Les Nombres Complexes

0.1 Représentation algébrique

1. Définition

   On appelle **nombre complexe** toute expression de la forme $a+bi$ où a et b sont deux nombres réels et i représente un nouvel élément tel que $i^2 = -1$.

2. Notations

   On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

   L'écriture $z = a + bi$ avec a et b réels est appelée la **forme algébrique** de z.

   a est la **partie réelle** de z et on note $a = Re(z)$.

   b est la **partie imaginaire** de z et on note $b = Im(z)$

3. Egalité

   Soit $z = a + bi$ avec a et b réels et $z' = a' + b'i$ avec a' et b' réels. Alors :

   $$z = z' \text{ si et seulement si } a = a' \text{ et } b = b'$$

4. Propriété

   Un nombre complexe z est un réel si et seulement si $Im(z) = 0$.

5. Définition

   Un nombre complexe z est un **imaginaire pur** si et seulement si $Re(z) = 0$.

6. Opérations dans $\mathbb{C}$

   L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ sont définies comme dans $\mathbb{R}$ en tenant compte de $i^2 = -1$. Plus précisément, si $z = a + bi$ avec a et b réels et $z' = c + di$ avec c et d réels :

   $z + z' = (a + c) + (b + d)i$

   $z \times z' = ac - bd + (ad + bc)i$

   $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{a + bi}{c + di} \times \dfrac{c - di}{c - di} = \dfrac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$

   Les propriétés de ces opérations dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

7. Exemple

   Si $z = 3 + 2i$ et $z' = 4 + 3i$, $z + z' = 7 + 5i, z \times z' = 6 + 17i$ et $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{18}{25} - \dfrac{1}{25}i$

8. Exercices

0.2 Conjugué d'un nombre complexe

Soit $z = a + bi$ avec a et b réels. Le **conjugué** de z, noté $\overline{z}$, est le nombre complexe défini par :

$$\boxed{\overline{z} = a - bi}$$

1. Propriétés

   Soit z et z' deux nombres complexes quelconques.

   (a) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

   (b) $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

   (c) Si $z' \neq 0, \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

   (d) Pour tout naturel $n, \overline{z^n} = (\overline{z})^n$

   (e) Un complexe z est un réel $\Leftrightarrow \overline{z} = z$

(f) Un complexe z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$

(g) $\overline{\overline{z}} = z$

(h) $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ et $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

(i) Si $z = a + bi$ avec a et b réels,

$$\boxed{z \times \overline{z} = a^2 + b^2}$$

Exemple

Soit n un entier relatif non nul

On considère les nombres complexe suivant $u_n = (1+i)^n + (1-i)^n$ et $v_n = (1+i)^n - (1-i)^n$

Montrer que u_n est un réel et que v_n est un imaginaire pur

0.3 Représentation Géométrique

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

A tout point M du plan de coordonnées $(a; b)$ est associé le nombre complexe $z = a + bi$ appelé **affixe** du point M.

Le point M de coordonnées $(a; b)$ est appelé **image** du nombre complexe $z = a + bi$. On note $M(a + bi)$

On dit aussi que le nombre complexe $z = a + bi$ est **l'affixe** du vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(a; b)$ et que $\vec{u}$ est le **vecteur image** de z.

2. Propriétés

(a) Si A et B sont deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$. On écrit :

$$\boxed{\text{Affixe}(\overrightarrow{AB}) = z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$$

(b) Soit $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ deux vecteurs quelconques d'affixes respectives z_1 et z_2 et k un réel. Alors :

$$\text{Affixe}(\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}) = z_1 + z_2$$
$$\text{Affixe}(k\overrightarrow{w_1}) = kz_1$$

(c) Soit I le milieu de $[AB]$, z_A, z_B et z_I les affixes respectives de A, B et I alors :

$$\boxed{z_I = \frac{z_A + z_B}{2}}$$

(d) Soit G le barycentre du triangle ABC, z_A, z_B z_C, z_G les affixes respectives de A, B, C et G alors :

$$\boxed{z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}}$$

Preuve : Exercice :

Exercices :

