



1. صحیح یا غلط بودن گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل بنویسید.

(الف) یک جمله (Sentence) ارضا پذیر (Satisfiable) است؛ اگر و تنها اگر، در هر مدلی از جهان صحیح باشد.

پاسخ: نادرست. اگر تفسیری از جهان وجود داشته باشد که این جمله تحت آن صحیح باشد؛ ارضا شدنی است. عبارتی که در سوال ذکر شده، تعریف جمله valid (تاتولوژی) است.

(ب) یک پایگاه دانش (KB) استلزام (Entail) می‌کند جمله‌ای مثل α را؛ اگر و تنها اگر، مدلی وجود داشته باشد که تمام جملات پایگاه دانش به علاوه جمله α را، ارضا کند.

پاسخ: نادرست. هر مدلی که تمام جملات پایگاه دانش را ارضا کند، باید بتواند جمله α را هم ارضا کند تا بتوان گفت که KB استلزام می‌کند α را.

(پ) استدلال با زنجیره عقب‌رو (backward-chaining)، همیشه کامل (complete) است.

پاسخ: نادرست. backward-chaining روی پایگاه دانشی که تمام جملاتش horn clause باشند، کامل است.

(ت) اگر KB نمایانگر یک پایگاه دانش یکنواخت (monotonic) باشد و α و β جملات بازنمایی شده با منطق باشند و جمله β

یک جمله همیشه نادرست (Contradiction) باشد، آنگاه نتیجه‌گیری زیر، درست است:

$$\text{if } KB \models \alpha \text{ then } KB \wedge \beta \models \alpha$$

پاسخ: درست. جمله β چه درست باشد چه نادرست، باید $KB \wedge \beta \models \alpha$ باشد تا بتوان گفت پایگاه دانش ما یکنواخت است.

(ث) زنجیر پیش‌رو (forward-chaining) همیشه sound است.

پاسخ: درست.

(ج) هر عبارت معین (definite clause) لزوماً یک عبارت هورن (horn clause) محسوب می‌شود.

پاسخ: درست. عبارت هورن، حداکثر یک لیترال مثبت دارد و عبارت معین، دقیقاً یک لیترال مثبت. بنابراین می‌توان گفت یک عبارت معین همیشه می‌تواند عبارت هورن در نظر گرفته شود اما برعکس آن لزوماً برقرار نیست.

2. جملات زیر را ابتدا با استفاده از منطق مرتبه اول (FOL) بازنمایی کنید. سپس با استفاده از رزولوشن با برهان خلف (Resolution by refutation)، حکم را ثابت کنید.

(الف) همه گردوها گرد هستند.

$$\forall x \text{ Nut}(x) \Rightarrow \text{Circular}(x)$$

(ب) اینطور نیست که هر چیز گردی، خوردنی باشد.

$$\neg(\forall y \text{ Circular}(y) \Rightarrow \text{Edible}(y))$$

(پ) همه گردوها، خوردنی هستند.

$$\forall z \text{ Nut}(z) \Rightarrow \text{Edible}(z)$$

حکم: اینطور نیست که هرچیز گردی، گردو باشد. (هر گردی، گردو نیست ☹)

$$\neg(\forall t \text{ Circular}(t) \Rightarrow \text{Nut}(t))$$

نوشتن جملات به فرم CNF:

(الف)

$$1) \neg \text{Nut}(x) \vee \text{Circular}(x)$$

(ب)

$$\neg[\forall y \text{ Circular}(y) \Rightarrow \text{Edible}(y)] \equiv \exists y \neg[\text{Circular}(y) \Rightarrow \text{Edible}(y)] \equiv \exists y \text{ Circular}(y) \wedge \neg \text{Edible}(y)$$

استفاده از ثابت اسکولم:

$$\text{Circular}(s_0) \wedge \neg \text{Edible}(s_0)$$

$$2) \text{Circular}(s_0)$$

$$3) \neg \text{Edible}(s_0)$$

(پ)

$$4) \neg \text{Nut}(z) \vee \text{Edible}(z)$$

نقیض حکم: هرچیز گردی، گردو است.

$$\forall t \text{ Circular}(t) \Rightarrow \text{Nut}(t)$$

تبدیل نقیض حکم به فرم CNF:

$$5) \neg \text{Circular}(t) \vee \text{Nut}(t)$$

استفاده از رزولوشن:

$$6) \xrightarrow[1,5]{\{x/t\}} \text{Circular}(t) \vee \neg \text{Circular}(t)$$

$$7) \xrightarrow[6,5]{} \text{Nut}(t) \vee \neg \text{Circular}(t)$$

$$8) \xrightarrow[7,4]{\{t/z\}} \neg \text{Circular}(z) \vee \text{Edible}(z)$$

$$9) \xrightarrow[8,2]{\{z/s_0\}} \text{Edible}(s_0)$$

$$10) \xrightarrow[9,3]{} \{\}$$

به تهی رسیدیم، بنابراین نقیض حکم نادرست، و حکم درست است.

