CHAPITRE

1

Algèbre 1
Espaces vectoriels

Introduction

La notion d'espace vectoriel est une structure fondamentale des mathématiques modernes. Il s'agit de dégager les propriétés communes que partagent des ensembles pourtant très différents. Par exemple, on peut additionner deux vecteurs du plan, et aussi multiplier un vecteur par un réel (pour l'agrandir ou le rétrécir). Mais on peut aussi additionner deux fonctions, ou multiplier une fonction par un réel. Même chose avec les polynômes, les matrices,... Le but est d'obtenir des théorèmes généraux qui s'appliqueront aussi bien aux vecteurs du plan, de l'espace, aux espaces de fonctions, aux polynômes, aux matrices,... La contrepartie de cette grande généralité de situations est que la notion d'espace vectoriel est difficile à appréhender et vous demandera une quantité conséquente de travail ! Il est bon d'avoir d'abord étudié le chapitre « L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ».

1 Espace vectoriel

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps. Dans la plupart des exemples, ce sera le corps des réels $\mathbb{R}$.

1.1 Définition d'un espace vectoriel

Un espace vectoriel est un ensemble formé de vecteurs, de sorte que l'on puisse additionner (et soustraire) deux vecteurs u, v pour en former un troisième $u + v$ (ou $u - v$) et aussi afin que l'on puisse multiplier chaque vecteur u d'un facteur λ pour obtenir un vecteur $\lambda \cdot u$. Voici la définition formelle :

Définition 1.1

Un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* est un ensemble non vide E muni :

— d'une loi de composition interne, c'est-à-dire d'une application de $E \times E$ dans E :

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$$

— d'une loi de composition externe, c'est-à-dire d'une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, u) & \mapsto & \lambda \cdot u \end{array}$$

qui vérifient les propriétés suivantes :

1. $(E, +)$ est *un groupe abélien*
2. $1 \cdot u = u$ (pour tout $u \in E$)
3. $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$ (pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u \in E$)
4. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ (pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$, $u, v \in E$)
5. $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$ (pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u \in E$)

1.2 Premiers exemples

Exemple 1.1Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$

. Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$. Un élément $u \in E$ est donc un couple (x, y) avec x élément de $\mathbb{R}$ et y élément de $\mathbb{R}$. Ceci s'écrit

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

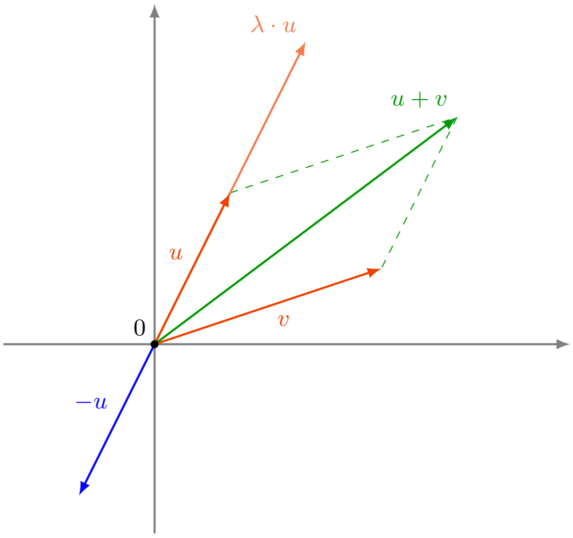
— *Définition de la loi interne.* Si (x, y) et (x', y') sont deux éléments de $\mathbb{R}^2$, alors :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

— *Définition de la loi externe.* Si λ est un réel et (x, y) est un élément de $\mathbb{R}^2$, alors :

$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

L'élément neutre de la loi interne est le vecteur nul $(0, 0)$. Le symétrique de (x, y) est $(-x, -y)$, que l'on note aussi $-(x, y)$.



L'exemple suivant généralise le précédent. C'est aussi le bon moment pour lire ou relire le chapitre « L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ».

Exemple 1.2Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$
. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^n$. Un élément $u \in E$ est donc un n-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ avec $x_1, x_2, \dots, x_n$ des éléments de $\mathbb{R}$.

— *Définition de la loi interne.* Si $(x_1, \dots, x_n)$ et $(x'_1, \dots, x'_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$, alors :

$$(x_1, \dots, x_n) + (x'_1, \dots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n).$$

— *Définition de la loi externe.* Si λ est un réel et $(x_1, \dots, x_n)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$, alors :

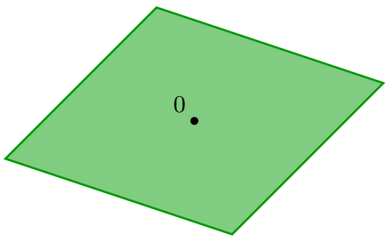
$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

L'élément neutre de la loi interne est le vecteur nul $(0, 0, \dots, 0)$. Le symétrique de $(x_1, \dots, x_n)$ est $(-x_1, \dots, -x_n)$, que l'on note $-(x_1, \dots, x_n)$.
De manière analogue, on peut définir le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, et plus généralement le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.

Exemple 1.3. Tout plan passant par l'origine dans $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel (par rapport aux opérations habituelles sur les vecteurs). Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathcal{P}$ un plan passant par l'origine. Le plan admet une équation de la forme :

$$ax + by + cz = 0$$

où a, b et c sont des réels non tous nuls.



Un élément $u \in E$ est donc un triplet (noté ici comme un vecteur colonne) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $ax+by+cz = 0$.
Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{P}$. Autrement dit,

$$\begin{array}{rrcl} & ax + by + cz & = & 0, \\ \text{et} & ax' + by' + cz' & = & 0. \end{array}$$

Alors $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$ est aussi dans $\mathcal{P}$ car on a bien :

$$a(x + x') + b(y + y') + c(z + z') = 0.$$

Les autres propriétés sont aussi faciles à vérifier : par exemple l'élément neutre est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; et si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{P}$, alors $ax+by+cz = 0$, que l'on peut réécrire $a(-x)+b(-y)+c(-z) = 0$ et ainsi $-\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{P}$.

Attention ! Un plan ne contenant pas l'origine n'est pas un espace vectoriel, car justement il ne contient pas le vecteur nul $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.3 Terminologie et notations

Rassemblons les définitions déjà vues.

- On appelle les éléments de E des *vecteurs*. Au lieu de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on dit aussi espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- Les éléments de $\mathbb{K}$ seront appelés des *scalaires*.
- L' *élément neutre* 0_E s'appelle aussi le *vecteur nul*. Il ne doit pas être confondu avec l'élément 0 de $\mathbb{K}$. Lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion, 0_E sera aussi noté 0.
- Le *symétrique* $-u$ d'un vecteur $u \in E$ s'appelle aussi l'*opposé*.
- La loi de composition interne sur E (notée usuellement $+$) est appelée couramment l'addition et $u+u'$ est appelée somme des vecteurs u et u'.
- La loi de composition externe sur E est appelée couramment multiplication par un scalaire. La multiplication du vecteur u par le scalaire λ sera souvent notée simplement λu, au lieu de $\lambda \cdot u$.

Somme de n vecteurs. Il est possible de définir, par récurrence, l'addition de n vecteurs, $n \geqslant 2$. La structure d'espace vectoriel permet de définir l'addition de deux vecteurs (et initialise le processus). Si maintenant la somme de $n-1$ vecteurs est définie, alors la somme de n vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ est définie par

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = (v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1}) + v_n.$$

L'associativité de la loi $+$ nous permet de ne pas mettre de parenthèses dans la somme $v_1+v_2+\cdots+v_n$. On notera $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \sum_{i=1}^{n} v_i$.

Exercices d'applications

1. Vérifier les 8 axiomes qui font de $\mathbb{R}^3$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Idem pour une droite $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine définie par $\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+cz & = & 0 \\ a'x+b'y+c'z & = & 0\,. \end{array}\right.$.
3. Justifier que les ensembles suivants *ne sont pas* des espaces vectoriels : $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$; $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1\}$; $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0\}$; $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } -1 \leqslant y \leqslant 1\}$.
4. Montrer par récurrence que si les v_i sont des éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors pour tous $\lambda_i \in \mathbb{K}$: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \in E$.

Proposition 1.1

- S'il existe un élément neutre 0_E vérifiant l'axiome (3) ci-dessus, alors il est unique.
- Soit u un élément de E. S'il existe un élément symétrique u' de E vérifiant l'axiome (4), alors il est unique.

Preuve:

- Soient 0_E et $0'_E$ deux éléments vérifiant la définition de l'élément neutre. On a alors, pour tout élément u de E :

$$u + 0_E = 0_E + u = u \qquad \text{et} \qquad u + 0'_E = 0'_E + u = u$$

  - Alors, la première propriété utilisée avec $u = 0'_E$ donne $0'_E + 0_E = 0_E + 0'_E = 0'_E$.
  - La deuxième propriété utilisée avec $u = 0_E$ donne $0_E + 0'_E = 0'_E + 0_E = 0_E$.
  - En comparant ces deux résultats, il vient $0_E = 0'_E$.
- Supposons qu'il existe deux symétriques de u notés u' et u''. On a :

$$u + u' = u' + u = 0_E \qquad \text{et} \qquad u + u'' = u'' + u = 0_E.$$

  Calculons $u' + (u + u'')$ de deux façons différentes, en utilisant l'associativité de la loi $+$ et les relations précédentes.
  - $u' + (u + u'') = u' + 0_E = u'$
  - $u' + (u + u'') = (u' + u) + u'' = 0_E + u'' = u''$
  - On en déduit $u' = u''$.

Remarque 1.1 Les étudiants connaissant la théorie des groupes reconnaîtront, dans les quatre premiers axiomes ci-dessus, les axiomes caractérisant un groupe commutatif.

Axiomes relatifs à la loi externe.

5. Soit 1 l'élément neutre de la multiplication de $\mathbb{K}$. Pour tout élément u de E, on a
$$1 \cdot u = u.$$
6. Pour tous éléments λ et μ de $\mathbb{K}$ et pour tout élément u de E, on a
$$\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \times \mu) \cdot u.$$

Axiomes liant les deux lois.