3. Module d'un nombre complexe

Le **module** du nombre complexe $z = a + bi$ avec a et b réels est le réel positif, noté $|z|$, défini par :

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \times \overline{z}}}$$

4. Interprétation géométrique
   Le module de z est la distance entre
   l'origine O du repère et le point $M(z)$
   $OM = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$
5. Propriétés
   Soit z et z' deux nombres complexes quelconques, et n un entier relatif non nul. Alors on a :
   (a) $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
   (b) Si $z' \neq 0, \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
   (c) Si $z \neq 0, |z^n| = |z|^n$
   (d) Si $z \neq 0, |\bar{z}| = |z|$
   (e) Inégalité triangulaire : $|z+z'| \leq |z| + |z'|$
   (f) Si A et B sont deux points du plan
   d'affixes respectives z_A et z_B alors :

   $$\boxed{AB = |z_B - z_A|}$$

   Exercices :

6. Argument d'un nombre complexe non nul
   Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$.
   Soit z un nombre complexe non nul de point image
   M de coordonnées $(a;b)$.On appelle **argument** de z
   et on note arg z toute mesure en radians de l'angle
   orienté $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$
   Remarque Un nombre complexe non nul z a une infinité d'arguments.
   Si θ est l'un d'entre eux, les autres sont de la forme
   $\theta + 2\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   On note arg $z = \theta$ [mod 2π]. On lit "θ modulo 2π"
   Le réel 0 n'a pas d'argument.
7. Forme trigonométrique d'un complexe non nul
   L'écriture : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = |z|$ et arg $z = \theta$ [mod 2π] est appelée **forme trigonométrique** de z
8. Lien entre forme algébrique et forme trigonométrique
   (a) Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique
   z est un complexe non nul qui s'écrit $z = a + bi$ avec a et b réels.
   On note : $r = |z|$ et θ un argument de z.
   Si on connaît r et θ alors : $\boxed{a = r\cos\theta \text{ et } b = r\sin\theta}$
   (b) Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique Si on connaît a et b alors :

   $$\boxed{r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \text{ et } \theta \text{ défini par : } \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} \end{cases}}$$

9. Égalité entre deux complexes écrits sous forme trigonométrique
Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = |z|$ et $\arg z = \theta \ [\text{mod } 2\pi]$
et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ avec $r' = |z'|$ et $\arg z' = \theta' \ [\text{mod } 2\pi]$ alors :

$$\boxed{z = z' \Leftrightarrow r = r' \text{ et } \theta = \theta' \ [\text{mod } 2\pi]}$$

10. Théorème
Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$ alors $|z| = r$ et $\arg z = \theta \ [\text{mod } 2\pi]$
Démonstration
$|z|^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2 \Rightarrow |z| = r$
Soit θ' un argument de z. On a : $r(\cos\theta + i\sin\theta) = r(\cos\theta' + i\sin\theta') \Rightarrow \theta = \theta' \ [\text{mod } 2\pi]$

11. Argument d'un produit
Soit z et z' deux complexes non nuls avec :
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = |z|$ et $\arg z = \theta \ [\text{mod } 2\pi]$
et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ avec $r' = |z'|$ et $\arg z' = \theta' \ [\text{mod } 2\pi]$
On a :

$$\begin{aligned} z \times z' &= rr'(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= rr'((\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') \\ &= rr'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')) \end{aligned}$$

Comme $rr' > 0$, alors $\arg(z \times z') = \theta + \theta'$
Propriété Soit z et z' deux complexes non nuls. Alors :

$$\boxed{\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') \ [\text{mod } 2\pi]}$$

Exercice d'application : On considère les deux nombres complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i$
(a) Écrire $z_1.z_2$ sous forme algébrique
(b) Écrire z_1, z_2 sous forme trigonométrique
(c) Écrire $z_1.z_2$ sous forme trigonométrique et en déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

12. Propriétés
Pour tous nombres complexes z et z' non nuls :
(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\arg\ (z^n) = n \times \arg z \ [\text{mod } 2\pi]$
(b) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg\ (z) \ [\text{mod } 2\pi]$
(c) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\ (z) - \arg\ (z') \ [\text{mod } 2\pi]$
(d) $\arg \overline{z} = -\arg z \ [\text{mod } 2\pi]$

