
Segmentation d'image – Mumford-Shah

Auteurs :

RAYNAL Adrien
REVAILLER Wendy
WILLEMOT Sophie
ZOUTINE Mehdi

Encadrant :

MALGOUYRES François
MARÉCHAL Pierre

Le 23 avril 2020

Table des matières

1	Introduction	1
2	Modèle théorique de Mumford Shah	2
2.1	Mesure et dimension de Hausdorff : compléments	2
3	Modèle discret et implémentation numérique	4
3.1	Notion de périmètre	4
3.1.1	Représentation de Ω	5
3.1.2	Evolution de Ω	5
3.2	Convergence de l'algorithme	6
3.3	Implémentation numérique et résultats	6
4	Modèle discret et implémentation numérique	7
4.1	Notion de périmètre	7
4.1.1	Représentation de Ω	8
4.1.2	Evolution de Ω	8
4.2	Convergence de l'algorithme	9
4.2.1	Optimisation de $P(\Omega)$	9
4.2.2	Optimisation de la somme	9
4.3	Implémentation numérique et résultats	9
5	Conclusion	10
	Table des figures	11
	Références	11

1 Introduction

La segmentation d'images est l'un des grands domaines du traitement d'images et de la vision par ordinateur. Cette opération a pour but de rassembler des pixels entre eux suivant des critères pré-définis. On marque ainsi les pixels correspondants à un objet dans une image. Les pixels regroupés forment une partition de l'image.

La segmentation est notamment utilisée pour simplifier ou changer la représentation d'une image en quelque chose de plus facile à analyser. On l'utilise beaucoup en imagerie médicale, dans la recherche d'image par contenu, dans la détection d'objet, la reconnaissance faciale (doigts et iris également), en vidéo surveillance...

- Image à ajouter pour exemple

L'homme sait naturellement séparer des objets dans une image, grâce à la compréhension des objets et de la scène, mais la construction d'algorithme de segmentation de haut niveau représente un grand domaine de recherche dans le traitement d'image. Il existe 3 grandes classes de segmentation aujourd'hui :

- La segmentation fondée sur les régions,
- La segmentation fondée sur les contours,
- La segmentation fondée sur la classification/seuillage de pixels.

Dans ce projet, nous utilisons la méthode des contours avec le modèle de Mumford-Shah.

test test

2 Modèle théorique de Mumford Shah

Ce modèle est l'un des plus étudié. La fonctionnelle de Mumford-Shah a été introduite en 1989. D'un point de vue continue, une image est vue comme une fonction $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, où Ω est par exemple un rectangle, et g associe à chaque point $x \in \Omega$ de l'image une valeur $g(x)$ qui représente un niveau de gris. La fonction g n'est pas régulière, elle est très souvent discontinue. c'est cet effet de discontinuité qui nous intéresse. En effet, nous voulons trouver pour une image $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ l'ensemble des contours des objets que représente l'image. Ces contours sont donc localisés au points de discontinuités de g : il y a une franche discontinuité dans les niveaux de gris.

Pour résoudre ce problème, Mumford et Shah introduisent une fonctionnelle qui par minimisation, va chercher les points de g les plus discontinus.

Le problème s'écrit alors :

$$\min_{(u,K) \in \mathcal{A}(\Omega)} J(u, K) := \int_{\Omega \setminus K} |u - g|^2 dx + \int_{\Omega \setminus K} ||\nabla u||^2 dx + \mathcal{H}^1(K),$$

avec

$$\mathcal{A}(\Omega) = \{(u, K) : K \subset \Omega \text{ est fermé et } u \in C^1(\Omega \setminus K)\}$$

Nous pouvons expliciter chacun des termes qui composent cette fonctionnelle :

- $\int_{\Omega \setminus K} |u - g|^2 dx$ force u , par minimisation, à ressembler le plus possible à l'image de départ g .
- $\int_{\Omega \setminus K} ||\nabla u||^2 dx$ pénalise les oscillations de u , qui par minimisation, forcera u à être la plus régulière possible. Comme g est très irrégulière au début, on ne peut pas avoir $u = g$ partout dans Ω . Ainsi, l'ensemble K possède un rôle essentiel : s'il est bien positionné sur les singularités de g , il permettra de minimiser le premier terme décrit ci-dessus.
- $\mathcal{H}^1(K)$ désigne la mesure de Hausdorff de dimension 1 de l'ensemble K . Ce dernier terme force K à être de dimension de Hausdorff 1, qui nous donne bien l'intuition d'un "contour". Par exemple, un cercle est de dimension de Hausdorff 1. Cet ensemble K devra être optimisé pour couvrir le plus possible les singularités de g , en le positionnant en priorité sur les discontinuités les plus franches. Les autres singularités non prise en compte dans ce terme, donc minimales, seront considérées en oscillations. $\mathcal{H}^1(K)$ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

2.1 Mesure et dimension de Hausdorff : compléments

Les mesures de Hausdorff sont une généralisation des notions de longueur, d'aire, de volume... \mathcal{H}^n est la mesure de Lebesgue en dimension n pour des sous ensembles de \mathbb{R}^n , multipliée par une constante qui n'est autre que le volume n — dimensionnel de la boule unité.

La mesure de Hausdorff peut être définie pour tout ensemble. Pour un sous-ensemble non-vidé U d'un espace euclidien de dimension n , on peut définir le diamètre de U tel que :

$$\text{diam } U = |U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$$

Avec la distance euclidienne usuelle.