7. ***Distributivité*** par rapport à l'addition des vecteurs. Pour tout élément λ de $\mathbb{K}$ et pour tous éléments u et v de E, on a
$$\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v.$$
8. ***Distributivité*** par rapport à l'addition des scalaires. Pour tous λ et μ de $\mathbb{K}$ et pour tout élément u de E, on a :
$$(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u.$$

La loi interne et la loi externe doivent donc satisfaire ces huit axiomes pour que $(E, +, \cdot)$ soit un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1 4 Exemples

Dans tous les exemples qui suivent, la vérification des axiomes se fait simplement et est laissée au soin des étudiants. Seules seront indiquées, dans chaque cas, les valeurs de l'élément neutre de la loi interne et du symétrique d'un élément.

Exemple 1.4L'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

. L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Nous le munissons d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de la manière suivante.

— *Loi interne.* Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La fonction $f + g$ est définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
(où le signe + désigne la loi interne de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans le membre de gauche et l'addition dans $\mathbb{R}$ dans le membre de droite).

— *Loi externe.* Si λ est un nombre réel et f une fonction de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $\lambda \cdot f$ est définie par l'image de tout réel x comme suit :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \times f(x).$$
(Nous désignons par $\cdot$ la loi externe de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et par $\times$ la multiplication dans $\mathbb{R}$. Avec l'habitude on oubliera les signes de multiplication : $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.)

— *Élément neutre.* L'élément neutre pour l'addition est la fonction nulle, définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0.$$
On peut noter cette fonction $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.

— *Symétrique.* Le symétrique de l'élément f de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = -f(x).$$
Le symétrique de f est noté $-f$.

Exemple 1.5Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles

. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cet ensemble peut être vu comme l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$; autrement dit $\mathcal{S} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

— *Loi interne.* Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites appartenant à $\mathcal{S}$. La suite $u + v$ est la suite $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est défini par
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = u_n + v_n$$
(où $u_n + v_n$ désigne la somme de u_n et de v_n dans $\mathbb{R}$).

— *Loi externe.* Si λ est un nombre réel et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathcal{S}$, $\lambda \cdot u$ est la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \lambda \times u_n$$

où $\times$ désigne la multiplication dans $\mathbb{R}$.

— *Élément neutre.* L'élément neutre de la loi interne est la suite dont tous les termes sont nuls.

— *Symétrique.* Le symétrique de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $u' = (u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u'_n = -u_n.$$

Elle est notée $-u$.

Exemple 1.6 Les matrices

. L'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La loi interne est l'addition de deux matrices. La loi externe est la multiplication d'une matrice par un scalaire. L'élément neutre pour la loi interne est la matrice nulle (tous les coefficients sont nuls). Le symétrique de la matrice $A = (a_{i,j})$ est la matrice $(-a_{i,j})$. De même, l'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Autres exemples :

1. L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes $P(X) = a_nX^n + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$. L'addition est l'addition de deux polynômes $P(X)+Q(X)$, la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est $\lambda \cdot P(X)$. L'élément neutre est le polynôme nul. L'opposé de $P(X)$ est $-P(X)$.
2. L'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,...
3. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel : addition $z+z'$ de deux nombres complexes, multiplication λz par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$. L'élément neutre est le nombre complexe 0 et le symétrique du nombre complexe z est $-z$.

1 5 Règles de calcul

Proposition 1.2

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Soient $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors on a :

1. $0 \cdot u = 0_E$
2. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
3. $(-1) \cdot u = -u$
4. $\boxed{\lambda \cdot u = 0_E \iff \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad u = 0_E}$

L'opération qui à (u, v) associe $u+(-v)$ s'appelle la ***soustraction***. Le vecteur $u+(-v)$ est noté $u-v$. Les propriétés suivantes sont satisfaites : $\lambda(u-v) = \lambda u - \lambda v$ et $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$.

Preuve:

Les démonstrations des propriétés sont des manipulations sur les axiomes définissant les espaces vectoriels.

1. — Le point de départ de la démonstration est l'égalité dans $\mathbb{K}$: $0 + 0 = 0$.
   — D'où, pour tout vecteur de E, l'égalité $(0 + 0) \cdot u = 0 \cdot u$.
   — Donc, en utilisant la distributivité de la loi externe par rapport à la loi interne et la définition de l'élément neutre, on obtient $0\cdot u+0\cdot u = 0\cdot u$. On peut rajouter l'élément neutre dans le terme de droite, pour obtenir : $0 \cdot u + 0 \cdot u = 0 \cdot u + 0_E$.
   — En ajoutant $-(0 \cdot u)$ de chaque côté de l'égalité, on obtient : $0 \cdot u = 0_E$.
2. La preuve est semblable en partant de l'égalité $0_E + 0_E = 0_E$.
3. Montrer $(-1) \cdot u = -u$ signifie exactement que $(-1) \cdot u$ est le symétrique de u, c'est-à-dire vérifie $u + (-1) \cdot u = 0_E$. En effet :
$$u + (-1) \cdot u = 1 \cdot u + (-1) \cdot u = (1 + (-1)) \cdot u = 0 \cdot u = 0_E.$$
4. On sait déjà que si $\lambda = 0$ ou $u = 0_E$, alors les propriétés précédentes impliquent $\lambda \cdot u = 0_E$.
   Pour la réciproque, soient $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire et $u \in E$ un vecteur tels que $\lambda \cdot u = 0_E$.
   Supposons λ différent de 0. On doit alors montrer que $u = 0_E$.

— Comme $\lambda \neq 0$, alors λ est inversible pour le produit dans le corps $\mathbb{K}$. Soit λ^{-1} son inverse.
— En multipliant par λ^{-1} les deux membres de l'égalité $\lambda \cdot u = 0_E$, il vient : $\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot u) = \lambda^{-1} \cdot 0_E$.
— D'où en utilisant les propriétés de la multiplication par un scalaire $(\lambda^{-1} \times \lambda) \cdot u = 0_E$ et donc $1 \cdot u = 0_E$.
— D'où $u = 0_E$.

Exercices d'applications

1. Justifier si les objets suivants sont des espaces vectoriels.
   (a) L'ensemble des fonctions réelles sur $[0,1]$, continues, positives ou nulles, pour l'addition et le produit par un réel.
   (b) L'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ pour les mêmes opérations.
   (c) L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ telles que $f(3) = 7$.
   (d) L'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ pour les opérations $x \oplus y = xy$ et $\lambda \cdot x = x^\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.
   (e) L'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\sin(x + y) = 0$.
   (f) L'ensemble des vecteurs (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(-1, 3, -2)$.
   (g) L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f'' + f = 0$.
   (h) L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ vérifiant $\int_0^1 f(x) \sin x \, dx = 0$.
   (i) L'ensemble des matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R})$ vérifiant $a + d = 0$.
2. Prouver les propriétés de la soustraction : $\lambda \cdot (u - v) = \lambda \cdot u - \lambda \cdot v$ et $(\lambda - \mu) \cdot u = \lambda \cdot u - \mu \cdot u$.

2 Sous-espace vectoriel (début)

Il est vite fatigant de vérifier les 8 axiomes qui font d'un ensemble un espace vectoriel. Heureusement, il existe une manière rapide et efficace de prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel : grâce à la notion de sous-espace vectoriel.

2.1 Définition d'un sous-espace vectoriel

Définition 1.2

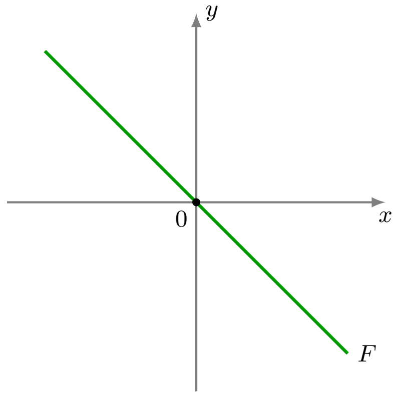
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie F de E est appelée un ***sous-espace vectoriel*** si :
— $0_E \in F$,
— $u + v \in F$ pour tous $u, v \in F$,
— $\lambda \cdot u \in F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $u \in F$.

Remarque 1.2

Expliquons chaque condition.
— La première condition signifie que le vecteur nul de E doit aussi être dans F. En fait il suffit même de prouver que F est non vide.
— La deuxième condition, c'est dire que F est stable pour l'addition : la somme $u + v$ de deux vecteurs u, v de F est bien sûr un vecteur de E (car E est un espace vectoriel), mais ici on exige que $u + v$ soit un élément de F.
— La troisième condition, c'est dire que F est stable pour la multiplication par un scalaire.

Exemple 1.7Exemples immédiats

1. L'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet :
   (a) $(0, 0) \in F$,
   (b) si $u = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2)$ appartiennent à F, alors $x_1 + y_1 = 0$ et $x_2 + y_2 = 0$ donc $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0$ et ainsi $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ appartient à F,
   (c) si $u = (x, y) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $x + y = 0$ donc $\lambda x + \lambda y = 0$, d'où $\lambda u \in F$.

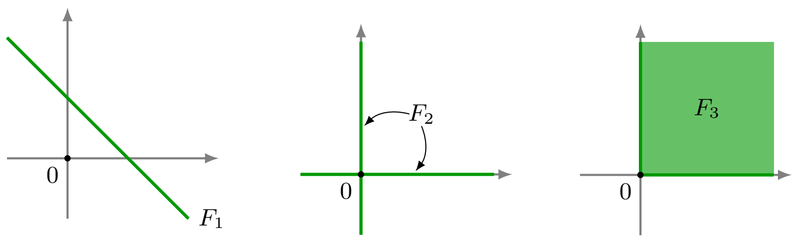


2. L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Preuve : la fonction nulle est continue ; la somme de deux fonctions continues est continue ; une constante fois une fonction continue est une fonction continue.
3. L'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

Voici des sous-ensembles qui *ne sont pas* des sous-espaces vectoriels.

Exemple 1.8.

1. L'ensemble $F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=2\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet le vecteur nul $(0,0)$ n'appartient pas à F_1.
2. L'ensemble $F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=0 \text{ ou } y=0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet les vecteurs $u=(1,0)$ et $v=(0,1)$ appartiennent à F_2, mais pas le vecteur $u+v=(1,1)$.
3. L'ensemble $F_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet le vecteur $u=(1,1)$ appartient à F_3 mais, pour $\lambda=-1$, le vecteur $-u=(-1,-1)$ n'appartient pas à F_3.



2.2 Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel

La notion de sous-espace vectoriel prend tout son intérêt avec le théorème suivant : un sous-espace vectoriel est lui-même un espace vectoriel. C'est ce théorème qui va nous fournir plein d'exemples d'espaces vectoriels.