3. جملات زیر را با منطق مرتبه اول بازنمایی کنید.

(الف) زهرا دقیقا یک دوست صمیمی دارد.

$$\exists x \text{ Person}(x) \wedge \text{Friend}(\text{Zahra}, x) \wedge [\forall y \text{ Person}(y) \wedge \text{Friend}(\text{Zahra}, y) \Rightarrow y = x]$$

(ب) زهرا حداکثر یک دوست صمیمی دارد.

$$\forall x, y \text{ Person}(x) \wedge \text{Friend}(\text{Zahra}, x) \wedge \text{Friend}(\text{Zahra}, y) \Rightarrow y = x$$

پ) زهرا حداقل یک دوست صمیمی دارد.

$$\exists x \text{ Person}(x) \wedge \text{Friend}(\text{Zahra}, x)$$

ت) بالاترین نمره در کلاس A، همیشه از بالاترین نمره در کلاس B، بالاتر است.

یک تابع با نام MaxScore و یک predicate با نام IsGrater تعریف می‌کنیم. تابع MaxScore دارای یک آرگومان است. این تابع، نام کلاس را به عنوان ورودی گرفته و بالاترین نمره در آن کلاس را به عنوان خروجی برمی‌گرداند. و predicate با نام IsGrater، دو آرگومان دارد که در صورتی که آرگومان اول، از آرگومان دومش بزرگتر باشد، true و در غیر این صورت، false برمی‌گرداند.

$$\text{IsGrater}(\text{MaxScore}(A), \text{MaxScore}(B))$$

ث) پسر عمه‌ی یک نفر، پسر خواهر پدرش است.

$$\forall x, y [\exists z, k \text{ Father}(z, x) \wedge \text{Sister}(k, z) \wedge \text{Son}(y, k)] \Leftrightarrow (y, x) \text{ پسر عمه}$$

4. گزاره‌های زیر با منطق مرتبه اول بازنمایی شده‌اند، آن‌ها را به زبان فارسی بازنویسی کنید.

$$1) \forall x \exists y [(\text{person}(x) \wedge \text{NationalID}(x, y)) \wedge (\forall z \text{ person}(z) \wedge \text{NationalID}(z, y) \Rightarrow z = x)]$$

هر کد ملی، دقیقاً متعلق به یک نفر است. (کد ملی هر کس با دیگری متفاوت است)

$$2) \forall x \exists y [(\text{person}(x) \wedge \text{NationalID}(x, y)) \wedge (\forall z \text{ NationalID}(x, z) \Rightarrow z = y)]$$

هر کسی، یک و فقط یک کد ملی دارد.

5. عبارت $F(x, X, p(x), p(X))$ با کدام عبارت(ها) زیر، قابل یکسان‌سازی (unify کردن) است؟

اگر عبارتی قابل unify کردن با عبارت سوال بود، فرآیند یکسان‌سازی را انجام دهید و اگر نبود، مشخص کنید که الگوریتم unification در کدام مرحله fail می‌کند.

0) $F(x, X, p(x), p(X))$

1) $F(x, x, x, x)$ ✗

یکسان‌سازی آرگومان اول:

یکسان هستند.

یکسان‌سازی آرگومان دوم:

$$\frac{\{x/X\}}{\longrightarrow} F(X, X, X, X)$$

یکسان‌سازی آرگومان سوم:

$$\frac{\{x/X, X/p(x)\}}{\longrightarrow} \text{fail!}$$

در این مرحله، باید X با $p(x)$ را unify کنیم، ولی از آنجایی که هیچ‌یک از آن‌ها، متغیر نیست، الگوریتم unify، Fail می‌کند.

2) $F(x, y, z, x)$ ✓

یکسان‌سازی آرگومان اول:

یکسان هستند.

یکسان‌سازی آرگومان دوم:

$$\xrightarrow{\{y/X\}} F(x, X, z, x)$$

یکسان سازی آرگومان سوم:

$$\xrightarrow{\{y/X, z/p(x)\}} F(x, X, p(x), x)$$

یکسان سازی آرگومان چهارم:

$$\xrightarrow{\{y/X, z/p(x), x/p(X)\}} F(p(X), X, p(x), p(X))$$

بنابراین، توانستیم عملیات unify را انجام دهیم.

