Examen 2024 Normale

EILCO - ING2

Exercice 1

$$h(x;\alpha,\beta) = \alpha x - \beta x^2 \qquad x = [0,1] \qquad \alpha,\beta \in \mathbb{N}^*$$

a/ valeur de α,β pour que $h(x)$ soit histo. normalisé

① $\Rightarrow \boxed{\int_0^1 h(x).dx = 1}$

$\int_0^1 \alpha x - \beta x^2 = 1$

$\alpha\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \beta\left[\frac{x^3}{3}\right] = 1$

$\frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{\beta}{3}x^3 = 1 \Rightarrow \frac{3\alpha x^2 - 2\beta x^3}{6} = 1 \Rightarrow 3\alpha x^2 - 2\beta x^3 = 6$

$x = 1 \Rightarrow 3\alpha - 2\beta = 6$

$\alpha = \frac{2\beta + 6}{3}$

α,β entiers non nuls $\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2\beta+6}{3} \\ \boxed{\alpha \geq \beta} > 0 \end{cases}$ pour $\beta = 1 \rightarrow \alpha = 8/3$ ✗

$\beta = 2 \rightarrow \alpha = 10/3$ ✗

$\beta = 3 \rightarrow \alpha = 4$ ✓ $\in \mathbb{N}^*$

d'où $\alpha = 4,\ \beta = 3$

ⓘ $\boxed{h(x) \geq 0 \text{ sur } [0,1]}$

$h(x) = \alpha x - \beta x^2$

$h(x) = x(\alpha - \beta x)$

$x \geq 0$ car $x \in [0,1]$

$\alpha - \beta x \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq \beta x$

en particulier $x = 0 \rightarrow \alpha \geq 0$

$x = 1 \rightarrow \boxed{\alpha \geq \beta} > 0$

2°/

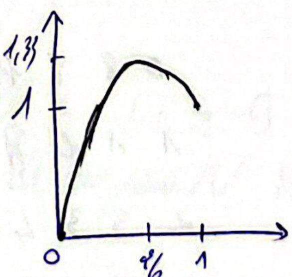
$h(x) = 4x - 3x^2$

$h'(x) = 4 - 6x \Rightarrow h'(x) = 0$

$4 = 6x$

$x = 4/6 = 2/3$

x	0		2/3		1
$h'(x)$		+	0	−	
$h(x)$	0	↗	1,33	↘	1



3°/ Valeur de x^*

$h(x) = 4x - 3x^2$

$h'(x) = 4 - 6x$

$h'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2/3}$

$h(2/3) = 4/3$

Le maximum de $h(x)$ est atteint en $x^* = 2/3$

d°/ La Moyenne

$$\int_0^1 x\,h(x)\,dx = \int_0^1 4x^2 - 3x^3$$

$$= 4\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - 3\left[\frac{x^4}{4}\right]$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{16-9}{12} = \frac{7}{12}$$

e°/ Transformation $s = g(x)$ qui permet d'égaliser h.

$$s = g(x) = \int_0^x h(t)\,dt$$

$$= \int_0^x 4t - 3t^2\,dt$$

$$= 4\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x - 3\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{4x^2}{2} - \frac{3x^3}{3} = 2x^2 - x^3$$

Exercice 4

a°/ Val max pixel $= 14 \Rightarrow m \geq \log(14) \simeq 3,4 \Rightarrow m = 4 \Rightarrow$ 4 bits

b°/

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
h(x)	0	16	20	16	12	8	4	0	4	0	0	0	8	0	12	0
Hc(x)	0	16	36	52	64	72	76	76	80	80	80	80	88	88	100	100

c°/ Filtre Moyenneur :

$(1,1)$ $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} / 9 = \frac{32}{9} \simeq 3,55$

$(3,6)$ $\begin{pmatrix} 14 & 1 & 2 \\ 12 & 0 & 1 \\ 8 & 12 & 14 \end{pmatrix} / 9 = \frac{64}{10} \simeq 7,11$

$(4,4)$ $\begin{pmatrix} 14 & 12 & 12 \\ 12 & 0 & 8 \\ 12 & 8 & 15 \end{pmatrix} / 9 = \frac{93}{9} \simeq 10,33$

$(4,8)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 14 & 0 & 2 \\ 14 & 1 & 2 \end{pmatrix} / 9 = \frac{39}{9} \simeq 4,33$

$(5,1)$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 14 \\ 2 & 15 & 14 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} / 9 = \frac{54}{9} \simeq 6$

$(5,5)$ $\begin{pmatrix} 8 & 8 & 12 \\ 8 & 15 & 12 \\ 12 & 12 & 14 \end{pmatrix} / 9 = \frac{93}{9} \simeq 10,33$

$(6,3)$ $\begin{pmatrix} 14 & 12 & 8 \\ 1 & 15 & 12 \\ 2 & 1 & 14 \end{pmatrix} / 9 = \frac{79}{9} \simeq 8,77$

$(8,8)$ $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 15 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} / 9 = \frac{48}{9} \simeq 5,33$

$(1,4)$ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 14 & 14 \end{pmatrix} / 9 = \frac{40}{9} \simeq 4,44$