Théorème 1.1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois induites par E.

Méthodologie. Pour répondre à une question du type « L'ensemble F est-il un espace vectoriel ? », une façon efficace de procéder est de trouver un espace vectoriel E qui contient F, puis prouver que F est un sous-espace vectoriel de E. Il y a seulement trois propriétés à vérifier au lieu de huit !

Exemple 1.9.

1. Est-ce que l'ensemble des fonctions paires (puis des fonctions impaires) forme un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ avec les lois usuelles sur les fonctions) ?
   Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires. Ce sont deux sous-ensembles de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions.
   $$\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$$
   $$\mathcal{I} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\}$$
   $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. C'est très simple à vérifier, par exemple pour $\mathcal{P}$:

(a) la fonction nulle est une fonction paire,
(b) si $f, g \in \mathcal{P}$ alors $f + g \in \mathcal{P}$,
(c) si $f \in \mathcal{P}$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda f \in \mathcal{P}$.

Par le théorème 1.1, $\mathcal{P}$ est un espace vectoriel (de même pour $\mathcal{I}$).

2. Est-ce que l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des matrices symétriques de taille n est un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ avec les lois usuelles sur les matrices) ?

   $\mathcal{S}_n$ est un sous-ensemble de l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$. Et c'est même un sous-espace vectoriel. Il suffit en effet de vérifier que la matrice nulle est symétrique, que la somme de deux matrices symétriques est encore symétrique et finalement que le produit d'une matrice symétrique par un scalaire est une matrice symétrique. Par le théorème 1.1, $\mathcal{S}_n$ est un espace vectoriel.

Preuve: Preuve du théorème 1.1

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$. La stabilité de F pour les deux lois permet de munir cet ensemble d'une loi de composition interne et d'une loi de composition externe, en restreignant à F les opérations définies dans E. Les propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition, ainsi que les quatre axiomes relatifs à la loi externe sont vérifiés, car ils sont satisfaits dans E donc en particulier dans F, qui est inclus dans E.
L'existence d'un élément neutre découle de la définition de sous-espace vectoriel. Il reste seulement à justifier que si $u \in F$, alors son symétrique $-u$ appartient à F.
Fixons $u \in F$. Comme on a aussi $u \in E$ et que E est un espace vectoriel alors il existe un élément de E, noté $-u$, tel que $u + (-u) = 0_E$. Comme u est élément de F, alors pour $\lambda = -1$, $(-1)u \in F$. Et ainsi $-u$ appartient à F.

Un autre exemple d'espace vectoriel est donné par l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène. Soit $AX = 0$ un système de n équations à p inconnues :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a alors

Théorème 1.2

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Soit $AX = 0$ un système d'équations linéaires homogènes à p variables. Alors l'ensemble des vecteurs solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

Preuve:

Soit F l'ensemble des vecteurs $X \in \mathbb{R}^p$ solutions de l'équation $AX = 0$. Vérifions que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

- Le vecteur 0 est un élément de F.
- F est stable par addition : si X et X' sont des vecteurs solutions, alors $AX = 0$ et $AX' = 0$, donc $A(X + X') = AX + AX' = 0$, et ainsi $X + X' \in F$.
- F est stable par multiplication par un scalaire : si X est un vecteur solution, on a aussi $A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda 0 = 0$, ceci pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $\lambda X \in F$.

Exemple 1.10. Considérons le système

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions $F \subset \mathbb{R}^3$ de ce système est :

$$F = \big\{(x = 2s - 3t, y = s, z = t) \mid s, t \in \mathbb{R}\big\}.$$

Par le théorème 1.2, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donc par le théorème 1.1, F est un espace vectoriel.

Une autre façon de voir les choses est d'écrire que les éléments de F sont ceux qui vérifient l'équation $(x = 2y - 3z)$. Autrement dit, F est d'équation $(x - 2y + 3z = 0)$. L'ensemble des solutions F est donc un plan passant par l'origine. Nous avons déjà vu que ceci est un espace vectoriel.

Exercices d'applications

Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

1. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$
2. $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = t \text{ et } y = z\}$
3. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$
4. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy \geqslant 0\}$
5. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geqslant 1\}$
6. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$
7. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$
8. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ est croissante }\}$
9. $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ tend vers } 0\}$

3 Sous-espace vectoriel (milieu)

3.1 Combinaisons linéaires

Définition 1.3

Soit $n \geqslant 1$ un entier, soient $v_1, v_2, \ldots, v_n$, n vecteurs d'un espace vectoriel E. Tout vecteur de la forme

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

(où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$) est appelé ***combinaison linéaire*** des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont appelés ***coefficients*** de la combinaison linéaire.

Remarque : Si $n = 1$, alors $u = \lambda_1 v_1$ et on dit que u est ***colinéaire*** à v_1.

Exemple 1.11.

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, $(3,3,1)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1,1,0)$ et $(1,1,1)$ car on a l'égalité
$$(3,3,1) = 2(1,1,0) + (1,1,1).$$
2. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, le vecteur $u = (2,1)$ *n'est pas* colinéaire au vecteur $v_1 = (1,1)$ car s'il l'était, il existerait un réel λ tel que $u = \lambda v_1$, ce qui équivaudrait à l'égalité $(2,1) = (\lambda, \lambda)$.
3. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles. Soient f_0, f_1, f_2 et f_3 les fonctions définies par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x^3.$$
Alors la fonction f définie par
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$$
est combinaison linéaire des fonctions f_0, f_1, f_2, f_3 puisque l'on a l'égalité
$$f = f_3 - 2f_2 - 7f_1 - 4f_0.$$
4. Dans $M_{2,3}(\mathbb{R})$, on considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. On peut écrire A naturellement sous la forme suivante d'une combinaison linéaire de matrices élémentaires (des zéros partout, sauf un 1) :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Voici deux exemples plus compliqués.

Exemple 1.12. Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrons que $w = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de u et v. On cherche donc λ et μ tels que $w = \lambda u + \mu v$:

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6\mu \\ 4\mu \\ 2\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 6\mu \\ 2\lambda + 4\mu \\ -\lambda + 2\mu \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\begin{cases} 9 &= \lambda + 6\mu \\ 2 &= 2\lambda + 4\mu \\ 7 &= -\lambda + 2\mu. \end{cases}$$

Une solution de ce système est $(\lambda = -3, \mu = 2)$, ce qui implique que w est combinaison linéaire de u et v. On vérifie que l'on a bien

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.13. Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Montrons que $w = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ n'est pas une combinaison linéaire de u et v. L'égalité

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{équivaut au système} \qquad \begin{cases} 4 &= \lambda + 6\mu \\ -1 &= 2\lambda + 4\mu \\ 8 &= -\lambda + 2\mu. \end{cases}$$

Or ce système n'a aucune solution. Donc il n'existe pas $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $w = \lambda u + \mu v$.

3 2 Caractérisation d'un sous-espace vectoriel

Théorème 1.3

Caractérisation d'un sous-espace par la notion de combinaison linéaire
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie non vide de E. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$\lambda u + \mu v \in F \qquad \text{pour tous } u, v \in F \qquad \text{et tous } \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Autrement dit si et seulement si toute combinaison linéaire de deux éléments de F appartient à F.

Preuve:

- Supposons que F soit un sous-espace vectoriel. Et soient $u, v \in F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors par la définition de sous-espace vectoriel : $\lambda u \in F$ et $\mu v \in F$ et ainsi $\lambda u + \mu v \in F$.
- Réciproquement, supposons que pour chaque $u, v \in F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ on a $\lambda u + \mu v \in F$.
  - Comme F n'est pas vide, soient $u, v \in F$. Posons $\lambda = \mu = 0$. Alors $\lambda u + \mu v = 0_E \in F$.
  - Si $u, v \in F$, alors en posant $\lambda = \mu = 1$ on obtient $u + v \in F$.
  - Si $u \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ (et pour n'importe quel v, en posant $\mu = 0$), alors $\lambda u \in F$.

3 3 Intersection de deux sous-espaces vectoriels

Proposition 1.3

Intersection de deux sous-espaces
Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. L'intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

On démontrerait de même que l'intersection $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_n$ d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve:

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

— $0_E \in F$, $0_E \in G$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E ; donc $0_E \in F \cap G$.

— Soient u et v deux vecteurs de $F \cap G$. Comme F est un sous-espace vectoriel, alors $u, v \in F$ implique $u + v \in F$. De même $u, v \in G$ implique $u + v \in G$. Donc $u + v \in F \cap G$.

— Soient $u \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Comme F est un sous-espace vectoriel, alors $u \in F$ implique $\lambda u \in F$. De même $u \in G$ implique $\lambda u \in G$. Donc $\lambda u \in F \cap G$.

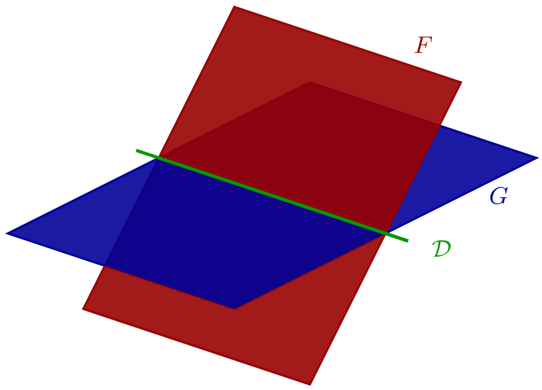
Conclusion : $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 1.14. Soit $\mathcal{D}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + z = 0 \quad \text{et} \quad x - y + 2z = 0\right\}.$$

Est-ce que $\mathcal{D}$ est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? L'ensemble $\mathcal{D}$ est l'intersection de F et G, les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ définis par :

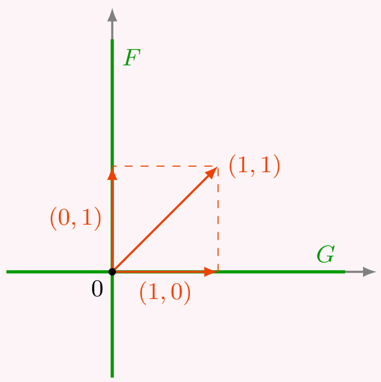
$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + z = 0\right\}$$
$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\right\}$$



Ce sont deux plans passant par l'origine, donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Ainsi $\mathcal{D} = F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, c'est une droite vectorielle.

Remarque 1.3

La réunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est pas en général un sous-espace vectoriel de E. Prenons par exemple $E = \mathbb{R}^2$. Considérons les sous-espaces vectoriels $F = \left\{(x, y) \mid x = 0\right\}$ et $G = \left\{(x, y) \mid y = 0\right\}$. Alors $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Par exemple, $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1)$ est la somme d'un élément de F et d'un élément de G, mais n'est pas dans $F \cup G$.



Exercices d'applications

1. Peut-on trouver $t \in \mathbb{R}$ tel que les vecteurs $\begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{2} \\ t \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -4\sqrt{2} \\ 4t \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ soient colinéaires ?
2. Peut-on trouver $t \in \mathbb{R}$ tel que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 3t \\ t \end{pmatrix}$ soit une combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$?

4 Sous-espace vectoriel (fin)

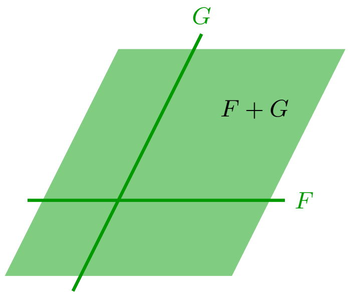
4.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Comme la réunion de deux sous-espaces vectoriels F et G n'est pas en général un sous-espace vectoriel, il est utile de connaître les sous-espaces vectoriels qui contiennent à la fois les deux sous-espaces vectoriels F et G, et en particulier le plus petit d'entre eux (au sens de l'inclusion).

Définition 1.4

Définition de la somme de deux sous-espaces
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. L'ensemble de tous les éléments $u+v$, où u est un élément de F et v un élément de G, est appelé *somme* des sous-espaces vectoriels F et G. Cette somme est notée $F+G$. On a donc

$$F+G = \{u+v \mid u \in F, v \in G\}.$$



Proposition 1.4

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

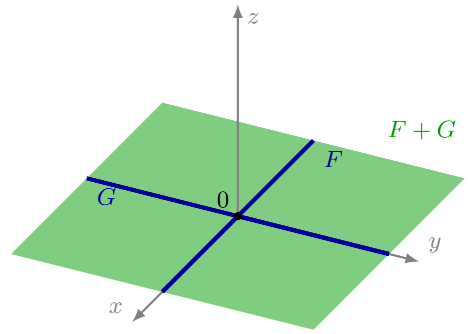
1. $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant à la fois F et G.

Preuve:

1. Montrons que $F+G$ est un sous-espace vectoriel.
   — $0_E \in F$, $0_E \in G$, donc $0_E = 0_E + 0_E \in F+G$.
   — Soient w et w' des éléments de $F+G$. Comme w est dans $F+G$, il existe u dans F et v dans G tels que $w = u+v$. Comme w' est dans $F+G$, il existe u' dans F et v' dans G tels que $w' = u'+v'$. Alors $w+w' = (u+v)+(u'+v') = (u+u')+(v+v') \in F+G$, car $u+u' \in F$ et $v+v' \in G$.
   — Soit w un élément de $F+G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe u dans F et v dans G tels que $w = u+v$. Alors $\lambda w = \lambda(u+v) = (\lambda u)+(\lambda v) \in F+G$, car $\lambda u \in F$ et $\lambda v \in G$.
2. — L'ensemble $F+G$ contient F et contient G : en effet tout élément u de F s'écrit $u = u+0$ avec u appartenant à F et 0 appartenant à G (puisque G est un sous-espace vectoriel), donc u appartient à $F+G$. De même pour un élément de G.
   — Si H est un sous-espace vectoriel contenant F et G, alors montrons que $F+G \subset H$. C'est clair : si $u \in F$ alors en particulier $u \in H$ (car $F \subset H$), de même si $v \in G$ alors $v \in H$. Comme H est un sous-espace vectoriel, alors $u+v \in H$.

Exemple 1.15.
Déterminons $F+G$ dans le cas où F et G sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

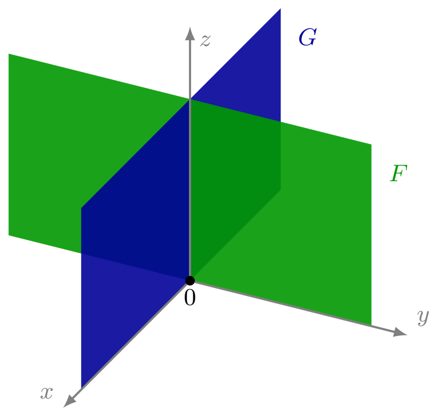
$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z = 0\}.$$



Un élément w de $F+G$ s'écrit $w=u+v$ où u est un élément de F et v un élément de G. Comme $u \in F$ alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $u=(x,0,0)$, et comme $v \in G$ il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $v=(0,y,0)$. Donc $w=(x,y,0)$. Réciproquement, un tel élément $w=(x,y,0)$ est la somme de $(x,0,0)$ et de $(0,y,0)$. Donc $F+G=\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=0\right\}$. On voit même que, pour cet exemple, tout élément de $F+G$ s'écrit de façon *unique* comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Exemple 1.16. Soient F et G les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F=\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0\right\} \qquad \text{et} \qquad G=\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=0\right\}.$$



Dans cet exemple, montrons que $F+G=\mathbb{R}^3$. Par définition de $F+G$, tout élément de $F+G$ est dans $\mathbb{R}^3$. Mais réciproquement, si $w=(x,y,z)$ est un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$: $w=(x,y,z)=(0,y,z)+(x,0,0)$, avec $(0,y,z) \in F$ et $(x,0,0) \in G$, donc w appartient à $F+G$.

Remarquons que, dans cet exemple, un élément de $\mathbb{R}^3$ ne s'écrit pas forcément de façon unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G. Par exemple $(1,2,3)=(0,2,3)+(1,0,0)=(0,2,0)+(1,0,3)$.

4.2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 1.5

Définition de la somme directe de deux sous-espaces
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont en ***somme directe*** dans E si

- $F \cap G=\{0_E\}$,
- $F+G=E$.

On note alors $F \oplus G=E$.

Si F et G sont en somme directe, on dit que F et G sont des sous-espaces vectoriels ***supplémentaires*** dans E.

Proposition 1.5

F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout élément de E s'écrit d'une manière ***unique*** comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Remarque 1.4

— Dire qu'un élément w de E s'écrit d'une manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G signifie que si $w = u + v$ avec $u \in F$, $v \in G$ et $w = u' + v'$ avec $u' \in F$, $v' \in G$ alors $u = u'$ et $v = v'$.

— On dit aussi que F est un sous-espace supplémentaire de G (ou que G est un sous-espace supplémentaire de F).

— Il n'y a pas unicité du supplémentaire d'un sous-espace vectoriel donné (voir un exemple ci-dessous).

— L'existence d'un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel sera prouvée dans le cadre des espaces vectoriels de dimension finie.

Preuve:

— Supposons $E = F \oplus G$ et montrons que tout élément $u \in E$ se décompose de manière unique. Soient donc $u = v + w$ et $u = v' + w'$ avec $v, v' \in F$ et $w, w' \in G$. On a alors $v + w = v' + w'$, donc $v - v' = w' - w$. Comme F est un sous-espace vectoriel alors $v - v' \in F$, mais d'autre part G est aussi un sous-espace vectoriel donc $w' - w \in G$. Conclusion : $v - v' = w' - w \in F \cap G$. Mais par définition d'espaces supplémentaires $F \cap G = \{0_E\}$, donc $v - v' = 0_E$ et aussi $w' - w = 0_E$. On en déduit $v = v'$ et $w = w'$, ce qu'il fallait démontrer.

— Supposons que tout $u \in E$ se décompose de manière unique et montrons $E = F \oplus G$.

  — Montrons $F \cap G = \{0_E\}$. Si $u \in F \cap G$, il peut s'écrire des deux manières suivantes comme somme d'un élément de F et d'un élément de G :

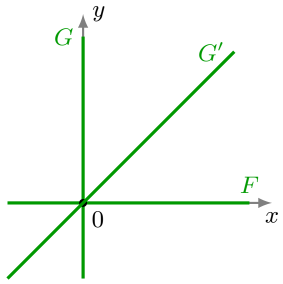
$$u = 0_E + u \qquad \text{et} \qquad u = u + 0_E.$$

  Par l'unicité de la décomposition, $u = 0_E$.

  — Montrons $F + G = E$. Il n'y rien à prouver, car par hypothèse tout élément u se décompose en $u = v + w$, avec $v \in F$ et $w \in G$.

Exemple 1.17.

1. Soient $F = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$.
   Montrons que $F \oplus G = \mathbb{R}^2$. La première façon de le voir est que l'on a clairement $F \cap G = \{(0,0)\}$ et que, comme $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$, alors $F + G = \mathbb{R}^2$. Une autre façon de le voir est d'utiliser la proposition 1.5, car la décomposition $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$ est unique.



2. Gardons F et notons $G' = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Montrons que l'on a aussi $F \oplus G' = \mathbb{R}^2$:
   (a) Montrons $F \cap G' = \{(0,0)\}$. Si $(x, y) \in F \cap G'$ alors d'une part $(x, y) \in F$ donc $y = 0$, et aussi $(x, y) \in G'$ donc $x = y$. Ainsi $(x, y) = (0, 0)$.
   (b) Montrons $F + G' = \mathbb{R}^2$. Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Cherchons $v \in F$ et $w \in G'$ tels que $u = v + w$. Comme $v = (x_1, y_1) \in F$ alors $y_1 = 0$, et comme $w = (x_2, y_2) \in G'$ alors $x_2 = y_2$. Il s'agit donc de trouver x_1 et x_2 tels que

$$(x, y) = (x_1, 0) + (x_2, x_2).$$

   Donc $(x, y) = (x_1 + x_2, x_2)$. Ainsi $x = x_1 + x_2$ et $y = x_2$, d'où $x_1 = x - y$ et $x_2 = y$. On trouve bien

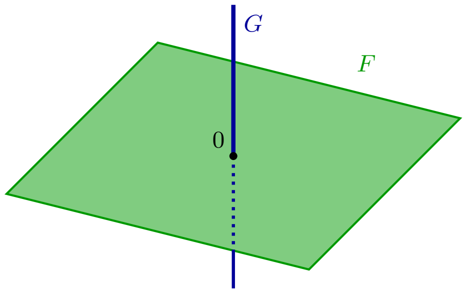
$$(x, y) = (x - y, 0) + (y, y),$$

   qui prouve que tout élément de $\mathbb{R}^2$ est somme d'un élément de F et d'un élément de G'.
3. De façon plus générale, deux droites distinctes du plan passant par l'origine forment des sous-espaces supplémentaires.

