
Bases du traitement des images

► Histogramme d'une image ◀

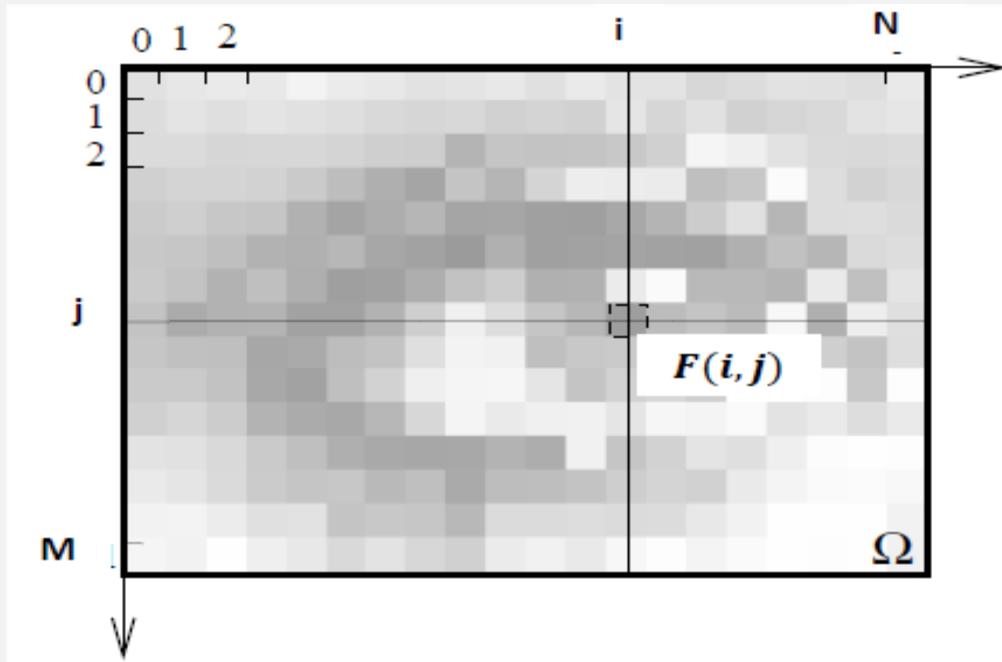
Dufrenoix Franck
LISIC

Université du littoral

Traitement des images

L'image numérique: tableau 2D

$$(i, j) \in (0, \dots, N - 1) \times (0, \dots, M - 1) , f(i, j) = k \quad k \in (0, \dots, 255)$$



Histogramme d'une image

introduction

- L'histogramme d'une image mesure la distribution des niveaux de gris dans l'image.
- Pour un niveau de gris x , l'histogramme permet de connaître la probabilité de tomber sur un pixel de valeur x en tirant un pixel au hasard dans l'image.
- Concrètement, l'histogramme d'une image à valeurs entières est construit de la manière suivante: pour chaque niveau de gris x , on compte le nombre de pixels ayant la valeur x .

Histogramme d'une image

Que disent les Math?

À chaque image f de taille $N \times M$, on peut associer le nombre H d'apparition des valeurs contenues dans cette image par :

$$h(k) = \text{Card}\{0 \leq i \leq N - 1, 0 \leq j \leq M - 1 : f(i,j) = k\} = n_k$$

- En divisant chaque valeur de l'histogramme par le nombre total de pixels dans l'image on obtient un *histogramme normalisé*.

$$h_n(k) = \frac{h(k)}{N \times M} \quad k=0,1,\dots,255 \text{ (support)}$$

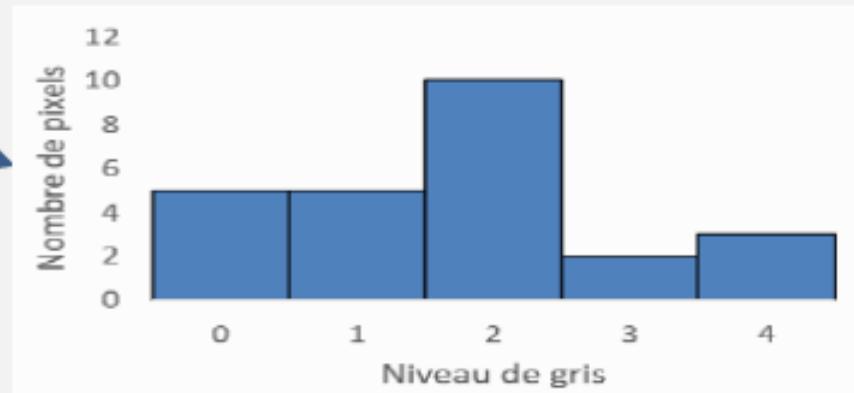
Histogramme d'une image

Et si on illustrait tout ça?

0	1	2	2	3
0	1	2	2	3
0	1	2	2	4
0	1	2	2	4
0	1	2	2	4



Valeur de niveau de gris	0	1	2	3	4
Nombre de pixels	5	5	10	2	3



min

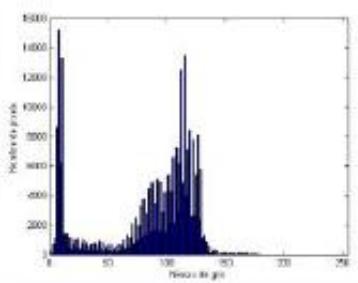
max

Histogramme d'une image

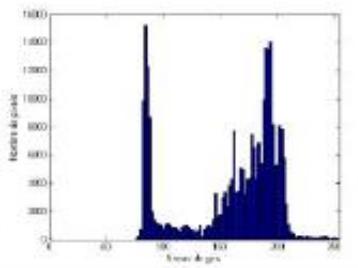
Quel intérêt?

- Information générale sur la qualité de l'image!

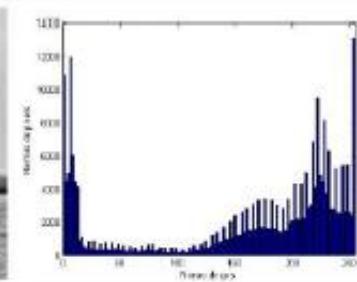
- l'histogramme est tassé sur la gauche;
l'image est trop sombre :



- l'histogramme est tassé au centre;
l'image est grisâtre et manque de contraste

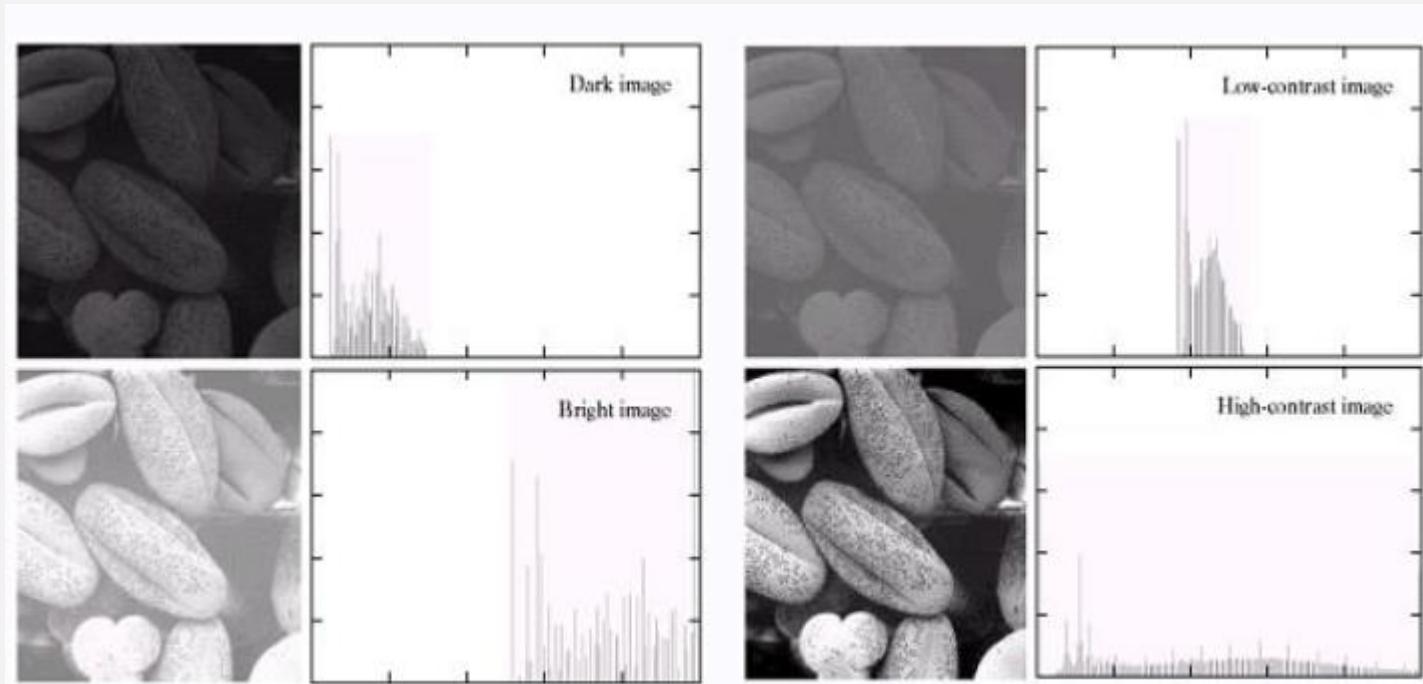


- l'histogramme est trop creusé au centre; les noirs sont trop noirs, les blancs trop blancs (on dit que l'image est saturée) :



Histogramme d'une image

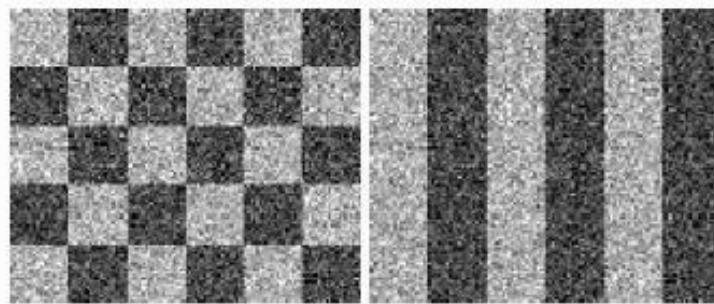
Utilisation de toute la dynamique?



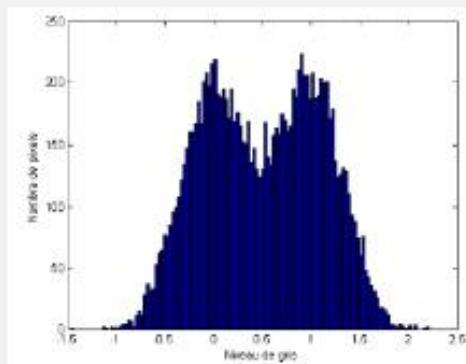
Histogramme d'une image

Ne code pas l'information spatiale!

L'histogramme ne contient aucune information spatiale et des images très différentes peuvent avoir des histogrammes similaires. Par exemple les deux images ci-dessous :



ont le même histogramme:



Histogramme cumulé

Introduction

- la notion d'*histogramme cumulé* qui mesure la distribution cumulée des niveaux de gris dans une image.
- Pour un niveau de gris x , l'histogramme cumulé permet de connaître la probabilité de tomber sur un pixel de valeur inférieure ou égale à x en tirant un pixel au hasard dans l'image.

L'**histogramme cumulé**

$$H(k) = \sum_{i \leq k} h(i)$$

L'**histogramme cumulé normalisé**

$$H_n(k) = \sum_{i \leq k^-} h_n(i)$$

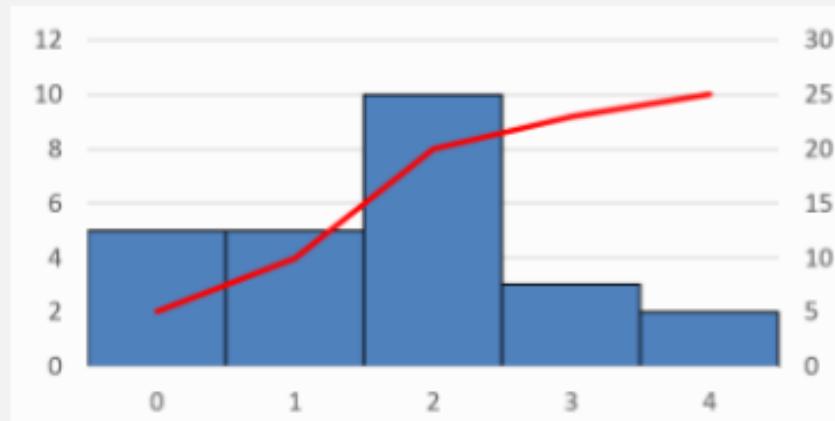
L'histogramme cumulé se calcule donc simplement à partir de l'histogramme.

Histogramme d'une image

Une illustration

0	1	2	2	3
0	1	2	2	3
0	1	2	2	4
0	1	2	2	4
0	1	2	2	4

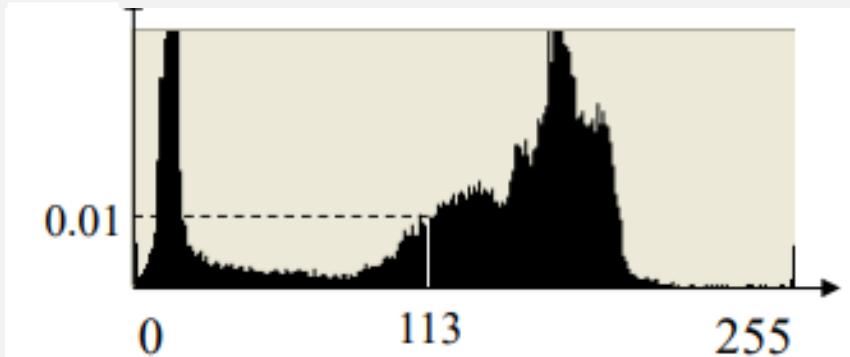
Valeur de niveau de gris	0	1	2	3	4
Nombre de pixels	5	5	10	2	3
Histogramme cumulé	5	10	20	22	25



Histogramme d'une image

Notion de probabilité discrète...

- L'image de taille N^2 est construite par N^2 tirages d'une variable aléatoire k prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, \dots, 255\}$ où chaque valeur à une probabilité d'occurrence $h_n(k)$.
 - $h_n(k)$ peut être considérée comme une **densité de probabilité discrète** et $H_n(k)$ sa **fonction de répartition discrète**
- a) $h_n(k)$ vérifie : $\sum_{k=0}^{255} h_n(k) = 1$
 - b) Moyenne de l'image I : $m = \sum_{k=0}^{255} k h_n(k)$
 - c) Variance de l'image I : $v = \sum_{k=0}^{255} (k - m)^2 h_n(k)$



Si je tire un pixel au hasard dans l'image, j'ai 1% de chance qu'il soit d'intensité 113.

