Université Chouaib Doukali: EST de Sidi Bennour
Génie Informatique
2020-2021

T.D.1. Analyse1

Exercise 1

Etudier limites des suites:
$a)u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $\qquad b)u_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$

Exercise 2

Calculer la limite des suites suivantes:
$a)u_n = \frac{\sqrt{n}\sin n}{n+1}$ $\qquad b)u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$

Exercise 3

On se propose d'etudier la suite (u_n); $u_n = x^n, \quad x \in \mathbb{R}$.
1- Cas $x > 1, \quad$ poser $x = 1 + a; a > 0$ et montrer que $(1+a)^n > 1 + na, \quad \forall n \geq 2$. Déduire $\lim_{n\to\infty} u_n$.
2- Cas $0 < x < 1$; Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
3-Etudier le cas $x = 1$ et $x \leq 0$.
4- Soeint $a, b > 0$. Etudier la suite u_n; $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$.

Exercise 4

On considére la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

1-Montre que u_n est croissante.
2-On suppose dans cette question que $\alpha = 1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} > u_n + \frac{1}{2}$.
3-En déduire, en utilisant le critére de Cauchy que la suite u_n diverge.
4-On suppose dans cette question que $\alpha = 2$. Montrer que $\forall k \geq 2$.

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

5- En déduire que la suite $(u_n)_n$ est majorée par 2 (et donc convergente).
6- On suppose dans cette question que $\alpha \geq 3$ un entier. Montrer que $(u_n)_n$ converge.

Exercise 5 Soit $(u_n)_n$ définie pa la donnée de deux nombre réels u_0, u_1 et par la relation

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1})$$

a- Montrer que $|u_{n+2} - u_{n+1}| = |u_{n+1} - u_n|$ et par récurrence sur n en déduire $|u_{n+2} - u_{n+1}| = \frac{1}{2^{n+1}}|u_1 - u_0|$
b- Montre que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy.