

---

# Segmentation d'image – Mumford-Shah

---

## **Auteurs :**

RAYNAL Adrien  
REVAILLER Wendy  
WILLEMOT Sophie  
ZOUTINE Mehdi

## **Encadrant :**

MALGOUYRES François  
MARÉCHAL Pierre

Le 18 avril 2020

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modèle théorique de Mumford Shah</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Modèle discret et implémentation numérique</b>	<b>3</b>
3.1	Notion de périmètre . . . . .	3
3.1.1	Représentation de $\Omega$ . . . . .	4
3.1.2	Evolution de $\Omega$ . . . . .	4
3.2	Convergence de l'algorithme . . . . .	5
3.2.1	Optimisation de $P(\Omega)$ . . . . .	5
3.2.2	Optimisation de la somme . . . . .	5
3.3	Implémentation numérique et résultats . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>6</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>7</b>
	<b>Références</b>	<b>7</b>

# 1 Introduction

La segmentation d'images est l'un des grands domaines du traitement d'images et de la vision par ordinateur. Cette opération a pour but de rassembler des pixels entre eux suivant des critères pré-définis. On marque ainsi les pixels correspondants à un objet dans une image. Les pixels regroupés forment une partition de l'image.

La segmentation est notamment utilisée pour simplifier ou changer la représentation d'une image en quelque chose de plus facile à analyser. On l'utilise beaucoup en imagerie médicale, dans la recherche d'image par contenu, dans la détection d'objet, la reconnaissance faciale (doigts et iris également), en vidéo surveillance...

- Image à ajouter pour exemple

L'homme sait naturellement séparer des objets dans une image, grâce à la compréhension des objets et de la scène, mais la construction d'algorithme de segmentation de haut niveau représente un grand domaine de recherche dans le traitement d'image. Il existe 3 grandes classes de segmentation aujourd'hui :

- La segmentation fondée sur les régions,
- La segmentation fondée sur les contours,
- La segmentation fondée sur la classification/seuillage de pixels.

Dans ce projet, nous utilisons la méthode des contours avec le modèle de Mumford-Shah.

test test

## 2 Modèle théorique de Mumford Shah

Ce modèle est l'un des plus étudié. La fonctionnelle de Mumford-Shah a été introduite en 1989. D'un point de vue continue, une image est vue comme une fonction  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $\Omega$  est par exemple un rectangle, et  $g$  associe à chaque point  $x \in \Omega$  de l'image une valeur  $g(x)$  qui représente un niveau de gris. La fonction  $g$  n'est pas régulière, elle est très souvent discontinue. C'est cet effet de discontinuité qui nous intéresse. En effet, nous voulons trouver pour une image  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  l'ensemble des contours des objets que représente l'image. Ces contours sont donc localisés aux points de discontinuités de  $g$  : il y a une franche discontinuité dans les niveaux de gris.

Pour résoudre ce problème, Mumford et Shah introduisent une fonctionnelle qui par minimisation, va chercher les points de  $g$  les plus discontinus.

Le problème s'écrit alors :

$$\min_{(u,K) \in \mathcal{A}(\Omega)} J(u, K) := \int_{\Omega \setminus K} |u - g|^2 dx + \int_{\Omega \setminus K} ||\Delta u||^2 dx + \mathcal{H}^1(K),$$

avec

$$\mathcal{A}(\Omega) = \{(u, K) : K \subset \Omega \text{ est fermé et } u \in C^1(\Omega \setminus K)\}$$

Eventuellement expliciter chacun des termes. + existence ?

### 3 Modèle discret et implémentation numérique

On veut minimiser en  $\Omega \subset \{1, \dots, N\}^2$  et en  $w \in \mathbb{R}^{N^2}$  la fonctionnelle :

$$P(\Omega) + \lambda \sum_{\substack{m,n=1 \\ ((m,n),(m+1,n)) \notin \partial\Omega \\ ((m,n),(m,n+1)) \notin \partial\Omega}}^N |\Delta w_{m,n}|^2 + \mu \|w - u\|_2^2$$

où  $\lambda \geq 0$ ,  $\mu \geq 0$  sont des paramètres et  $u \in \mathbb{R}^{N^2}$  est l'image à segmenter. Pour cela, on va utiliser un algorithme de descente sur  $\Omega$  et  $w$ .

Le premier terme de la somme est très proche d'un terme  $H^1$ , sauf que l'on retire de la somme les points dont le calcul du gradient fait intervenir un voisin de l'autre côté de la frontière de  $\Omega$ . Ainsi, les points qui ont un très fort gradient tendent à appartenir à la frontière. Le dernier terme constitue l'attache au données.