Histogramme d'une image

Du discret au continu

- On passe de $h_n(k)$ à $h(r)$ avec $r \in [0,1]$
- si $h(r)$ est une densité alors on a
 - a) Fermeture: $\int_0^1 h(r)dr = 1$
 - b) sa fonction de répartition $H(r) = \int_0^r h(u)du$
 - c) Moyenne: $\bar{r} = \int_0^1 rh(r)dr$
 - d) Variance: $\sigma^2 = \int_0^1 (r - \bar{r})^2 h(r)dr$

Histogramme d'une image

Que dit Matlab?

```
-- Matlab --
clear all
close all
clc

I=imread('eight.tif');           %lecture de l'image

[h,H]=HistoImage(I,0:255);      %Calcul de l'histogramme
                                  %Calcul de l'histogramme cumulé

ShowImage(I,1,'title','pieces');

ShowHisto(h,2,'title', 'histo normalisée');
ShowHisto(H,3,'title', 'histo cumulée normalisée');
```

Opérations sur les histogrammes

Calcul de l'aire d'une courbe

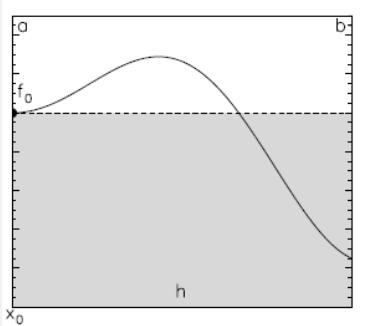
$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Trouver une approximation de I la plus précise

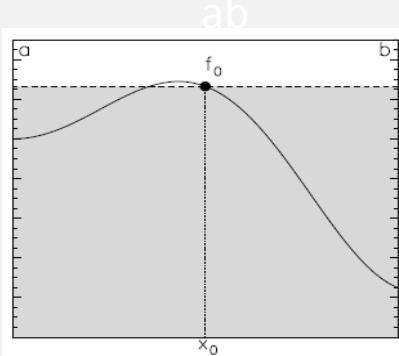
$$\tilde{I} = \int_a^b P(x)dx$$

P(x) un polynôme approximant $f(x)$ en quelques points

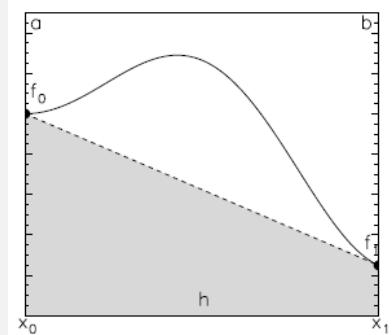
« rectangles »



« point milieu »



« trapèzes »



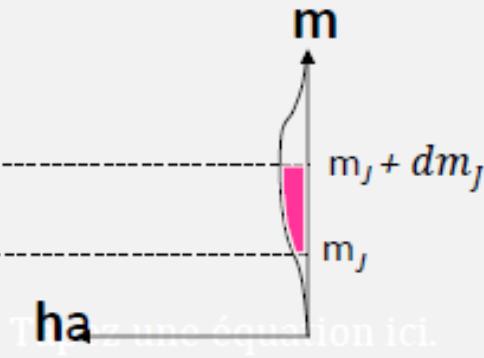
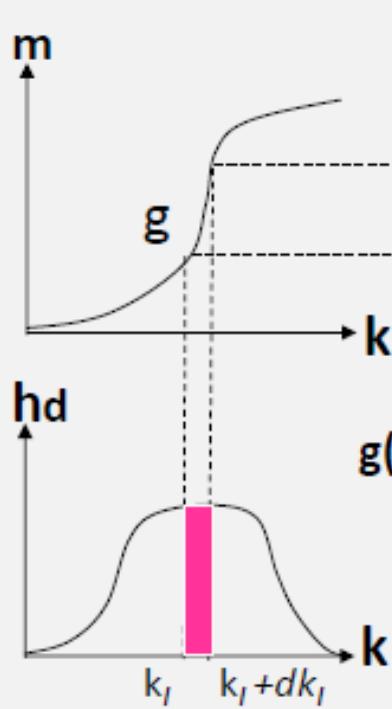
$$\tilde{I}_0 = (b - a)f_0 = f(a)$$

$$\tilde{I}_{0'} = (b - a)f_0 = f\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

$$\tilde{I}_1 = (b - a)\frac{f_0 + f_1}{2}$$

Opérations sur les histogrammes

Appliquer une transformation g



$g(k)$ strictement croissante \Rightarrow Egalité des surfaces

$$h_d(k_i)dk_i = h_a(m_j)dm_j$$

$$h_a(m_j) = \frac{h_d(k_i)}{\frac{dm_j}{dk_i}}$$

Opérations sur les histogrammes

Appliquer une transformation g

$$h_a(m_j) = \frac{h_d(k_i)}{|g'(k_i)|}$$

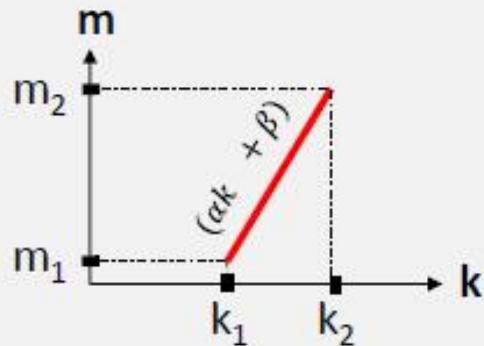
avec $k_i = g^{-1}(m_j)$

g' devient négatif si g décroissante \rightarrow on rajoute la valeur absolue

Exemple ...

Opérations sur les histogrammes

Etirement d'image



$$\alpha = \dots$$

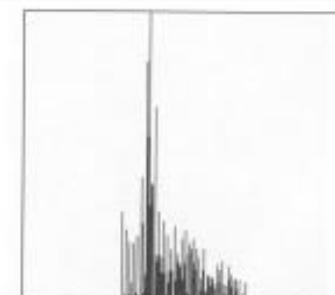
$$\beta = \dots$$



a. Low-contrast image.



c. Image after histogram stretching.



b. Histogram of low-contrast image.



d. Histogram of image after stretching.



Recadrage sur toute la dynamique: $m_1=0$ et $m_2=255$

Opérations sur les histogrammes

Illustration

```
load bureau
```

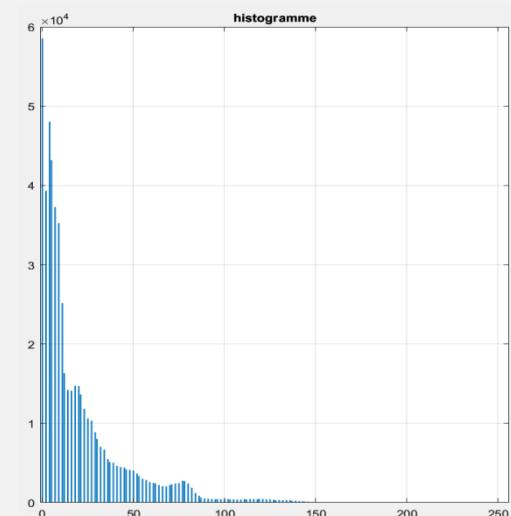
```
[hl,~]=histolImage(l,0:255);
```

```
ShowImage(l,1);  
ShowHisto(hl,2);
```

```
%étirement
```

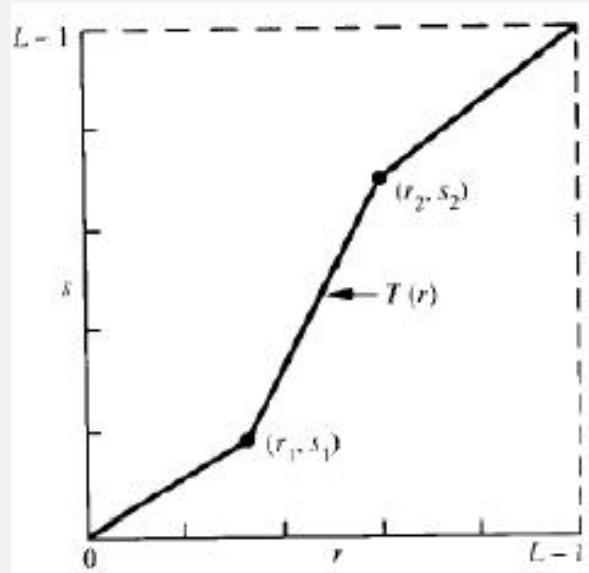
```
J=AdjustImage(l);  
[hJ,~]=histolImage(J,0:255);
```

```
ShowImage(J,1);  
ShowHisto(hJ,2);
```



Opérations sur les histogrammes

Etirement localisé



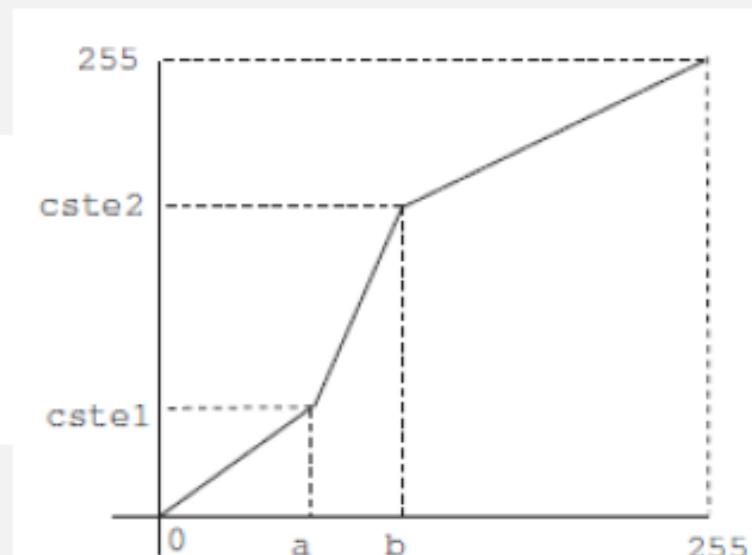
$r1 = 20, r2 = 100, s1 = 20, s2 = 180$



Opérations sur les histogrammes

Etirement localisé

$$v = \begin{cases} \alpha u & 0 \leq u \leq a \\ \beta(u - a) + cste_1 & a \leq u \leq b \\ \gamma(u - b) + cste_2 & b \leq u \leq 255 \end{cases}$$

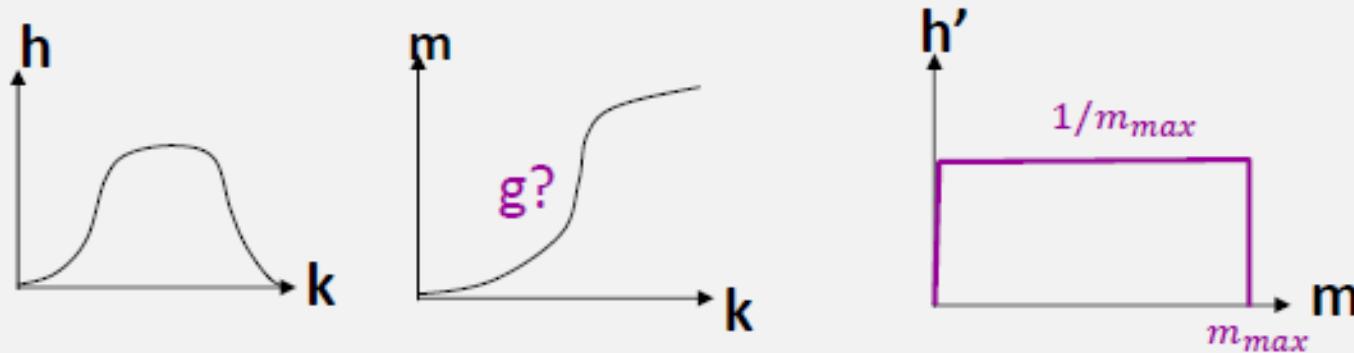


Opérations sur les histogrammes

Egalisation

Cette technique donne à la fois la meilleure dynamique possible et un fort contraste.

L'idée est d'obtenir un histogramme de sortie le plus plat possible à l'aide d'une fonction de transfert correctement choisie



$$h'(m) = \frac{h(k)}{|g'(k)|} = 1/m_{max}$$

$$g'(k) = m_{max}h(k) \rightarrow g(k) = m_{max} \int_0^k h(l)dl \rightarrow g(k) = m_{max}H_n(k)$$

Opérations sur les histogrammes

Illustration

```
load bureau
```

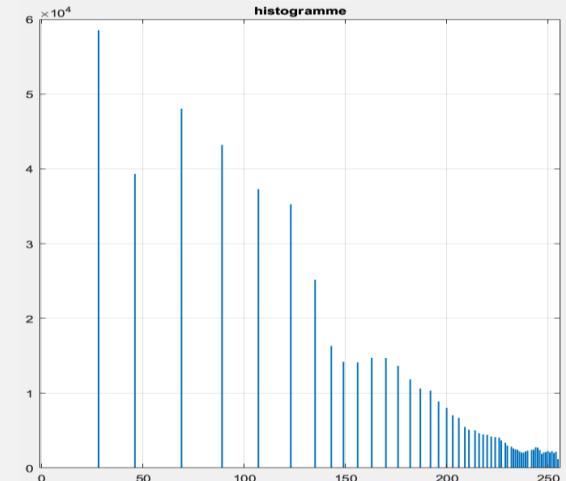
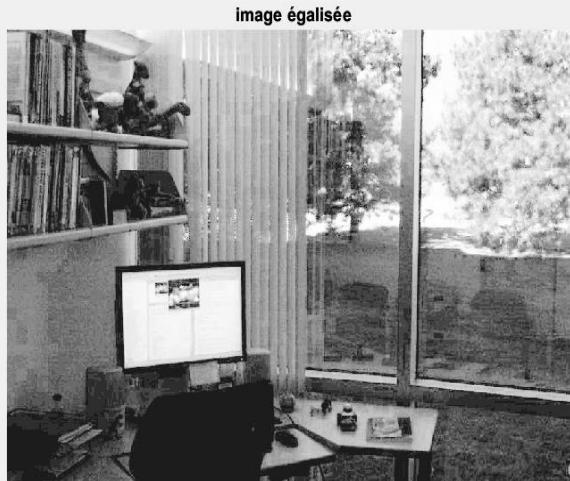
```
[hl,~]=histolImage(l,0:255);
```

```
ShowImage(l,1);  
ShowHisto(hl,2);
```

%égalisation

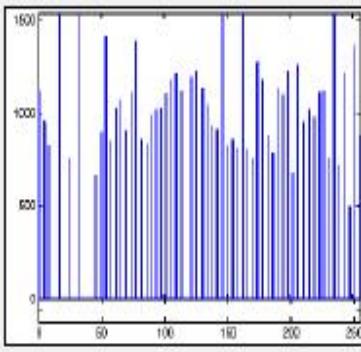
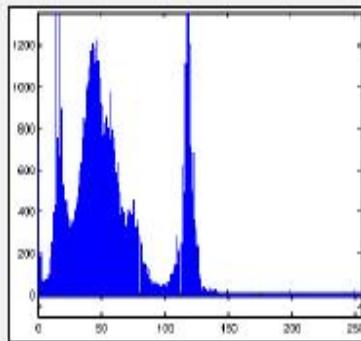
```
J=EgallImage(l);  
[hJ,~]=histolImage(J,0:255);
```

```
ShowImage(J,1);  
ShowHisto(hJ,2);
```



