Université du Littoral
Pôle de Calais

Franck Dufrenois

MISC

05/04/2022

Examen de Vision : 3h

Ex1 : Transformée de Fourier (10 points)

Questions de cours

Considérons un signal x(t) et sa transformée de Fourier TF(x)=X(f) définie par :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

a) Montrer que la transformée de Fourier du signal $x(t-t_0)$ s'exprime p $x(t - t_0) \rightleftharpoons X(f)e^{-j2\pi f t_0}$

b) Donnez l'expression de la transformée de Fourier de la fonction porte définie par :

$$\text{rect}_T(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \in [-T/2, T/2], \\ 0 & ailleurs. \end{cases}$$

c) La fonction de dirac est définie par $\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0, \\ +\infty & \text{pour } t = 0. \end{cases}$

Et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1.$

- La fonction de dirac est t'elle paire ou impaire ?
- Comment peut s'exprimer la fonction de Dirac à partir de la fonction porte définie à la question (c) ?
- Montrer alors que la transformée de Fourier d'un dirac vaut 1 :

$$\delta(t) \rightleftharpoons 1 \quad \forall f$$

d) Montrez que $e^{j2\pi f_0 t} x(t) \rightleftharpoons X(f - f_0)$ Qu'en déduisez-vous pour la $\text{TF}\left\{e^{j2\pi f_0 t}\right\}$

e) Considérons maintenant deux images x(i,j) et y(i,j) qui peuvent être considérées comme deux signaux bidimensionnels. Leurs transformées de Fourier sont définies X(u,v) et Y(u,v), respectivement. Considérons que ces deux images soient séparées par une translation t=(tx,ty) de telle manière que l'on peut écrire :

$$y(i,j)=x(i-tx,j-ty)$$

- Montrer la relation suivante dans le domaine fréquentielle :

$$Y(u,v)=X(u,v)\exp\left(-2i\pi\left(ut_x+vt_y\right)\right)$$

- Que représente le terme en exponentielle ?

(f) En vous appuyant sur les questions précédentes, montrer que :

$$F^{-1}\left(\frac{Y(u,v)}{X(u,v)}\right)=\delta(\alpha-tx,\beta-ty)$$

A partir de cette relation, que pouvez vous en conclure quant à l'estimation de la translation entre les deux images ?

Matlab

On considère le fichier ImageTranslate.mat qui contient une image I et sa translatée J. Proposer un script nommé **EX1** permettant de répondre à ces questions

1) Afficher ses deux images avec leurs spectres d'amplitudes respectives (spectre centrée au milieu de l'image).
2) A partir de la question (f), proposer un algorithme permettant de déterminer la translation (tx,ty) appliquée sur I.

Ex 2 : Filtrage directionnel (5 points)

Considérons le banc de filtres suivants :

$$\begin{array}{cccc}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\uparrow \text{N} & \nwarrow \text{NW} & \leftarrow \text{W} & \swarrow \text{SW} \\
\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
\downarrow \text{S} & \searrow \text{SE} & \rightarrow \text{E} & \nearrow \text{NE}
\end{array}$$

Ces masques calculent les dérivées suivant les directions: N, NW, W, SW, S, SE, E et NE. Elles forment entre elles un angle de 4 .

1) En considérant que la direction E est la direction de référence et que l'on tourne dans la direction anti-horaire, donnez pour chaque direction sa valeur d'angle correspondante.
2) Appelons $g_k=I*h_k$, l'image résultat de la convolution de l'image I avec le filtre h_k , alors le gradient g(x,y) de l'image I est obtenu en calculant l'expression suivante :

$$\boxed{g(x,y) = \max_k |g_k(x,y)|}$$

L'expression précédente indique que le gradient g(x,y) de l'image I est obtenu en prenant en chaque couple (x,y) la valeur maximale des produits de convolution obtenus avec les masques hk.

Matlab

Proposer un programme calculant le gradient de l'image 'eight.tif' à partir de ces huit masques. Donner en chaque pixel (x,y) l'orientation correspondante et afficher l'image des orientations du gradient ainsi obtenue.

