Les nombres complexes

Exercice 1 Les points A, B et C ont pour affixe respective $-2+i$, $3+3i$, $1+\frac{11}{5}i$.

a) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b) En déduire que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 2 On considère dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixe $z_A = 3+i$, $z_B = 2-2i$, $z_C = 2i$ et $z_D = 1+5i$.

a) Faire une figure
b) Montrer de deux façons différentes que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 3

1. Donner la forme algébrique de : i^{12} ; i^{2012} ; i^{37} ; i^{-13}
2. Calculer la somme : $S = 1 + i + i^2 + \cdots + i^{2019}$
3. On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer $1 + j + j^2$.

Exercice 4 Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$.

a) Montrer que pour tout complexe z, $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.
b) Vérifier que $1+i$ est une racine de P, et en déduire une autre racine complexe de P.

Exercice 5 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe tels que $Z = z^2 + \overline{z}$ soit réel.

Exercice 6 Montrer que l'équation $z^2 - 3\overline{z} + 2 = 0$ admet quatre solutions dans $\mathbb{C}$.

Exercice 7 Dans le plan complexe, A, B et C sont les points d'affixes :

$$z_A = 1+i\ ,\ z_B = 4+5i\ ,\ z_C = 5-2i\ .$$

1. Montrer que $AB = AC$, puis que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2}$.
2. Déterminer l'affixe du point K tel que le quadrilatère $ABKC$ soit un rectangle.
3. a) Déterminer l'affixe du point G tel que le quadrilatère $AGBC$ soit un parallélogramme.
   b) Vérifier que B est le milieu du segment $[GK]$.

Exercice 8 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

• $|z-6i| = 3$ • $|z+3-2i| < 2$ • $|z+2| = |z-3i+1|$ • $|2-iz| = |z+5|$ • $\left|\frac{z+2i}{z+1-2i}\right| > 1$

Exercice 9 Ecrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes :

• 5 • $4+4i$ • $\frac{3}{2}i$ • $\frac{2}{1-i}$ • $\sqrt{3}-i$ • $\left(\sqrt{3}-i\right)^2$ • $\left(\sqrt{3}-i\right)^3$

Exercice 10 Ecrire le nombre complexe $(\sqrt{3}-i)^{10}$ sous forme algébrique.

Exercice 11

a) Ecrire sous forme trigonométrique les complexes $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 1 - i$, et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

b) Déterminer la forme algébrique de Z, et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 12 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

- $\arg(z) = \dfrac{\pi}{6}$ • $|z-3| = |z+2i|$ • $|z+1-2i| < \sqrt{5}$ • $\left|\overline{z} + \dfrac{i}{2}\right| = 4$
- $\arg(z+i) = \pi$ • $\arg\left(\dfrac{1}{iz}\right) = \pi$ • $\arg\left(\dfrac{z+1}{z-2i}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 13 On considère l'équation $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$, où θ est un réel donné dans $[0; 2\pi[$.

a) Vérifier que le discriminant de cette équation est $\Delta = -4\sin^2(\theta)$.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation proposée, en discutant suivant les valeurs de θ, en donnant les solutions sous formes exponentielle.

Exercice 14

a) Donner sous forme exponentielle les solutions de l'équation : $z^2 + z + 1 = 0$.

b) Soit α un réel donné. Factoriser l'expression : $z^2 - e^{2i\alpha}$.

c) En déduire les solutions de l'équation : $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

Exercice 15 On considère l'équation du second degré (E) : $z^2 + (1 + i\sqrt{3})z - 1 = 0$.

1. Déterminer le discriminant Δ de cette équation. Écrire Δ sous forme exponentielle.
2. Donner un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$. Écrire δ sous forme algébrique.
3. Vérifier que les formules usuelles du second degré, $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et son conjugué $z_2 = \overline{z_1}$ donnent bien deux solutions de (E).

Exercice 16 Soit le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = 3z^3 + (1+6i)z^2 + 2(8+i)z + 32i$.

a) Vérifier que $z_0 = -2i$ est une racine de P.

b) En déduire une factorisation de P, et déterminer alors toutes les racines de P.

Exercice 17

1. x est un nombre réel. Ecrire la forme algébrique et la forme exponentielle de $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right)e^{ix}$.
2. Utiliser la question précédente pour résoudre dans $]-\pi; \pi[$ l'équation $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}$.

Exercice 18 On considère le nombre complexe $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

1. Écrire z^2 sous forme trigonométrique
2. Déterminer le module, et un argument de z
3. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$