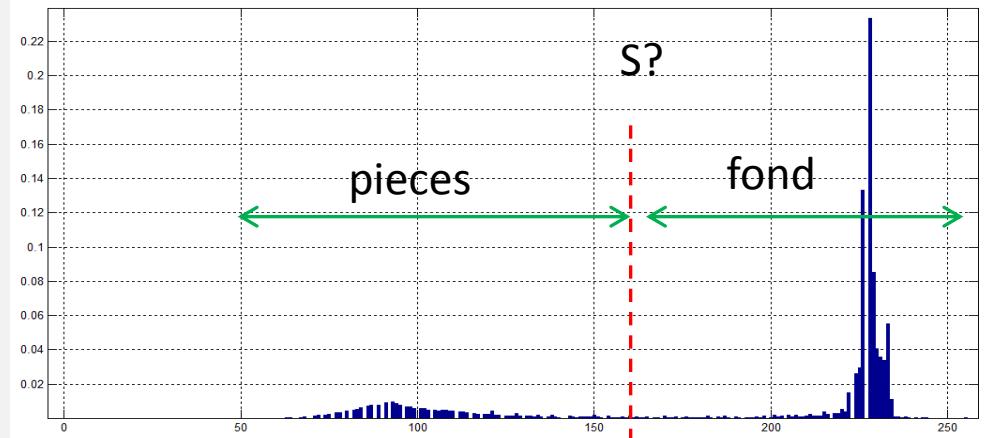
Opérations sur les histogrammes

Illustration



Opérations sur les histogrammes

Binarisation (seuillage)

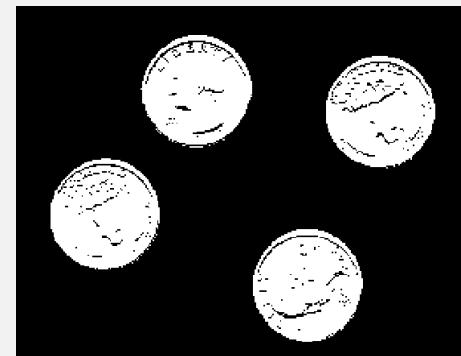


$S=150$

Le seuillage binaire est défini par :

$$k' = \begin{cases} k_1 & \text{si } k \leq S \\ k_2 & \text{si } k > S \end{cases}$$

où k_1 , k_2 et S (seuil) sont des niveaux de gris



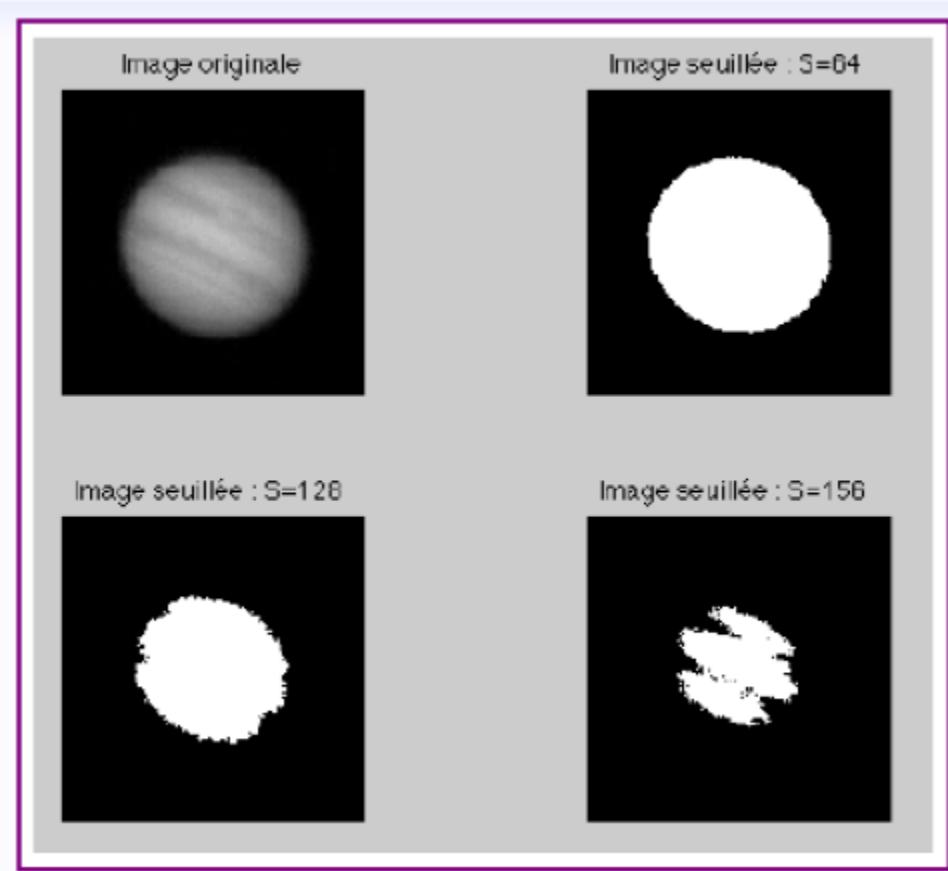
Opérations sur les histogrammes

Matlab

```
clear all  
close all  
clc  
  
I=imread("eight.tif");  
[h,H]=HistolImage(I,0:255);  
  
ShowImage(I,1); %afficher l'image l figure 1  
ShowHisto(h,2); %afficher son histogramme  
ShowImage(I<seuil,3); %afficher l'image seuillée
```

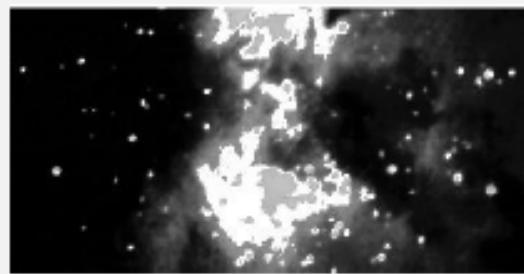
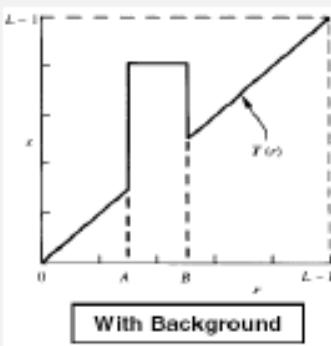
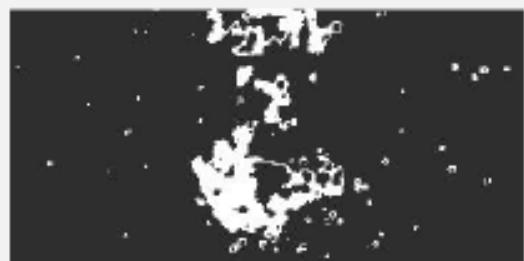
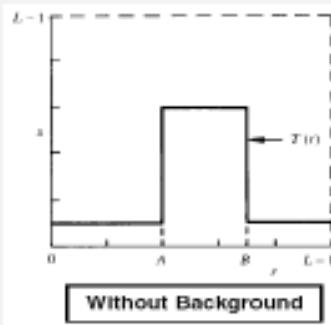
Opérations sur les histogrammes

Binarisation (seuillage)