Exemple 1.18. Est-ce que les sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\}$$

sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?



1. Il est facile de vérifier que $F \cap G = \{0\}$. En effet si l'élément $u = (x, y, z)$ appartient à l'intersection de F et de G, alors les coordonnées de u vérifient : $x - y - z = 0$ (car u appartient à F), et $y = z = 0$ (car u appartient à G), donc $u = (0, 0, 0)$.
2. Il reste à démontrer que $F + G = \mathbb{R}^3$.
   Soit donc $u = (x, y, z)$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$; il faut déterminer des éléments v de F et w de G tels que $u = v + w$. L'élément v doit être de la forme $v = (y_1 + z_1, y_1, z_1)$ et l'élément w de la forme $w = (x_2, 0, 0)$. On a $u = v + w$ si et seulement si $y_1 = y$, $z_1 = z$, $x_2 = x - y - z$. On a donc
   $$(x, y, z) = (y + z, y, z) + (x - y - z, 0, 0)$$
   avec $v = (y + z, y, z)$ dans F et $w = (x - y - z, 0, 0)$ dans G.

Conclusion : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Exemple 1.19. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère le sous-espace vectoriel des fonctions paires $\mathcal{P}$ et le sous-espace vectoriel des fonctions impaires $\mathcal{I}$. Montrons que $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Montrons $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$.
   Soit $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$, c'est-à-dire que f est à la fois une fonction paire et impaire. Il s'agit de montrer que f est la fonction identiquement nulle. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $f(-x) = f(x)$ (car f est paire) et $f(-x) = -f(x)$ (car f est impaire), alors $f(x) = -f(x)$, ce qui implique $f(x) = 0$. Ceci est vrai quel que soit $x \in \mathbb{R}$; donc f est la fonction nulle. Ainsi $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$.
2. Montrons $\mathcal{P} + \mathcal{I} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Il s'agit de montrer que f peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
   Analyse. Si $f = g + h$, avec $g \in \mathcal{P}$, $h \in \mathcal{I}$, alors pour tout x, d'une part, (a) $f(x) = g(x) + h(x)$, et d'autre part, (b) $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$. Par somme et différence de (a) et (b), on tire que
   $$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$
   Synthèse. Pour $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on définit deux fonctions g, h par $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Alors d'une part $f(x) = g(x) + h(x)$ et d'autre part $g \in \mathcal{P}$ (vérifier $g(-x) = g(x)$) et $h \in \mathcal{I}$ (vérifier $h(-x) = -h(x)$). Bilan : $\mathcal{P} + \mathcal{I} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

En conclusion, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont en somme directe dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Notez que, comme le prouvent nos calculs, les g et h obtenus sont uniques.

4.3 Sous-espace engendré

Théorème 1.4

Théorème de structure de l'ensemble des combinaisons linéaires
Soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ un ensemble fini de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors :

— L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

— C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$.

Notation. Ce sous-espace vectoriel est appelé ***sous-espace engendré par*** $v_1, \ldots, v_n$ et est noté $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$. On a donc

$$\boxed{u \in \operatorname{Vect}(v_1,\ldots,v_n) \iff \text{il existe } \lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{K} \quad \text{tels que} \quad u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n}$$

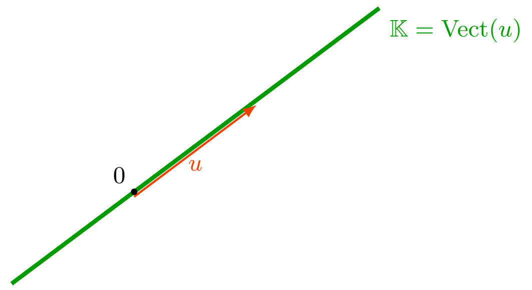
Remarque 1.5

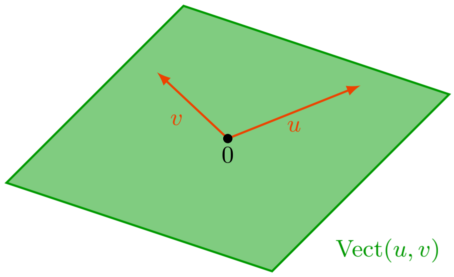
— Dire que $\operatorname{Vect}(v_1,\ldots,v_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $v_1,\ldots,v_n$ signifie que si F est un sous-espace vectoriel de E contenant aussi les vecteurs $v_1,\ldots,v_n$ alors $\operatorname{Vect}(v_1,\ldots,v_n) \subset F$.

— Plus généralement, on peut définir le sous-espace vectoriel engendré par une partie $\mathcal{V}$ quelconque (non nécessairement finie) d'un espace vectoriel : $\operatorname{Vect}\mathcal{V}$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $\mathcal{V}$.

Exemple 1.20.

1. E étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et u un élément quelconque de E, l'ensemble $\operatorname{Vect}(u) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par u. Il est souvent noté $\mathbb{K}u$. Si u n'est pas le vecteur nul, on parle d'une ***droite vectorielle***.





2. Si u et v sont deux vecteurs de E, alors $\operatorname{Vect}(u,v) = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda,\mu \in \mathbb{K}\}$. Si u et v ne sont pas colinéaires, alors $\operatorname{Vect}(u,v)$ est un ***plan vectoriel***.
3. Soient $u = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Déterminons $\mathcal{P} = \operatorname{Vect}(u,v)$.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \operatorname{Vect}(u,v) \quad &\iff \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda u + \mu v \quad \text{pour certains } \lambda,\mu \in \mathbb{R} \\
&\iff \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \\
&\iff \quad \begin{cases} x &= \lambda + \mu \\ y &= \lambda + 2\mu \\ z &= \lambda + 3\mu \end{cases}
\end{aligned}$$

Nous obtenons bien une équation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ passant par l'origine et contenant les vecteurs u et v. On sait en trouver une équation cartésienne : $(x - 2y + z = 0)$.

Exemple 1.21. Soient E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et f_0, f_1, f_2 les applications définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x \quad \text{et} \quad f_2(x) = x^2.$$

Le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{f_0, f_1, f_2\}$ est l'espace vectoriel des fonctions polynômes f de degré inférieur ou égal à 2, c'est-à-dire de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Méthodologie. On peut démontrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E en montrant que F est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs de E.

Exemple 1.22. Est-ce que $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Un triplet de $\mathbb{R}^3$ est élément de F si et seulement si $x = y + z$. Donc u est élément de F si et seulement s'il peut s'écrire $u = (y+z, y, z)$. Or, on a l'égalité

$$(y+z, y, z) = y(1,1,0) + z(1,0,1).$$

Donc F est l'ensemble des combinaisons linéaires de $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$. C'est le sous-espace vectoriel engendré par $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$: $F = \operatorname{Vect}\{(1,1,0),(1,0,1)\}$. C'est bien un plan vectoriel (un plan passant par l'origine).

Preuve: Preuve du théorème 1.4

1. On appelle F l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\{v_1,\ldots,v_n\}$.
   (a) $0_E \in F$ car F contient la combinaison linéaire particulière $0v_1 + \cdots + 0v_n$.
   (b) Si $u, v \in F$ alors il existe $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ et $\mu_1,\ldots,\mu_n \in \mathbb{K}$ tels que $v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$. On en déduit que $u + v = (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \cdots + (\lambda_n + \mu_n)v_n$ appartient bien à F.

(c) De même, $\lambda \cdot u = (\lambda\lambda_1)v_1 + \cdots + (\lambda\lambda_n)v_n \in F$.

Conclusion : F est un sous-espace vectoriel.

2. Si G est un sous-espace vectoriel contenant $\{v_1, \ldots, v_n\}$, alors il est stable par combinaison linéaire ; il contient donc toute combinaison linéaire des vecteurs $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Par conséquent F est inclus dans G : F est le plus petit sous-espace (au sens de l'inclusion) contenant $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Exercices d'applications

1. Trouver des sous-espaces vectoriels distincts F et G de $\mathbb{R}^3$ tels que
   (a) $F + G = \mathbb{R}^3$ et $F \cap G \neq \{0\}$;
   (b) $F + G \neq \mathbb{R}^3$ et $F \cap G = \{0\}$;
   (c) $F + G = \mathbb{R}^3$ et $F \cap G = \{0\}$;
   (d) $F + G \neq \mathbb{R}^3$ et $F \cap G \neq \{0\}$.
2. Soient $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\big\}$ et $G = \mathrm{Vect}\,\big\{(1,1,1)\big\} \subset \mathbb{R}^3$.
   (a) Montrer que F est un espace vectoriel. Trouver deux vecteurs u, v tels que $F = \mathrm{Vect}(u,v)$.
   (b) Calculer $F \cap G$ et montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$. Que conclure ?
3. Soient $A = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $D = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ des matrices de $M_2(\mathbb{R})$.
   (a) Quel est l'espace vectoriel F engendré par A et B ? Idem avec G engendré par C et D.
   (b) Calculer $F \cap G$. Montrer que $F + G = M_2(\mathbb{R})$. Conclure.

5 Application linéaire (début)

5.1 Définition

Nous avons déjà rencontré la notion d'application linéaire dans le cas $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (voir le chapitre « L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ »). Cette notion se généralise à des espaces vectoriels quelconques.

Définition 1.6

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application f de E dans F est une *application linéaire* si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$, pour tous $u, v \in E$;
2. $f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u)$, pour tout $u \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Autrement dit : une application est linéaire si elle « respecte » les deux lois d'un espace vectoriel.

Notation. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$.

5.2 Premiers exemples

Exemple 1.23. L'application f définie par

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (-2x, y+3z) \end{array}$$

est une application linéaire. En effet, soient $u = (x,y,z)$ et $v = (x',y',z')$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel.

$$\begin{array}{rcl} f(u+v) & = & f(x+x', y+y', z+z') \\ & = & \big(-2(x+x'), y+y'+3(z+z')\big) \\ & = & (-2x, y+3z) + (-2x', y'+3z') \\ & = & f(u) + f(v) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda \cdot u) & = & f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ & = & (-2\lambda x, \lambda y + 3\lambda z) \\ & = & \lambda \cdot (-2x, y+3z) \\ & = & \lambda \cdot f(u) \end{array}$$

Toutes les applications ne sont pas des applications linéaires !

