Bases du traitement des images

Filtrer une image

Dufrenois Franck
LISIC

Université du littoral

Objectif

Pourquoi filtrer une image ?

- Pour réduire le bruit dans l'image
- Pour détecter les contours d'une image
- Convolution entre une image f et un filtre h, appelé aussi masque de convolution
- Opération de voisinage qui effectue une combinaison linéaire (ou non) de pixels de l'image f, produisant une nouvelle image f'
- h est un opérateur sur f défini en chaque pixel (i, j) et sur son voisinage

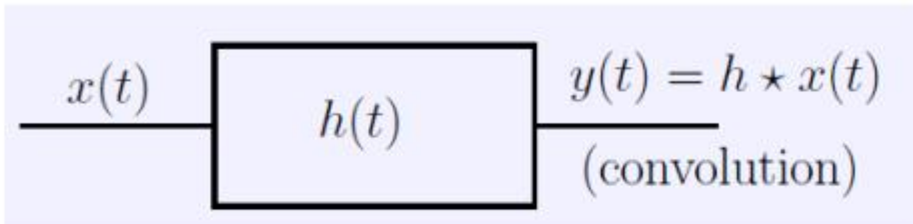
Le filtrage

Les outils fondamentaux

- Filtrage spatial: La convolution
- Filtrage fréquentiel: La transformée de Fourier
- Filtrage non linéaire: médiane

Filtrage temporel ou spatial

Convolution: définition



- Cas continu, en 1D

$$y(t) = T\left[x(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x \star h(t)$$

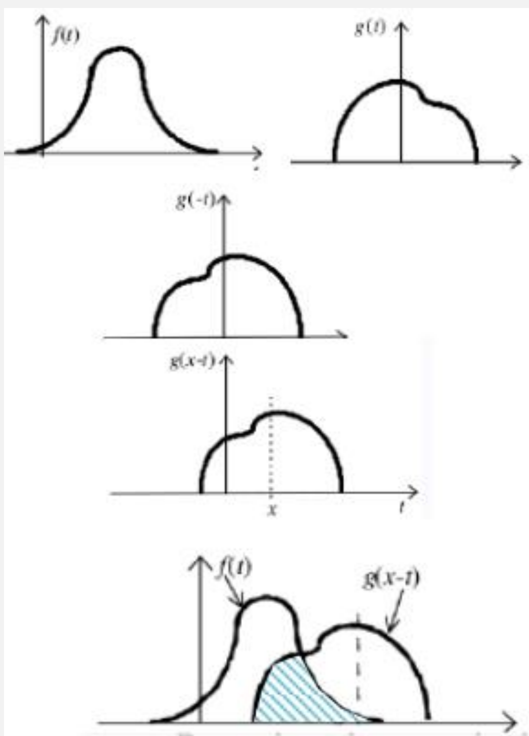
- Cas discret, en 1D

$$y(n) = T\left[x(n)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x \star h(n)$$

Filtrage spatial

Illustration

$$y(t) = f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$



1. Retournement du signal : $g(t) \rightarrow g(-t)$
2. Translation du signal de x : $\rightarrow g(x-t)$
3. Produit entre Translation du signal de t : $f(t)g(x-t)$
4. Calcul de l'intégrale de $f(t)g(x-t)$

Filtrer un signal 1D

Propriétés

commutativité $y(t) = x * h(t) = h * x(t)$

associativité $y(t) = (x * z) * h = x * (z * h)$

Distributivité

$$y(t) = (a.x1 + b.x2) * h(t)$$
$$= a.\big(x1 * h(t)\big) + \mathrm{b}.(x2 * h(t))$$

Invariance au décalage $y(t) = x(t - to) * h(t) = x(t) * h(t - to)$

Identité

$$y(t) = x * \delta_0(t) = x(t)$$

$$y(t) = x * \delta_{to}(t) = x(t - to)$$

Dérivée

$$y'(t) = (x * h)' = x * h' = x' * h$$
$$y''(t) = (x * h)'' = x * h'' = x'' * h$$

.....

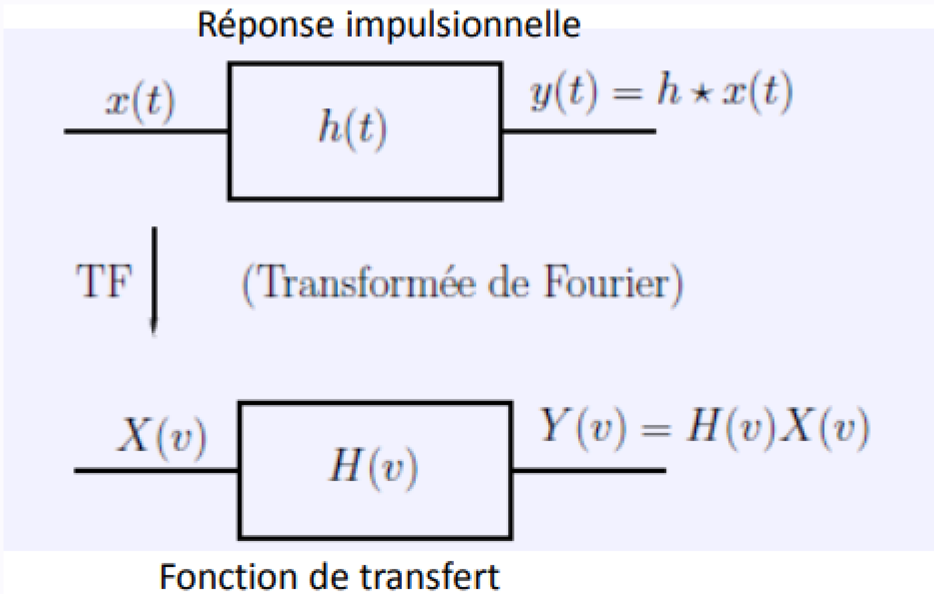
Dérivée $y'(t) = (x * \delta)' = x * \delta' = x' * \delta = x'$

Filtrer un signal 1D

Lien avec la transformée de Fourier

- Cas continu, en 1D : $y(t) = x \star h(t)$

$$Y(f) = TF\left[y(t)\right] = TF\left[x \star h(t)\right] = X(f) \cdot H(f)$$



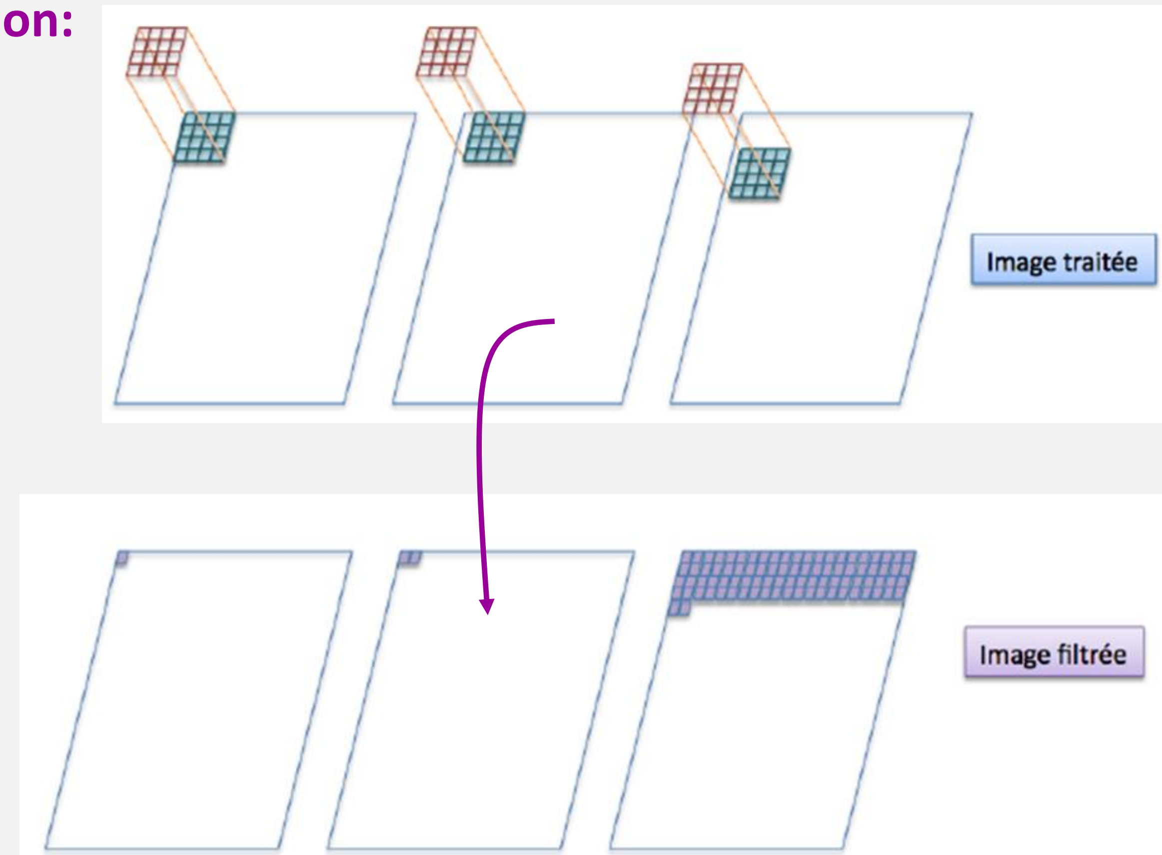
Temporel	Fréquentiel
$y(n) = x \star h(n)$	$y(n) = TFD^{-1}\left[X(z) \cdot H(z)\right]$

Filtrage temporel ou spatial

La convolution 2D: illustration

Masque de convolution: le filtre h

Image f



Filtrer une image

On travaille sur un domaine discret… Convolution 2D numérique

- Le produit de convolution d'un signal 2D $f(i,j)$ (une image) avec un filtre $h(i,j)$ est donné par :

$$f'(i,j) = (f \star h)(i,j) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(i-n, j-m)h(n,m)$$

1. Filtres de Réponse Impulsionnelle $h(n,m)$ Infinie (RII) : $h(n,m)$ ne s'annule pas

2. Filtres de Réponse Impulsionnelle $h(n,m)$ Finie (RIF) : $h(n,m)$ est nul en dehors d'un intervalle en n et m

- On parle de masque de convolution
- Par exemple, si $h(n,m)$ est un masque carré de taille d impaire, centré en (0,0), $h(n,m) \neq 0$ pour $|n| \leq \frac{d-1}{2}$ et $|m| \leq \frac{d-1}{2}$:

$$\boxed{f'(i,j) = (f \star h)(i,j) = \sum_{n=-\frac{d-1}{2}}^{\frac{d-1}{2}} \sum_{m=-\frac{d-1}{2}}^{\frac{d-1}{2}} f(i-n, m-j)h(n,m)}$$

Filtrage spatial

Stop ! Un exemple simple

d=3: $$f'(i,j) = (f \star h)(i,j) = \sum_{n=-1}^{1} \sum_{m=-1}^{1} f(i-n, j-m) h(n,m)$$

Bloc image

f(i-1,j-1)	f(i-1,j)	f(i-1,j+1)
f(i, j-1)	f(i,j)	f(j,j+1)
f(i+1, j-1)	f(i+1,j)	f(i+1,j+1)

filtre

h(-1,-1)	h(-1,0)	h(-1,1)
h(0, -1)	h(0,0)	h(0,1)
h(1, -1)	h(1,0)	h(1,1)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f'(i,j) & = & h(1,1)f(i-1,j-1) + h(1,0)f(i-1,j) + h(1,-1)f(i-1,j+1) \\ & + & h(0,1)f(i,j-1) + h(0,0)f(i,j) + h(0,-1)f(i,j+1) \\ & + & h(-1,1)f(i+1,j-1) + h(-1,0)f(i+1,j) + h(-1,-1)f(i+1,j+1) \end{array} \right\}$$

Filtrage spatial

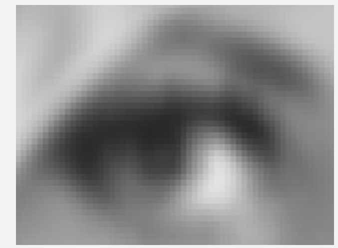
C'est magique! Il a des vertus …

```
h =
     1     1     1
     1     1     1
     1     1     1
```

(M=3)

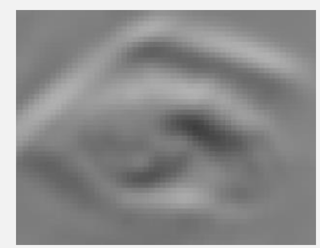
original

M=3



M=7

original



```
h =
    -1    -1    -1
     0     0     0
     1     1     1
```

Filtrer une image

Effet de Bord

- Convolution linéaire : on considère que l'image est entourée de noir, donc de valeurs nulles : **zero-padding**
- Convolution circulante : on considère que l'image est entourée d'elle même (i.e. support infini de l'image)
- Convolution d'une image avec répétition du bord : on considère que l'image est entourée des mêmes valeurs que sur son bord
- Convolution miroir

Filtrer une image

Effet de Bord: illustration

$(x * h)(n)$: n=0?

Comment gérer les bords?

n=0

?	1	2	3	4	5

× × ×

3	2	1

Option 1 : Ajout de zéros

x

0	0	1	2	3	4	5	0	0

$(x * h)(n)$

4	10	16	22	22

Option 2 : Enroulement

4	5	1	2	3	4	5	1	2

19	10	16	22	23

Option 3 : Réflexion

3	2	1	2	3	4	5	4	3

10	10	16	22	26

Option 4 : Étirement

1	1	1	2	3	4	5	5	5

7	10	16	22	25

Filtre lisseur

Filtre moyenneur

- Propriété : la valeur d'un pixel est relativement similaire à celle de ses voisins
- Dans le cas où l'image contient un bruit et que la propriété précédente est préservée, un moyennage local peut atténuer ce bruit
  $\hookrightarrow$ Cette opération est appelée lissage (*smoothing*)
- Pour effectuer un moyennage dans un bloc voisinage de taille $d \times d$, on obtient la sortie f' :

$$f'(i,j) = \frac{1}{d^2} \sum_{n=-\frac{d-1}{2}}^{\frac{d-1}{2}} \sum_{m=-\frac{d-1}{2}}^{\frac{d-1}{2}} f(i+n, j+m)$$

Filtre lisseur

Filtre moyenneur

- Le filtre de taille $d = 3$:

$$h = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

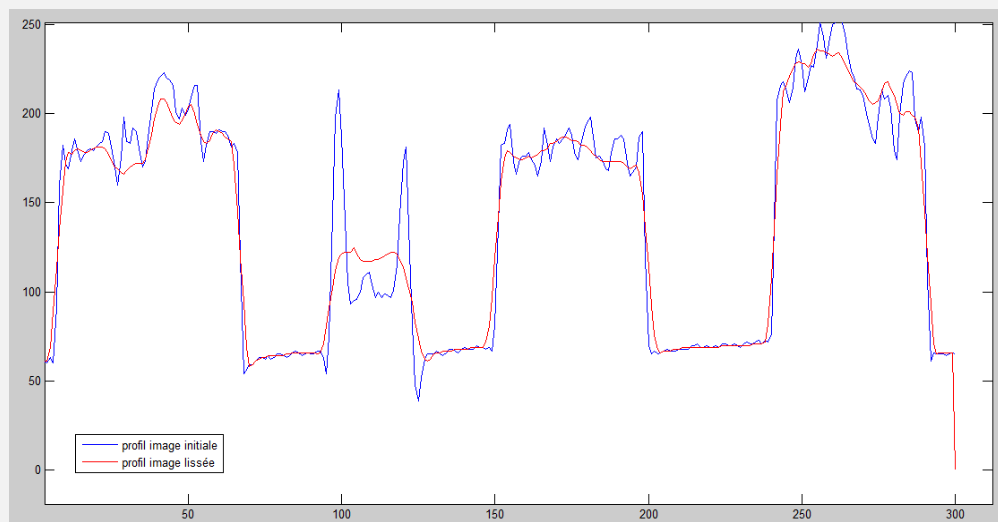
- D'une manière générale, si on a un filtre de taille d, tous les coefficients du filtre ont comme valeur $w_i = \frac{1}{d^2}$
- Plus d est grand, plus le lissage sera important, et plus l'image filtrée perd les détails de l'image originale

Filtre lisseur

Filtre moyenneur: illustration taille 5

- **Matlab**:

```
X=imread('eight.tif');
H=ones(3)/9;
I=conv2(X,H,'same');
```

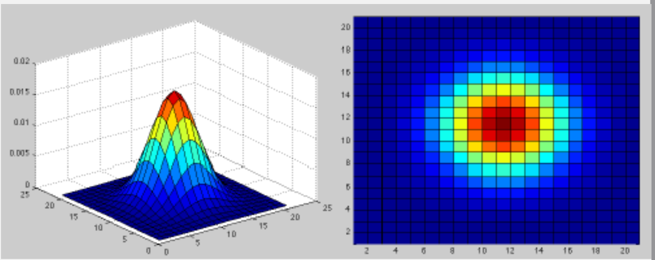


Filtre lisseur

Filtre Gaussien

- Définition : noyau gaussien centré et d'écart-type σ :

$$g_\sigma(i,j) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{i^2+j^2}{2\sigma^2}}$$



- Lissage par moyennage pondéré de l'image en fonction de la distance du pixel voisin

$$f_\sigma = g_\sigma * f$$

➢ **Choix de l'écart type**

- La largeur du filtre est donnée par son écart-type σ :
  - Largeur du filtre de part et d'autre du point central : $\mathtt{Ent}^+(3\sigma)$ ($\mathtt{Ent}^+(.)$ est l'entier supérieur)
  - Largeur totale du filtre : $2\mathtt{Ent}^+(3\sigma) + 1$
- Si σ est plus petit qu'un pixel le lissage n'a presque pas d'effet
- Plus σ est grand, plus on réduit le bruit, mais plus l'image filtrée est floue
- Si σ est choisi trop grand, tous les détails de l'image sont perdus

$\hookrightarrow$ On doit trouver un compromis entre la quantité de bruit à enlever et la qualité de l'image en sortie

Filtre lisseur

Exemple

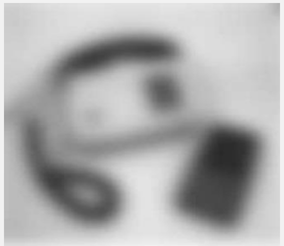
- Largeur du filtre de part et d'autre du point central : $\mathtt{Ent}^+(3\sigma) = 2$
- Largeur totale du filtre : $2\mathtt{Ent}^+(3\sigma) + 1 = 5$
- On obtient le filtre suivant :