Opérations sur les histogrammes

Binarisation avec ou sans fond



Opérations sur les histogrammes

Matlab

```
Clear all;close all;clc;
```

```
load galaxies
```

```
h=HistolImage(I,0:255);
```

```
ShowImage(I,1)
```

```
ShowHisto(h,2)
```

```
%seuillage
```

```
A=(I>100)&(I<150);  
B=(I>100)&(I<200);
```

```
figure(2)
```

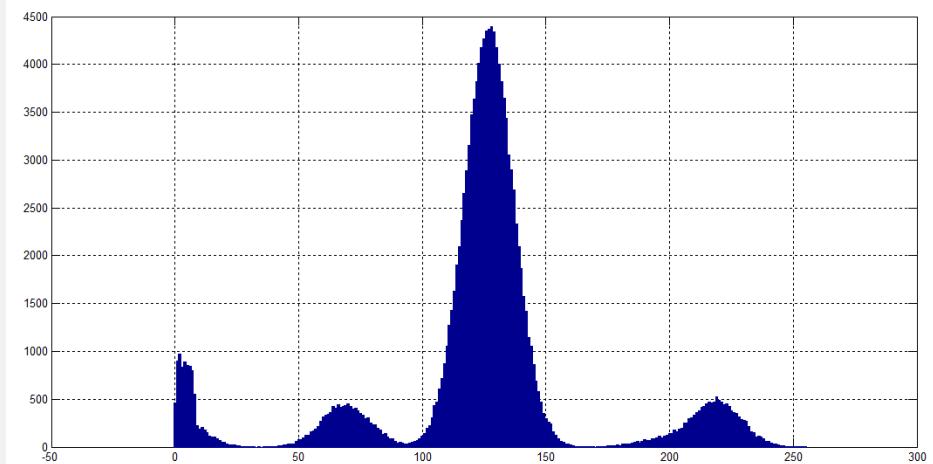
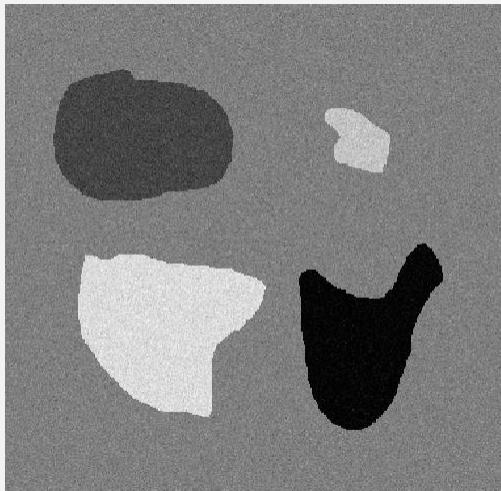
ab

```
subplot(1,2,1)  
imshow(A)  
subplot(1,2,2)  
imshow(B)
```



Opérations sur les histogrammes

Plusieurs seuils?



Comment séparer toutes les structures images?

Opérations sur les histogrammes

Et après la binarisation?

- **Objectif:** extraire les formes (comptage, calcul de surface,...)
- **Problème:** La binarisation n'est pas parfaite:
 - existence de « trous » dans les formes
 - Pixels isolés (bruits)
 - Petits groupes de pixels
- **Question:** comment éliminer ces artefacts?

Opérations sur les histogrammes

Exemple?

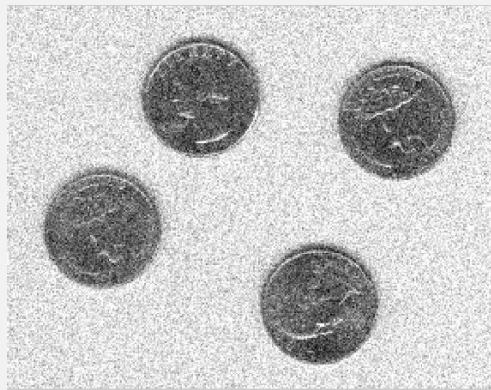
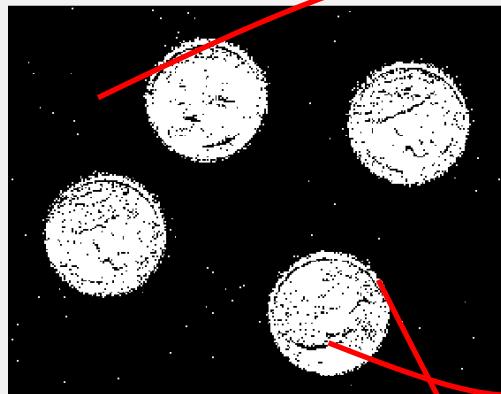
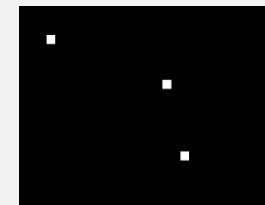


Image de mauvaise qualité
(bruit important)



Binarisation ($S=150$)



Pixels isolés (bruits)



Trous dans la pièce:
choix du seuil?



Contour mal défini

Objectif: nettoyer l'image binaire

Opérateurs morphologiques!

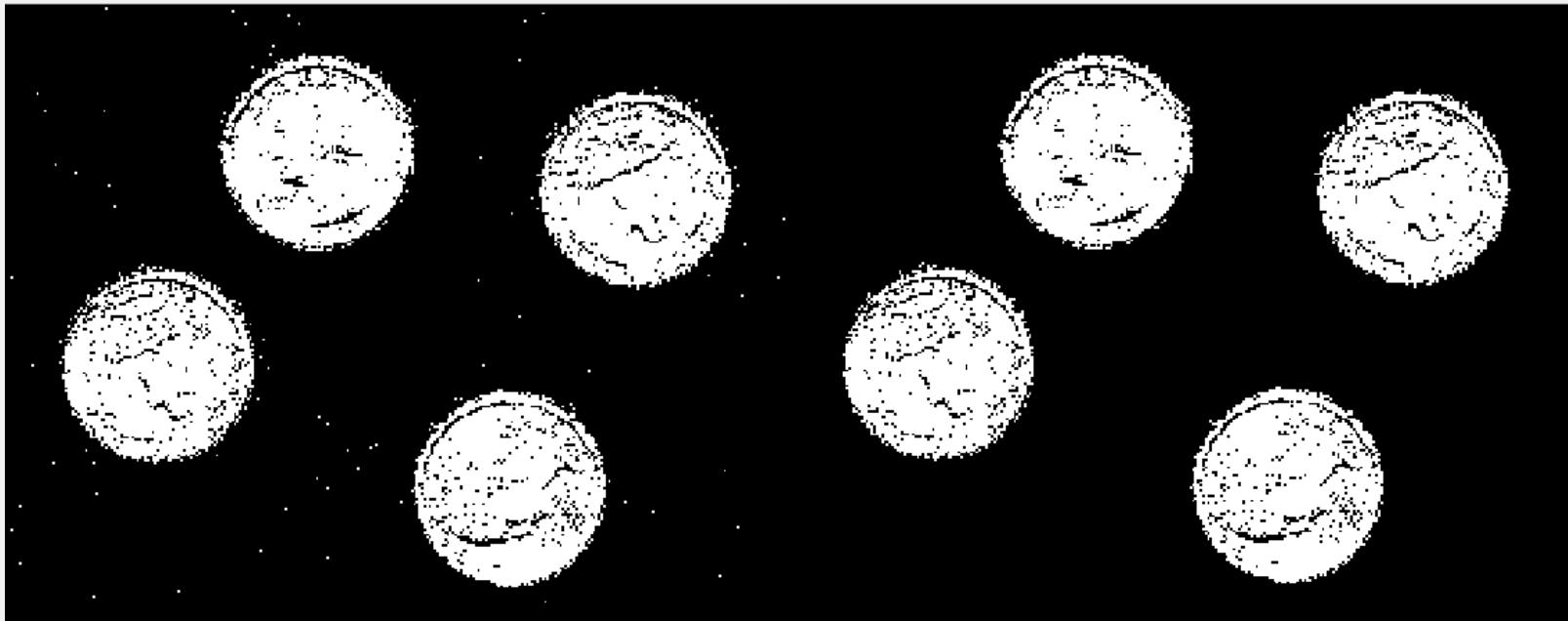
Opérations sur les histogrammes

La fonction bwmorph sous matlab?