Démonstration
Exercice : On considère le nombre complexe $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
(a) Écrire z^2 sous forme trigonométrique
(b) Déterminer le module, et un argument de z
(c) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Exercice :

13. <u>Angles orientés et arguments</u>
Soit A et B sont deux points du plan muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$) d'affixes respectives z_A et z_B et M est le point d'affixe z_M tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.
On sait que : $z_M = z_B - z_A$ et d'autre part : $\arg(z_M) = \left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AB}\right)$. On obtient donc :
$$\boxed{\arg\left(z_B - z_A\right) = \left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AB}\right)}$$
14. <u>Notation exponentielle</u>
Soit f la fonction qui à tout réel θ associe le complexe $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$
Pour tous réels θ et θ', on a vu que : $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$ et $f(0) = 1$: f vérifie une relation fonctionnelle analogue à celle de la fonction exponentielle.
<u>Notation</u> Pour tout nombre réel θ, on note $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$
15. <u>Définition</u>
Une **forme exponentielle** d'un nombre complexe z non nul d'argument θ est :
$$z = |z|e^{i\theta}$$
16. <u>Propriétés</u> Pour tous nombres réels θ et θ' et n entier naturel :
(a) $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) = \theta[2\pi]$
(b) $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
(c) $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
(d) $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i\theta n}$ (formule de Moivre)
(e) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

0.4 Équations de second degrees à coefficients réels

On considère l'équation $aZ^2 + bZ + c = 0$ dont l'inconnue est Z est un nombre complexe et les coefficients a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$. On note Δ le réel $b^2 - 4ac$ appelé le discriminant.

1. Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions réelles
$Z_1 \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2} \qquad Z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
2. Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une solution réelle $-\dfrac{b}{2a}$.
3. Si $\Delta < 0$ alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées
$Z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2} \qquad Z_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Exercices :
Exercices :
Devoir maison :

0.5 Équations de second degrees à coefficients Complexes

1. <u>Racines carrée d'un nombre complexe</u>
<u>Définition</u> On dit que δ est une racine carrée de Z si $Z = \delta^2$.
On pose $Z = X + iY$ et $\delta = x + iy$; alors :
$$\delta \text{ est une racine carrée de } Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |Z| \\ x^2 - y^2 = X \\ xy \text{ est du signe de } Y \end{cases}$$

Les deux racines carrées de Z sont donc

$$\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{X^2+Y^2}+X}{2}}+i\ \text{signe}\,(Y)\sqrt{\frac{\sqrt{X^2+Y^2}-X}{2}}\right)$$

Remarque EVITER D ÉCRIRE $\sqrt{Z}$, sauf si Z est réel $\geqslant 0$; voici ce qui peut arriver si vous le faites :

$$-1=i.i=\sqrt{-1}\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)\,(-1)}=\sqrt{1}=1$$

Forme canonique de az^2+bz+c.
si $a\neq 0$, $\Delta=b^2-4ac$ (discriminant)

$$az^2+bz+c=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)=\frac{1}{4a}\left((2az+b)^2-\Delta\right)$$

On considère l'équation $aZ^2+bZ+c=0$ dont l'inconnue est Z est un nombre complexe et les coefficients a,b et c sont des réels avec $a\neq 0$. On note Δ le réel b^2-4ac appelé le discriminant. si $a\neq 0$, l'équation $az^2+bz+c=0$ possède toujours deux solutions, confondues si $\Delta=0$:

$$\boxed{\frac{-b\pm\delta}{2a}\ \text{où } \delta \text{ est l'une des racines carrées de } \Delta}$$

1 Racine nième d'un nombre complexe

Définition Soient z et $Z\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}$

$$z \text{ est une } \textit{racine } n\textit{-ième} \text{ de } Z \text{ si } z^n=Z$$

1. si $Z\neq 0$ est de module R et d'argument Θ, z possède exactement n racines $n-$ièmes distinctes de même module égal à $\sqrt[n]{R}$ et d'argument :

$$\frac{\Theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\text{ avec } k\in[|0,n-1|]$$

2. les points-images de ces racines forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{R}$; on en déduit que la somme des racines $n-$ièmes d'un complexe est nulle.

