l'évolution temporelle de la population en fonction des paramètres r , K et de la condition initiale x_0 .

Démonstration.

On considère le problème de Cauchy

$$x'(t) = r x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right), \quad x(0) = x_0 > 0,$$

où $r > 0$ et $K > 0$.

Séparation des variables

Pour $x(t) \neq 0$ et $x(t) \neq K$, on peut écrire

$$\frac{dx}{dt} = r x \left(1 - \frac{x}{K}\right) \implies \frac{dx}{x \left(1 - \frac{x}{K}\right)} = r dt.$$

Or,

$$x \left(1 - \frac{x}{K}\right) = x \frac{K - x}{K} = \frac{x(K - x)}{K},$$

donc

$$\frac{dx}{x \left(1 - \frac{x}{K}\right)} = \frac{K dx}{x(K - x)}.$$

Décomposition en éléments simples

On décompose

$$\frac{K}{x(K - x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{K - x}.$$

En multipliant par $x(K - x)$, on obtient

$$K = A(K - x) + Bx = AK + (-A + B)x.$$

Par identification des coefficients :

$$AK = K \implies A = 1, \quad -A + B = 0 \implies B = 1.$$

Ainsi,

$$\frac{K}{x(K - x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{K - x}.$$

Donc l'équation séparée devient

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{K - x}\right) dx = r dt.$$

Intégration

En intégrant, on obtient

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{K - x}\right) dx = \int r dt.$$

Or

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|, \quad \int \frac{1}{K - x} dx = -\ln |K - x|.$$

Donc

$$\ln |x| - \ln |K - x| = rt + C,$$

c'est-à-dire

$$\ln \left| \frac{x}{K - x} \right| = rt + C.$$

En exponentiant :

$$\frac{x}{K - x} = C_1 e^{rt}, \quad \text{où } C_1 = e^C > 0.$$

Expression explicite et détermination de la constante

On résout en x :

$$x = C_1 e^{rt}(K - x) \implies x + C_1 e^{rt}x = KC_1 e^{rt}$$

$$x(1 + C_1 e^{rt}) = KC_1 e^{rt} \implies x(t) = \frac{KC_1 e^{rt}}{1 + C_1 e^{rt}} = \frac{K}{1 + \frac{1}{C_1} e^{-rt}}.$$

En posant $A = \frac{1}{C_1}$, on obtient

$$x(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}.$$

On utilise la condition initiale $x(0) = x_0$:

$$x_0 = \frac{K}{1 + A} \implies 1 + A = \frac{K}{x_0} \implies A = \frac{K - x_0}{x_0}.$$

Finalement,

$$x(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-x_0}{x_0}\right) e^{-rt}}.$$

Exploitation de la solution analytique

La solution explicite permet de tirer plusieurs conclusions importantes :

- **Comportement asymptotique :**

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = K,$$

ce qui confirme la stabilité asymptotique de l'équilibre K .

- **Croissance initiale :** pour $x_0 \ll K$, la solution est proche d'une croissance exponentielle de taux r .
- **Bornitude :** la solution reste bornée pour tout $t \geq 0$, ce qui est cohérent avec l'interprétation biologique du modèle.
- **Modèle de référence :** la solution exacte constitue une référence idéale pour l'analyse qualitative et, ultérieurement, pour la comparaison avec les solutions numériques.

La connaissance explicite de la solution permet ainsi de valider rigoureusement les résultats théoriques et servira de base pour évaluer l'influence des schémas numériques sur la dynamique du système.

Remarque :

Le modèle logistique à une dimension joue un rôle central dans ce projet. Il constitue un exemple simple mais non linéaire, pour lequel l'étude mathématique complète est possible. Il permet d'introduire progressivement les notions de stabilité, de comportement asymptotique et de comparaison entre dynamique continue et dynamique discrétisée.

Ce modèle servira de point de référence pour les modèles plus complexes étudiés par la suite, pour lesquels aucune solution analytique explicite n'est disponible.

3.3 Modèle SIR

3.3.1 Présentation du modèle

Le modèle SIR est un modèle compartimental classique en épidémiologie. Il décrit l'évolution d'une population divisée en trois sous-populations :

- $S(t)$: nombre d'individus susceptibles (non infectés mais pouvant être infectés),
- $I(t)$: nombre d'individus infectés et infectieux,
- $R(t)$: nombre d'individus retirés, c'est-à-dire guéris (et immunisés) ou décédés (non infectieux).