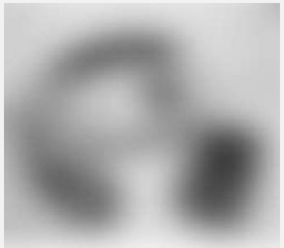
$$h = 0.4 \times 10^{-2} \times \begin{pmatrix} 0.03 & 0.16 & 5.98 & 0.16 & 0.03 \\ 0.16 & 7.7 & 27.8 & 7.7 & 0.16 \\ 5.98 & 27.8 & 100 & 27.8 & 5.98 \\ 0.16 & 7.7 & 27.8 & 7.7 & 0.16 \\ 0.03 & 0.16 & 5.98 & 0.16 & 0.03 \end{pmatrix}$$

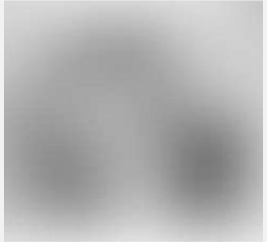

Image originale


σ=2


σ=4


σ=8


σ=16


σ=32

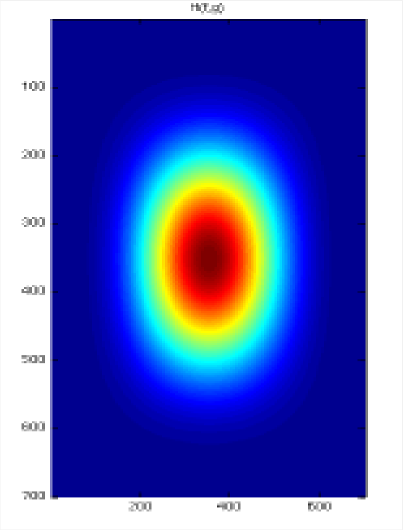
```
Sig=0.6;
H=fspecial('Gaussian',sig,[3,3]);
I=conv2(X,H,'same');
```

Filtre lisseur

Autres filtres

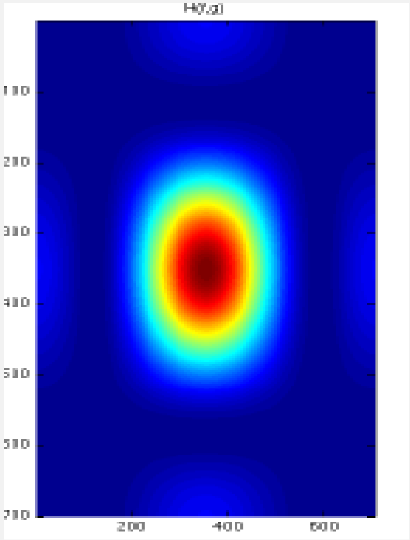
Filtre binomial
(binôme de Newton)

$$h = \frac{1}{256}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$



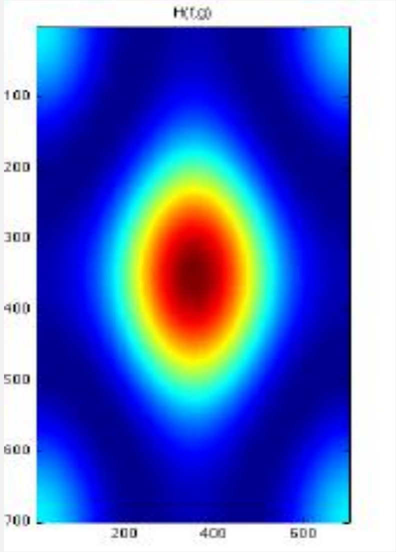
Filtre pyramidal

$$h_p = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



Filtre conique

$$h_c = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

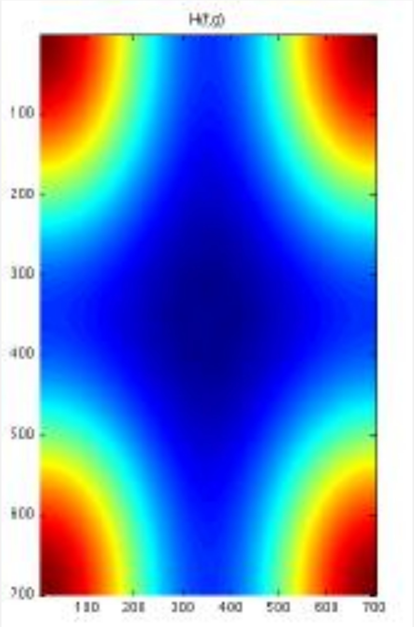


Filtre lisseur

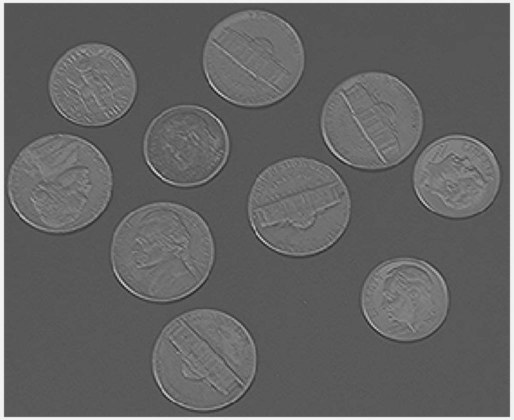
Autres filtres

Filtre rehausseur de contraste

$$h_{r_1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$




```
h=[1 -3 1; -3 9 -3;1 -3 1];

y=conv2(double(x),h,'same');
```



Filtre séparable

Définition

- Lorsque $h(i,j) = h_x(i) \times h_y(i)$ (filtre de taille $N \times M$) la convolution 2D correspond à une composition de convolutions 1D :

$$
\begin{aligned}
(f \star h)(i,j) &= \sum_{n=-N/2}^{N/2} \sum_{m=-M/2}^{M/2} f(i-n, j-m) h(n,m) \\
&= \sum_{m} \left(\sum_{n} f(i-n, j-m) h_x(n) \right) h_y(m)
\end{aligned}
$$

$$=(\boldsymbol{f} * \boldsymbol{hx} * \boldsymbol{hy})(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m})$$

- En pratique, ils sont obtenus comme suit:

$$
\begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \beta \\ \hline \gamma \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a\alpha & b\alpha & c\alpha \\ \hline a\beta & b\beta & c\beta \\ \hline a\gamma & b\gamma & c\gamma \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \beta \\ \hline \gamma \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline \end{array}.
$$

Filtre séparable

exemples

- Les filtres moyenneur, gaussien, binomiale, ... sont séparables.
- Moyenneur 3×3 : $h_x = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $h_y = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Gaussien : $\exp(-\frac{i^2+j^2}{2\sigma^2}) = \exp(-\frac{i^2}{2\sigma^2})\exp(-\frac{j^2}{2\sigma^2})$
- Voir TD 4
  - Permet de diminuer la complexité du filrage
  - Permet d'implémenter les fitres de manière récursive

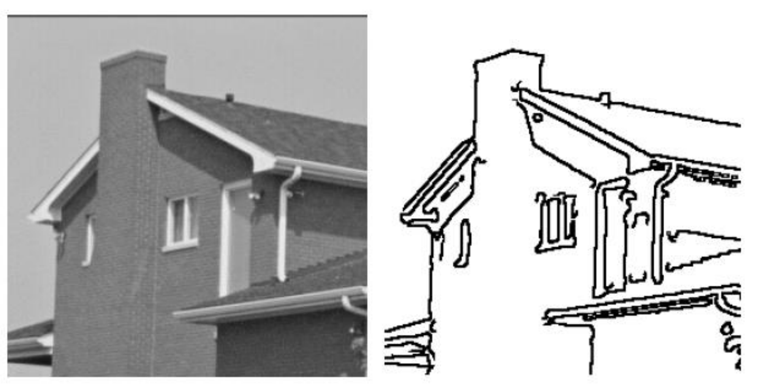
Filtre dérivateur

Détection des contours

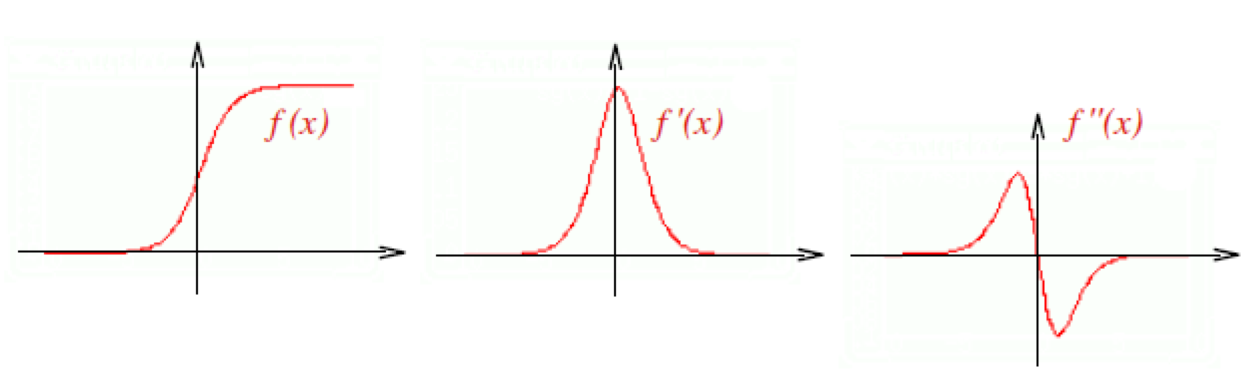
1. Réduction d'information
   - Information de toute l'image résumée dans le contours des différents objets.
   - Contours : parties les plus informatives d'une image.
   - On a longtemps cru que l'ensemble de la tâche de vision pouvait être résolue uniquement à partir des contours.
2. Préalable nécessaire à l'extraction d'autres primitives (droites, segments, cercles)
3. Les données biologiques confortent l'importance des contours dans le système de vision
   - Les premières couches des systèmes de vision des mammifères effectuent des traitements de détection de contours.

Filtre dérivateur

Détection des contours

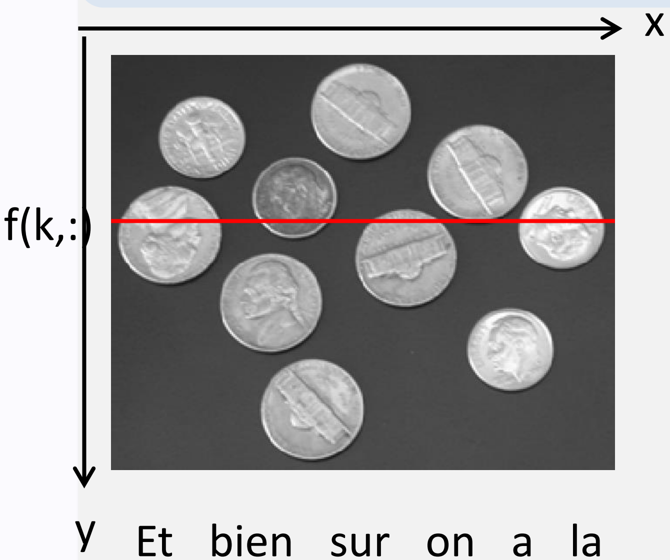


- *simplification de l'image utile dans de nombreuses applications.*
- *obtenus à partir des maxima locaux de la dérivée première, ou des passages par zéro de la dérivée seconde :*

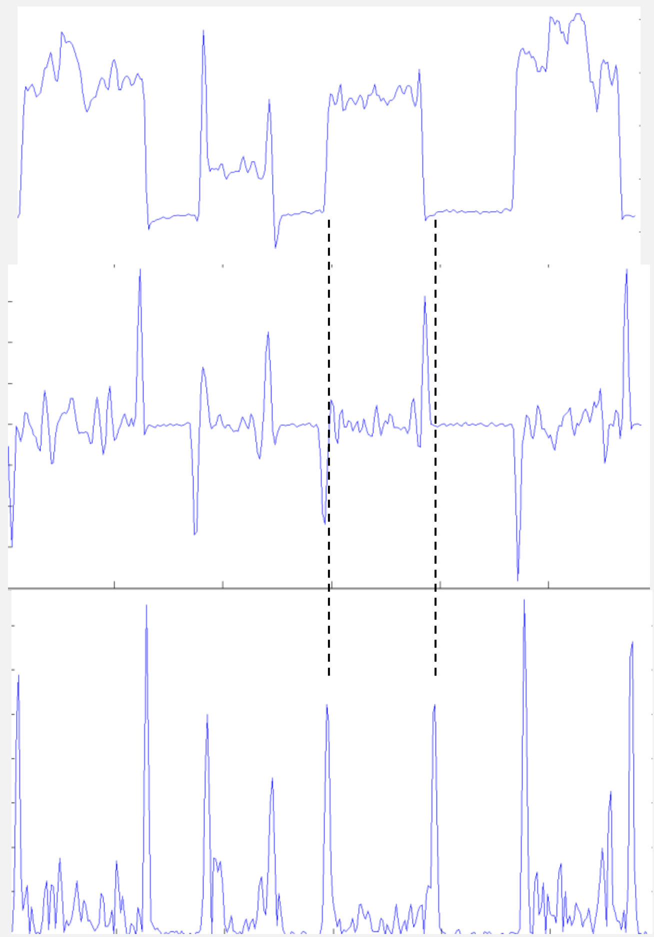


Filtre dérivateur

Caractérisation d'un contour



Et bien sur on a la même chose suivant l'axe y!



Profil image f(k,:)

Dérivée du profil

Valeur absolue de la dérivée du profil

Filtre dérivateur

Caractérisation d'un contour: une histoire de dérivées

- Image $f(x,y)$. Contour : lieu des fortes variations de f
- Gradient de f :

$$\overrightarrow{\nabla f} = \overrightarrow{G} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}^T \qquad (1)$$

- Module du gradient de f :

$$G = \left\| \overrightarrow{\nabla f} \right\| = \sqrt{\frac{\partial f}{\partial x}^2 + \frac{\partial f}{\partial y}^2} \qquad (2)$$

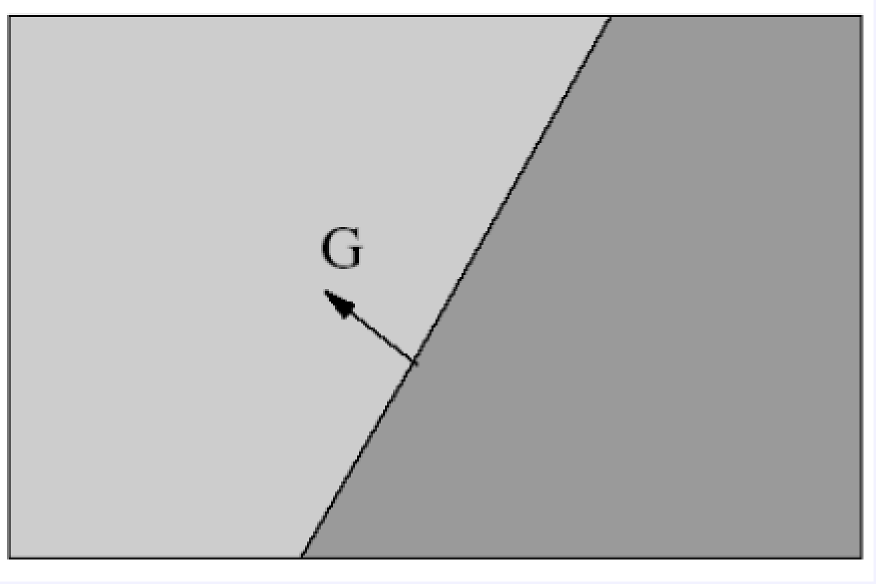
- Direction du gradient de f :

$$\overrightarrow{g} = \frac{\overrightarrow{\nabla f}}{\left\| \overrightarrow{\nabla f} \right\|} \qquad (3)$$

Filtre dérivateur

Gradient perpendiculaire au contour

- Lieu des maxima du gradient dans la direction $\vec{g}$ du gradient



- $\vec{g}$ normal à la surface définie par $f(x, y)$

Filtre dérivateur

Approximation numérique du gradient

- Suivant X

$$\partial f/\partial x = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{f(x+\Delta h, y) - f(x,y)}{\Delta h} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{f(x,y) - f(x-\Delta h, y)}{\Delta h} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{f(x+\Delta h, y) - f(x-\Delta h, y)}{2\Delta h}$$

Puisque le plus petit élément dans une image est le pixel de taille 1x1, le gradient se calcul avec Δh = 1

$$\partial f/\partial x \approx f(x+1,y) - f(x,y) \quad \text{"forward difference"}$$

$$\partial f/\partial x \approx f(x,y) - f(x-1,y) \quad \text{"backward difference"}$$

$$\partial f/\partial x \approx \frac{f(x+1,y) - f(x-1,y)}{2} \quad \text{"central difference"}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{matrix} (0 & -1 & 1) \\ (-1 & 1 & 0) \\ (-1/2 & 0 & 1/2) \end{matrix}}$$

Filtre dérivateur

Approximation numérique du gradient

- Suivant Y

$$\partial f/\partial y \approx f(x,y+1)-f(x,y) \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\partial f/\partial y \approx f(x,y)-f(x,y-1) \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial f/\partial y \approx \frac{f(x,y+1)-f(x,y-1)}{2} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

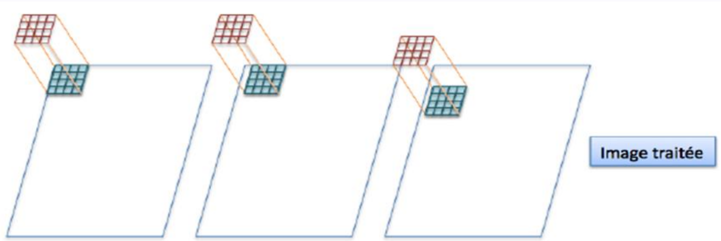
Remarque: On utilise plus souvent les filtres centrés [-1/2 0 1/2] et $[-1/2\ 0\ 1/2]^T$ pour réaliser le calcul des dérivées (opérateurs centrés)

Filtre dérivateur

Illustration

(a) Original (b) Noyau $[-1\ 0\ 1]$ (c) Noyau $[-1\ 0\ 1]^t$

Rappel:



Filtre dérivateur

J'oubliais la dérivée seconde…

- Suivant X

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(f(x+1/2,y) - f(x-1/2,y)\right)$$

$$= \frac{\partial f(x+1/2,y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x-1/2,y)}{\partial x}$$

$$= f(x+1,y) - f(x,y) + f(x-1,y) - f(x,y)$$

$$= f(x-1,y) - 2f(x,y) + f(x+1,y)$$

$\Rightarrow$ Masque du filtre $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Le laplacien

$$\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 y}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Filtre dérivateur

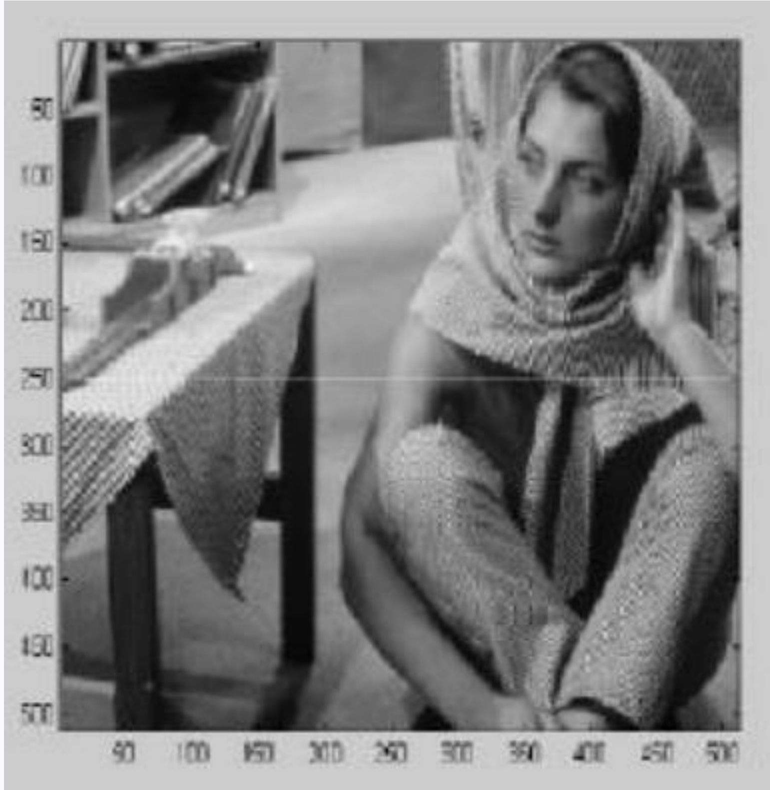
Illustration

(a) Laplacien 4-connexe (b) Laplacien 8-connexe (c) Laplacien de Robinson

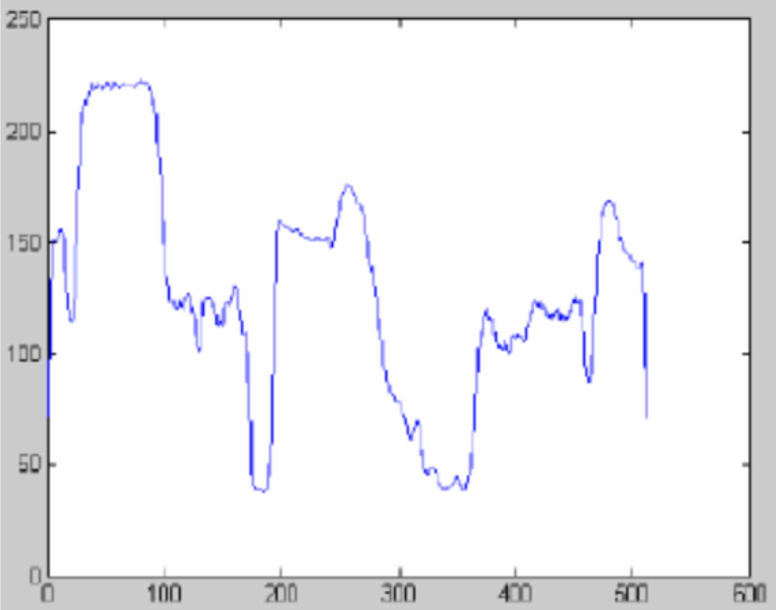
Laplacien discret - 4	*Laplacien discret - 8*	*Laplacien de Robinson*
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -8 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1 & -2 & 1 \\ \hline -2 & 4 & -2 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ \hline\end{array}$

Filtre dérivateur

L'impact du bruit… Illustration



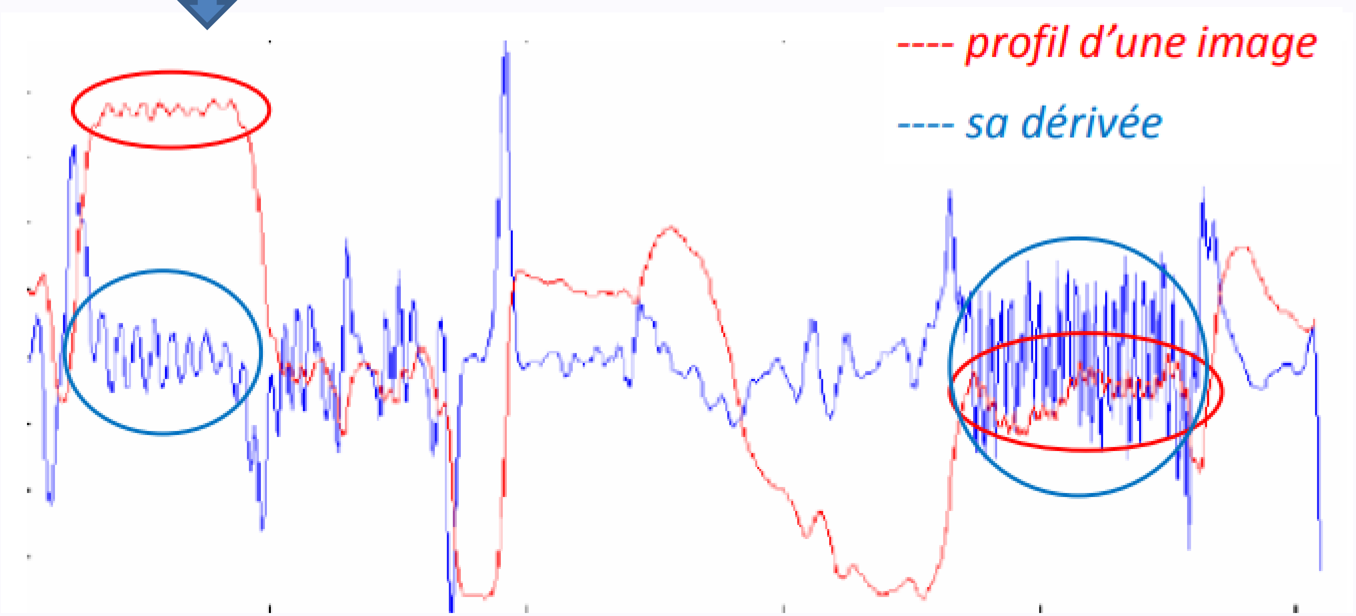

```
I = imread('liftingbody.png');
figure(1)
clf;
imshow(I)

[x,y,c]=improfile(I)
figure(2)
plot(c)
```



Filtre dérivateur

L'impact du bruit

```
Hx=[-1,0,1]
Ix=conv(Hx,I(50,:));

figure(3)
plot(I(50,:),'r')
hold on
plot(Ix,'b')
```



Filtre dérivateur

Réduire l'impact du bruit… lissage+derivation

- L'opération de dérivation est très sensible au bruit.
- Solution: on combine un filtre lisseur dans une direction orthogonale au filtre dérivateur
- Exemples:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \simeq (f * h_x)(x,y) \Rightarrow h_x = l_y * d_x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \simeq (f * h_y)(x,y) \Rightarrow h_y = l_x * d_y$$

Ce sont les masques lisseur/dérivateur…

Filtre dérivateur

Réduire l'impact du bruit… lissage+derivation

Filtre de Prewitt

Filtre moyenneur suivi d'un gradient

En Y: $(1\quad 1\quad 1)/3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\rightarrow \boxed{\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}/3}$

En X: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}/3(-1\quad 0\quad 1)\rightarrow \boxed{\begin{pmatrix}-1&0&1\\-1&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}/3}$

Filtre de Sobel

Filtre « gaussien » suivi d'un gradient

En Y: $(1\quad 2\quad 1)/4\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\rightarrow \boxed{\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\0&0&0\\1&2&1\end{pmatrix}/4}$

En X: $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}/4(-1\quad 0\quad 1)\rightarrow \boxed{\begin{pmatrix}-1&0&1\\-2&0&2\\-1&0&1\end{pmatrix}/4}$

Filtre dérivateur

Illustration du filtre de prewitt


```
f=imread('cameraman.tif ');

%definition du filtre
Hx=[-1 - 1-1; 0 0 0;1 1 1]/3;
Hy=Hx';

%convolution
fx=conv2(f,Hx);
fy=conv2(f,Hy);

%gradient
gf=sqrt(fx.^2+fy.^2);
```

Filtre dérivateur

Idem pour les dérivées secondes

Filtre moyenneur suivi d'une dérivée seconde

En Y: $$(1 \quad 1 \quad 1)/3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} / 3}$$

En X: $$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} / 3(1 \quad -2 \quad 1) \rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} / 3}$$

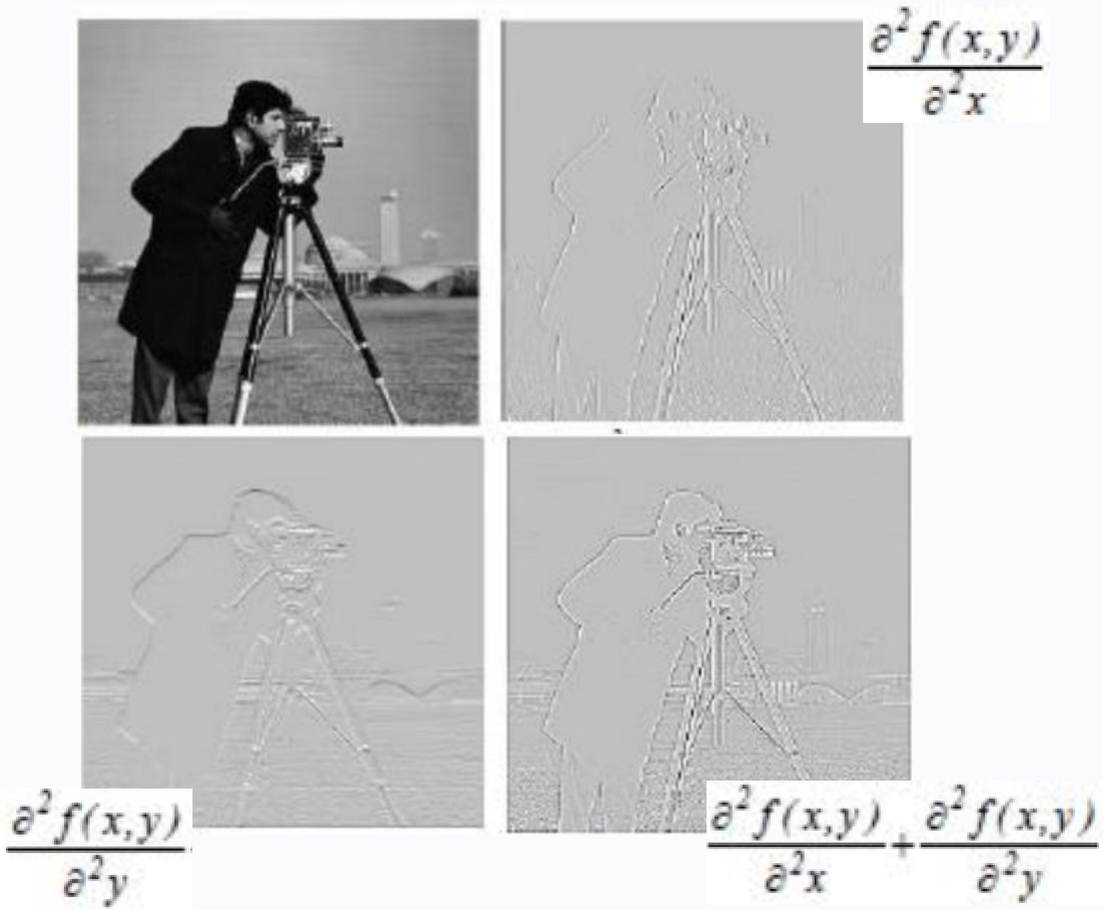
Filtre « gaussien » suivi d'une dérivée seconde

En Y: $$(1 \quad 2 \quad 1)/4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} / 4}$$

En X: $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} / 4(1 \quad -2 \quad 1) \rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} / 4}$$

Filtre dérivateur

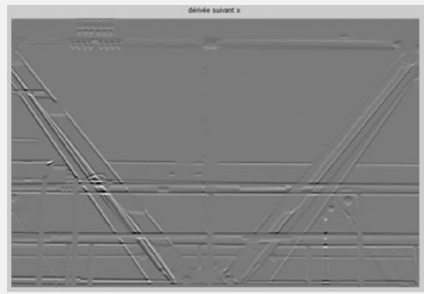
Illustration

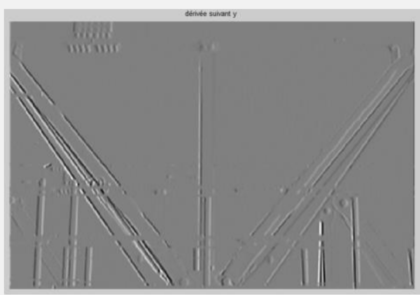



```
f=imread('cameraman.tif ');

%definition du filtre
Hx=[1 1 1; -2 -2 -2;1 1 1]/3;
Hy=Hx';

%convolution
fxx=conv2(f,Hx);
fyy=conv2(f,Hy);

%gradient
gf=fxx+fyy;
```

Filtre dérivateur

Exemple: calcul des dérivées (masque de Sobel)et le module du gradient





```
>> Hh=[1,2,1;0,0,0;-1,-2,-1] ;
   Hv=Hh‘;

>> Ix=conv2(double(X), Hh, 'same');
>> Iy=conv2(double(X), Hv, 'same');

>> G=sqrt(Ix.^2+Iy.^2);

>> imshow(G>200)
```

Filtre dérivateur

Exercices

On se donne l'image suivante :

$$g_{mn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Et on considère les filtres suivants

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Quel est le nom de ces filtres et quel est leur rôle.

b) Pour réaliser la convolution de cette image par les filtres ci-dessus, quelle est la taille du bord artificiel a rajouter à l'image.

c) En considérant un bord artificiel rempli de zeros, calculer les images obtenues en appliquant ces filtres sur l'image gmn.

c) Calculer l'image correspondant au module du gradient de l'image gmn (vous rappelerez sa définition)

d) Proposer un programme matlab

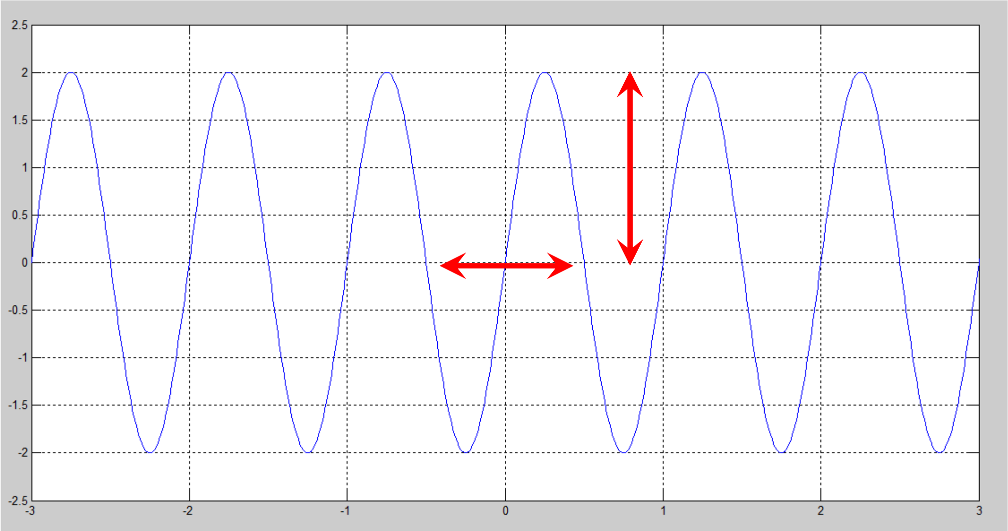
filtre fréquentiel

Les outils fondamentaux

- Filtrage temporel ou spatial: La convolution
- Filtrage fréquentiel: La transformée de Fourier
- Filtrage non linéaire: médiane

Filtre fréquentiel

A l'origine il y avait un signal sinusoïdal



$$y(t) = Asin\left(\frac{2\pi t}{T} + \theta\right)$$

T: période
A: amplitude

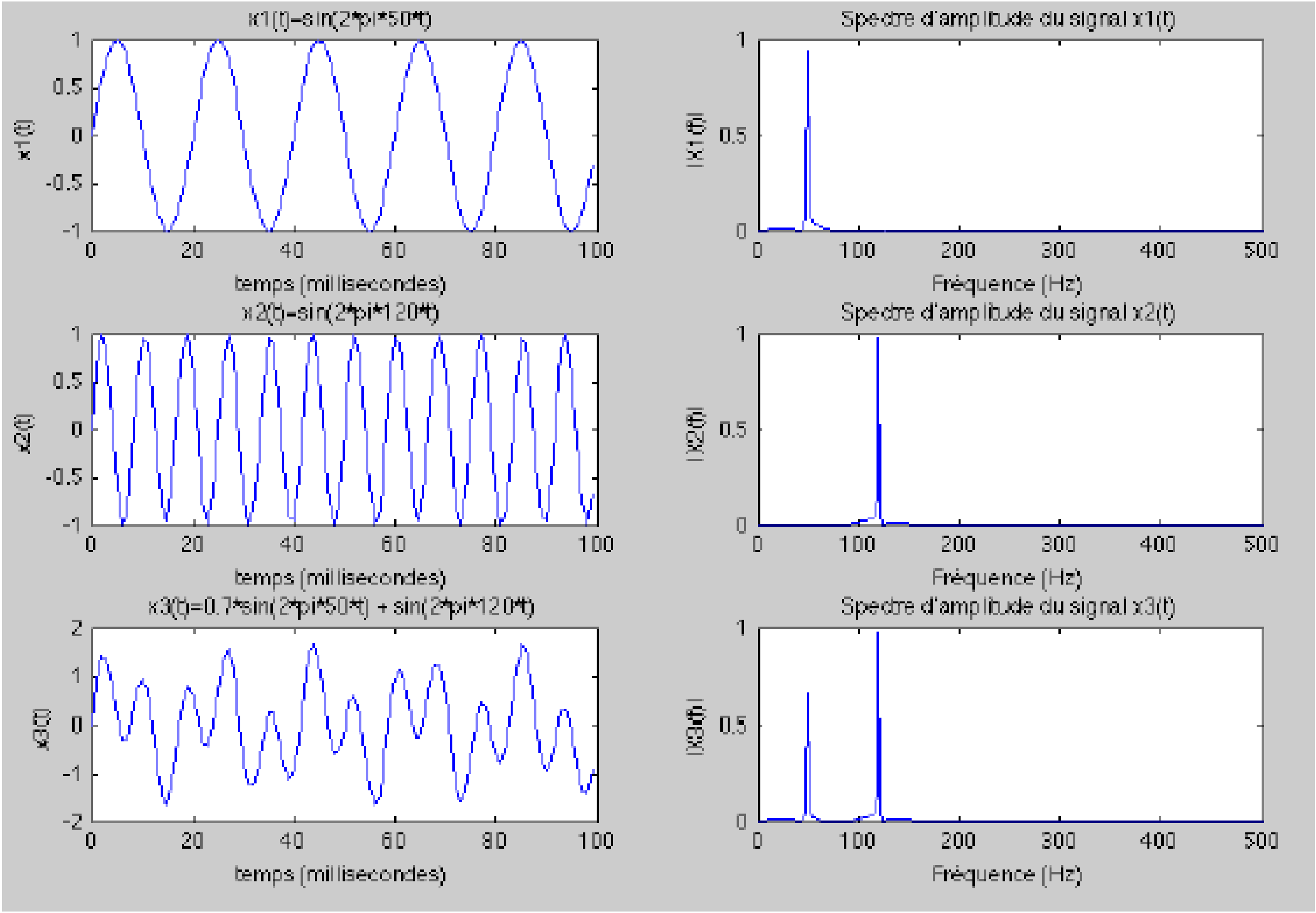
Et surtout : T=1/F
F la fréquence!

Un signal sinusoidal peut être aussi représenté par sa fréquence!

…. Quand est t'il pour des signaux plus complexes?

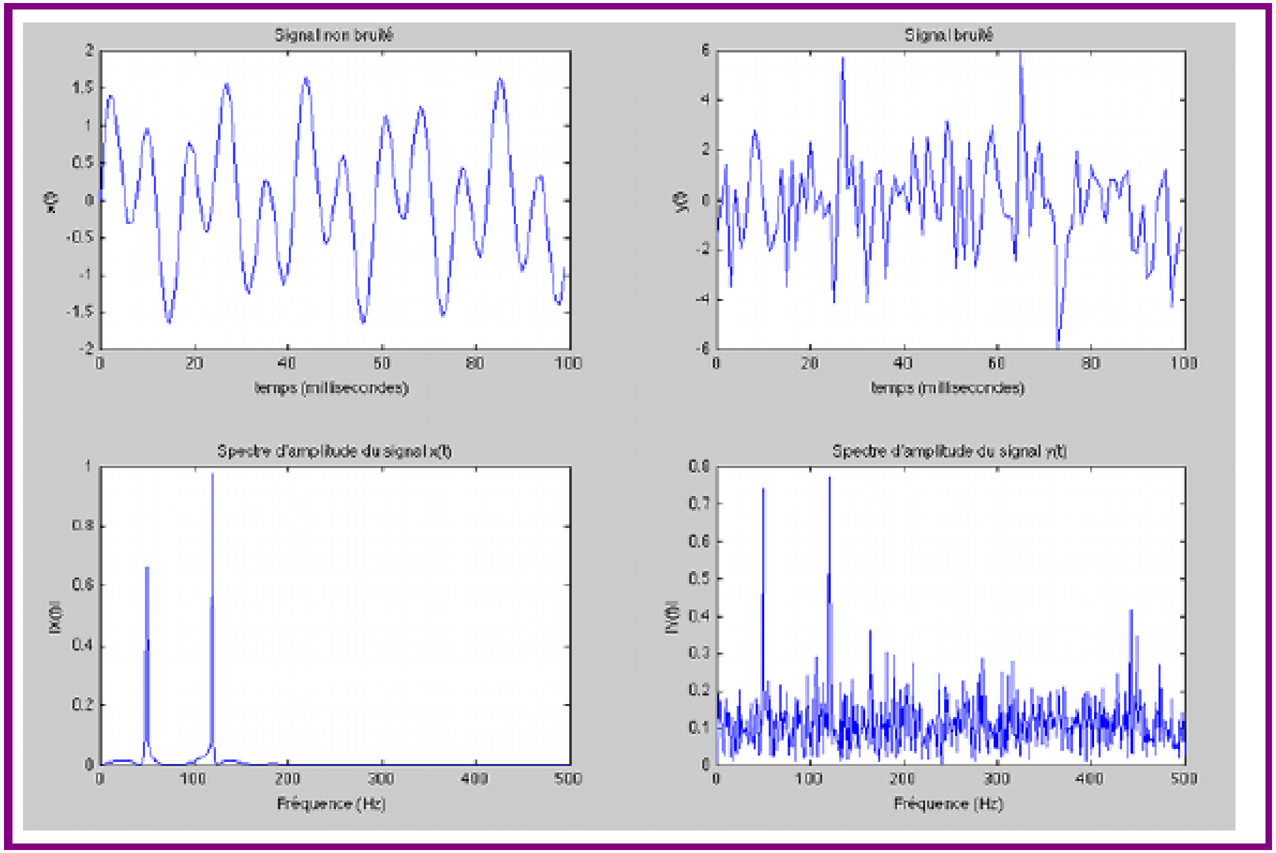
Filtre fréquentiel

un signal complexe comme une combinaison de sinus



Filtre fréquentiel

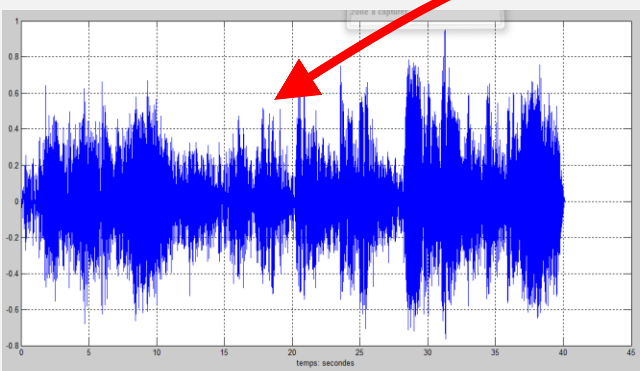
Signal bruité…

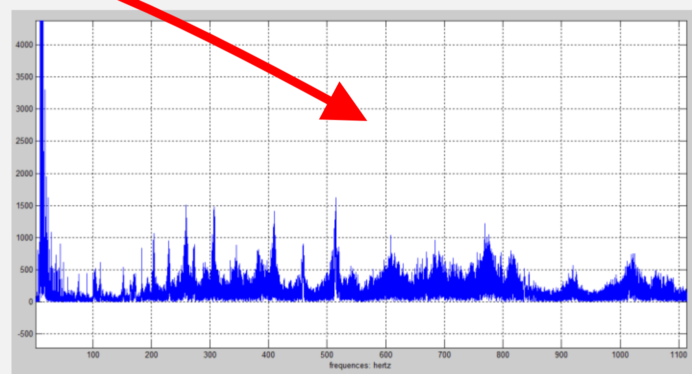


Filtre fréquentiel

Le spectre des fréquences

- Tout signal peut être représenté à la fois dans son domaine **temporel** mais également dans un domaine **fréquentiel**





Traitement dans cet espace s'appelle:
le filtrage fréquentiel

Filtre fréquentiel

Quelques rappels de la transformée de Fourier 1D

Soit f(x) un signal non périodique, sa transformée de Fourier est:

$$\boxed{\mathcal{F}[f(x)] = F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\exp\left(-2\pi j \nu x\right) dx \quad \nu \in IR}$$

Cette transformation possède une inverse:

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}[F(\nu)] = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)\,\exp\left(2\pi j \nu x\right) d\nu}$$

Ou x est la coordonnée spatiale et v la coordonée spectrale

$$\begin{aligned} F(\nu) &= \mathcal{R}[F(\nu)] + j\mathcal{I}[F(\nu)] = R(\nu) + jI(\nu) \\ F(\nu) &= |F(\nu)|\exp[j\Phi(\nu)] \end{aligned}$$

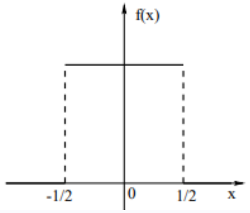
Spectre d'amplitude : $|F(\nu)| = \sqrt{R(\nu)^2 + I(\nu)^2}$

Phase : $\Phi(\nu) = \arctan\left(\dfrac{I(\nu)}{R(\nu)}\right)$

Filtre fréquentiel

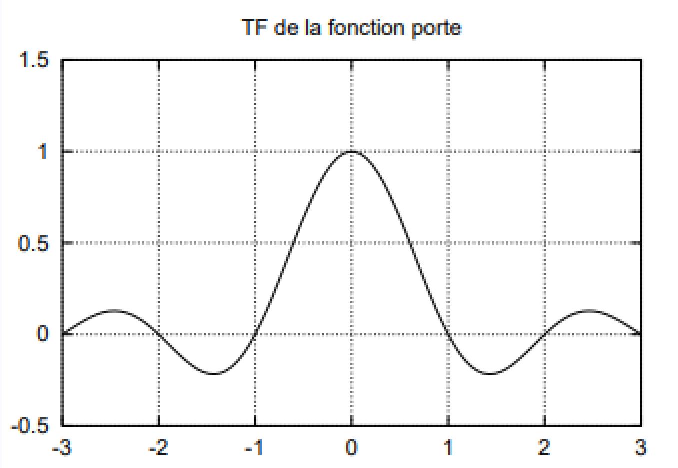
Quelques exemples de calculs

Fonction "Porte"



$$\begin{cases} \Pi(x) = 1 \quad \text{si} \quad |x| \leq \frac{1}{2} \\ \Pi(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\pi j\nu x)\, dx = \int_{-1/2}^{1/2} \exp(-2\pi j\nu x)\, dx \\ &= -\frac{1}{2\pi j\nu}\left[\exp(-2\pi j\nu x)\right]_{-1/2}^{1/2} \\ &= -\frac{1}{2\pi j\nu}\left[\exp(-\pi j\nu) - \exp(\pi j\nu)\right] \\ &= -\frac{1}{2\pi j\nu}\left[\cos(\pi\nu) - j\sin(\pi\nu) - \cos(\pi\nu) - j\sin(\pi\nu)\right] \\ F(\nu) &= \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} = \text{sinc}(\nu) \end{aligned}$$



Filtre fréquentiel

Quelques exemples de calculs

$\boxed{\text{Fonction impulsion}}$

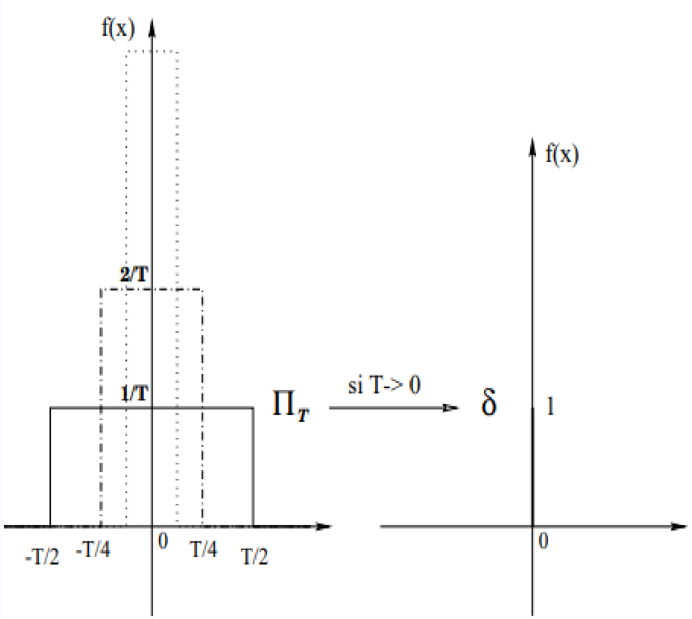
Soit la fonction $\sqcap_T(x)$, définie par,

$$\sqcap_T(x) = \frac{1}{T}\sqcap\left(\frac{x}{T}\right) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{si} \quad |x| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si} \quad |x| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{T}\sqcap\left(\frac{x}{T}\right)\right) = \frac{\sin \pi\nu T}{\pi\nu T}$$

Lorsque $T \to 0$, la limite obtenue, qui n'est pas une fonction, est appelée *distribution de Dirac* et noté δ

$$\boxed{\mathcal{F}(\delta) = 1}$$



Filtre fréquentiel

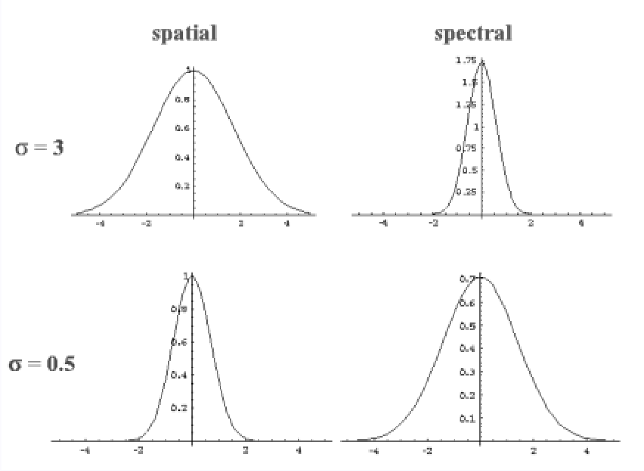
Quelques exemples de calculs

$\boxed{\text{Fonction Gaussienne}}$

Soit $f(x) = \exp(-\pi x^2)$

$$
\begin{aligned}
F(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi x^2)\exp(-2\pi j\nu x)\,dx \\
&= \exp(-\pi\nu^2)\exp(\pi\nu^2)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi x^2)\exp(-2\pi j\nu x)\,dx \\
&= \exp(-\pi\nu^2)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi(x+j\nu)^2)\,dx \\
&= \exp(-\pi\nu^2)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi w^2)\,dw}_{1} \qquad (w = x + j\nu) \\
F(\nu) &= \exp(-\pi\nu^2)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\mathcal{F}\Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})\Big] = \exp\left(-2\pi^2\sigma^2\nu^2\right)}
$$



Filtre fréquentiel

Les Propriétés de la TF (très très très …. Important!)

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\pi j \nu x)\, dx \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) \exp(2\pi j \nu x)\, d\nu$$

$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^{-1}$ en échangeant,

f en F

x en ν

j en $-j$

- ▶ Toute propriété de $\mathcal{F}$ est donc vraie pour $\mathcal{F}^{-1}$ en tenant compte de cette transposition

Filtre fréquentiel

Les Propriétés de la TF (très très très …. Important!)

1. Linéarité

Si $\mathcal{F}(f) = F$ et $\mathcal{F}(g) = G$,

$$\boxed{\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda F + \mu G}$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\lambda F + \mu G) = \lambda f + \mu g$$

2. Transformée de f(ax)

$$\boxed{\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)}$$

3. Transformée de f(x-xo)

$$\boxed{\mathcal{F}[f(x - x_0)] = \exp\left(-2j\pi\nu x_0\right) F(\nu)}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\nu - \nu_0)] = \exp\left(2\pi j \nu_0 x\right) f(x)$$

4. Transformée de f′(x)

$$\boxed{\mathcal{F}[f'(x)] = 2j\pi\nu\, F(\nu)}$$

De même, pour $\mathcal{F}^{-1}$, $\quad \mathcal{F}^{-1}[F'(\nu)] = -2j\pi x\, f(x)$

Plus généralement, si $f^{(n)}(x)$ existe et possède une TF,

$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (2j\pi\nu)^n F(\nu)$ et $\mathcal{F}^{-1}[F^{(n)}(\nu)] = (-2j\pi x)^n f(x)$

5. Transformée du produit de convolution

Produit de convolution :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x - t)\, dt$$

On démontre que si $\mathcal{F}(f) = F$ et $\mathcal{F}(g) = G$ alors,

$$\boxed{\mathcal{F}(f * g) = F \times G}$$

De la même façon pour $\mathcal{F}^{-1}$, on a,

$$\mathcal{F}^{-1}(F * G) = f \times g$$

Filtre fréquentiel

Les Propriétés de la TF (très très très …. Important!)

$a)$ $\boxed{f \text{ est paire} \blacktriangleright F(\nu) \text{ est réel}}$

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos 2\pi\nu x - j \sin 2\pi\nu x)\, dx$$

Or les fonctions $x \to f(x)\cos 2\pi\nu x$ et $x \to f(x)\sin 2\pi\nu x$ sont respectivement paire et impaire. Donc,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos 2\pi\nu x\, dx = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)\cos 2\pi\nu x\, dx$$

et, $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin 2\pi\nu x\, dx = 0$$

$b)$ $\boxed{f \text{ est impaire} \blacktriangleright F(\nu) \text{ est imaginaire pure}}$

Cette fois, on a, $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos 2\pi\nu x\, dx = 0$$

$c)$ $\boxed{f \text{ est réelle} \blacktriangleright \text{symétrie hermitienne}}$

$\mathcal{R}[F(\nu)]$ est paire et $\mathcal{I}[F(\nu)]$ est impaire

$d)$ $\boxed{f \text{ est paire} \blacktriangleright \mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}}$

Filtre fréquentiel

Périodicité et échantillonnage

Note sur la distribution de Dirac

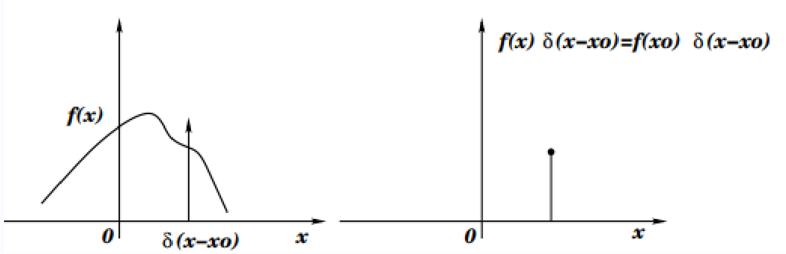
$$\delta(x) = \lim_{T\to 0} \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{x}{T}\right) = \lim_{T\to 0} \Pi_T(x)$$

On définit de la même façon

$$\delta(x - x_0) = \delta_{x_0} = \lim_{T\to 0} \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{x - x_0}{T}\right)$$

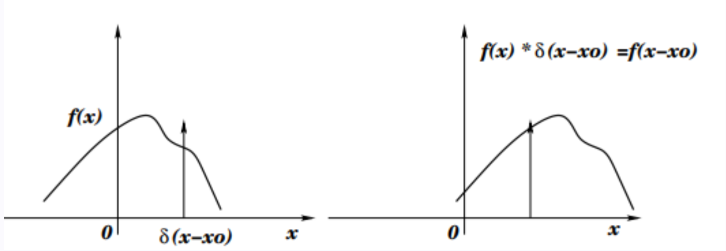
Echantillonnage

$$\begin{aligned} f(x)\delta(x) &= f(0)\,\delta(x) \\ f(x)\delta(x - x_0) &= f(x_0)\,\delta(x - x_0) \end{aligned}$$



Périodicité

$$\begin{aligned} f(x) * \delta &= f(x) \\ f(x) * \delta_{x_0} &= f(x - x_0) \\ \mathcal{F}[f(x)\exp(2j\pi\nu_0 x)] &= F(\nu - \nu_0) \end{aligned}$$



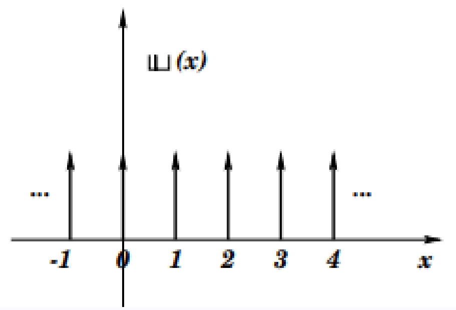
Filtre fréquentiel

Périodicité et échantillonnage

Peigne de Dirac

On appelle "peigne de Dirac", la distribution noté $\text{III}\,(x)$, définie par

$$\text{III}\,(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x-n)$$

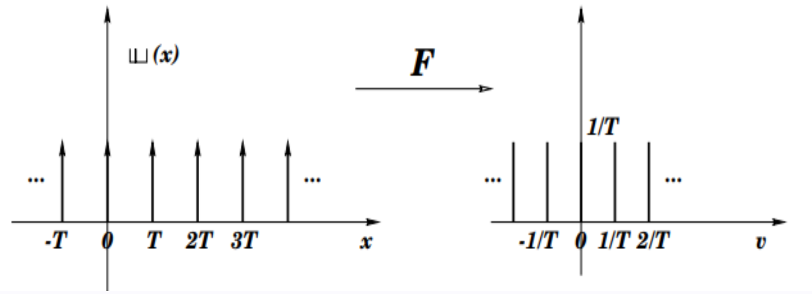


Le peigne de Dirac est invariant dans la TF

$$\mathcal{F}\Big(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x-n)\Big) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(\nu-n)$$

Dans le cas d'un peigne de période T

$$\boxed{\mathcal{F}\Big(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x-nT)\Big) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(\nu-\frac{n}{T})}$$



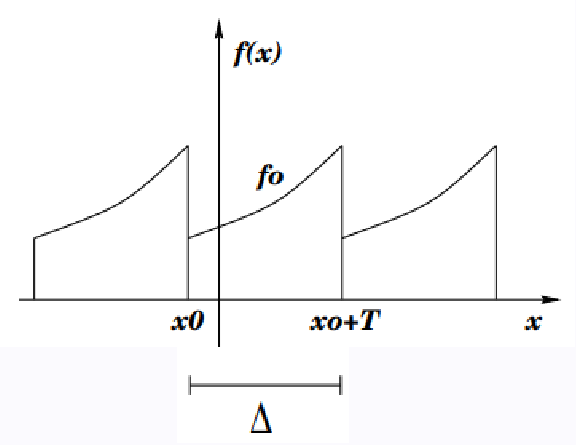
Filtre fréquentiel

Périodicité et échantillonnage

Transformée de Fourier d'une fonction périodique

Soit $f(x)$ une fonction périodique, de période $T = \frac{2\pi}{w}$, définie par la fonction "motif" $f_0(x)$

$$\begin{cases} f_0(x) = f(x) & \text{si} \quad x \in \Delta \\ f_0(x) = 0 & \text{si} \quad x \notin \Delta \end{cases}$$



$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f_0(x - nT) = f_0(x) * \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x - nT)$$

En appliquant la TF

$$F(\nu) = F_0(\nu) \times \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$$

$$F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{T} F_0\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$$

soit, $$F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \, \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right) \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{T} F_0\left(\frac{n}{T}\right)$$

▶ Spectre de raies

La transformée de Fourier d'une fonction périodique est un spectre de raies!

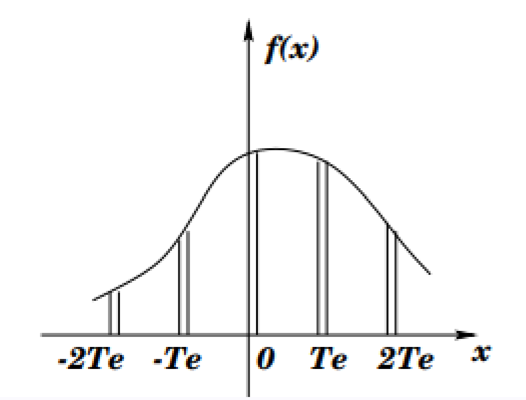
Filtre fréquentiel

Périodicité et échantillonnage

Transformée de Fourier d'une fonction échantillonnée

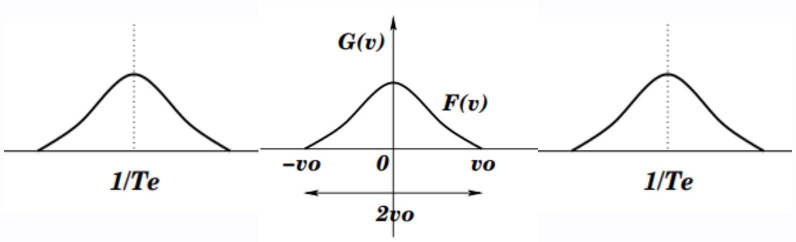
On peut représenter une fonction f échantillonnée avec la période d'échantillonnage T_e

$$f(x)\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} T_e\delta(x-nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} T_e f(nT_e)\,\delta(x-nT_e)$$



En appliquant la TF, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\Big(f(x)\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} T_e\delta(x-nT_e)\Big) &= F(\nu)*\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\delta\Big(\nu-\frac{n}{T_e}\Big)\\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F\Big(\nu-\frac{n}{T_e}\Big)\\ &= G(\nu)\end{aligned}$$



La transformée de Fourier d'une fonction échantillonnée fournit un spectre périodique!

Filtre fréquentiel

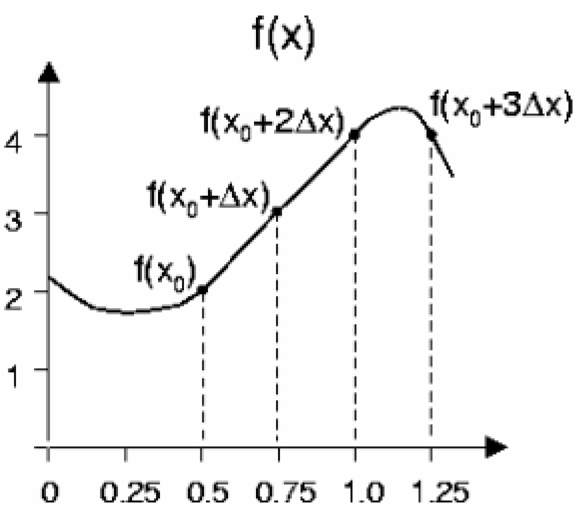
Transformation de Fourier discrète

CAS CONTINU (RAPPEL)

$$\boxed{\mathcal{F}[f(x)] = F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\pi j u x)\, dx \quad u \in IR.}$$

CAS DISCRET

$$f(x) = f(x_0 + x\Delta x) \quad x = 0, 1, 2, \ldots N-1$$



TFD et TFD inverse

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp\left(\frac{-2\pi j u x}{N}\right) \quad u = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \exp\left(\frac{2\pi j u x}{N}\right) \quad x = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

$$\Delta u = \frac{1}{N\Delta x}$$

Filtre fréquentiel

Transformée de Fourier 2D discrète → image

$$\boxed{F(u,\nu) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{M-1} f(x,y)\exp\left(-2\pi j\left(\frac{ux}{N}+\frac{\nu y}{M}\right)\right)}$$

$$\boxed{f(x,y) = \sum_{u=0}^{N-1}\sum_{\nu=0}^{M-1} F(u,\nu)\exp\left(2\pi j\left(\frac{ux}{N}+\frac{\nu y}{M}\right)\right)}$$

$$u = 0,1,2,\ldots,N-1$$
$$\nu = 0,1,2,\ldots,M-1$$

PROPRIÉTÉS

- Les mêmes que ceux énoncé pour la TF continue
- Cyclique (périodique)

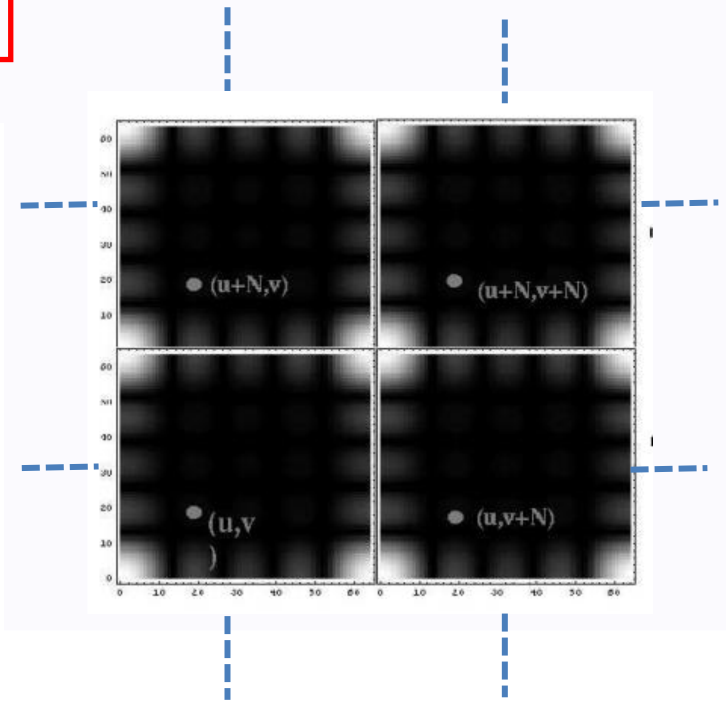
$$F(u,\nu) = F(u+N,\nu) = F(u,\nu+N) = F(u+N,\nu+N)$$

$$f(x,y) = f(x+N,y+N)$$

car

Signal périodique $-\mathcal{F}$ -> Spectre de raies

Signal échantillonné $-\mathcal{F}$ -> Spectre périodique



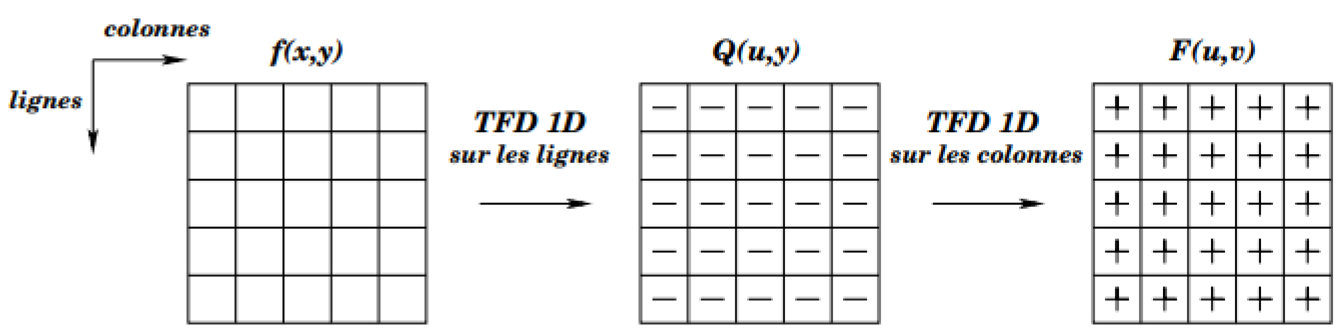
Filtre fréquentiel

Transformée de Fourier 2D discrète → image

- Séparabilité

Pour une image carrée ◀▶ $M = N$

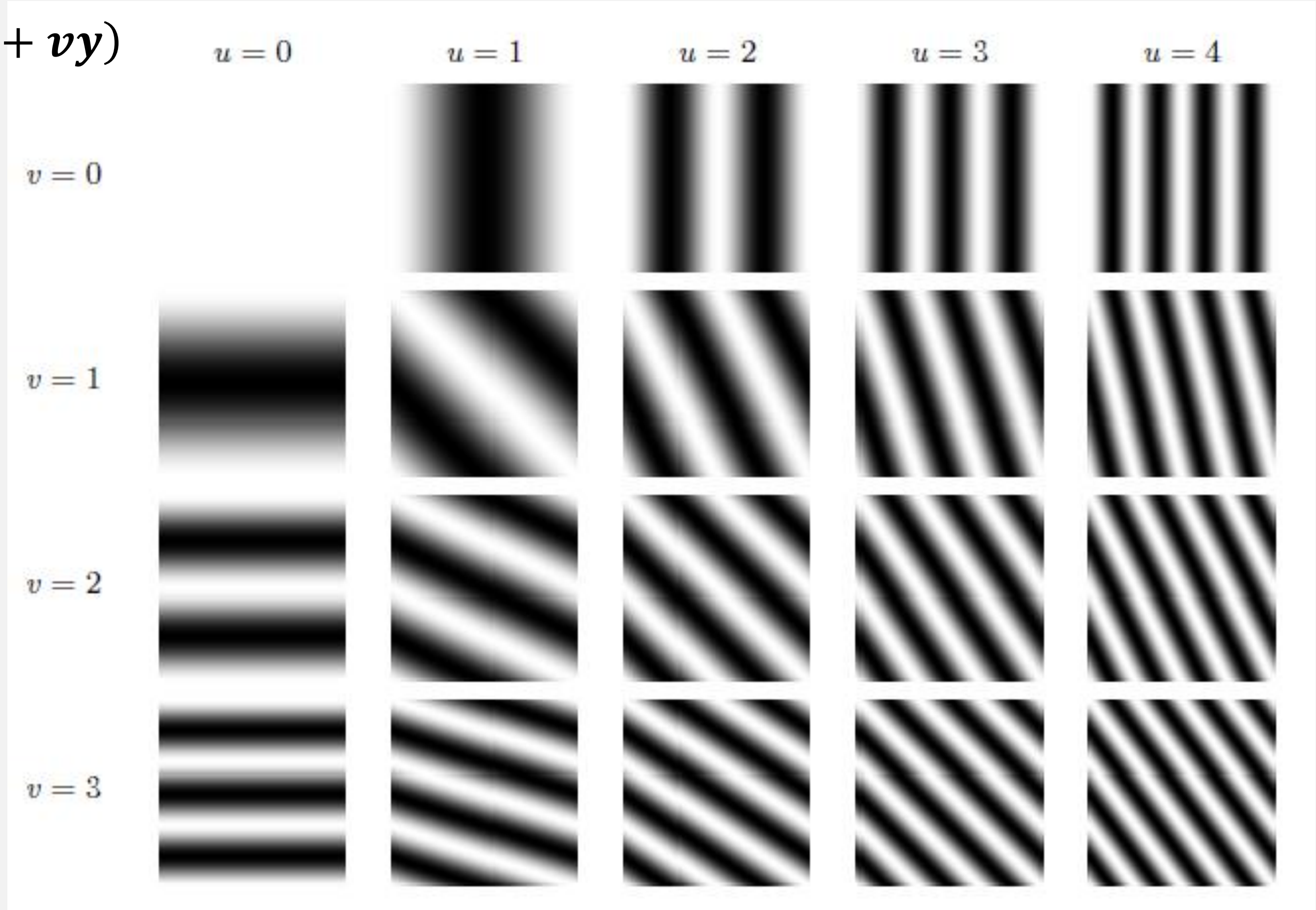
$$
\begin{aligned}
F(u,\nu) &= \frac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\exp\left(-2\pi j\left(\frac{ux+\nu y}{N}\right)\right)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\exp\left(-2\pi j\frac{\nu y}{N}\right)\right)\exp\left(-2\pi j\frac{ux}{N}\right)\\
&= \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}[\text{TF 1D de la x ième colonne}]\exp\left(-2\pi j\frac{ux}{N}\right)}_{\text{TF 1D de la y ième ligne}}
\end{aligned}
$$



Filtre frequentiel

Base de Fourier complexe: $z(u,v) = e^{-j2\pi(ux+vy)}$

$\cos(ux + vy)$



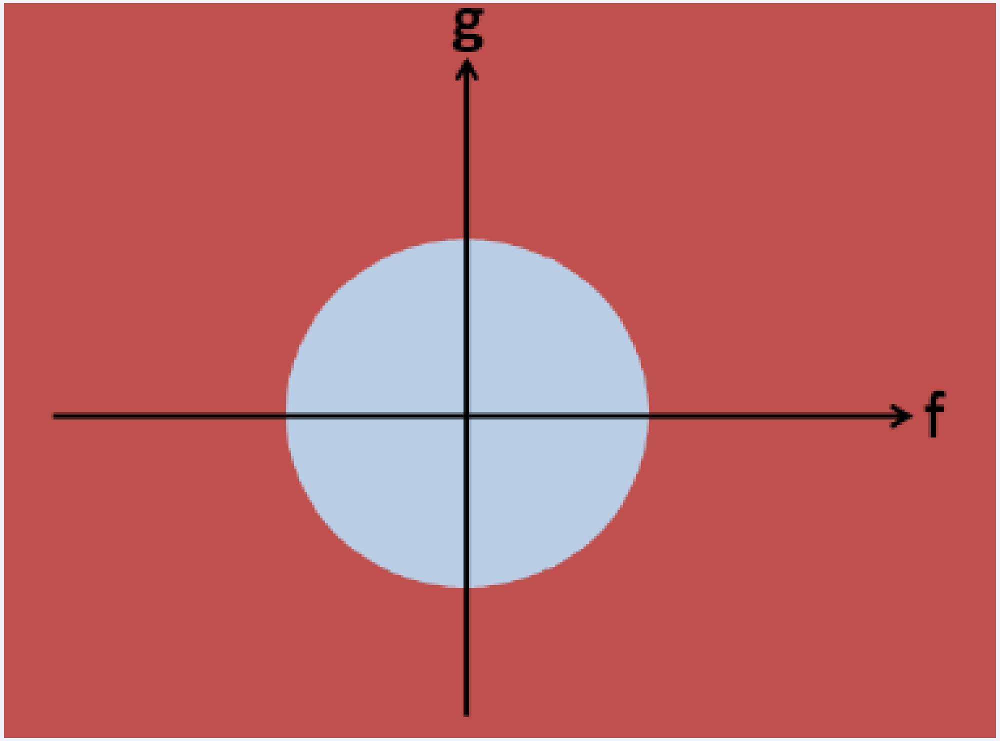
Filtre frequentiel

Définitions

- Partie réelle $X_R(f,g) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t,u)\cos\left(2\pi(ft+gu)\right) dtdu$ paire.
- Partie imaginaire $X_I(f,g) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t,u)\sin\left(2\pi(ft+gu)\right) dtdu$ impaire.
- Module, ou spectre d'amplitude $|X(f,g)| = \sqrt{X_R(f,g)^2 + X_I(f,g)^2}$.
- Phase $\Phi(f,g) = \arctan\left(\frac{X_I(f,g)}{X_R(f,g)}\right)$.
- La fréquence fondamentale, pour $f = g = 0$, $X(0,0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t,u) dtdu$

