Université Chouaib Doukkali
Faculté Polydisciplinaire
Sidi Bennour

Analyse I

Info & Maths-Appl
S1-Automne 2019
Session de Rattrapage

Contrôle Final

Durée: 1H30mn, 14 Janvier 2020

Exercice 1 5 pts

On considère la fonction f_n définie sur $[0,\ 1]$ par :

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) \text{ et la suite } (u_n) \text{ définie par } u_n = f_n(1).$$

1. Montrer que f_n est dérivable et que $f_n'(x) = \mathrm{e}^{-x}\dfrac{x^n}{n!}$.
2. En appliquant l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\left|\dfrac{u_n}{\mathrm{e}} - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{n!}$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite notée par $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Exercice 2 4 pts

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 en zéro des fonctions f et g définies ci-dessous.
   $f(x) = \sin x - x$ et $g(x) = \cos x - 1$
2. Calculer la limite suivante $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x(\cos x - 1)}$

Exercice 2 7 pts

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_n = \dfrac{2}{u_n} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$

1. Calculer v_0, u_1, v_1, u_2 et v_2 . Donner les résultats sous forme de fractions irréductibles
2. Montrer que les deux suite (u_n) et (v_n) sont majorées par 2 et minorées par 1
3. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$ **(1)**
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n \geqslant v_n$
5. Montrer que $u_n)$ est décroissante , et (v_n) est croissante.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n - v_n \leqslant 1$ et en déduire que et en déduire que : $(u_n - v_n)^2 \leqslant u_n - v_n$ **(2)**
7. Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}$ $u_{n+1} - v_{n++1} \leqslant \dfrac{1}{4}(u_n - v_n)$ (on pourra utiliser les relations **(1) et (2)**
8. En déduire que : pour tout entier n de $\mathbb{N}$ $u_n - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$
9. Montrer que : les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et donner leur limite commune ℓ
10. une suite de nombre rationnels qui est convergente ; a-t-elle forcement pour limite un nombre rationnel ?

Exercice 4 4 pts

1. Montrer que la fonction ln est concave.
2. En déduire que pour tous $x, y \in]1,\ +\infty[$, montrer que $\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$.