J = bwmorph(I,operation) : réalise une opération morphologique sur l'image I (binaire): passage d'un masque de taille 3

1) Éliminer les pixels isolés: **J1= bwmorph(I,'clean')**

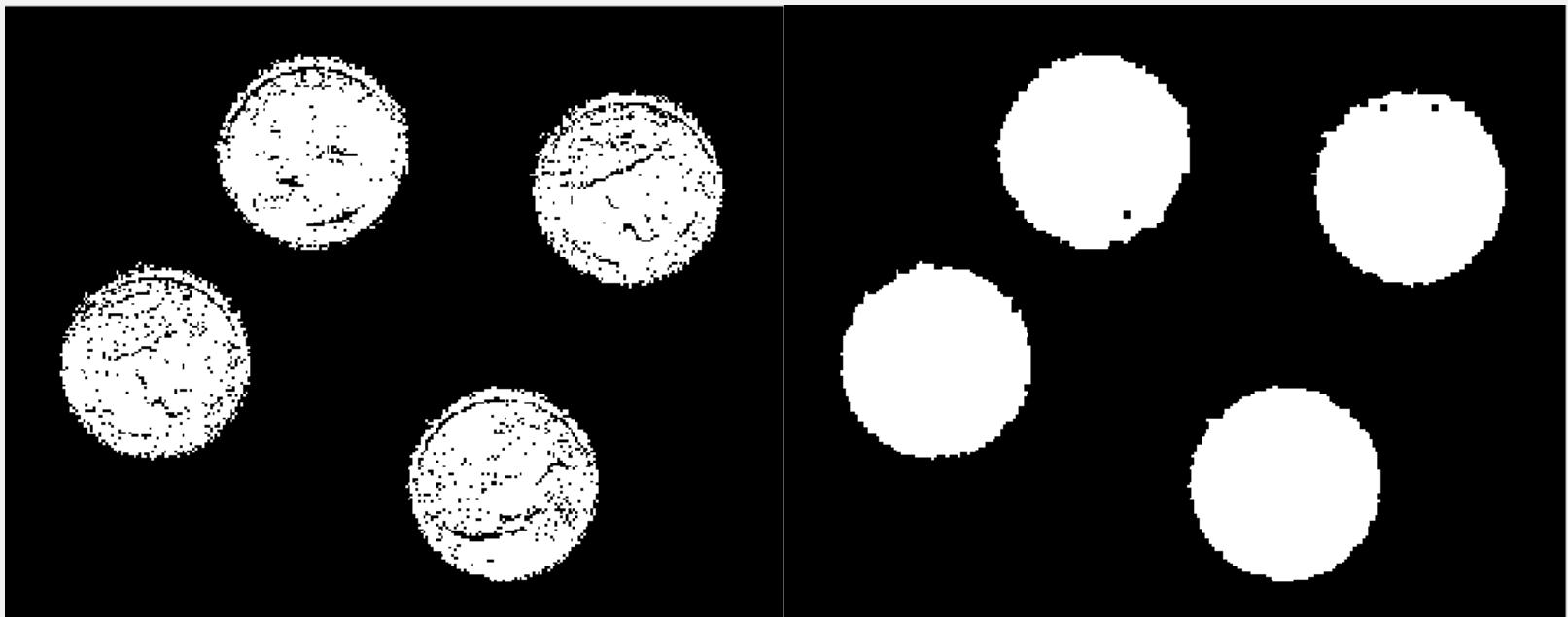
$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$



Opérations sur les histogrammes

La fonction bwmorph sous matlab?

2) Fermeture: dilatation suivi d'une erosion $J2 = \text{bwmorph}(J1, 'close')$

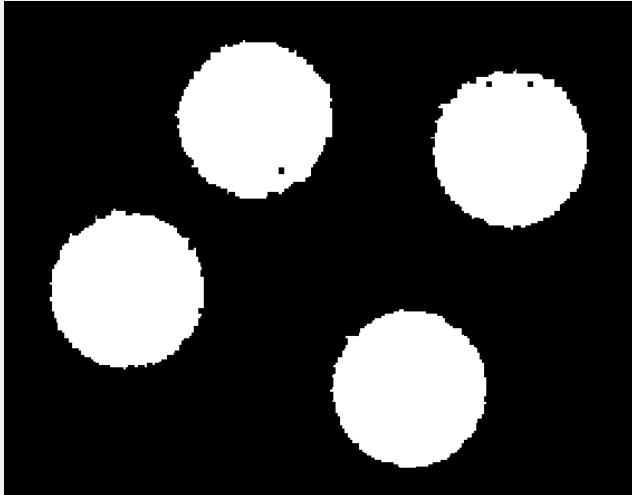


Opérations sur les histogrammes

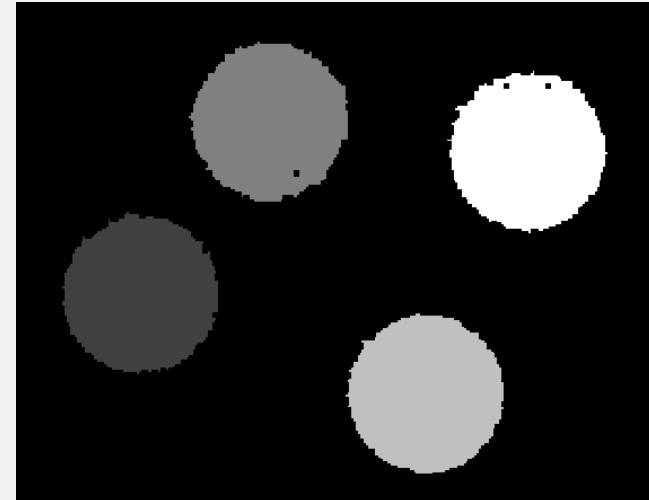
Combien de pieces?

2) La fonction **bwlabel**: cette fonction permet de réaliser un étiquetage des pixels qui appartiennent au même groupement (pixels connectés). Elle retourne une matrice de même taille que l'image ou chaque pixel à une étiquette

A=bwlabel(J2);



J2



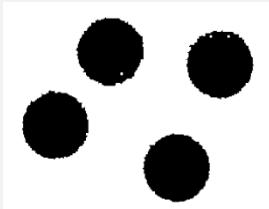
A

Opérations sur les histogrammes

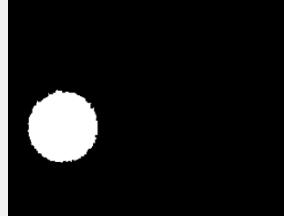
Maintenant on compte?