Exemple 1.24. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x^2$. On a $f(1) = 1$ et $f(2) = 4$. Donc $f(2) \neq 2 \cdot f(1)$. Ce qui fait que l'on n'a pas l'égalité $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour un certain choix de λ, x. Donc f n'est pas linéaire. Notez que l'on n'a pas non plus $f(x+x') = f(x) + f(x')$ dès que $xx' \neq 0$.

Voici d'autres exemples d'applications linéaires :

1. Pour une matrice fixée $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, l'application $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par
$$f(X) = AX$$
est une application linéaire.
2. L' *application nulle*, notée $0_{\mathcal{L}(E,F)}$:
$$f : E \longrightarrow F \qquad f(u) = 0_F \qquad \text{pour tout } u \in E.$$
3. L' *application identité*, notée id_E :
$$f : E \longrightarrow E \qquad f(u) = u \qquad \text{pour tout } u \in E.$$

5 3 Premières propriétés

Proposition 1.6

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si f est une application linéaire de E dans F, alors :
— $f(0_E) = 0_F$,
— $f(-u) = -f(u)$, pour tout $u \in E$.

Preuve:

Il suffit d'appliquer la définition de la linéarité avec $\lambda = 0$, puis avec $\lambda = -1$.

Pour démontrer qu'une application est linéaire, on peut aussi utiliser une propriété plus « concentrée », donnée par la caractérisation suivante :

Proposition 1.7

Caractérisation d'une application linéaire
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application de E dans F. L'application f est linéaire si et seulement si, pour tous vecteurs u et v de E et pour tous scalaires λ et μ de $\mathbb{K}$,
$$\boxed{f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).}$$

Plus généralement, une application linéaire f préserve les combinaisons linéaires : pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et tous $v_1, \ldots, v_n \in E$, on a
$$f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n).$$

Preuve:

— Soit f une application linéaire de E dans F. Soient $u, v \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. En utilisant les deux axiomes de la définition, on a
$$f(\lambda u + \mu v) = f(\lambda u) + f(\mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$
— Montrons la réciproque. Soit $f : E \to F$ une application telle que $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$ (pour tous $u, v \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$). Alors, d'une part $f(u+v) = f(u) + f(v)$ (en considérant le cas particulier où $\lambda = \mu = 1$), et d'autre part $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ (cas particulier où $\mu = 0$).

Vocabulaire.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

— Une application linéaire de E dans F est aussi appelée *morphisme* ou *homomorphisme* d'espaces vectoriels. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$.
— Une application linéaire de E dans E est appelée *endomorphisme* de E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

Exercices d'applications

Montrer que les applications suivantes $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sont linéaires. Caractériser géométriquement ces applications et faire un dessin.

1. $f_1(x,y) = (-x,-y)$;
2. $f_2(x,y) = (3x,3y)$;
3. $f_3(x,y) = (x,-y)$;
4. $f_4(x,y) = (-x,y)$;
5. $f_5(x,y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$.

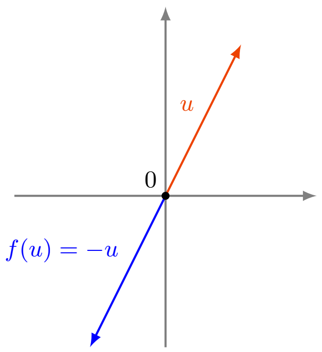
6 Application linéaire (milieu)

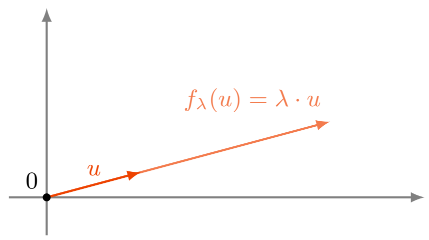
6.1 Exemples géométriques

Symétrie centrale.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On définit l'application f par :

$$\begin{array}{rcl} f : E & \to & E \\ u & \mapsto & -u \end{array}$$

f est linéaire et s'appelle la ***symétrie centrale*** par rapport à l'origine 0_E.





Homothétie.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit l'application f_λ par :

$$\begin{array}{rcl} f_\lambda : E & \to & E \\ u & \mapsto & \lambda u \end{array}$$

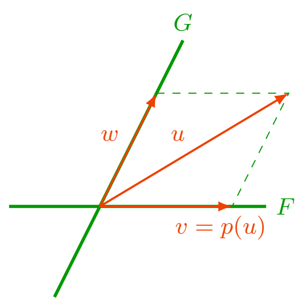
f_λ est linéaire. f_λ est appelée ***homothétie*** de rapport λ.
Cas particuliers notables :

- $\lambda = 1$, f_λ est l'application identité ;
- $\lambda = 0$, f_λ est l'application nulle ;
- $\lambda = -1$, on retrouve la symétrie centrale.

Preuve que f_λ est une application linéaire :

$$f_\lambda(\alpha u + \beta v) = \lambda(\alpha u + \beta v) = \alpha(\lambda u) + \beta(\lambda v) = \alpha f_\lambda(u) + \beta f_\lambda(v).$$

Projection.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, c'est-à-dire $E = F \oplus G$. Tout vecteur u de E s'écrit de façon unique $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$. La ***projection*** sur F parallèlement à G est l'application $p : E \to E$ définie par $p(u) = v$.



— Une projection est une application linéaire.
En effet, soient $u, u' \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On décompose u et u' en utilisant que $E = F \oplus G$: $u = v + w$, $u' = v' + w'$ avec $v, v' \in F$, $w, w' \in G$. Commençons par écrire

$$\lambda u + \mu u' = \lambda(v + w) + \mu(v' + w') = (\lambda v + \mu v') + (\lambda w + \mu w').$$

Comme F et G sont des un sous-espaces vectoriels de E, alors $\lambda v + \mu v' \in F$ et $\lambda w + \mu w' \in G$. Ainsi :

$$p(\lambda u + \mu u') = \lambda v + \mu v' = \lambda p(u) + \mu p(u').$$

— Une projection p vérifie l'égalité $p^2 = p$.
Note : $p^2 = p$ signifie $p \circ p = p$, c'est-à-dire pour tout $u \in E$: $p\big(p(u)\big) = p(u)$. Il s'agit juste de remarquer que si $v \in F$ alors $p(v) = v$ (car $v = v + 0$, avec $v \in F$ et $0 \in G$). Maintenant, pour $u \in E$, on a $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$. Par définition $p(u) = v$. Mais alors $p\big(p(u)\big) = p(v) = v$. Bilan : $p \circ p(u) = v = p(u)$. Donc $p \circ p = p$.

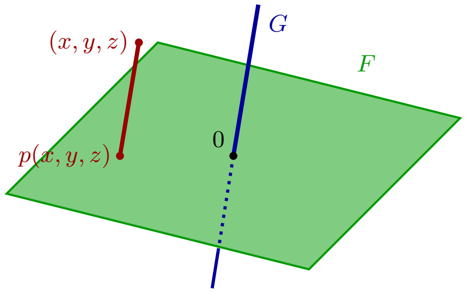
Exemple 1.25. Nous avons vu que les sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\big\} \qquad \text{et} \qquad G = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\big\}$$

sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$: $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ (exemple 1.18). Nous avions vu que la décomposition s'écrivait :

$$(x,y,z) = (y+z, y, z) + (x - y - z, 0, 0).$$

Si p est la projection sur F parallèlement à G, alors on a $p(x,y,z) = (y+z, y, z)$.



Exemple 1.26. Nous avons vu dans l'exemple 1.19 que l'ensemble des fonctions paires $\mathcal{P}$ et l'ensemble des fonctions impaires $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Notons p la projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{I}$. Si f est un élément de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a $p(f) = g$ où

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}. \end{array}$$

6.2 Autres exemples

1. La **dérivation**. Soient $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables avec f' continue et $F = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues. Soit

$$\begin{array}{rcl} d : \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

Alors d est une application linéaire, car $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$ et donc $d(\lambda f + \mu g) = \lambda d(f) + \mu d(g)$.

2. L'**intégration**. Soient $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit

$$\begin{array}{rcl} I : \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f(x) & \longmapsto & \int_0^x f(t)\,dt \end{array}$$

L'application I est linéaire car $\int_0^x \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,dt = \lambda \int_0^x f(t)\,dt + \mu \int_0^x g(t)\,dt$ pour toutes fonctions f et g et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3. Avec les **polynômes**.
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$. Soit $F = \mathbb{R}_{n+1}[X]$ et soit

$$\begin{array}{rrcl} f : & E & \longrightarrow & F \\ & P(X) & \longmapsto & XP(X) \end{array}$$

Autrement dit, si $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$, alors $f(P(X)) = a_n X^{n+1} + \cdots + a_1 X^2 + a_0 X$.
C'est une application linéaire : $f(\lambda P(X) + \mu Q(X)) = \lambda X P(X) + \mu X Q(X) = \lambda f(P(X)) + \mu f(Q(X))$.

4. La **transposition**.
Considérons l'application T de $M_n(\mathbb{K})$ dans $M_n(\mathbb{K})$ donnée par la transposition :

$$\begin{array}{rcl} T : M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^T \end{array}$$

T est linéaire, car on sait que pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ et tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$(\lambda A + \mu B)^T = (\lambda A)^T + (\mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T.$$

5. La **trace**.

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{tr} : M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \operatorname{tr} A \end{array}$$

est une application linéaire car $\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{tr} A + \mu \operatorname{tr} B$.

Exercices d'applications

1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?
   (a) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 3x - 2$
   (b) $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, x', y') \longmapsto x \cdot x' + y \cdot y'$
   (c) $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto f(1)$
   (d) $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f \longmapsto f' + f$
   (e) $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto \int_0^1 |f(t)|\, dt$
   (f) $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto \max_{x\in[0,1]} f(x)$
   (g) $\mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X], \quad P(X) \longmapsto P(X+1) - P(0)$
2. Soient $f, g : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ définies par $A \longmapsto \frac{A+A^T}{2}$ et $A \longmapsto \frac{A-A^T}{2}$. Montrer que f et g sont des applications linéaires. Montrer que $f(A)$ est une matrice symétrique, $g(A)$ une matrice antisymétrique et que $A = f(A) + g(A)$. En déduire que les matrices symétriques et les matrices antisymétriques sont en somme directe dans $M_n(\mathbb{R})$. Caractériser géométriquement f et g.