$(1,8)$ $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} / 9 = 4$

$(8,2)$ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} / 9 = 3$

$(8,5)$ $\begin{pmatrix} 14 & 14 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \ldots \end{pmatrix} / 9 = \frac{40}{9} \simeq 4,44$

e°/ Filtre Mediane

0 2 3 3 $\boxed{4}$ 4 —

0 1 1 2 $\boxed{8}$. —

0 8 8 12 $\boxed{12}$. —

0 1 1 2 $\boxed{2}$

1 1 2 2 $\boxed{2}$

0 8 8 12 $\boxed{12}$

1 1 2 8 [illegible]

2 3 3 4 $\boxed{4}$

1 1 2 2 $\boxed{2}$

2 3 3 4 $\boxed{4}$

1 2 2 3 $\boxed{3}$

1 1 1 2 $\boxed{2}$

d°/ EQM

$$EQM = \frac{1}{N}\sum (I - I_{new})^2$$

$$EQM_{moyenneur} = \frac{1}{12}\sum (I_{initial} - I_{new})^2$$

$$= 12,98$$

$$EQM_{Mediane} \simeq 6,3$$

Exercice 2

$$f(x) = k \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}$$

1. Soit $\delta(x)$, fct de dirac, que vaut $f(x) * \delta(x)$

$$f(x) * \delta(x) = f(x)$$

2. Expressions aux différences finies de $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}$, masque de convolution associé

On a la différence centrale :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\frac{h}{2}) - f(x-\frac{h}{2})}{2 \times \frac{h}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(x+\frac{h}{2}) - f(x-\frac{h}{2})}{h}\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f(x+\frac{h}{2})}{\partial x} - \frac{\partial f(x-\frac{h}{2})}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{f(x+\frac{h}{2}+\frac{h}{2}) - f(x+\frac{h}{2}-\frac{h}{2})}{h} - \frac{f(x-\frac{h}{2}+\frac{h}{2}) - f(x-\frac{h}{2}-\frac{h}{2})}{h}\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h) - f(x) - f(x) + f(x-h)}{h}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}\left(1 f(x+h) - 2 f(x) + 1 f(x-h)\right)$$

D'où le masque est : $[1, -2, 1]$

3.

$\delta \sim \frac{1}{3}[0|3|0]$

On a $f(x) - k \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}$

$(0, 1, 0) - 1 \times (1, -2, 1)$

$\Rightarrow (-1, 3, -1)$

$\delta(x) \Rightarrow \frac{1}{3}[0|3|0] = [0|1|0]$

$f(x) \Rightarrow [0|1|0]$

$\delta(x) . f(x) \Rightarrow [0, 1, 0]$

4. Déterminer la TFD du filtre de taille 3 $[-1, 3, -1]$

On utilise la TFD discret $h[n]$ de longueur N : $H[k] = \sum_{0}^{N-1} h(n) . e^{-\frac{2\pi i}{N} kn}$

$$F(v) = \sum_{-1}^{1}\left(f(x) - k \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\right) . e^{-2\pi i v x}$$

$h(\;)$: $-1, 0, 1$ → $[-1, 3, -1]$

$$= h(-1) . e^{2\pi i v} + h(0) . e^{0} + h(1) . e^{-2\pi i v}$$

$$= -e^{2\pi i v} + 3 - e^{-2\pi i v}$$

$$= -\cos(w) + j\sin(w) + 3 - \cos(w) - j\sin(w)$$

$$= 3 - 2\cos(w)$$

$$F(v) = 3 - 2\cos(2\pi v)$$

$exp^{iw} = \cos(w) - j\sin(w)$

$exp^{-iw} = \cos(w) + j\sin(w)$

On pose $w = 2\pi v$

2/ TF de $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = -w^2 F(U)$ - cas continu

$= -\left(2(1-\cos(w))\right) F(U)$

$H(x) = f(x) - k \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}$; $k=1$

$H(w) = F(w) - \left(-(2(1-\cos(w))) F(w)\right)$

$= F(w)\left(1 + 2(1-\cos(w))\right)$

$= F(w)\left(3 - 2\cos(w)\right)$

Spectre d'amplitude : $|H(w)| = |3 - 2\cos(w)|$

8/

$f \to 0$ c.à.d on néglige l'interaction avec le signal $f(x)$

$\Rightarrow F(V) = 3 - 2\cos(w)$

$H(w) = 3 - 2\cos(w)$

9/

$f(x) + k\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}$

8/ $f(x) + k\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = (0, 1, 0) + k(1, -2, 1)$

$= (\underset{\geq 0}{k}, \underset{\geq 0}{1-2k}, \underset{\geq 0}{k})$

Filtre moyenneur $\Rightarrow \Sigma$ de coeff $= 1$

donc $\cancel{k + 1 - 2k + k} = 1$

$k \geq 0$ $\qquad$ $k \geq 0$

$1 - 2k \geq 0 \Rightarrow k \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq k \leq \frac{1}{2}$

9/ Masque de Prewitt en X : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Masque en X : $(-1, 0, 1)$

$(k, 1-2k, k)$ $\qquad$ $1 - 2k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

Exercice 3

Déja fait dans Exam