#### 3.1 Notion de périmètre

On veut minimiser le terme correspondant au périmètre de  $\Omega$ . Pour définir ce périmètre, on considère un système de voisinage  $\sigma(m, n)$  de chaque pixel  $(m, n) \in \{1, \dots, N\}^2$ . Les voisinages les plus utilisés sont la 4-connexité définie comme ci dessous :

$$\sigma(m, n) = \{(m', n') \in \{1, \dots, N\}^2, |m - m'| + |n - n'| = 1\}$$

Ou la 8-connexité définie comme ci dessous :

$$\sigma(m, n) = \{(m', n') \in \{1, \dots, N\}^2, \max(|m - m'|, |n - n'|) = 1\}$$

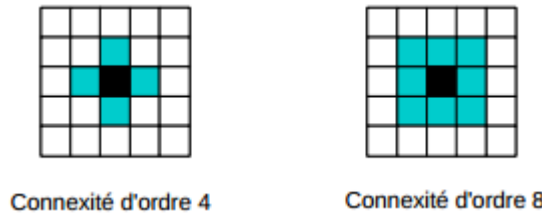


FIGURE 1: 4-connexité et 8-connexité

<https://ensiwiki.ensimag.fr/index.php?title=Fichier:Connexite.png>

On définit alors la frontière de  $\Omega \subset \{1, \dots, N\}^2$  comme l'ensemble :

$$\partial\Omega = \{((m, n), (m', n')) \in (\{1, \dots, N\}^2)^2, (m', n') \in \sigma(m, n) \text{ et } (m, n) \in \Omega \text{ et } (m', n') \notin \Omega\}$$

Le périmètre de  $\Omega$  est alors définie par :

$$P(\Omega) = \sum_{((m,n),(m',n')) \in \partial\Omega} dl((m, n), (m', n')),$$

Où  $dl((m, n), (m', n')) > 0$  sont des éléments de longueur. Plus la frontière de  $\Omega$  contient d'éléments, plus la longueur du contour sera grande. On suppose également pour simplifier que pour tout  $((m, n), (m', n')) \in (\{1, \dots, N\}^2)^2$

$$dl((m, n), (m', n')) = dl((m', n'), (m, n))$$

On suppose aussi que

$$\text{si } (m', n') \notin \sigma(m, n) \text{ alors } dl((m, n), (m', n')) = 0$$

Pour optimiser  $\Omega$ , on va procéder par des ensemble de niveau.

### 3.1.1 Représentation de $\Omega$

Les méthodes basées sur les ensembles de niveaux représentent l'ensemble  $\Omega \subset \{1, \dots, N\}^2$  comme un ensemble de niveau d'une image  $\phi \in \mathcal{R}^{N^2}$ . On pose donc

$$\Omega = \{(m, n) \in \{1, \dots, N\}^2, \phi_{m,n} \geq 0\}$$

### 3.1.2 Evolution de $\Omega$

Ainsi, faire évoluer  $\Omega$  revient à faire évoluer l'image  $\phi$  pour minimiser une énergie analogue mais portant sur  $\phi$ . On applique un algorithme de gradient à la fonctionnelle. On peut donc construire une énergie en  $\phi$  pour le terme correspondant au périmètre tel que :

$$E((\phi_{m,n})_{1 \leq m,n \leq N}) = \sum_{m,n=0}^N \sum_{m',n'=0}^N dl((m, n), (m', n')) H_\epsilon(\phi_{m,n}) (1 - H_\epsilon(\phi_{m',n'}))$$

Avec

$$H_\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq \epsilon \\ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{t}{\epsilon} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi t}{\epsilon}\right) \right) & \text{si } -\epsilon \leq t \leq \epsilon \\ 0 & \text{si } t \leq -\epsilon \end{cases}$$

Ainsi que son gradient en  $\phi = (\phi_{m,n})_{1 \leq m,n \leq N}$  :

$$\nabla E(\phi) = \left( \sum_{m',n'=0}^N dl((m, n), (m', n')) H'_\epsilon(\phi_{m,n}) (1 - 2H_\epsilon(\phi_{m',n'})) \right)_{1 \leq m,n \leq N}$$

Avec

$$H'_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq \epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon} + \frac{1}{2\epsilon} \cos\left(\frac{\pi t}{\epsilon}\right) & \text{si } -\epsilon \leq t \leq \epsilon \\ 0 & \text{si } t \leq -\epsilon \end{cases}$$

Ainsi, on combine alors une étape de minimisation d'une énergie sur  $w$ , puis d'une étape d'optimisation de la forme  $\Omega$ , en utilisant un algorithme de descente de gradient.

## 3.2 Convergence de l'algorithme

### 3.2.1 Optimisation de $P(\Omega)$

L'énergie minimisée ici n'est pas forcément convexe, mais on espère trouver un minimum local. Il est nécessaire de partir d'une bonne initialisation de  $\Omega$  pour que le problème d'optimisation ai au moins une solution. + Theoreme 2 page 18 du poly ? pour la convergence

### 3.2.2 Optimisation de la somme

...

## 3.3 Implémentation numérique et résultats

Présenter les différentes fonctions, leurs interets, algorithme de descente pas constant, résultat, graphique de l'énergie minimisée...

## 4 Conclusion



## Table des figures

1	4-connexité et 8-connexité <a href="https://ensiwiki.ensimag.fr/index.php?title=Fichier:Connexite.png">https://ensiwiki.ensimag.fr/index.php?title=Fichier:Connexite.png</a> . . . .	3
---	---	---

## Références

- [1] Tony F. Chan and Luminita A. Vese. A level set algorithm for minimizing the Mumford-Shah functional in image processing. 2002.
- [2] Laurent D. Cohen. Segmentation d'énergie minimale. 1999.
- [3] Antoine Lemenant. Initiation à la fonctionnelle de Mumford-Shah. 2012.