3) $F(x, x, y, z)$ ✓

یکسان سازی آرگومان اول:

یکسان هستند.

یکسان سازی آرگومان دوم:

$$\xrightarrow{\{x/X\}} F(X, X, y, z)$$

یکسان سازی آرگومان سوم:

$$\xrightarrow{\{x/X, y/p(x)\}} F(X, X, p(x), z)$$

یکسان سازی آرگومان چهارم:

$$\xrightarrow{\{x/X, y/p(x), z/p(X)\}} F(X, X, p(x), p(X))$$

بنابراین، توانستیم عملیات unify را انجام دهیم.

4) $F(y, x, x, z)$ ✗

یکسان سازی آرگومان اول:

$$\xrightarrow{\{y/x\}} F(x, x, x, z)$$

یکسان سازی آرگومان دوم:

$$\xrightarrow{\{y/x, x/p(x)\}} \text{Fail!}$$

حال در این مرحله، باید x با $p(x)$ را unify کنیم، ولی از آنجایی که متغیر (x) در دیگری $(p(x))$ وجود دارد، الگوریتم unify،

Fail می کند.

5) $F(y, z, x, x)$ ✗

یکسان سازی آرگومان اول:

$$\xrightarrow{\{y/x\}} F(x, z, x, x)$$

یکسان سازی آرگومان دوم:

$$\xrightarrow{\{z/X\}} F(x, X, x, x)$$

یکسان سازی آرگومان سوم:

$$\xrightarrow{\{x/p(x)\}} \text{Fail!}$$

حال در این مرحله، باید x با $p(x)$ را unify کنیم، ولی از آنجایی که متغیر (x) در دیگری $(p(x))$ وجود دارد، الگوریتم unify،

Fail می کند.

6) $F(x, y, x, z)$ ✗

به دلیل مشابه قبلی، برای unify کردن سومین آرگومان (unify کردن x با $p(x)$)، الگوریتم unify، Fail می‌کند.

7) $F(x, y, p(z), x)$ ✓

یکسان‌سازی آرگومان اول:

یکسان هستند.

یکسان‌سازی آرگومان دوم:

$$\xrightarrow{\{y/x\}} F(x, x, p(z), x)$$

یکسان‌سازی آرگومان سوم:

برای یکسان‌سازی آرگومان سوم، می‌بینیم که آرگومان سوم این عبارت و عبارت سوال، هر دو predicate هستند. و نام predicate و تعداد آرگومان‌های آن‌ها یکسان است ($p(x)$ و $p(z)$). آرگومان آن‌ها نیز، یک متغیر است. بنابراین، این دو predicate، قابل unify کردن هستند. برای unify کردن این دو predicate، باید z/x را به مجموعه جایگزینی اضافه کنیم و خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{\{y/x, z/x\}} F(x, x, p(x), x)$$

یکسان‌سازی آرگومان چهارم:

$$\xrightarrow{\{y/x, z/x, x/p(X)\}} F(p(X), p(X), p(p(X)), p(X))$$

پی‌نوشت: حروف کوچک، متغیر بوده و حروف بزرگ، ثابت هستند.

6. جملات زیر را ابتدا با منطق مرتبه اول بازنمایی کنید و سپس با استفاده از رزولوشن با برهان خلف (Resolution refutation by)، مشخص کنید که مادرشوهر سارا، چه کسی است. (اگر برای پیدا کردن پاسخ، نیاز به استفاده از عبارت‌های بیش‌تری دارید، می‌توانید آن‌ها را اضافه کنید و با کمک آن‌ها مسئله را حل کنید.)

الف) علی پدر امین است.

1) Father(Ali, Amin)

ب) امیر برادر امین است.

2) Brother(Amir, Amin)

پ) مینا، خواهر علی است.

3) Sister(Mina, Ali)

ت) آرش برادر مینا است.

4) Brother(Arash, Mina)

ث) شیرین، مادر بزرگ (پدري) امیر است.

فرض می‌کنیم منظور از predicate با نام GrandMother، مادر بزرگ پدری ست.

5) GrandMother(Shirin, Amir)

ج) سارا همسر آرش است.

