— Menu de la Saint Silvestre —

Le hors d'œuvre (4 points)

Considérons une image u(x,y) représentant un niveau de gris au point de coordonnées (x,y). Une approximation de la dérivée spatiale u_x suivant la direction x, est définie par le masque suivant :

$$u_x \approx \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{2} & 0 & \frac{\alpha}{2} \\ -(1-\alpha) & 0 & (1-\alpha) \\ -\frac{\alpha}{2} & 0 & \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}$$

ou $\alpha \geq 0$ est un paramètre qui permet de décrire une famille de masques approchant u_x On notera u_y le masque de la dérivée suivant la direction y, et définit par la transposée de u_x

1) Pour quelle valeur de α obtient t'on le masque de Sobel ? le masque de Prewitt ? (0.5)

2) Soient les deux blocs images I et J définies sur les figures a et b, respectivement :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fig. a : I

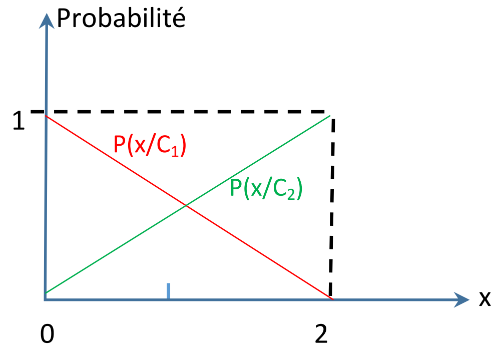
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Fig. b : J

a) Calculer les produits de convolution $Ix=I*u_x$ et $Iy=I*u_y$. Donnez la valeur au centre du bloc
b) Calculer le module du gradient du bloc I au centre du bloc
c) Calculer le module gradient du bloc J au centre du bloc
d) Pour quelle(s) valeur(s) de α les deux modules du gradient sont t'ils identiques ?

Le plat principal (6 points)

Considérons que le domaine des niveaux gris d'une image soit compris dans l'intervalle (0,…,2) (la valeur 0 représentant le noir et 2 le blanc) et qu'il soit partitionné en deux classes C_1 et C_2. Soit x un pixel de l'image, appelons $P(x/C_1)$ et $P(x/C_2)$ les probabilités conditionnelles que x appartiennent à C_1 ou à C_2, respectivement, sont définies par les fonctions suivantes :



De plus, on supposera que les probabilités à priori des classes sont égales à $P(C_1)=1/3$ et $P(C_2)=2/3$.

1) Rappelez la formule de Bayes basée sur x, C_1 et C_2.
2) Donnez l'expression de la distribution de probabilité de x, c'est-à-dire p(x).
3) Donnez les expressions des probabilités à posteriori $P(C_1/x)$ et $P(C_2/x)$.
4) Quel serait la règle de décision pour un pixel donné x ?
5) Donnez la valeur du seuil ou il y a indécision ?
6) Dans les questions précédentes, un pixel x pouvait être classé soit dans la classe C1, soit dans la classe C2. Dans cette question, on décide d'introduire une autre option : **« celle de ne pas classer x ».** La stratégie de classification est donc basée sur les 3 actions notée a_i, définies comme suit :

    - If $P(C_1/x) > P(C_2/x)$ -> a1 : **x est classé dans C_1**
    - If $P(C_1/x) < P(C_2/x)$ -> a2 : **x est classé dans C_2**
    - If $P(C_1/x) \sim P(C_2/x)$ -> a3 : **x n'est pas classé**

    Pour chaque action possible a_i, on définit $l(a_i/C_j)$ *la perte ou la pénalité de choisir l'action a_i lorsque x appartient effectivement à la classe C_j*. Ainsi pour chaque pixel x, il est possible de définir le risque conditionnel associé à une action particulière a_i :

$$r\left({}^{a_i}/_{x}\right) = \sum_{j=1}^{2} l\left({}^{a_i}/_{C_j}\right) p\left({}^{C_j}/_{x}\right)$$

La règle de décision de Bayes se généralise alors et s'écrit maintenant par : **Etant donné x, l'action optimal $a^*(x)$ associée à x correspond à celle qui minimise le risque conditionnel, c'est-à-dire :**

$$a^*(x) = min\{r\left({}^{a_i}/_{x}\right)\}, \qquad pour\ i = (1,2,3)$$

Etant donné le tableau des pénalités *$l(a_i/C_j)$:*

$l(a_i/C_j)$	a_1	a_2	a_3
C_1	0	1	1/4
C_2	1	0	1/4

7) Déterminez l'expression du risque $r\left({}^{a_i}/_{x}\right)$ pour i=1,2,3.
8) Déterminez les domaines de valeurs de x vérifiant l'action optimale.

Le dessert (7 points)

Une image à un histogramme défini par l'expression analytique suivante :

$$h(r) = -4r + 6r^2 + 1$$

pour $r \in [0,1]$ ou 0 représentant le noir et 1 le blanc.

a) Représenter cet histogramme
b) Quelle est la valeur de r définissant le minimum de h ?
c) Montrer que cet histogramme peut être assimilé à une densité de probabilité ?
d) Calculer la moyenne de l'image ?
e) Déterminer la transformation s=g(r) permettant d'égaliser l'image ?
f) Soit g(r) la transformation définie par la loi suivante

$$m = g(r) = \frac{1}{r+1}$$

Représenter cette transformation sur [0,1] ?

g) Rappeler l'expression de l'histogramme f(m) obtenu après l'application de g sur h ?
h) Montrer que l'expression de f(m) est définie par

$$f(m) = 5m^2 - 10m + 6$$

i) Peut-on considérer f comme une densité de probabilité ?

J'ai plus faim! (3 points)

a) Rappelez la définition de la transformée de Fourier F(u,v) de l'image f(x,y) ?
b) Démontrez que la transformée d'un signal incliné g(x,y)=f(x-my,y) par rapport à l'axe vertical subit une inclinaison identique mais par rapport à l'axe horizontal ?

Pour vous aider à digérer…

1) Masques de Prewitt et Sobel

$$ux = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad ux = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtre de prewitt   Filtre de Sobel

1) Distribution de probabilité p(x) pour 2 classes : $p(x) = \sum_{i=1}^{2} p(Ci)p(x/Ci)$