Ex3 : Un peu plus de clareté (5 points)

On considère le fichier parking.jpeg contenant l'image I suivante (fig. 1) :

fig.1

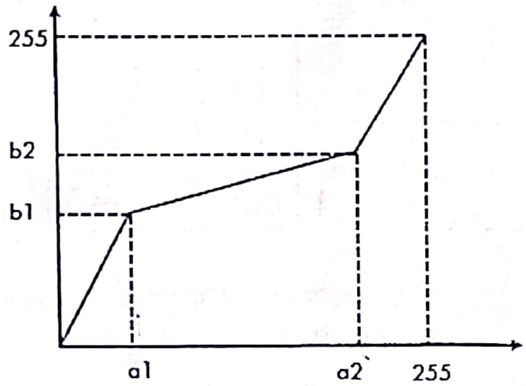

fig. 2

1) Afficher l'image I et son histogramme. Que constatez-vous ?
2) On souhaite faire ressortir le premier plan de l'image. Pour cela on considère une transformation linéaire par morceaux comme définie en figure 2. La courbe rouge illustre la transformation appliquée aux niveaux de gris de l'image I et est définie par les paramètres a1 ,a2, b1 et b2.

Donnez dans chaque intervalle, l'expression de la transformation mathématique entre I et J.

Matlab

Faire une fonction matlab de cette transformation. Définissez les paramètres d'entrée et de sortie

Appliquer cette transformation sur l'image « **parking.jpeg** » **en respectant les contraintes suivantes :**

- Entre [0,a1], augmentation de l'intensité
- Entre [a1,a2], augmentation de l'intensité
- Entre [a2,255], diminution de l'intensité

Proposer un couple (a1,a2) de manière à faire ressortir le premier plan.

definit TF Exam : Question de cours

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t}\, dt$$

A- Montrer la transformée TF du signal $x(t-t_0) \rightleftarrows X(f) e^{-j2\pi f t_0}$

$$x(t-t_0) = X(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

on a

$$TF(t-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) e^{-j2\pi f t}\, dt$$

Posons $u = t - t_0 \Rightarrow t = u + t_0$ et $du = dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi f (u+t_0)}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi f u}\, e^{-j2\pi f t_0}\, du$$

$$= e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi f u}\, du$$

$$= X(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

B- Donnons l'expression de la transformé F de la fonct Porte

$$rect(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-T/2, T/2] \\ 0 & \end{cases}$$

$$TF(rect(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} rect(t) e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$= \frac{1}{-j2\pi f t} \left[e^{-j2\pi f t} \right]_{-T/2}^{T/2}$$

$$= \frac{1}{-j2\pi f} \left[e^{-j\pi f t} - e^{j\pi f t} \right]$$

$$= \frac{e^{j\pi f t} - e^{-j\pi f t}}{j2\pi f} \Rightarrow \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = T \operatorname{sinc}(\pi f T)$$

C- La fonction de dirac est defini par : $\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ +\infty & \text{pr } t = 0 \end{cases}$

Et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$

- La fonction de dirac est paire ou impaire ⑤

on a $\begin{cases} \text{si } t=0 & \delta(t)=\delta(-t)=+\infty \\ \text{si } t\neq 0 & \delta(t)=\delta(-t)=0 \end{cases}$

donc la fonction dirac est paire

- Comment peut s'exprime la fonct dirac à partir de la fonct Porte

on a $rect_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-T/2, T/2] \\ 0 & \sim \end{cases}$

donc $\frac{1}{T} rect_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{si } t \in [-T/2, T/2] \\ 0 & \sim \end{cases}$

alors $\delta(t) = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T} rect_T(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t=0 \\ 0 & \sim \end{cases}$

- Montrons que la transformée de Fourier d'un dirac vaut 1

$\delta(t) \Rightarrow 1 \; \forall f$

on a $TF(rect_T(t)) = T\,\text{sinc}(\pi f t)$

donc $\frac{1}{T} TF(rect_T(t)) = \text{sinc}(\pi f t)$

$TF(\delta(t)) = \lim_{T \to 0} \text{sinc}(\pi f t) = 1 \; \forall f$

La Propriété de la dualité

$X(t) = X(f)$

$X(t) \rightleftharpoons X(-f)$

on a; $\begin{cases} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \\ X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \end{cases}$