6) Wife(Sara, Arash)

حکم: مادرشوهر سارا، چه کسی است؟

7) Mother-in-law(Sara, x)

عبارات اضافه‌تر:

- A) $\forall x, y, z \text{ Wife}(x, z) \wedge \text{Mother}(y, z) \Rightarrow \text{Mother-in-law}(x, y)$
 B) $\forall x, y, z \text{ Mother}(x, z) \wedge \text{Mother}(z, y) \Rightarrow \text{GrandMother}(x, y)$
 C) $\forall x, y, z \text{ Brother}(x, y) \wedge \text{Sister}(y, z) \Rightarrow \text{Brother}(z, y)$
 D) $\forall x, y, z \text{ Mother}(x, y) \wedge \text{Brother}(y, z) \Rightarrow \text{Mother}(x, z)$
 E) $\forall x, y, z \text{ Mother}(x, y) \wedge \text{Sister}(y, z) \Rightarrow \text{Mother}(x, z)$
 F) $\forall x, y, z \text{ GrandMother}(x, y) \wedge \text{Father}(z, y) \Rightarrow \text{Mother}(x, z)$
 G) $\forall x, y, z \text{ Brother}(x, y) \wedge \text{Father}(z, y) \Rightarrow \text{Father}(z, x)$

نوشتن عبارات اضافیتر به فرم CNF:

- A) $\forall x, y, z \text{ Wife}(x, z) \wedge \text{Mother}(y, z) \Rightarrow \text{Mother-in-law}(x, y) \equiv$
 $\forall x, y, z \neg [\text{Wife}(x, z) \wedge \text{Mother}(y, z)] \vee \text{Mother-in-law}(x, y) \equiv$
 $\forall x, y, z \neg \text{Wife}(x, z) \vee \neg \text{Mother}(y, z) \vee \text{Mother-in-law}(x, y)$

→

8) $\neg \text{Wife}(x, z) \vee \neg \text{Mother}(y, z) \vee \text{Mother-in-law}(x, y)$

- B) $\forall x, y, z \text{ Mother}(x, z) \wedge \text{Mother}(z, y) \Rightarrow \text{GrandMother}(x, y) \equiv$
 $\forall x, y, z \neg [\text{Mother}(x, z) \wedge \text{Mother}(z, y)] \vee \text{GrandMother}(x, y) \equiv$
 $\forall x, y, z \neg \text{Mother}(x, z) \vee \neg \text{Mother}(z, y) \vee \text{GrandMother}(x, y)$

→

9) $\neg \text{Mother}(x, z) \vee \neg \text{Mother}(z, y) \vee \text{GrandMother}(x, y)$

- C) $\forall x, y, z \text{ Brother}(x, y) \wedge \text{Sister}(y, z) \Rightarrow \text{Brother}(z, y) \equiv$
 $\forall x, y, z \neg [\text{Brother}(x, y) \wedge \text{Sister}(y, z)] \vee \text{Brother}(z, y) \equiv$
 $\forall x, y, z \neg \text{Brother}(x, y) \vee \neg \text{Sister}(y, z) \vee \text{Brother}(z, y)$

→

10) $\neg \text{Brother}(x, y) \vee \neg \text{Sister}(y, z) \vee \text{Brother}(z, y)$

- D) $\forall x, y, z \text{ Mother}(x, y) \wedge \text{Brother}(y, z) \Rightarrow \text{Mother}(x, z) \equiv$
 $\forall x, y, z \neg [\text{Mother}(x, y) \wedge \text{Brother}(y, z)] \vee \text{Mother}(x, z) \equiv$
 $\forall x, y, z \neg \text{Mother}(x, y) \vee \neg \text{Brother}(y, z) \vee \text{Mother}(x, z)$

→

11) $\neg \text{Mother}(x, y) \vee \neg \text{Brother}(y, z) \vee \text{Mother}(x, z)$

- E) $\forall x, y, z \text{ Mother}(x, y) \wedge \text{Sister}(y, z) \Rightarrow \text{Mother}(x, z) \equiv$
 $\forall x, y, z \neg [\text{Mother}(x, y) \wedge \text{Sister}(y, z)] \vee \text{Mother}(x, z) \equiv$
 $\forall x, y, z \neg \text{Mother}(x, y) \vee \neg \text{Sister}(y, z) \vee \text{Mother}(x, z)$

→

12) $\neg \text{Mother}(x, y) \vee \neg \text{Sister}(y, z) \vee \text{Mother}(x, z)$