Filtre frequentiel

Composantes fréquentielles en 2d

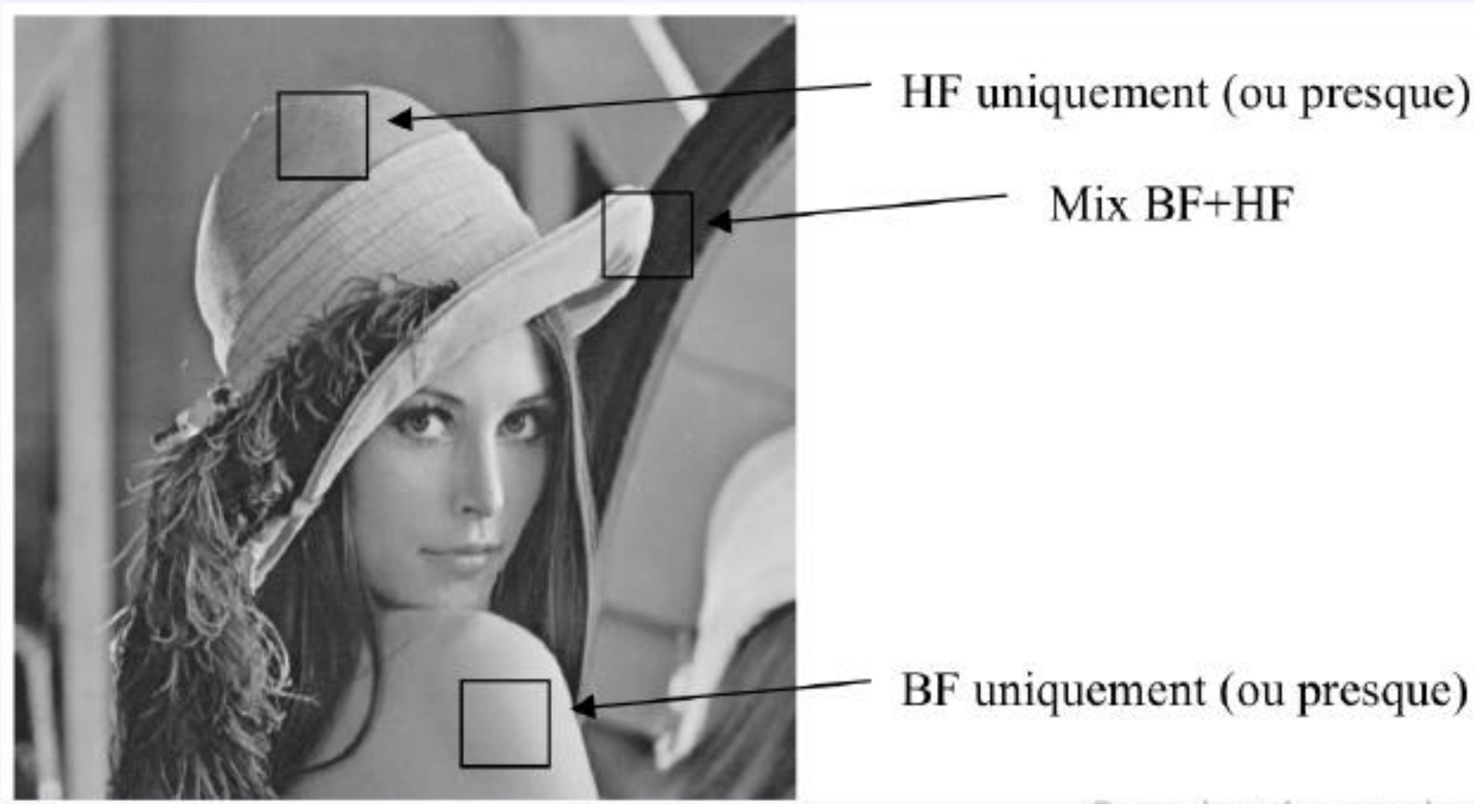


- Basses fréquences spatiales : $f^2 + g^2$ faible
- Hautes fréquences spatiales : $f^2 + g^2$ élevé

Filtre frequentiel

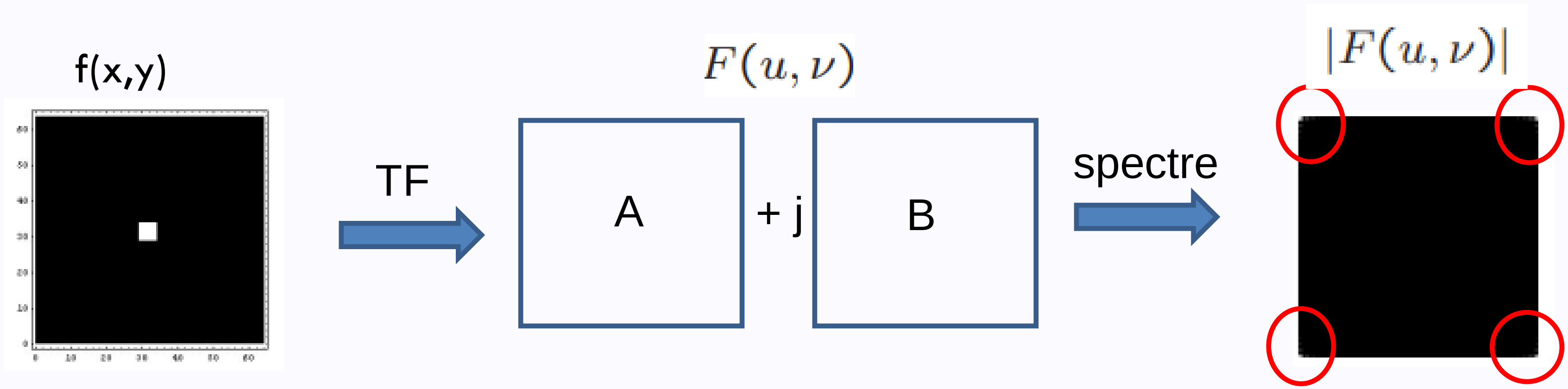
Notion de fréquence spatiale

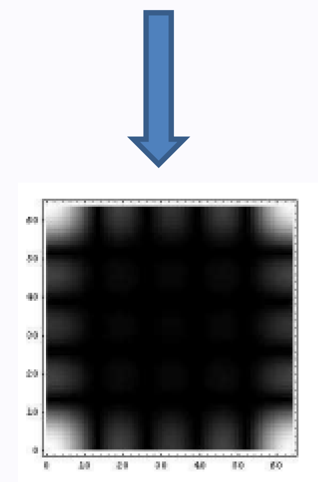
- Images réelles : signaux non stationnaires
- $\neq$ fréquences spatiales (hautes/basses) dans $\neq$ régions



Filtre fréquentiel

Visualisation du spectre





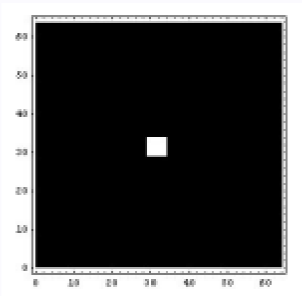
$\log(1 + |F(u, \nu)|)$

- Les fréquences élevées sont bcp plus faible que les fréquences plus basses. On affiche donc plutot $k \log(1 + |F(u, \nu)|)$ (k est une constante de normalisation pour recaler les niveau de gris dans $[0, 255]$)

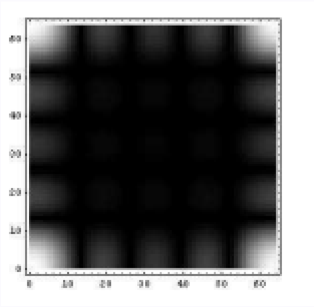
Filtre fréquentiel

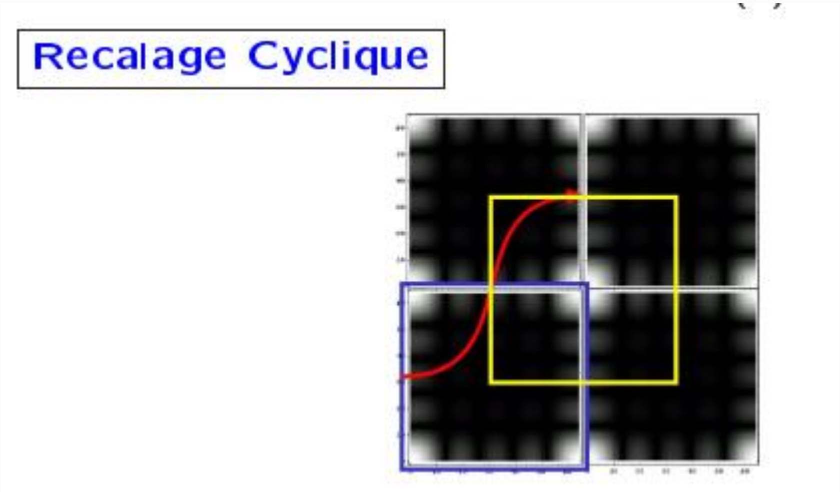
Visualisation du spectre (recentrage)

f(x,y)



$\log(1+|F(u,\nu)|)$

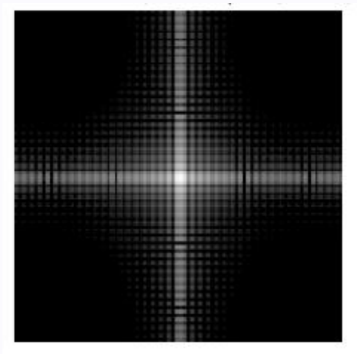




Matlab

```
>> F=fft2(f);
>> SF=abs(F);
>> figure(1)
>> imshow(1+log(SF))
```

```
>> F=fft2(f);
>> F=fftshift(F);
>> SF=abs(F);
>> figure(1)
>> imshow(1+log(SF))
```



Filtre fréquentiel

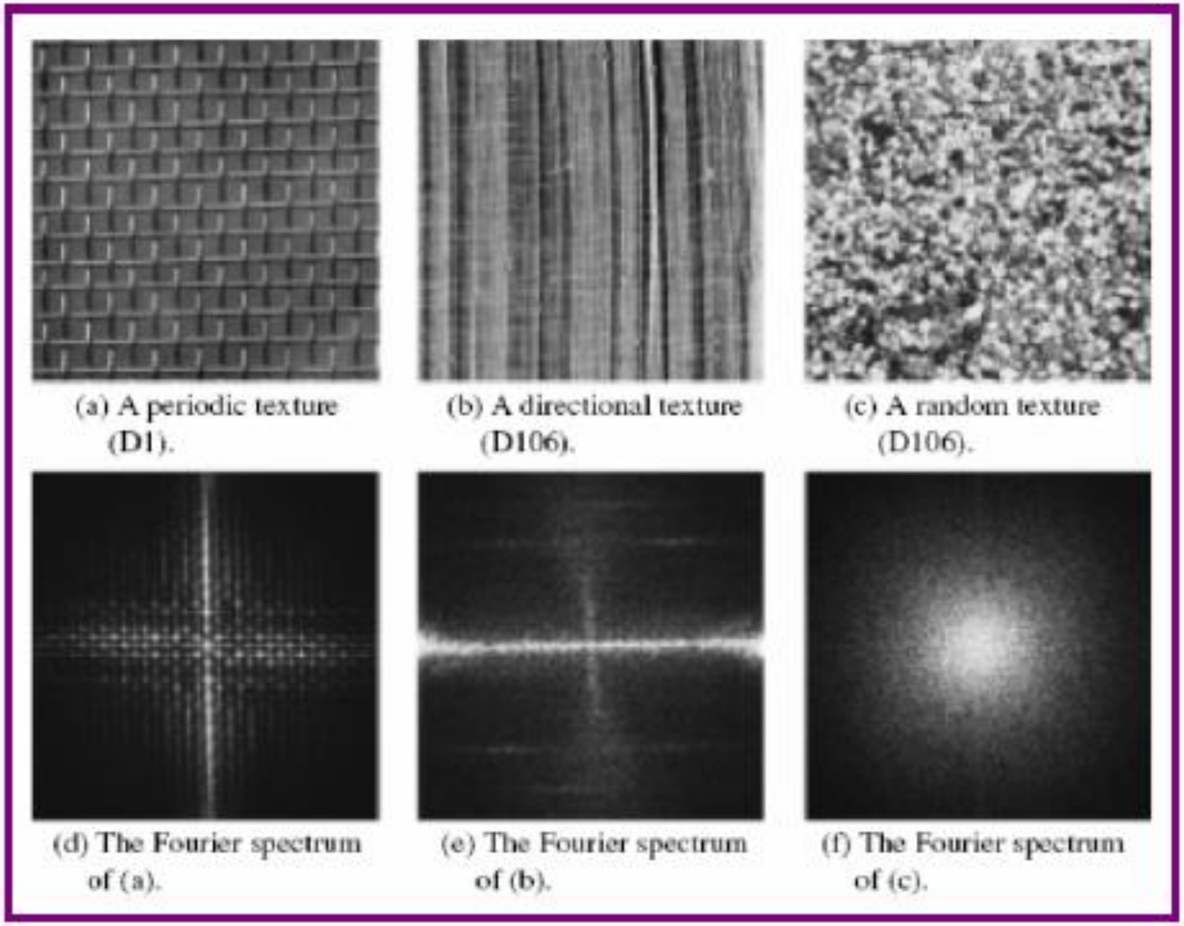
Bon d'accord mais je fais quoi avec…

Je vais filtrer les images mais dans le domaine fréquentiel pour :

- **Lisser (éliminer le bruit)**
- **Détecter les directions principales dans une image (analyse de la texture,..)**
- **Restaurer une image (éliminer des périodicités gênantes dans l'image)**
- **Détecter le mouvement d'un objet image**
- **….**

Application de la TF

Analyse de la texture



(a) A periodic texture (D1).

(b) A directional texture (D106).

(c) A random texture (D106).

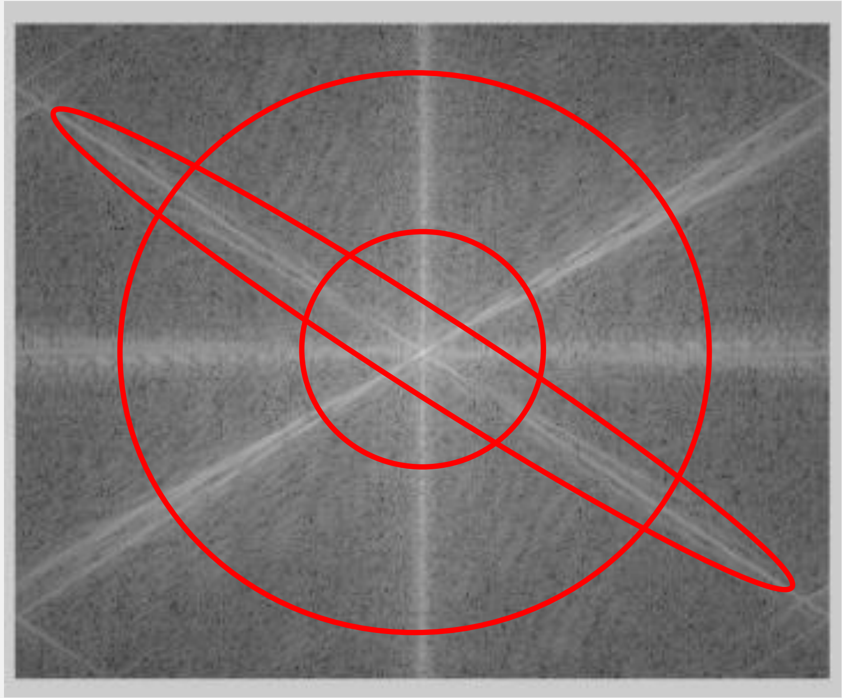
(d) The Fourier spectrum of (a).

(e) The Fourier spectrum of (b).

(f) The Fourier spectrum of (c).

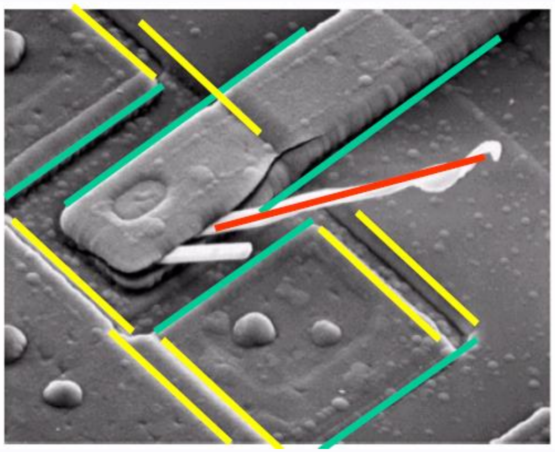
Filtre fréquentiel

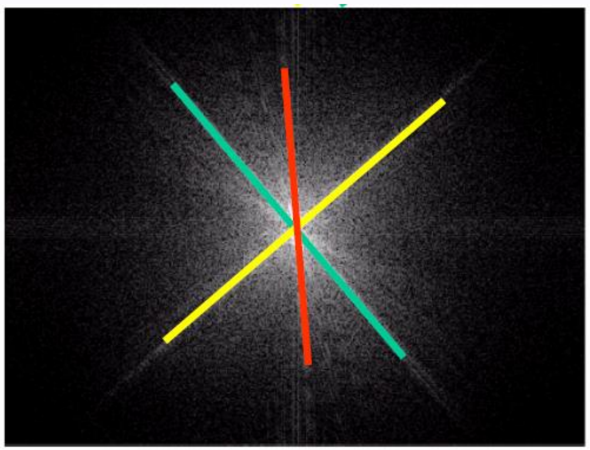
Correspondance image ←→ spectre de fréquences



Spécificités de la TF 2D

Detection d'anomalies: étude fréquentielle





Filtre fréquentiel

Quel est le lien avec le filtrage spatial…

Un théorème très très important !!