Remarque puisqu'il y n racines n-ièmes, ON N'ECRIT JAMAIS DANS UN CALCUL $\sqrt[n]{Z}$ sauf si Z est réel $\geqslant 0$.

Eventuellement, on peut par contre considérer que l'écriture $\sqrt[n]{Z}^{\mathbb{C}}$ représente L'ENSEMBLE des n racines n-ièmes complexes de Z (notation non classique).

Exemples E3 : $\sqrt{1}^{\mathbb{C}}=\{1,-1\}$, $\sqrt{-1}^{\mathbb{C}}=\{i,-i\}$, et déterminer de même les ensembles $\sqrt{i}^{\mathbb{C}}, \sqrt{1+i}^{\mathbb{C}}, \sqrt[3]{-1}^{\mathbb{C}}, \sqrt[4]{-1}^{\mathbb{C}}, \sqrt[6]{-1}^{\mathbb{C}}$.

- construire graphiquement les 8 racines huitième de $(-3+4i)/5$.
- déterminer une valeur approchée d'une racine cinquième de $-2+3i$ à l'aide d'une machine à calculer.
- calculer $(2+i)^3$ et en déduire l'ensemble $\sqrt[3]{2+11i}^{\mathbb{C}}$.

3) Groupe des racines $n-$ièmes de l'unité.

Remarque préalable : l'inverse, le conjugué, le produit de racines $n-$ièmes de l'unité est encore une racine $n-$ième de l'unité.

On verra plus tard que cela implique que l'ensemble $U_n = \sqrt[n]{1}^{\mathbb{C}}$ de ces racines forme un groupe multiplicatif ; on a :

$U_1 = \{1\}, U_2 = \{1, -1\}, U_3 = \{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}\}$; si l'on pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, alors $U_3 = \{1, j, j^2\}$ et l'on a :

$j = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ (forme à utiliser le moins possible)
$j^2 = \overline{j} = \dfrac{1}{j}$
$1 + j + j^2 = 0$

$U_4 = \{$................................$\}, U_6 = \{$..$\}$

Et si $u = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, $U_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \;/\; k \in \mathbb{Z}\right\} = \{1, u, u^2, ..., u^{n-1}\}$

Et comme $u^{n-k} = \overline{u}^k$ on peut écrire :

$$U_n = \left| \begin{array}{l} \{1, u, \overline{u}, u^2, \overline{u}^2, ..., u^p, \overline{u}^p\} \text{ si } n = 2p+1 \\ \{1, ...\} \text{ si } n = 2p \end{array} \right.$$

2 Similitudes directes du plan.

Définition la rotation plane de centre Ω et d'angle θ est l'application $M \mapsto M'$ définie par

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \quad [2\pi] \\ \Omega M = \Omega M' \end{cases}$$

Définition l'homothétie plane de centre Ω et d'angle k est l'application $M \mapsto M'$ définie par

$$\overrightarrow{\Omega M} = k\overrightarrow{\Omega M'}$$

Définition la similitude plane (directe) de centre Ω d'angle θ , de rapport k est la composée (commutative) de la rotation précédente avec l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

Définition

Propriété : multiplier un complexe par le complexe $ke^{i\alpha}$ revient à faire subir à son point image une similitude directe de centre O de rapport k et d'angle α.

Application :

1. Si $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la similitude directe de centre $\Omega(\omega)$ de rapport k et d'angle α, on a :

$$z' - \omega = ke^{i\alpha}(z - \omega)$$

2. Si a et b sont deux complexes, la transformation du plan

$$M(z) \mapsto M'(z') \text{ avec } z' = az + b$$

est

- soit la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(b)$ si $a = 1$.
- soit la similitude directe de centre $\Omega\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$ de rapport $|a|$ d'angle $\arg a$ si $a \neq 1$.

C'est une homothétie ssi a est réel, et une rotation ssi a est de module 1.