

T.D.3. Analyse1

**Exercice 1**

Déterminer les limites suivantes lorsque celle-ci existent.

1-  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{x}$

2-  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sqrt{x}}{\ln x + x}$

3-  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

4-  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \ln \ln x$

5-  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1+x}$

4-  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\arccos x}$

**Exercice 2**

Déterminer les domaines de définitions des fonctions suivantes:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+x}{5-2x}}; \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 5}; \quad h(x) = \ln(4x + 3)$$

**Exercice 3**

Déterminez les limites suivantes lorsque celle-ci existent.

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x^2}$  (b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$  (d)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^n - 1}$

**Exercice 4**

Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 + \sin \frac{1}{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(1 + \exp -x))^{\frac{1}{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$$

**Exercice 5**

Soit  $f; \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue en 0 et en 1 telle que pour chaque  $x \in \mathbb{R}$   $f(x) = f(x^2)$ .

Montrer que  $f$  est constante .

**Exercice 6**

1-Montrer que l'équation  $x^7 + 3x^4 - x - 1 = 0$  admet au moins une solution dans  $[0,1]$ .

2-Montrer que l'équation  $\ln(x^3 + x^2 + x - 3) = 0$  admet une solution unique dans  $]1,2[$

**Exercice 7**

1- Soit  $f$  et  $g$  deux fonction réelle continues sur  $[0,1]$ . On suppose que  $f(0) = g(1) = 0$  et que  $f(1) = g(0) = 1$ , Montrer que:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad \exists x \in [0,1], \quad \text{tel que} \quad f(x) = \lambda g(x)$$

2- Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a,b]$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]a,b[$  tel que  $f(c) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ .