

Préparation : Propriétés de la transformée de Fourier

Considérons un signal bidimensionnel $f(x,y)$ et sa transformée de Fourier $F(u,v)$, démontrer les propriétés suivantes :

- La translation $x-x_0$ et $y-y_0$ du signal se traduit par un déphasage linéaire de sa transformée :

$$G(u,v) = F(u,v)e^{-j(u x_0 + v y_0)}$$

- La dilatation (kx,ky) suivant les deux directions du signal se traduit par une contraction dans le plan des fréquences :

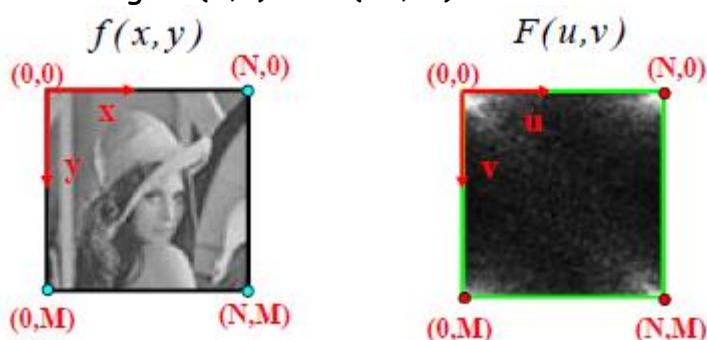
$$G(u,v) = \frac{1}{kxky} F\left(\frac{u}{kx}, \frac{v}{ky}\right)$$

- La rotation du signal se traduit par une rotation identique dans le plan des fréquences
- La transformée d'un signal incliné $g(x,y)=f(x-my,y)$ par rapport à l'axe vertical subit une inclinaison identique mais par rapport à l'axe horizontal.
- On sait que :

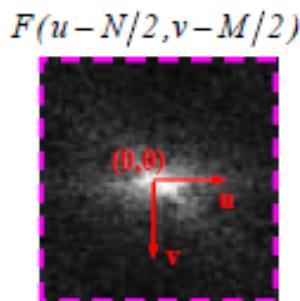
$$\mathfrak{F}[f(x-a)] = e^{-j2\pi u a} F(u)$$

$$\mathfrak{F}^{-1}[F(u-a)] = e^{j2\pi u a} f(x)$$

Puisque le centre géométrique $(0,0)$ d'une image est [presque] toujours centré sur le pixel supérieur gauche, alors l'origine $(0,0)$ de $F(u,v)$ est aussi centrée en haut à gauche.



Pour ramener l'origine de au centre de l'image, il faut translater par $(N/2, M/2)$. C'est ce qu'on appelle un **recalage cyclique**.



- Montrer que ce recentrage fréquentiel revient à multiplier $f(x,y)$ par $(-1)^{(x+y)}$.

Applications - Matlab

- **TFD 2D**
 1. Calculer les FFT des images « eight.tif » et « cameraman.tif ». Afficher les résultats en translatant les basses fréquences au centre de l'image
 2. Modifier la valeur des images transformées en annulant la phase de leurs coefficients.
 3. Même question, en donnant le même module à tous les coefficients.
 4. Créer une image à partir de la phase de mit et du module de cameraman
 5. Quelles conclusions tirées vous de ces diverses manipulations ?
- **Manipulation dans le domaine des fréquences :**
Ecrire deux versions des fonctions suivantes, l'une travaillant dans le domaine spatial et l'autre dans le domaine des fréquences.
 1. Moyenne(I) qui renvoie la valeur moyenne de l'image.
 2. Symcentre(I) qui retourne la transformée de I par une symétrie centrale en son centre.
 3. Contraste(I,alpha) qui manipule le contraste de l'image en multipliant par alpha les coefficients des fréquences non nulles mais conserve la composante continue de l'image
 4. Translation(dx,dy) qui opère une translation circulaire de l'image par un vecteur (dx,dy).