$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{j2\pi f t} df$

4- Montrons la relation SUL ds le domaine fréquentiel

$$Y(u,v) = X(u,v)\exp(-2i\pi(ut_x + vt_y))$$

on a

$$X(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha,\beta)\exp(-2\pi i(u\alpha + v\beta))\,d\alpha\,d\beta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha - t_x, \beta - t_y)\exp(-2\pi i(\alpha u + \beta v))\,d\alpha\,d\beta$$

posons $\begin{cases} m = \alpha - t_x \\ n = \beta - t_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = m + t_x \\ \beta = n + t_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\alpha = dm \\ d\beta = dn \end{cases}$

$$Y(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(m,n)\exp(-2\pi i(u(m+t_x) + v(n+t_y)))\,dm\,dn$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(m,n)\exp(-2\pi i(um + ut_x + vn + vt_y))\,dm\,dn$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\pi i(ut_x + vt_y))\exp(-2\pi i(um + vn))\,dm\,dn$$

$$= \exp(-2\pi i(ut_x + vt_y))\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(m,n)\exp(-2\pi i(um + vn))\,dm\,dn$$

$$Y(u,v) = X(u,v)\exp(-2\pi i(ut_x + vt_y))$$

6- Montrer que

$$F^{-1}\left(\frac{Y(u,v)}{X(u,v)}\right) = F^{-1}(\exp(-2\pi i(ut_x + \beta t_y)))$$

et $TF\{\exp(i2\pi f_0 t)\} = \delta(f - f_0)$

$$\Rightarrow \exp(i2\pi(\alpha t_x + \beta t_y)) \Rightarrow \delta(u - t_x, v - t_y)$$

d'après la dualité on a :

$$\delta(\alpha - t_x, \beta - t_y) \Rightarrow \exp(-i2\pi(t_x u + t_y v))$$

donc $F^{-1}\left(\frac{Y(u,v)}{X(u,v)}\right) = \delta(\alpha - t_x, \beta - t_y)$

d'après cette relat les valeurs de t_y et t_x peuvent être estimer en calculant la transformée inverse, c-à-d la Position où la fonct° Dirac ne s'annule pas, les coordonnées correspond à t_x t_y.

Université du Littoral	Franck Dufrenois MISC 1
Vision	Examen de rattrapage : 2h

A) Question de cours

a) Quels sont les 3 principaux types de filtrage?

b) Donnez l'expression de la convolution 2D numérique de l'image I par un filtre h sur un voisinage carré de taille M (M impaire) ?

c) Rappeler la formule de la fonction gaussienne 2D centrée en (0,0) et d'écart type σ.

d) Rappelez le théorème de Plancherel.

e) Donnez un exemple d'application de ce théorème fondamental en traitement des images

B) Exercice

On se donne l'image suivante :

$$g_{mn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Et considérons les filtres suivants :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Quel est le nom de ces filtres et quel est leur rôle.

b) Pour réaliser la convolution de cette image par les filtres ci-dessus, quelle est la taille du bord artificiel a rajouter à l'image.

c) En considérant un bord artificiel rempli de zeros, calculer les images obtenues en appliquant ces filtres sur l'image gmn.

c) Calculer l'image correspondant au module du gradient de l'image gmn (vous rappelerez sa définition)

T.S.V.P

d) déterminer le seuil pour faire apparaitre les contours du rectangle de l'image gmn.

C) **Exercice 3**

Soit l'image suivante :

12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12	9	9	2	2	2	2	9	9	12
12	9	2	7	7	7	7	2	9	12
12	2	7	4	4	4	4	7	2	12
12	2	7	2	4	4	2	7	2	12
12	2	7	4	4	4	4	7	2	12
12	2	7	2	4	4	2	7	2	12
12	2	7	4	2	2	4	7	2	12
12	9	2	7	7	7	7	2	9	12
12	9	9	2	2	2	2	9	9	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12

1) Quelle est la taille de cette image ?
2) Quelle est la fonction matlab permettant de l'obtenir.
3) Sur combien de bits est t'elle codée ?
4) Donnez la valeur du contraste C de cette image. Rappel : le contraste est une valeur positive définie comme la différence entre le niveau de gris maximal et le niveau gris minimal divisé par la somme de ces deux valeurs. Dans quel intervalle est défini C ?
5) Sous forme d'un tableau, donner les valeurs de l'histogramme et de l'histogramme cumulé ?
6) Binariser l'image I de façon à séparer l'emoji (visage souriant) du fond ? donner la valeur de seuil S et représenter l'image binaire Ib
7) Un bruit est ajouté à l'image I tel que: I(2,2)=0, I(10,10)=15, I(8,4)=0, I(6,9)=15 a) Quel est le type de ce bruit?
8) Appliquer un filtre moyenneur et un filtre médian de taille 3x3 sur les pixels I(2,2), I(10,10), I(8,4) et I(6,9)=15. Donnez les nouvelles valeurs obtenues en ces points.
9) Quel filtre est le plus adapté ? Justifier?