On suppose que les individus passent successivement de S vers I , puis de I vers R .

Le modèle SIR s'écrit :

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t), \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t), \\ R'(t) = \gamma I(t), \end{cases} \quad (S(0), I(0), R(0)) = (S_0, I_0, R_0), \quad (3.1)$$

où $\beta > 0$ et $\gamma > 0$.

3.3.2 Interprétation des paramètres

- β est le taux de transmission : il combine la fréquence des contacts et la probabilité de transmission par contact.
- γ est le taux de retrait (guérison/isolement) : la durée moyenne d'infectiosité vaut $1/\gamma$.

3.3.3 Forme et nature du système dynamique

Le système (3.1) est :

- un système dynamique continu **autonome** (pas de dépendance explicite en t) ;
- d'ordre $n = 3$ (état $(S, I, R) \in \mathbb{R}^3$) ;
- **non linéaire** à cause du terme bilinéaire SI ;
- déterministe (dans la version de base).

On peut l'écrire sous la forme compacte $X' = F(X)$ avec $X = (S, I, R)^T$ et

$$F(S, I, R) = \begin{pmatrix} -\beta SI \\ \beta SI - \gamma I \\ \gamma I \end{pmatrix}.$$

3.3.4 Existence, unicité et domaine admissible

On suppose que les conditions initiales vérifient

$$S(0) > 0, \quad I(0) > 0, \quad R(0) \geq 0.$$

Le champ de vecteurs associé au système SIR est polynomial en (S, I, R) , donc continu et continûment dérivable sur \mathbb{R}^3 . Il est en particulier localement lipschitzien. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème admet une solution unique définie sur un intervalle maximal $[0, T_+[$.

De plus, comme les solutions restent positives et que la population totale est conservée, les trajectoires demeurent dans un ensemble borné de \mathbb{R}^3 . Il n'y a donc pas de phénomène d'explosion en temps fini, ce qui permet d'étendre la solution locale en une solution globale définie pour tout $t \geq 0$.

L'orthant positif \mathbb{R}_+^3 est invariant par la dynamique. Ainsi, la solution reste biologiquement admissible pour tout $t \in [0, +\infty[$.

3.3.5 Invariant de population et réduction du système

La somme des équations du système donne

$$S' + I' + R' = 0,$$

ce qui implique la conservation de la population totale :

$$S(t) + I(t) + R(t) = N.$$

La dynamique est donc confinée au simplexe invariant

$$\Omega = \{(S, I, R) \in \mathbb{R}_+^3 \mid S + I + R = N\}.$$

La conservation de la population totale permet d'exprimer

$$R(t) = N - S(t) - I(t).$$

Ainsi, la dynamique du système peut être entièrement décrite par les deux variables S et I , ce qui permet de réduire l'étude à un système dynamique plan :

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t), \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t). \end{cases}$$

Les trajectoires évoluent dans le domaine (triangle) invariant

$$\{(S, I) \in \mathbb{R}_+^2 \mid S + I \leq N\},$$

qui correspond à la contrainte de conservation de la population.

3.3.6 Équilibres et seuil épidémique

Un équilibre du modèle SIR vérifie

$$S' = I' = R' = 0.$$

De l'équation $R' = \gamma I$, on déduit nécessairement $I = 0$. L'ensemble des équilibres est donc donné par

$$\mathcal{E} = \{(S, 0, R) \in \mathbb{R}_+^3 \mid S + R = N\}.$$

Ces équilibres correspondent à des états sans infectés. Il s'agit d'une famille continue d'équilibres paramétrée par la valeur de S .

Pour analyser la stabilité de ces équilibres, on considère l'équation vérifiée par I :

$$I' = I(\beta S - \gamma).$$

Au voisinage d'un équilibre $(S^*, 0, R^*)$, la dynamique de la variable I est gouvernée par le signe de $\beta S^* - \gamma$.

On introduit alors le nombre de reproduction de base

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta S(0)}{\gamma}.$$

- Si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors $\beta S(0) - \gamma > 0$ et l'équilibre sans maladie est instable : le nombre d'individus infectés croît initialement, ce qui correspond au déclenchement d'une épidémie.
- Si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, alors l'équilibre est stable et l'infection s'éteint sans propagation significative.