7 Application linéaire (fin)

7.1 Image d'une application linéaire

Commençons par des rappels. Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Soit A un sous-ensemble de E. L'ensemble des images par f des éléments de A, appelé ***image directe*** de A par f, est noté $f(A)$. C'est un sous-ensemble de F. On a par définition :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Dans toute la suite, E et F désigneront des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ sera une application linéaire.
$f(E)$ s'appelle l'***image*** de l'application linéaire f et est noté $\operatorname{Im} f$.

Proposition 1.8

Structure de l'image d'un sous-espace vectoriel

1. Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.
2. En particulier, $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

Remarque 1.6

On a par définition de l'image directe $f(E)$:
f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Preuve:

Tout d'abord, comme $0_E \in E'$ alors $0_F = f(0_E) \in f(E')$. Ensuite on montre que pour tout couple (y_1, y_2) d'éléments de $f(E')$ et pour tous scalaires λ, μ, l'élément $\lambda y_1 + \mu y_2$ appartient à $f(E')$. En effet :

$$y_1 \in f(E') \iff \exists x_1 \in E', f(x_1) = y_1$$
$$y_2 \in f(E') \iff \exists x_2 \in E', f(x_2) = y_2.$$

Comme f est linéaire, on a

$$\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = f(\lambda x_1 + \mu x_2).$$

Or $\lambda x_1 + \mu x_2$ est un élément de E', car E' est un sous-espace vectoriel de E, donc $\lambda y_1 + \mu y_2$ est bien un élément de $f(E')$.

7 2 Noyau d'une application linéaire

Définition 1.7

Définition du noyau
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Le ***noyau*** de f, noté $\operatorname{Ker}(f)$, est l'ensemble des éléments de E dont l'image est 0_F :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}}$$

Autrement dit, le noyau est l'image réciproque du vecteur nul de l'espace d'arrivée : $\operatorname{Ker}(f) = f^{-1}\{0_F\}$.

Proposition 1.9

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve:

$\operatorname{Ker}(f)$ est non vide car $f(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in \operatorname{Ker}(f)$. Soient $x_1, x_2 \in \operatorname{Ker}(f)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda x_1 + \mu x_2$ est un élément de $\operatorname{Ker}(f)$. On a, en utilisant la linéarité de f et le fait que x_1 et x_2 sont des éléments de $\operatorname{Ker}(f)$: $f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = \lambda 0_F + \mu 0_F = 0_F$.

Exemple 1.27. Reprenons l'exemple de l'application linéaire f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (-2x, y + 3z) \end{array}$$

— Calculons le noyau $\operatorname{Ker}(f)$.

$$\begin{array}{rcl} (x,y,z) \in \operatorname{Ker}(f) & \iff & f(x,y,z) = (0,0) \\ & \iff & (-2x, y+3z) = (0,0) \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} -2x & = & 0 \\ y + 3z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff & (x,y,z) = (0, -3z, z), \quad z \in \mathbb{R} \end{array}$$

Donc $\operatorname{Ker}(f) = \{(0, -3z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Autrement dit, $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\{(0, -3, 1)\}$: c'est une droite vectorielle.

— Calculons l'image de f. Fixons $(x', y') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} (x', y') = f(x,y,z) & \iff & (-2x, y+3z) = (x', y') \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} -2x & = & x' \\ y + 3z & = & y' \end{array} \right. \end{array}$$

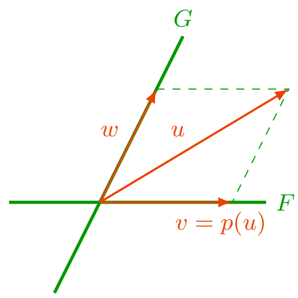
On peut prendre par exemple $x = -\frac{x'}{2}$, $y' = y$, $z = 0$. Conclusion : pour n'importe quel $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, on a $f(-\frac{x'}{2}, y', 0) = (x', y')$. Donc $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2$, et f est surjective.

Exemple 1.28. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par $f(X) = AX$. Alors $\operatorname{Ker}(f) = \{X \in \mathbb{R}^p \mid AX = 0\}$: c'est donc l'ensemble des $X \in \mathbb{R}^p$ solutions du système linéaire homogène $AX = 0$. On verra plus tard que $\operatorname{Im}(f)$ est l'espace engendré par les colonnes de la matrice A.

Le noyau fournit une nouvelle façon d'obtenir des sous-espaces vectoriels.

Exemple 1.29. Un plan $\mathcal{P}$ passant par l'origine, d'équation $(ax + by + cz = 0)$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet, soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y, z) = ax + by + cz$. Il est facile de vérifier que f est linéaire, de sorte que $\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\} = \mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel.

Exemple 1.30. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires : $E = F \oplus G$. Soit p la projection sur F parallèlement à G. Déterminons le noyau et l'image de p.



Un vecteur u de E s'écrit d'une manière unique $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$ et par définition $p(u) = v$.

— $\operatorname{Ker}(p) = G$: le noyau de p est l'ensemble des vecteurs u de E tels que $v = 0$, c'est donc G.
— $\operatorname{Im}(p) = F$. Il est immédiat que $\operatorname{Im}(p) \subset F$. Réciproquement, si $u \in F$ alors $p(u) = u$, donc $F \subset \operatorname{Im}(p)$.

Conclusion :

$$\operatorname{Ker}(p) = G \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(p) = F.$$

Théorème 1.5

Caractérisation des applications linéaires injectives
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Alors :

$$\boxed{f \text{ injective} \iff \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}}$$

Autrement dit, f est injective si et seulement si son noyau ne contient que le vecteur nul. En particulier, pour montrer que f est injective, il suffit de vérifier que :

$$\text{si } f(x) = 0_F \text{ alors } x = 0_E.$$

Preuve:

— Supposons que f soit injective et montrons que $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$. Soit x un élément de $\operatorname{Ker}(f)$. On a $f(x) = 0_F$. Or, comme f est linéaire, on a aussi $f(0_E) = 0_F$. De l'égalité $f(x) = f(0_E)$, on déduit $x = 0_E$ car f est injective. Donc $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$.
— Réciproquement, supposons maintenant que $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$. Soient x et y deux éléments de E tels que $f(x) = f(y)$. On a donc $f(x) - f(y) = 0_F$. Comme f est linéaire, on en déduit $f(x - y) = 0_F$, c'est-à-dire $x - y$ est un élément de $\operatorname{Ker}(f)$. Donc $x - y = 0_E$, soit $x = y$.

Exemple 1.31. Considérons, pour $n \geqslant 1$, l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_{n+1}[X] \\ P(X) &\longmapsto X \cdot P(X). \end{aligned}$$

Étudions d'abord le noyau de f : soit $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $X \cdot P(X) = 0$. Alors

$$a_n X^{n+1} + \cdots + a_1 X^2 + a_0 X = 0.$$

Ainsi, $a_i = 0$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ et donc $P(X) = 0$. Le noyau de f est donc nul : $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$.
L'espace $\operatorname{Im}(f)$ est l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ sans terme constant : $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\{X, X^2, \ldots, X^{n+1}$
Conclusion : f est injective, mais n'est pas surjective.

7.3 L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Remarquons tout d'abord que, similairement à l'exemple 1.4, l'ensemble des applications de E dans F, noté $\mathcal{F}(E, F)$, peut être muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe, définies de la façon suivante : f, g étant deux éléments de $\mathcal{F}(E, F)$, et λ étant un élément de $\mathbb{K}$, pour tout vecteur u de E,

$$(f+g)(u) = f(u) + g(u) \qquad \text{et} \qquad (\lambda \cdot f)(u) = \lambda f(u).$$

Proposition 1.10

L'ensemble des applications linéaires entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, noté $\mathcal{L}(E, F)$, muni des deux lois définies précédemment, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Preuve:

L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est inclus dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(E, F)$. Pour montrer que $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, il suffit donc de montrer que $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$:

— Tout d'abord, l'application nulle appartient à $\mathcal{L}(E, F)$.

— Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, et montrons que $f+g$ est linéaire. Pour tous vecteurs u et v de E et pour tous scalaires α, β de $\mathbb{K}$,

$$\begin{array}{rcll} (f+g)(\alpha u + \beta v) & = & f(\alpha u + \beta v) + g(\alpha u + \beta v) & (\text{définition de } f+g) \\ & = & \alpha f(u) + \beta f(v) + \alpha g(u) + \beta g(v) & (\text{linéarité de } f \text{ et de } g) \\ & = & \alpha\left(f(u) + g(u)\right) + \beta\left(f(v) + g(v)\right) & (\text{propriétés des lois de } F) \\ & = & \alpha(f+g)(u) + \beta(f+g)(v) & (\text{définition de } f+g) \end{array}$$

$f+g$ est donc linéaire et $\mathcal{L}(E, F)$ est stable pour l'addition.

— Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, et montrons que λf est linéaire.

$$\begin{array}{rcll} (\lambda f)(\alpha u + \beta v) & = & \lambda f(\alpha u + \beta v) & (\text{définition de } \lambda f) \\ & = & \lambda\left(\alpha f(u) + \beta f(v)\right) & (\text{linéarité de } f) \\ & = & \alpha \lambda f(u) + \beta \lambda f(v) & (\text{propriétés des lois de } F) \\ & = & \alpha(\lambda f)(u) + \beta(\lambda f)(v) & (\text{définition de } \lambda f) \end{array}$$

λf est donc linéaire et $\mathcal{L}(E, F)$ est stable pour la loi externe.

$\mathcal{L}(E, F)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.

En particulier, $\mathcal{L}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, E)$.

7.4 Composition et inverse d'applications linéaires

Proposition 1.11

Composée de deux applications linéaires
Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. Alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Remarque 1.7

En particulier, le composé de deux endomorphismes de E est un endomorphisme de E. Autrement dit, $\circ$ est une loi de composition interne sur $\mathcal{L}(E)$.