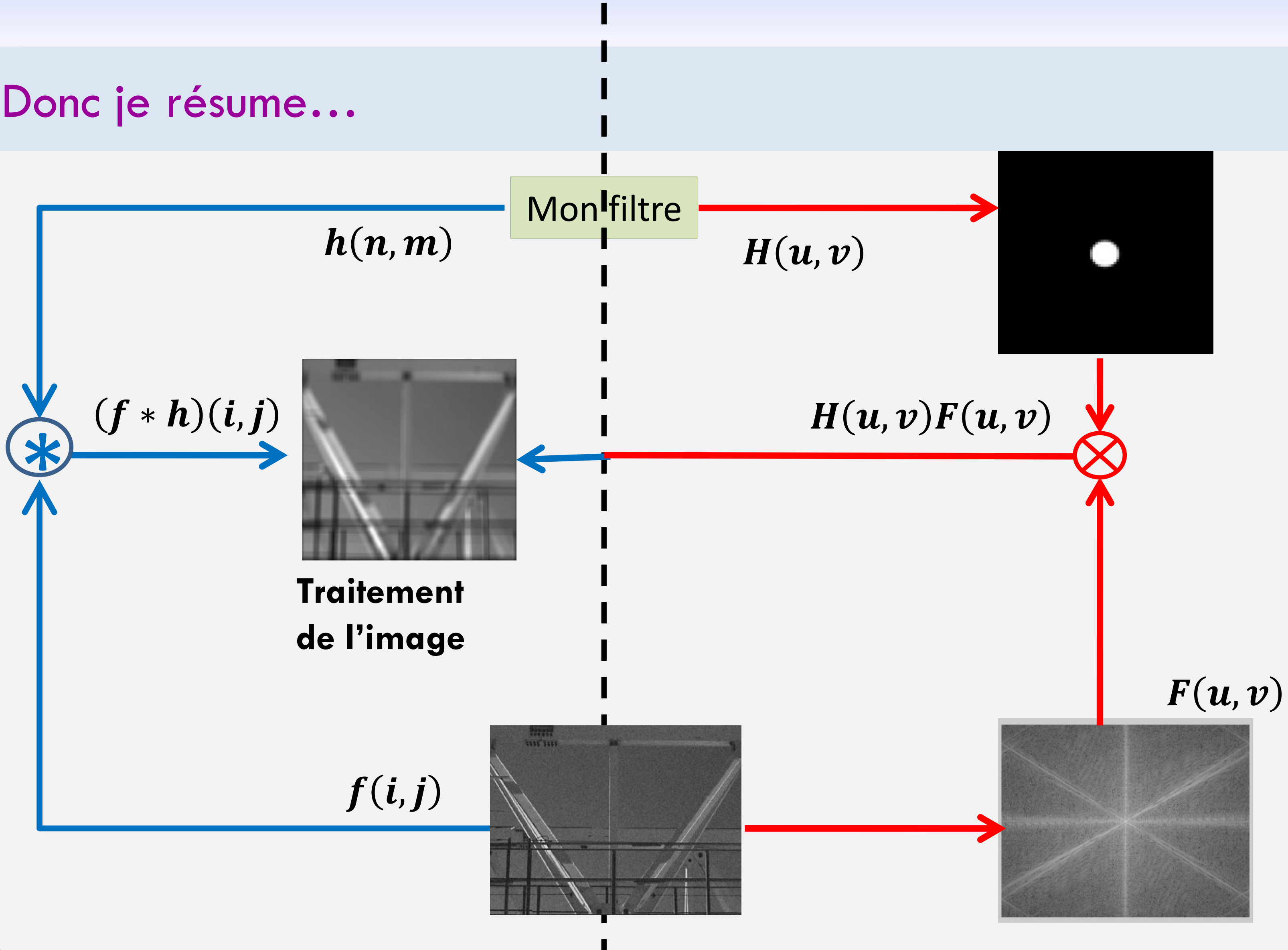
Faire un produit de convolution dans le **domaine spatial** est équivalent à faire un produit simple dans le **domaine spectral** !!

Ou en math (désolé!) :

$$\boxed{(f * h)(x, y) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} F(u, v).H(u, v)}$$

Filtre fréquentiel

Donc je résume…



Filtre fréquentiel

Mais filtrer avec quoi? C'est quoi h?

C'est simple: le filtre h doit être défini de telle manière qu'il préserve certaines fréquences et élimine les fréquences indésirables:

- Filtre passe bas: je conserve les fréquences basses : **mettre en valeur les régions uniformes de l'image tout en éliminant le bruit**
- Filtre passe bande: je conserve une bande fréquentielle : **mettre en valeur certaines directions privilégiées dans l'image**
- Filtre passe haut: je ne conserve que les hautes fréquences : **mettre en valeur les contours pour améliorer le contraste**

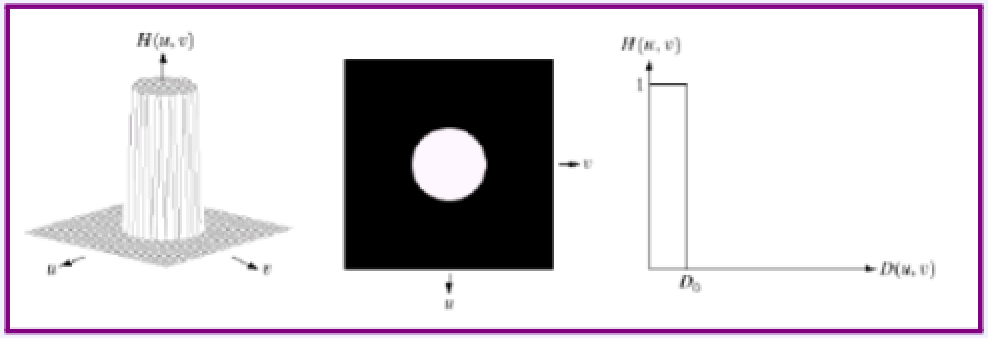
Filtrage Passe bas 2D

Définition

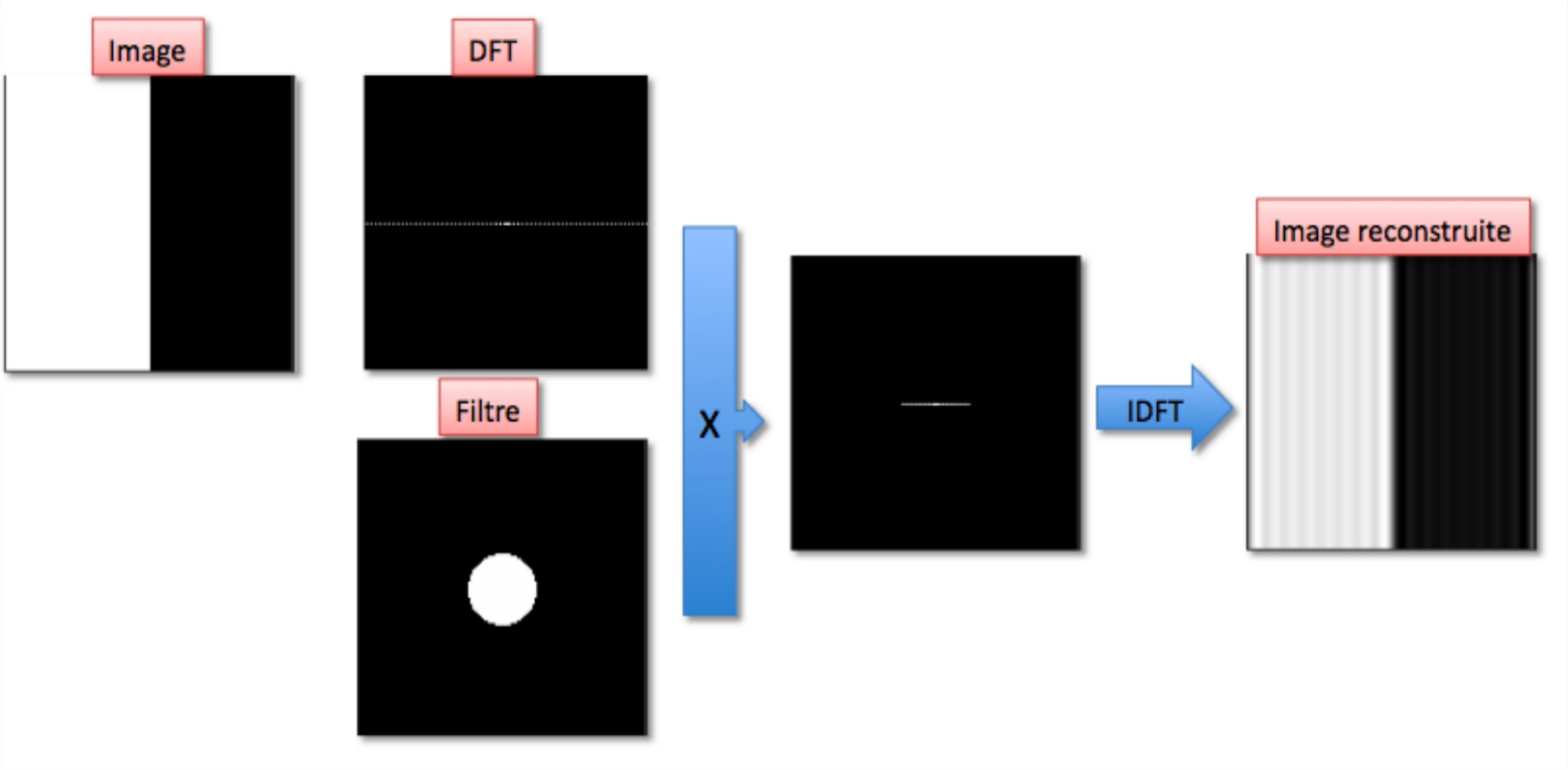
- La fonction de transfert $H(u,v)$ du filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure D_0 est donnée par :

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sqrt{u^2+v^2} \leq D_0 \\ 0 & \text{si} \quad \sqrt{u^2+v^2} > D_0 \end{cases}$$

- Ce filtre supprime les composantes fréquentielles ayant une fréquence radiale $\sqrt{u^2+v^2}$ supérieure à D_0



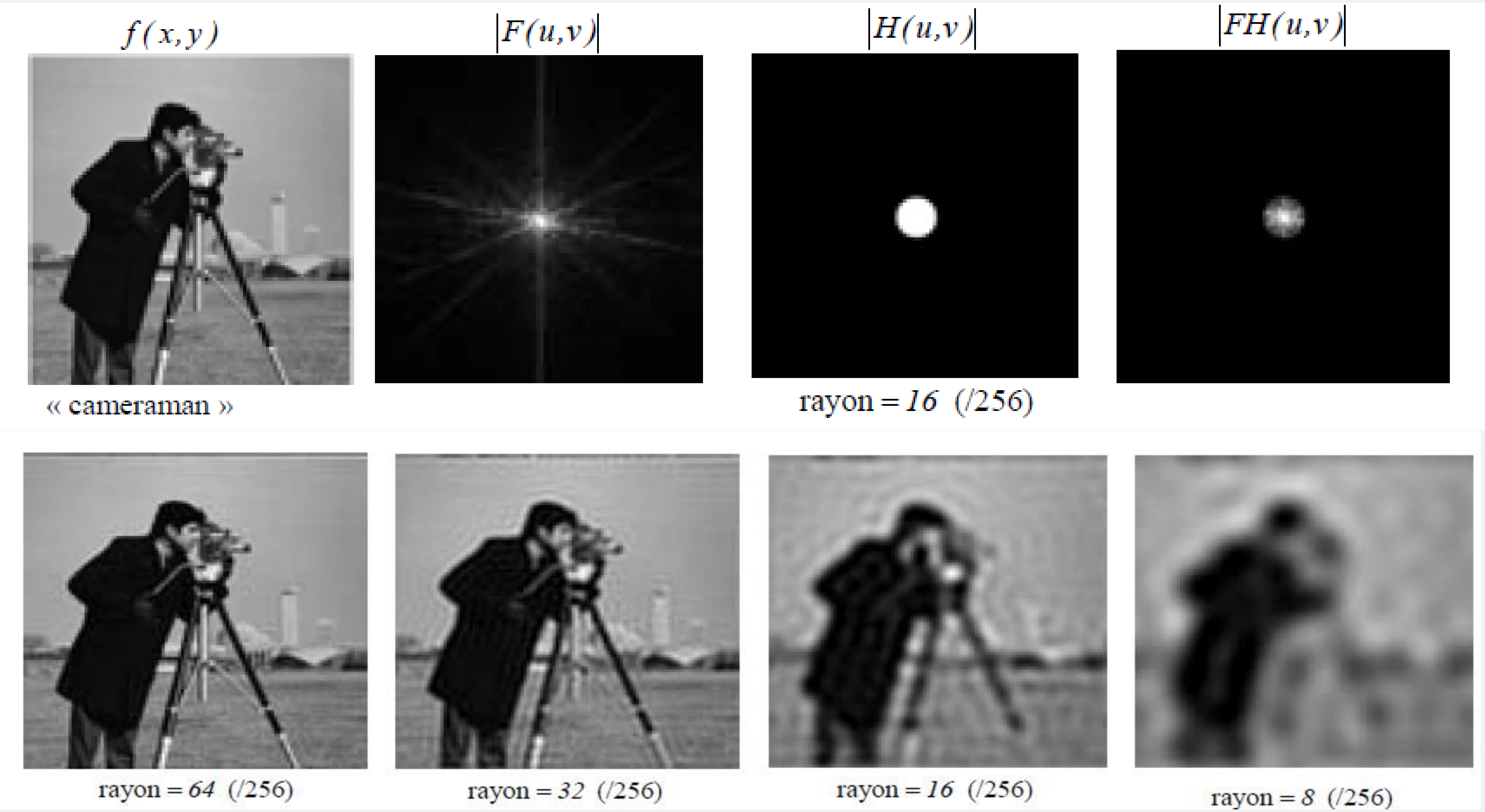
Filtrage Passe bas 2D



- Les hautes fréquences sont supprimées
- Les basses fréquences, dont la fréquence fondamentale, sont conservées
- L'image reconstruite présente du flou sur le contour

Filtrage Passe bas 2D

Le passe bas en action…

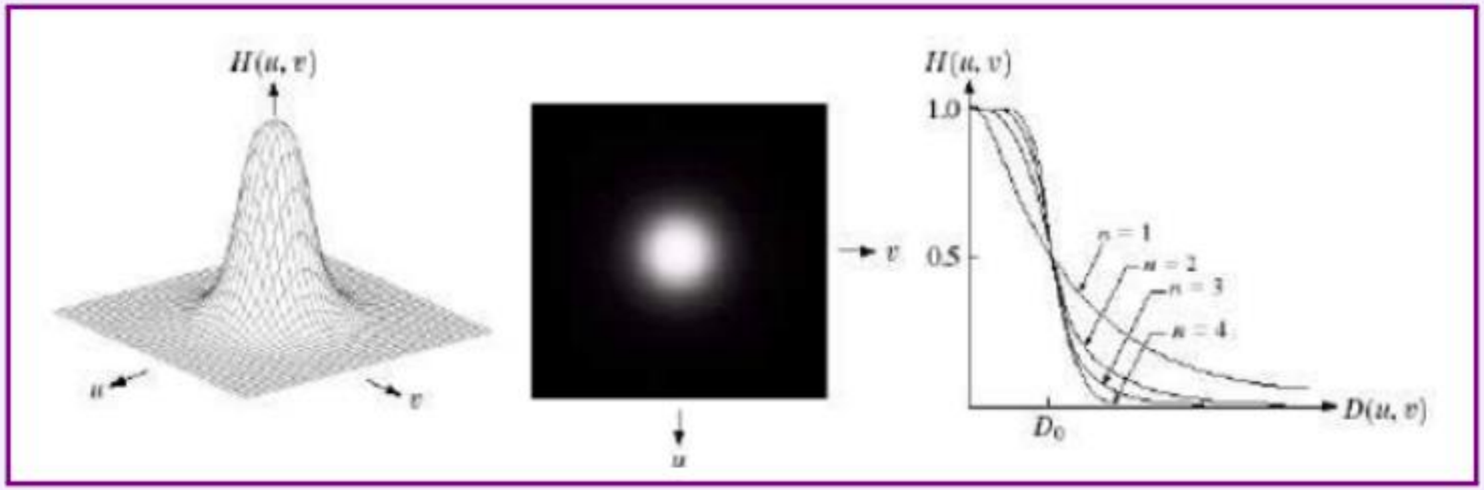


Filtrage Passe bas de Butterworth d'ordre n

Définition

- Le filtre passe-bas de Butterworth d'ordre n est défini par :

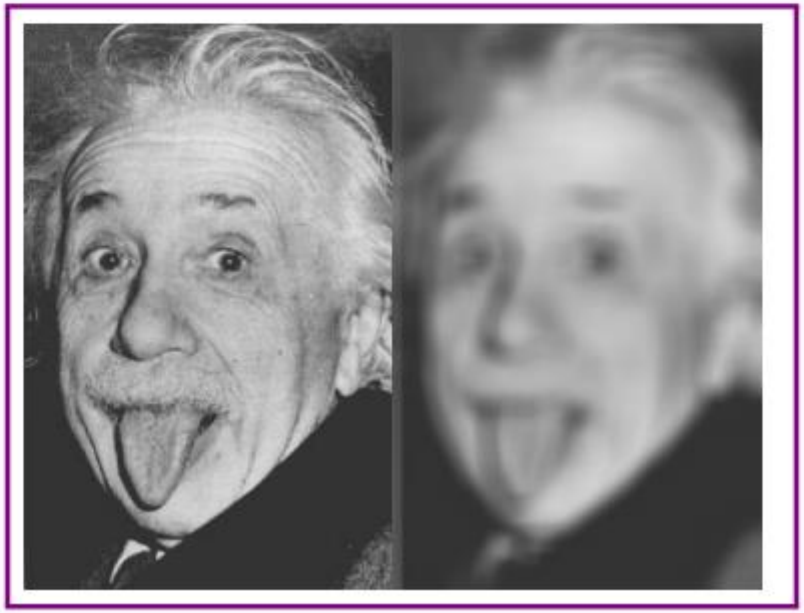
$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{D_0}\right)^{2n}}$$



Filtrage Passe bas de Butterworth d'ordre n

Caractéristiques

- Les composantes fréquentielles sont d'autant plus atténuées que le couple (u, v) est loin de l'origine
- Plus n est grand, plus l'atténuation des hautes fréquences est importante
- Moins de flou (contours moins lissés) qu'avec un filtre passe-bas idéal



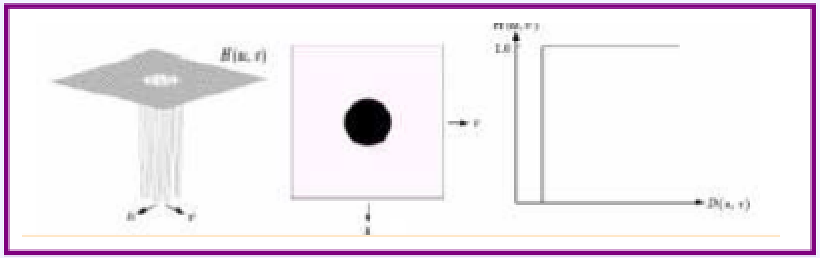
Filtrage Passe haut

Définition

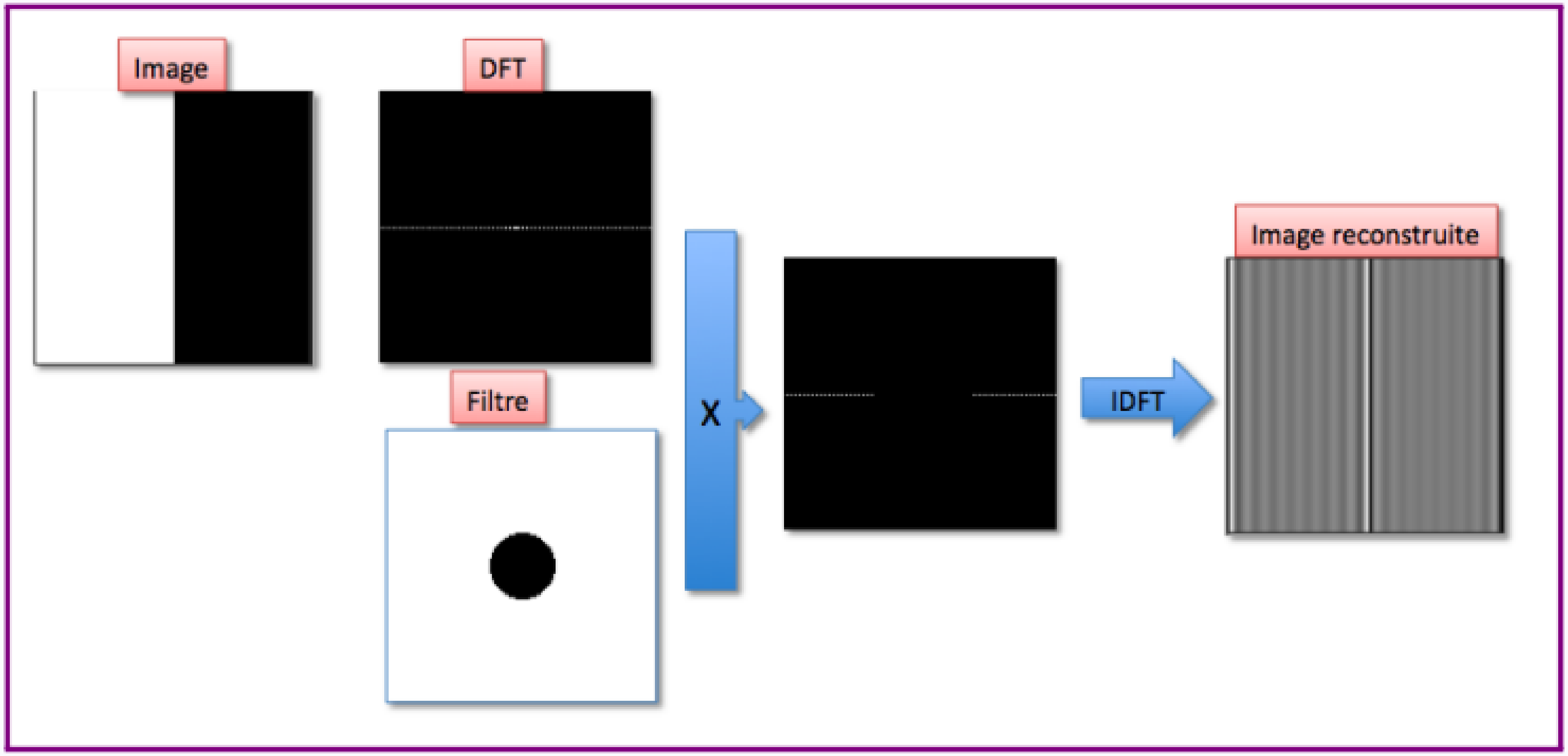
- La fonction de transfert $H(u, v)$ du filtre passe-haut de fréquence de coupour D_0 idéal est donnée par :

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sqrt{u^2 + v^2} \geq D_0 \\ 0 & \text{si} \quad \sqrt{u^2 + v^2} < D_0 \end{cases}$$

- Ce filtre supprime les composantes fréquentielles ayant une fréquence radiale $\sqrt{u^2 + v^2}$ inférieure à D_0



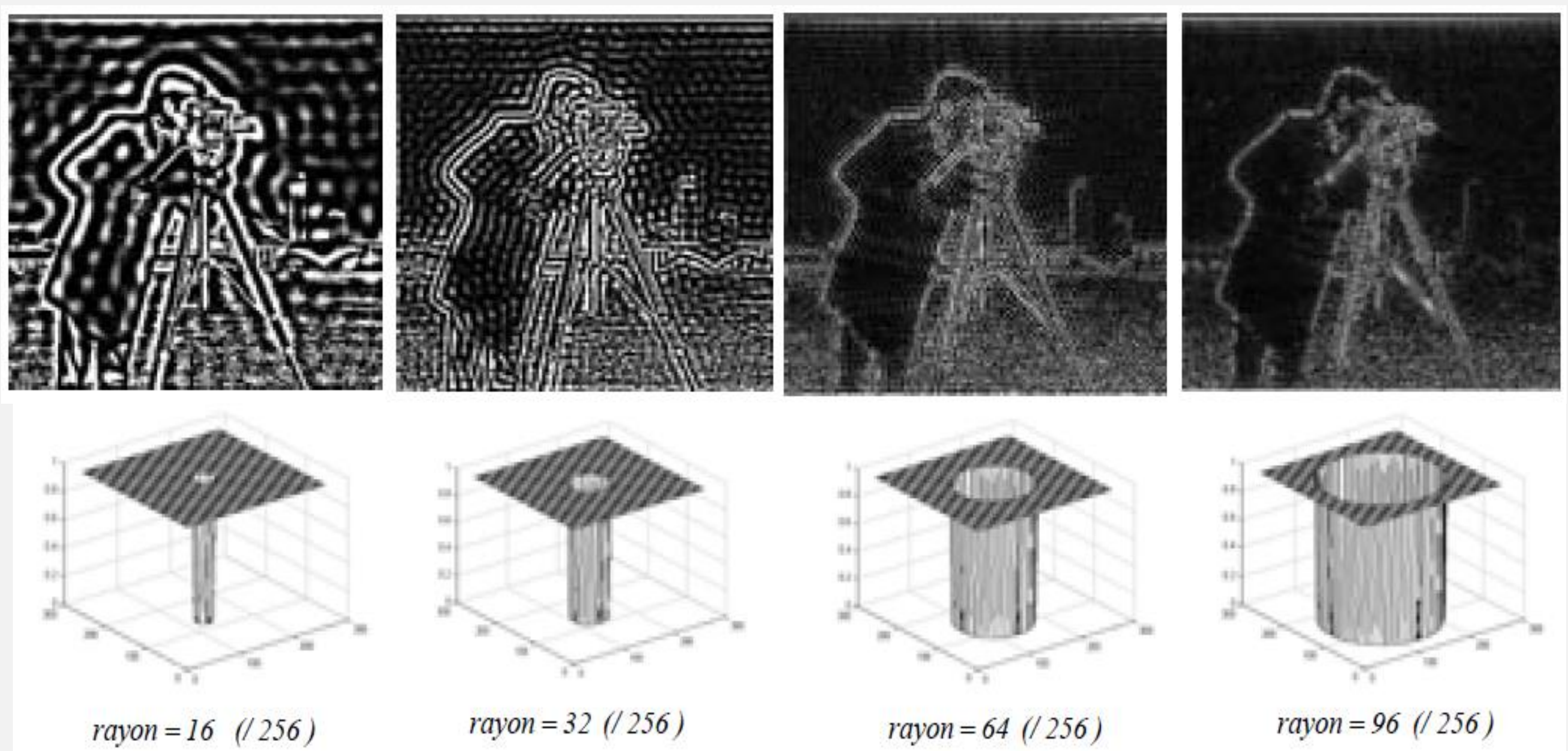
Filtrage Passe Haut



- Les hautes fréquences sont conservées
- Les basses fréquences, dont la fréquence fondamentale, sont éliminées
- L'image reconstruite n'a plus ses couleurs, mais le contour est net

Filtrage Passe Haut

Pas de jaloux… Le passe haut

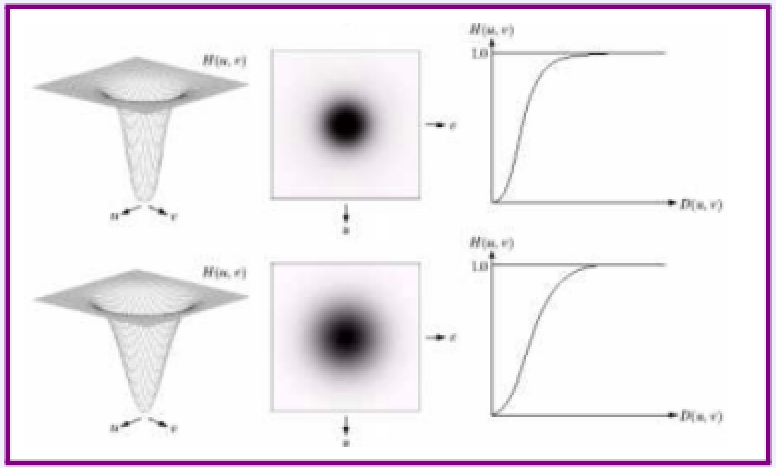


Filtrage Passe haut de Butterworth d'ordre n

Définition

- Le filtre passe-haut de Butterworth d'ordre n est défini par :

$$H(u,v) = \frac{1}{1+\left(\frac{D_0}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)^{2n}}$$



Filtrage Passe haut de Butterworth d'ordre n

Caractéristiques

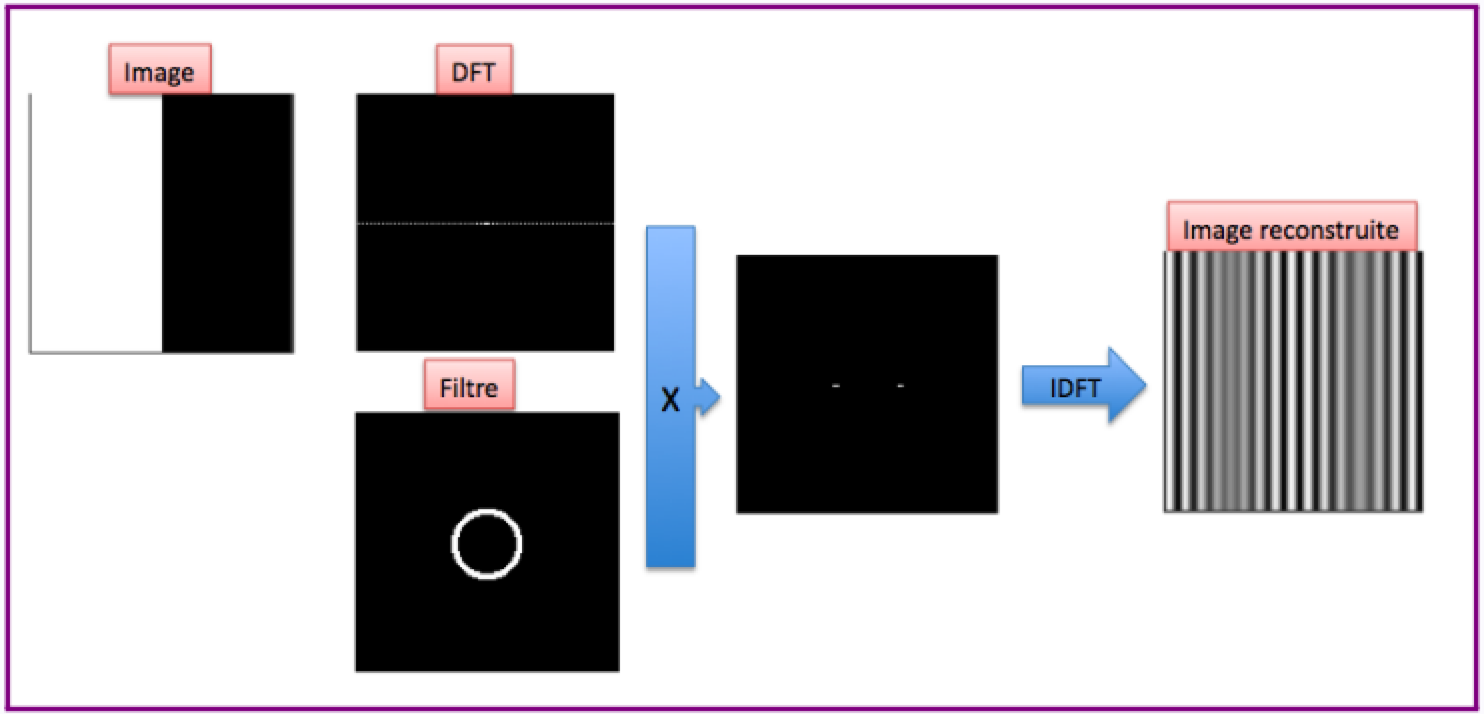
- Les composantes fréquentielles sont d'autant plus atténuées que le couple (u, v) est proche de l'origine
- n fixe la pente de transition entre les hautes et les basses fréquences
- Le filtrage passe-haut a un effet dérivateur

Filtrage Passe bande

Définition

- Un filtre passe-bande est complémentaire d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-haut
- Un filtre passe-bande est un système linéaire qui préserve une plage de fréquences
- L'image reconstruite est une combinaison d'un nombre réduit d'images de base (sinusoïdes)

Filtrage Passe bande



Le filtrage

Les outils fondamentaux

- Filtrage spatial: La convolution
- Filtrage fréquentiel: La transformée de Fourier
- Filtrage non linéaire: médiane

Filtre non linéaire

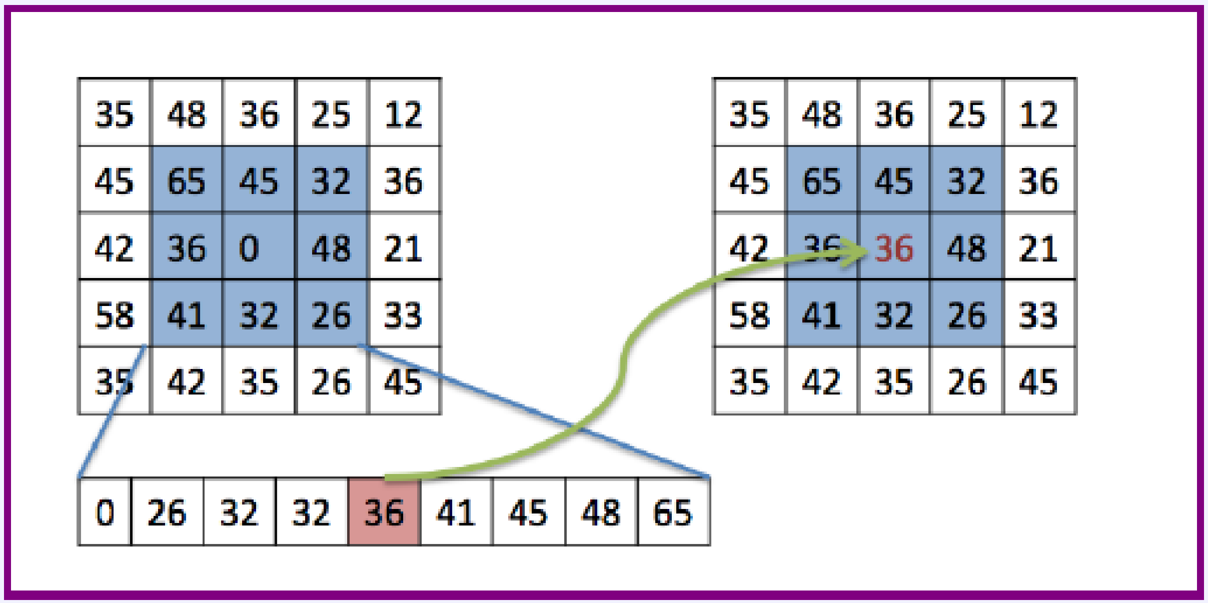
Filtre médian : définition

- Soit une séquence discrète $a_1, a_2, \ldots, a_N$ (N impair). a_i est la valeur médiane de la séquence si :
  - Il existe $\frac{N-1}{2}$ éléments de valeur inférieure
  - Il existe $\frac{N-1}{2}$ éléments de valeur supérieure
- Très adapté au bruit type "poivre et sel" (faux "blanc" et "noir" dans l'image)
- Préserve les contours
- Réduit le bruit additif uniforme ou gaussien (lissage de l'image)
- Si le bruit est supérieur à la moitié de la taille du filtre, alors le filtre est inefficace

Filtre non linéaire

Mais comment on l'utilise pour l'image?

- Déplacer une fenêtre de taille impaire sur le support image
- Remplacer le pixel central (sur lequel est positionnée la fenêtre) par la valeur médiane des pixels inclus dans la fenêtre



Filtre fréquentiel

Petite illustration….

Image fortement dégradée

Filtrage linéaire:
Passe bas ou passe haut?

Filtrage non linéaire:
Filtre médian

Filtre non linéaire

Influence de la taille du filtre

Image initiale

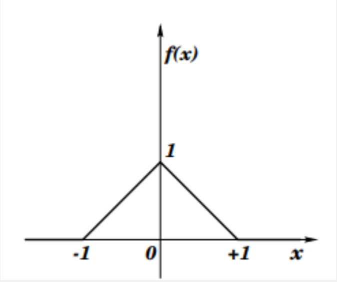
Masque de taille 15

Masque de taille 31

Filtre non linéaire

Exercice 1

1. Calculer l'expression de la transformée de Fourier de la fonction triangle.
(Rq. Proposer 2 solutions)



2. Montrer que le triangle est obtenu par la convolution de deux rectangles

3. Calculer la TF d'une fonction porte décalée ? $\mathcal{F}[\Pi(x - x_0)]$

4. En déduire la TF d'une fonction de dirac décalée en x0 ? $\mathcal{F}(\delta_{x_0})$

Filtre fréquentiel

Exercice 2

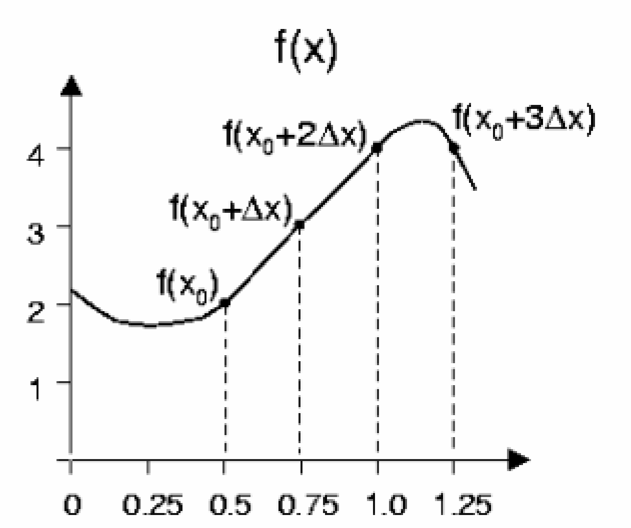
Rappel:

TFD et TFD inverse

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\exp\left(\frac{-2\pi jux}{N}\right) \quad u = 0,1,2,\ldots,N-1$$

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u)\exp\left(\frac{2\pi jux}{N}\right) \quad x = 0,1,2,\ldots,N-1$$

$$\Delta u = \frac{1}{N\Delta x}$$



1) Explicitez les valeurs de la transformée de Fourier en 0,1,2 et 3
2) Quelle est la valeur du spectre d'amplitude en ses points?