Ainsi, le seuil épidémique $\mathcal{R}_0 = 1$ correspond à un changement de stabilité de l'équilibre sans infectés.

3.3.7 Lien entre stabilité des équilibres et analyse Jacobienne

L'ensemble des équilibres sans maladie forme une variété invariante de dimension un. L'analyse locale de la stabilité s'effectue en étudiant le Jacobien du système évalué sur cette variété.

Le Jacobien du modèle SIR possède deux valeurs propres nulles, liées respectivement à la conservation de la population totale et à la non-isolation des équilibres. La dynamique transverse à la variété d'équilibres est gouvernée par une unique valeur propre

$$\lambda = \beta S^* - \gamma.$$

Lorsque $\lambda < 0$, toute perturbation infectieuse décroît et l'équilibre sans maladie est localement stable. À l'inverse, lorsque $\lambda > 0$, l'équilibre est instable et une petite perturbation dans la direction infectieuse est amplifiée. Le seuil épidémique correspond ainsi à un changement de signe de cette valeur propre, ce qui se traduit par la condition $\mathcal{R}_0 = 1$.

3.3.8 Remarques et conclusion

Le modèle SIR illustre de manière exemplaire le rôle des invariants et des seuils dans la dynamique des systèmes non linéaires. Bien que la structure des équilibres soit simple, leur stabilité dépend de paramètres clés gouvernant l'évolution du système.

Dans le cadre de ce mini-projet, ce modèle constitue un terrain privilégié pour analyser la capacité des schémas numériques à préserver les propriétés qualitatives essentielles du système continu, telles que la positivité des solutions, la conservation des invariants et la stabilité des équilibres.

Cette étude prépare naturellement l'analyse de modèles présentant des dynamiques plus complexes, notamment des comportements oscillatoires, comme l'oscillateur de Van der Pol.

3.4 Oscillateur de Van der Pol

3.4.1 Présentation du modèle

L'oscillateur de Van der Pol est un modèle classique décrivant un système oscillant non linéaire avec auto-entretien des oscillations. Il est initialement apparu dans l'étude des circuits électroniques, mais constitue aujourd'hui un exemple fondamental en théorie des systèmes dynamiques non linéaires.

Le modèle est donné par l'équation différentielle du second ordre :

$$x''(t) - \mu(1 - x(t)^2)x'(t) + x(t) = 0,$$

où $x(t)$ représente l'état du système et $\mu > 0$ est un paramètre contrôlant l'intensité de la non-linéarité et de l'amortissement.

3.4.2 Interprétation physique du modèle

L'oscillateur de Van der Pol peut être interprété comme un système mécanique analogue à une masse attachée à un ressort, avec un amortissement non linéaire.

La variable $x(t)$ représente la position du système, tandis que $x'(t)$ correspond à sa vitesse.

Le terme $-\mu(1 - x^2)x'$ représente un amortissement dépendant de l'amplitude.

Pour de faibles amplitudes ($|x| < 1$), cet amortissement est négatif, ce qui injecte de l'énergie dans le système et amplifie les oscillations.

Pour de grandes amplitudes ($|x| > 1$), l'amortissement devient positif, ce qui dissipe l'énergie et limite la croissance des oscillations.

Ce mécanisme conduit à l'apparition d'un cycle limite stable, correspondant à une oscillation auto-entretenue, indépendante des conditions initiales.

Le paramètre $\mu > 0$ contrôle l'intensité de cet amortissement non linéaire. Lorsque μ est faible, l'échange d'énergie est modéré et le système présente des oscillations proches de celles d'un oscillateur harmonique classique. En revanche, lorsque μ est élevé, l'injection et la dissipation d'énergie deviennent plus rapides et plus intenses, ce qui renforce le mécanisme d'auto-régulation des oscillations et conduit à des transitions rapides entre phases lentes et phases rapides. Le paramètre μ détermine ainsi la vitesse d'évolution de la dynamique et joue un rôle essentiel dans la structure qualitative des oscillations.