2) On isole chaque groupe étiqueté

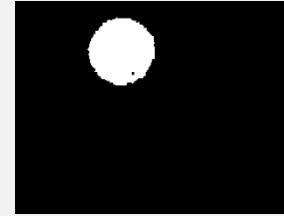
- Détermination du nombre de groupements:
unique(A) → 0 1 2 3 4
- Comptage : **sum**



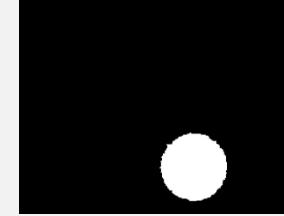
```
imshow(A==0)  
sum(A(:)==0) → 56853
```



```
imshow(A==1)  
sum(A(:)==1) → 4424
```



```
imshow(A==2)  
sum(A(:)==1) → 4402
```

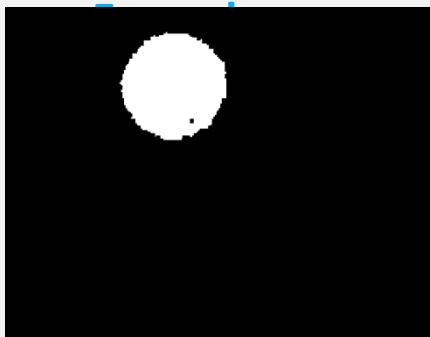


```
imshow(A==3)  
sum(A(:)==1) → 4430
```

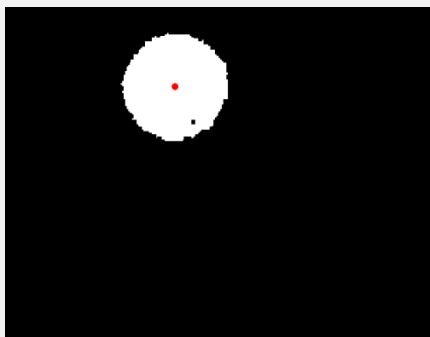
Opérations sur les histogrammes

Fenêtre englobante?

- **Calcul du centre de la fenêtre:** mean



`imshow(A==2)`

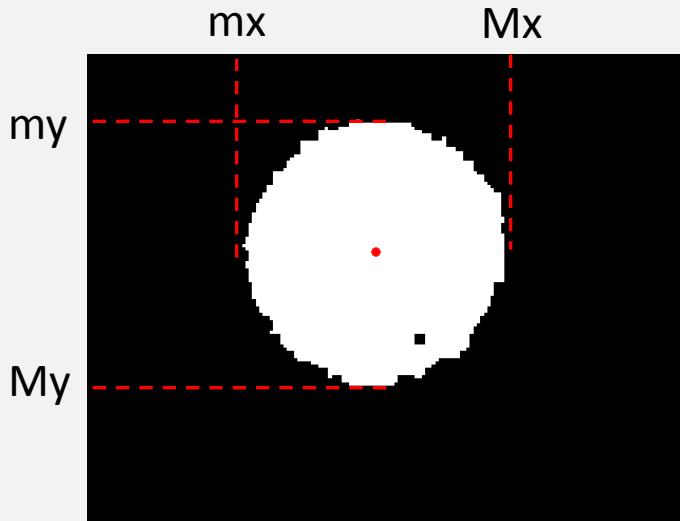


- 1) On sélectionne un groupement de pixels: 2ieme pièce >> `A2=(A==2)` ;
- 2) Détermination des coordonnées des pixels ==1 dans A2 >> `[y,x]=find(A2==1)` ;
- 3) Détermination du centre
`>> cy=mean(y);`
`>> cx=mean(x);`
- 4) Afficher le centre (vérification)
`>> plot(cy,cx,'or')`

Opérations sur les histogrammes

Fenêtre englobante?

- **Calcul de la taille de la fenêtre:** min et max
- **Exemple**



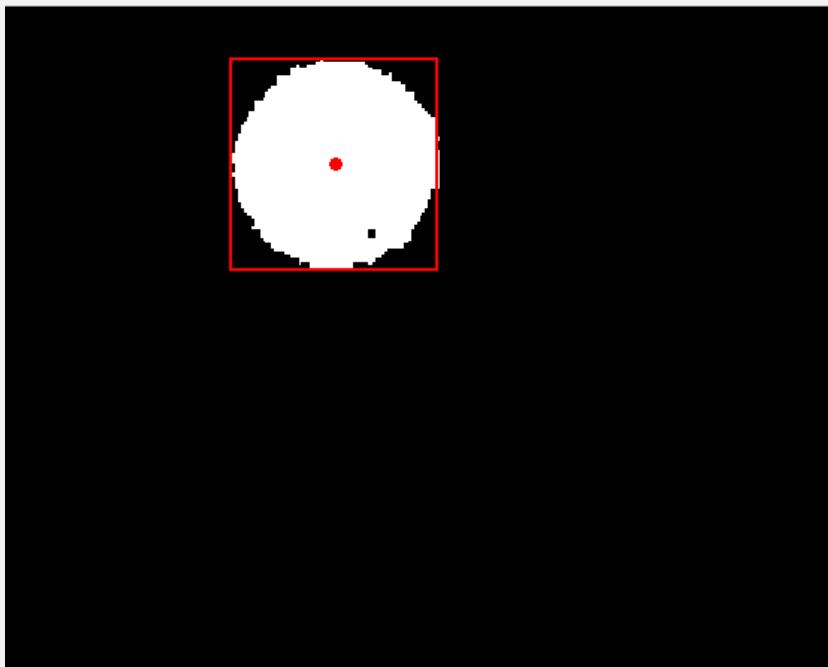
- 1) Détermination des coordonnées des pixels ==1 dans A2 >> `[y, x]=find(A2==1);`
- 3) Détermination du centre
`>> my=min(y); My=max(y)`
`>> mx=min(x); Mx=max(x)`
- 4) Afficher la fenêtre(vérification)

```
>> rectangle('Position', [mx, my, Mx-mx, My-my])
```

Opérations sur les histogrammes

Fenêtre englobante?

```
>> rectangle('Position', [mx,my,Mx-mx,My-my])
```



Exercices

Calcul d'histogramme...

Soit l'image suivante

- a) Sur combien de bits peut-on coder cette image?

b) Calculer la valeur du contraste

c) Déterminer l'histogramme et l'histogramme cumulé

d) Binariser l'image I de façon à séparer l'emoji (visage souriant) du fond ? donner la valeur de seuil S et représenter l'image binaire Ib ?

e) Maintenant, on veut corriger le contraste de l'image I par l'égalisation de l'histogramme:

 - Citer les 4 étapes principales pour réaliser l'égalisation de l'histogramme ?
 - * Donner les nouvelles valeurs des pixels suivants: (2, 4), (4, 4), (8, 8), (2, 2), (11, 10)

Exercices

Un peu de programmation...

1- Proposer une fonction matlab permettant de calculer l'histogramme et l'histogramme cumulé

P.E: l'image niveaux de gris (I), le support (supp)

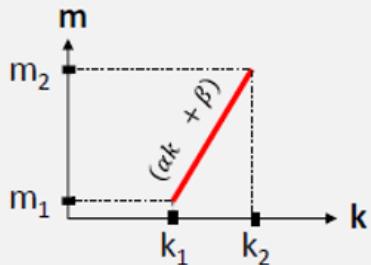
P.S: histogramme (h) et l'histogramme cumulé (H)

Rq: supp est un vecteur contenant les valeurs de niveaux de gris sur lesquels on calcule l'histogramme

Exercices

Etirer une image...

2- Considérons la transformation linéaire suivante



- Déterminer les expressions des coefficients α et β de la transformation.
- Que devient cette expression lorsque $m_1=0$ et $m_2=255$
- Proposer une fonction matlab réalisant un étirement de l'image I. Vous prendrez $k_1=\text{le niveau de gris minimal}$, $k_2=\text{le niveau de gris maximal}$, $m_1=0$ et $m_2=255$.