Preuve:

Soient u et v deux vecteurs de E, et α et β deux éléments de $\mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{array}{rcll} (g \circ f)(\alpha u + \beta v) & = & g\left(f(\alpha u + \beta v)\right) & (\text{définition de } g \circ f) \\ & = & g\left(\alpha f(u) + \beta f(v)\right) & (\text{linéarité de } f) \\ & = & \alpha g\left(f(u)\right) + \beta g\left(f(v)\right) & (\text{linéarité de } g) \\ & = & \alpha(g \circ f)(u) + \beta(g \circ f)(v) & (\text{définition de } g \circ f) \end{array}$$

La composition des applications linéaires se comporte bien :

$$g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2 \quad (g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f \quad (\lambda g) \circ f = g \circ (\lambda f) = \lambda (g \circ f)$$

Vocabulaire.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

— Une application linéaire ***bijective*** de E sur F est appelée ***isomorphisme*** d'espaces vectoriels. Les deux espaces vectoriels E et F sont alors dits ***isomorphes***.

— Un endomorphisme bijectif de E (c'est-à-dire une application linéaire bijective de E dans E) est appelé ***automorphisme*** de E. L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E)$.

Proposition 1.12

Linéarité de l'application réciproque d'un isomorphisme
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si f est un isomorphisme de E sur F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.

Preuve:

Comme f est une application bijective de E sur F, alors f^{-1} est une application bijective de F sur E. Il reste donc à prouver que f^{-1} est bien linéaire. Soient u' et v' deux vecteurs de F et soient α et β deux éléments de $\mathbb{K}$. On pose $f^{-1}(u') = u$ et $f^{-1}(v') = v$, et on a alors $f(u) = u'$ et $f(v) = v'$. Comme f est linéaire, on a

$$f^{-1}(\alpha u' + \beta v') = f^{-1}(\alpha f(u) + \beta f(v)) = f^{-1}(f(\alpha u + \beta v)) = \alpha u + \beta v$$

car $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$ (où id_E désigne l'application identité de E dans E). Ainsi

$$f^{-1}(\alpha u' + \beta v') = \alpha f^{-1}(u') + \beta f^{-1}(v'),$$

et f^{-1} est donc linéaire.

Exemple 1.32. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + 3y, x + y)$. Il est facile de prouver que f est linéaire. Pour prouver que f est bijective, on pourrait calculer son noyau et son image. Mais ici nous allons calculer directement son inverse : on cherche à résoudre $f(x, y) = (x', y')$. Cela correspond à l'équation $(2x + 3y, x + y) = (x', y')$ qui est un système linéaire à deux équations et deux inconnues. On trouve $(x, y) = (-x' + 3y', x' - 2y')$. On pose donc $f^{-1}(x', y') = (-x' + 3y', x' - 2y')$. On vérifie aisément que f^{-1} est l'inverse de f, et on remarque que f^{-1} est une application linéaire.

Exemple 1.33. Plus généralement, soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par $f(X) = AX$ (où A est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$). Si la matrice A est inversible, alors f^{-1} est une application linéaire bijective et est définie par $f^{-1}(X) = A^{-1}X$.
Dans l'exemple précédent,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercices d'applications

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (-x, y + z, 2z)$. Montrer que f est une application linéaire. Calculer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. f admet-elle un inverse ? Même question avec $f(x, y, z) = (x - y, x + y, y)$.
2. Soient E un espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces tels que $E = F \oplus G$. Chaque $u \in E$ se décompose de manière unique $u = v + w$ avec $v \in F$, $w \in G$. La *symétrie* par rapport à F parallèlement à G est l'application $s : E \to E$ définie par $s(u) = v - w$. Faire un dessin. Montrer que s est une application linéaire. Montrer que $s^2 = \mathrm{id}_E$. Calculer $\mathrm{Ker}(s)$ et $\mathrm{Im}(s)$. s admet-elle un inverse ?
3. Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $P(X) \mapsto P''(X)$ (où P'' désigne la dérivée seconde). Montrer que f est une application linéaire. Calculer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. f admet-elle un inverse ?

8 Bases

8 1 Famille génératrice

Définition 1.8

Soit E un espace vectoriel et $(u_1, \cdots, u_n)$ un famille de vecteur de E.
$(u_1, \cdots, u_n)$ est génératrice de F si $F = \text{Vect}\,(u_1, \cdots, u_n)$

Remarques 1.1

- $F = \text{Vect}\,(u_1, \cdots, u_n)$ alors pour tout vecteur de u de F,
  il existe une écriture (des réels $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tels que) $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$
- Si on ajoute des vecteurs à une famille génératrice, la famille résultante (sur-famille) est encore génératrice.
- Si on change l'ordre des vecteurs, la famille reste génératrice.

8 2 Famille libre

Définition 1.9

E un espace vectoriel. Une famille $(u_1, \cdots, u_n)$ de vecteurs de E est libre si pour tous réels $\alpha_{1,} \cdots, \alpha_n$
si $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$ **alors** $\alpha_1 = 0, \ \cdots, \alpha_n = 0$.

Remarques 1.2

- Si $(u_1, \cdots, u_n)$ est libre et que $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n$ alors ?
  Si l'écriture $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ existe, elle *est unique*.
- Si on retire des vecteurs d'une famille libre, la famille résultante (sous-famille)est encore libre.

Exercices d'applications

1. Si on retire des vecteurs d'une famille libre, la famille résultante (sous-famille)est encore libre.
2. Montrer que les familles suivantes sont libres :
   (qu'est-ce qu'un vecteur nul ?)
   $((1,0,1)\ ,\ (1,1,0)\ ,(0,1,1))$
   $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\right)$
   $(\ln\ , \exp)$ dans $\mathcal{A}\,(]0, +\infty[\ ,\ \mathbb{R})$
   $\left(X^2 + X + 1\ , X^2 + 2X + 2\right)$
3. Les familles suivantes sont-elles libre ?
   $((1,2)\,,(1,2))$
   $((1,2,1)\ ,\ (2,1,2)\ ,\ (6,5,6))$
   $\left(X\ ,\ X^2\right)$
4. Montrer que $((1,0,0)\,,(-1,1,0)\,,(1,0,1))$ est libre.

8 3 Base et coordonnées

Définition 1.10

E un espace vectoriel.
$\mathcal{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ est une base de E si elle est génératrice de E et libre.

Cela signifie que $u_1, \cdots, u_n$ sont vecteurs de E et que
pour tout u de E *il existe des uniques* $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tels que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$.
Ce sont les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice Soit $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y + z = 0\right\}$
Montrer que E est un espace vectoriel et en déterminer une base $\mathcal{B}$.

Notation On notera $\text{coord}_{\mathcal{B}}(u)$ les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ et $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice colonne de ses coordonnées.
Comment trouver le vecteur à partir de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$?
Comment trouver les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ à partir du vecteur ?

Exercice Avec l'espace vectoriel E et la base $\mathcal{B}$ ci dessus,
déterminer le vecteur de coordonnées $(1,2)$ dans $\mathcal{B}$.
Montrer que $(1,2,1) \in E$ et déterminer ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
Comment montrera-t-on que $\mathcal{C} = ((1,2,1)\ ,\ (1,0,-1))$ est une autre base de E ?

Opérations Les opérations sur les coordonnées se font comme sur les vecteurs :
(Appellation savante : $u \to \text{coord}_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$)
$\text{coord}_{\mathcal{B}}(\alpha u + \beta v) = \alpha \text{coord}_{\mathcal{B}}(u) + \beta \text{coord}_{\mathcal{B}}(v)$; $u = 0 \Longleftrightarrow \text{coord}_{\mathcal{B}}(u) = 0$; Pour chaque $n-$uplet il existe un unique vecteur u de E dont ce sont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Jouer avec les définitions Démontrer les affirmation précédente.

8 4 Les bases canoniques

Théorème Dans $\mathbb{R}^n$ les vecteurs : $u_1 = (1,0,\cdots,0)\,,\, u_2 = (0,1,\cdots,0)\cdots\ ,\ u_n = (0,0,\cdots,1)$ forment une base appelée base canonique de $\mathbb{R}^n$ (généralement appelée $\mathcal{B}$ dans les épreuves de concours)
Pour tout vecteur $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, ses coordonnées dans la base canonique sont : ....

Exercice le démontrer.

Théorème Dans $\mathbb{R}_n[X]$, la famille $\left(1,\ X,\ X^2, \cdots,\ X^n\right)$ forme une base appelée base canonique.
Pour tout poynôme $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ de $\mathbb{R}_n[X]$, ses coordonnées dans la base canonique sont : ....

Théorème Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ les matrices :

$$e_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}, \cdots,\ e_{1,p} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots 0 & 1 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et ainsi de suite

$$e_{n,1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 1 & 0\cdots & 0 \end{pmatrix}, \cdots,\ e_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$$

forment une base appelée base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Exercice Quelles sont les coordonnées de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$?

9 Dimension finie

Grace à la dimension, il suffit de faire le travail à moitié.

9 1 Défintion de la dimension

Définition 1.11 $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel est "de dimension finie" s'il a une famille génératrice finie.

Théorème 1.6 Si $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel est "de dimension finie" il a alors une base ayant un nombre fini de vecteurs.

Méthode Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille génératrice de E liée.
Il existe alors une combiniaison linéaire $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$ nulle à coefficients non tous nuls (α_n par exemple).
Alors u_n est combinaison linéaire des autres (comment ?)
Alors $(u_1, \cdots, u_{n-1})$ est encore génératrice de E, en effet :
Comme $(u_1, \cdots, u_n)$ est génératrice de E, pour tout vecteur u de E, il existe $(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ réels tels que $u = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n$
Ce qui se réécrit en combinaison linéaire de $(u_1, \cdots, u_{n-1})$ (comment ?)
Conclusion : en retirant un vecteur combiaison linéaire des autres, la famille résultante est encore génératrice.
Pour obtenir une base, il suffit alors de réitérer le procédé ; jusqu'à quand ?. (récurrence décroissante)

Exercice Soit $E = \text{Vect}\left((1,1,3)\ ,\ (1,-1,1)\ ,\ (1,0,2)\ ,\ (1,3,5)\right)$
Déterminer une base de E.

Théorème 1.7

définition de la dimension
(admis) Si E est de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre de vecteurs.
Le nombre de vecteurs d'une base est appelé dimension de E.

Convention Si $E = \{0\}$ (réduit au vecteur nul) alors $\dim(E) = 0$
Références $\dim(\mathbb{R}^n) = n\ ;\ \dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1\ ;\ \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = n \cdot p$