- F) $\forall x, y, z \text{ GrandMother}(x, y) \wedge \text{Father}(z, y) \Rightarrow \text{Mother}(x, z) \equiv$
 $\forall x, y, z \neg [\text{GrandMother}(x, y) \wedge \text{Father}(z, y)] \vee \text{Mother}(x, z) \equiv$
 $\forall x, y, z \neg \text{GrandMother}(x, y) \vee \neg \text{Father}(z, y) \vee \text{Mother}(x, z)$

→

13) $\neg \text{GrandMother}(x, y) \vee \neg \text{Father}(z, y) \vee \text{Mother}(x, z)$

- G) $\forall x, y, z \text{ Brother}(x, y) \wedge \text{Father}(z, y) \Rightarrow \text{Father}(z, x) \equiv$
 $\forall x, y, z \neg [\text{Brother}(x, y) \wedge \text{Father}(z, y)] \vee \text{Father}(z, x) \equiv$
 $\forall x, y, z \neg \text{Brother}(x, y) \vee \neg \text{Father}(z, y) \vee \text{Father}(z, x)$

→

$$14) \neg \text{Brother}(x, y) \vee \neg \text{Father}(z, y) \vee \text{Father}(z, x)$$

استفاده از رزولوشن:

- 1) $\text{Father}(\text{Ali}, \text{Amin})$
- 2) $\text{Brother}(\text{Amir}, \text{Amin})$
- 3) $\text{Sister}(\text{Mina}, \text{Ali})$
- 4) $\text{Brother}(\text{Arash}, \text{Mina})$
- 5) $\text{GrandMother}(\text{Shirin}, \text{Amir})$
- 6) $\text{Wife}(\text{Sara}, \text{Arash})$
- 7) $\text{Mother-in-law}(\text{Sara}, x)$
- 8) $\neg \text{Wife}(x, z) \vee \neg \text{Mother}(y, z) \vee \text{Mother-in-law}(x, y)$
- 9) $\neg \text{Mother}(x, z) \vee \neg \text{Mother}(z, y) \vee \text{GrandMother}(x, y)$
- 10) $\neg \text{Brother}(x, y) \vee \neg \text{Sister}(y, z) \vee \text{Brother}(z, y)$
- 11) $\neg \text{Mother}(x, y) \vee \neg \text{Brother}(y, z) \vee \text{Mother}(x, z)$
- 12) $\neg \text{Mother}(x, y) \vee \neg \text{Sister}(y, z) \vee \text{Mother}(x, z)$
- 13) $\neg \text{GrandMother}(x, y) \vee \neg \text{Father}(z, y) \vee \text{Mother}(x, z)$
- 14) $\neg \text{Brother}(x, y) \vee \neg \text{Father}(z, y) \vee \text{Father}(z, x)$
- 15) $\frac{13,5 \quad \{x/\text{Shirin}, y/\text{Amir}\}}{\neg \text{Father}(z, \text{Amir}) \vee \text{Mother}(\text{Shirin}, z)}$
- 16) $\frac{15,14 \quad \{x/\text{Amir}\}}{\neg \text{Brother}(\text{Amir}, y) \vee \neg \text{Father}(z, y) \vee \text{Mother}(\text{Shirin}, z)}$
- 17) $\frac{16,2 \quad \{y/\text{Amin}\}}{\neg \text{Father}(z, \text{Amin}) \vee \text{Mother}(\text{Shirin}, z)}$
- 18) $\frac{17,1 \quad \{z/\text{Ali}\}}{\text{Mother}(\text{Shirin}, \text{Ali})}$
- 19) $\frac{3,10 \quad \{y/\text{Mina}, z/\text{Ali}\}}{\neg \text{Brother}(x, \text{Mina}) \vee \text{Brother}(\text{Ali}, y)}$
- 20) $\frac{19,4 \quad \{x/\text{Arash}\}}{\text{Brother}(\text{Ali}, \text{Arash})}$
- 21) $\frac{20,1 \quad \{y/\text{Ali}, z/\text{Arash}\}}{\neg \text{Mother}(x, \text{Ali}) \vee \text{Mother}(x, \text{Arash})}$
- 22) $\frac{21,18 \quad \{x/\text{Shirin}\}}{\text{Mother}(\text{Shirin}, \text{Arash})}$
- 23) $\frac{22,8 \quad \{y/\text{Shirin}, z/\text{Arash}\}}{\neg \text{Wife}(x, \text{Arash}) \vee \text{Mother-in-law}(x, \text{Shirin})}$
- 24) $\frac{23,6 \quad \{x/\text{Sara}\}}{\text{Mother-in-law}(\text{Sara}, \text{Shirin})}$

بنابراین، شیرین مادر شوهر سارا است.