3.4.3 Mise sous forme de système dynamique

En introduisant les variables

$$x_1(t) = x(t), \quad x_2(t) = x'(t),$$

le modèle de Van der Pol peut s'écrire sous la forme d'un système dynamique du premier ordre :

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1. \end{cases}$$

Il s'agit d'un système dynamique :

- continu et autonome ;
- non linéaire ;
- d'ordre $n = 2$, avec état $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

3.4.4 Existence et nature qualitative des solutions

Le champ de vecteurs associé au système est polynomial, donc continu et continûment dérivable sur \mathbb{R}^2 . Il est en particulier localement lipschitzien, ce qui garantit l'existence et l'unicité locale des solutions pour toute condition initiale.

Les trajectoires du système sont définies sur un intervalle maximal $]t_-, t_+[$. L'analyse qualitative montre que les solutions restent bornées et que la dynamique globale est dominée par un comportement oscillant.

3.4.5 Point d'équilibre et analyse locale

Le système admet un unique point d'équilibre :

$$(x_1, x_2) = (0, 0).$$

Le Jacobien du système en ce point est donné par :

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont solutions de :

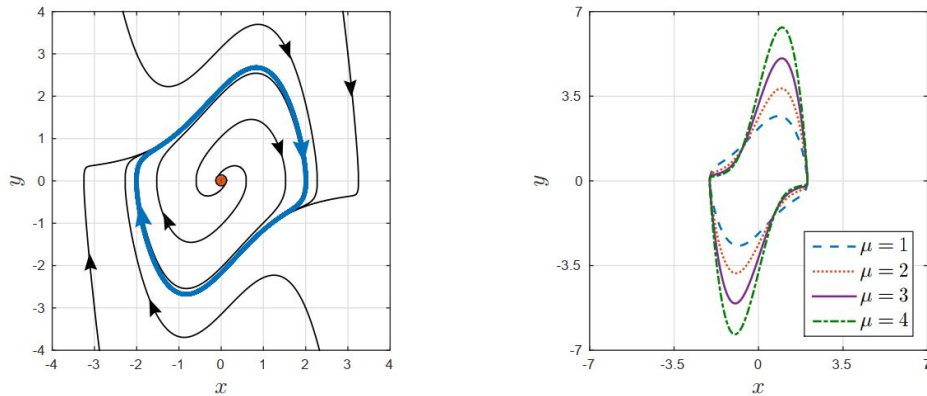
$$\lambda^2 - \mu\lambda + 1 = 0.$$

Pour $\mu > 0$, les valeurs propres ont une partie réelle positive, ce qui implique que l'équilibre $(0, 0)$ est instable. Ainsi, les trajectoires ne convergent pas vers l'équilibre mais sont repoussées de son voisinage.

3.4.6 Cycle limite et comportement asymptotique

Un résultat fondamental concernant l'oscillateur de Van der Pol est l'existence d'un *cycle limite* attractif. Toute solution issue d'une condition initiale non nulle converge vers une orbite périodique unique, indépendamment des conditions initiales.

Ce cycle limite correspond à une oscillation auto-entretenu de période et d'amplitude déterminées par le paramètre μ . Le système illustre ainsi un mécanisme typique de stabilisation non linéaire, où l'instabilité locale de l'équilibre est compensée par la saturation non linéaire.



3.4.7 Lien avec les méthodes numériques

L'oscillateur de Van der Pol constitue un modèle test particulièrement intéressant pour l'étude des méthodes numériques :

- pour des valeurs faibles de μ , le système est modérément non linéaire et les schémas explicites donnent de bons résultats ;
- pour des valeurs élevées de μ , le système devient potentiellement raide, ce qui met en évidence les limites des schémas explicites et l'intérêt des méthodes implicites.

Ainsi, ce modèle permet d'illustrer de manière concrète les notions de stabilité numérique et de raideur introduites au Chapitre 2.

Remarque :

L'oscillateur de Van der Pol représente un exemple de système dynamique non linéaire présentant un comportement oscillatoire complexe. Il complète l'étude du modèle logistique et du modèle SIR en introduisant des phénomènes absents des modèles précédents, tels que les oscillations périodiques et les cycles limites.

Ce modèle fournit ainsi un cadre naturel pour analyser la capacité des schémas numériques à reproduire fidèlement des comportements dynamiques non stationnaires.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié trois modèles dynamiques non linéaires représentatifs de phénomènes réels, en mettant l'accent sur leur structure mathématique et leur comportement qualitatif.

Le modèle de croissance logistique à une dimension a servi de cadre de référence simple mais rigoureux. Son analyse complète, rendue possible par l'existence d'une solution analytique explicite, a permis d'illustrer les notions fondamentales de stabilité, d'invariance et de comportement asymptotique des solutions.

Le modèle SIR a ensuite introduit une dynamique de dimension plus élevée, caractérisée par la présence d'invariants et d'un seuil gouvernant la stabilité de l'équilibre sans maladie. Ce modèle a mis en évidence le rôle central de la stabilité locale et du changement de stabilité dans l'apparition de phénomènes de propagation, illustrant ainsi des mécanismes absents des systèmes à une seule dimension.

Enfin, l'oscillateur de Van der Pol a permis d'aborder des comportements oscillatoires non linéaires, dominés par l'existence d'un cycle limite attractif. Ce modèle illustre un type de dynamique qualitativement différent, dans lequel l'instabilité locale de l'équilibre conduit à l'émergence d'oscillations auto-entretenues.

Ces trois modèles, choisis de complexité croissante, constituent un ensemble cohérent illustrant plusieurs archétypes fondamentaux des systèmes dynamiques non linéaires : convergence vers un équilibre, apparition d'un seuil critique et oscillations périodiques. Ils fournissent un cadre naturel pour l'étude et la comparaison des méthodes numériques de discrétisation en temps.

Les simulations numériques associées à ces modèles, ainsi que l'analyse comparative des schémas numériques, seront présentées dans la suite de ce travail, avant d'ouvrir la discussion vers des approches issues de l'apprentissage automatique.

Conclusion générale

Ce mini-projet avait pour objectif d'étudier des systèmes dynamiques continus et leur résolution numérique, en établissant un lien clair entre modélisation mathématique, analyse qualitative et méthodes de discrétisation en temps.

Dans un premier temps, nous avons posé un cadre théorique général pour les systèmes dynamiques en dimension finie, en rappelant les notions essentielles de stabilité, d'équilibres et de comportement asymptotique. Les méthodes numériques de résolution des équations différentielles ordinaires ont ensuite été introduites, avec une attention particulière portée à leur stabilité et à leurs limites, notamment dans le contexte de problèmes raides.

Ces outils ont été appliqués à l'étude de plusieurs modèles dynamiques non linéaires issus de la modélisation, à savoir la croissance logistique, le modèle SIR et l'oscillateur de Van der Pol. L'analyse qualitative de ces modèles a permis de mettre en évidence des comportements dynamiques variés, allant de la convergence vers un équilibre à l'apparition de seuils critiques et d'oscillations auto-entretenues.

La suite du travail est consacrée à la mise en œuvre numérique de ces modèles, à la comparaison des schémas de discrétisation et à l'analyse de leur capacité à préserver les propriétés qualitatives des systèmes continus. Enfin, une ouverture vers des approches issues de l'apprentissage automatique permettra d'explorer de nouvelles perspectives pour l'analyse et l'approximation de systèmes dynamiques complexes.

Ce projet illustre ainsi l'intérêt d'une approche intégrée combinant modélisation mathématique, analyse théorique et méthodes numériques, et souligne l'importance de la cohérence entre le modèle continu et son approximation discrète.

Bibliographie

- [1] A. El Jai, E. Zerrik, *Stabilité des systèmes dynamiques*, Presses Universitaires de Perpignan, Perpignan, 2013.
- [2] V. Guinot, B. Cappelaere, *Méthodes Numériques Appliquées*, Polytech Montpellier, Université Montpellier II, 2005.
- [3] A. M. Stuart, *Numerical Analysis of Dynamical Systems*, Acta Numerica, Cambridge University Press, 1994.
- [4] B. Bhiri, *Stabilité et stabilisation en temps fini des systèmes dynamiques*, Thèse de Doctorat, Université de Lorraine, 2017.
- [5] A. R. Humphries, *Numerical Analysis of Dynamical Systems*, University of Bath, 1993.
- [6] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, 3rd Edition, Springer, New York, 2001.
- [7] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.
- [8] J. C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, 2nd Edition, Wiley, Chichester, 2008.
- [9] E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [10] E. Hairer, S. P. Nørsett, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I : Nonstiff Problems*, 2nd Edition, Springer, Berlin, 1993.