Ensuite, si un ensemble F est recouvert par une collection dénombrable $\{U_i\}$, de diamètre au plus δ :

$$F = \cup_{i=1}^{\infty} U_i \quad \text{avec} \quad 0 < |U_i| \leq \delta$$

On dit que $\{U_i\}$ est un δ -recouvrement de F .

Soit maintenant un $s \in \mathbb{R} > 0$. Pour tout $\delta > 0$, on peut définir :

$$\mathcal{H}_{\delta}^s(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ est un recouvrement de } F\right\}$$

Ainsi,

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^s(F)$$

Et $\mathcal{H}^s(F)$ est appelé la mesure de Hausdorff s -dimensionnelle de F .

Théorème 1 : Dimension de Hausdorff (admis) : Soit F un sous-ensemble. Il existe un unique $d \in \mathbb{R}_+ \cup \infty$ tel que :

1. $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ pour tout $s < d$
2. $\mathcal{H}^s(F) = 0$ pour tout $s > d$

On appelle dimension de Hausdorff de F le réel d . C'est la valeur critique de s pour laquelle la mesure passe de 0 à ∞ .

On l'appelle également dimension fractale.

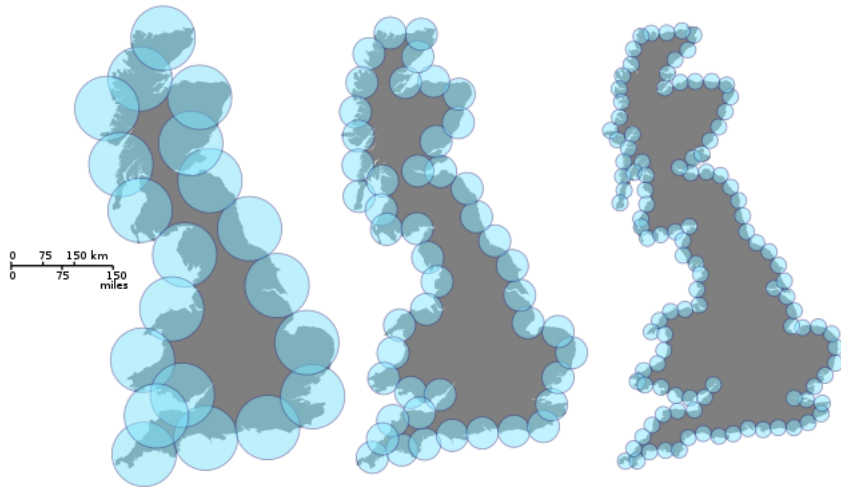


FIGURE 1: Dimension de Hausdorff de la Grande Bretagne

3 Modèle discret et implémentation numérique

On veut minimiser en $\Omega \subset \{1, \dots, N\}^2$ et en $w \in \mathbb{R}^{N^2}$ la fonctionnelle :

$$P(\Omega) + \lambda \sum_{\substack{m,n=1 \\ ((m,n),(m+1,n)) \notin \partial\Omega \\ ((m,n),(m,n+1)) \notin \partial\Omega}}^N |\nabla w_{m,n}|^2 + \mu \|w - u\|_2^2$$

où $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ sont des paramètres et $u \in \mathbb{R}^{N^2}$ est l'image à segmenter. Pour cela, on va utiliser un algorithme de descente sur Ω et w .

Le premier terme de la somme est très proche d'un terme H^1 , sauf que l'on retire de la somme les points dont le calcul du gradient fait intervenir un voisin de l'autre côté de la frontière de Ω . Ainsi, les points qui ont un très fort gradient tendent à appartenir à la frontière. Le dernier terme constitue l'attache au données.

3.1 Notion de périmètre

On veut minimiser le terme correspondant au périmètre de Ω . Pour définir ce périmètre, on considère un système de voisinage $\delta(m, n)$ de chaque pixel $(m, n) \in \{1, \dots, N\}^2$. Les voisinages les plus utilisés sont la 4-connexité définie comme ci dessous :

$$\sigma(m, n) = \{(m', n') \in \{1, \dots, N\}^2, |m - m'| + |n - n'| = 1\}$$

Ou la 8-connexité définie comme ci dessous :

$$\sigma(m, n) = \{(m', n') \in \{1, \dots, N\}^2, \max(|m - m'|, |n - n'|) = 1\}$$

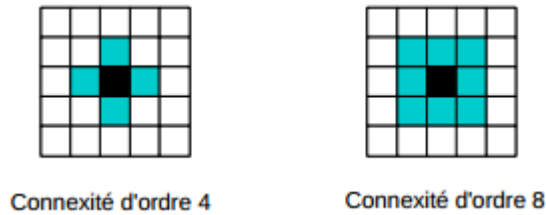


FIGURE 2: 4-connexité et 8-connexité

<https://ensiwiki.ensimag.fr/index.php?title=Fichier:Connexite.png>

On définit alors la frontière de $\Omega \subset \{1, \dots, N\}^2$ comme l'ensemble :

$$\partial\Omega = \{((m, n), (m', n')) \in (\{1, \dots, N\}^2)^2, (m', n') \in \sigma(m, n) \text{ et } (m, n) \in \Omega \text{ et } (m', n') \notin \Omega\}$$

Le périmètre de Ω est alors définie par :

$$P(\Omega) = \sum_{((m,n),(m',n')) \in \partial\Omega} dl((m, n), (m', n')),$$

Où $dl((m, n), (m', n')) > 0$ sont des éléments de longueur. Plus la frontière de Ω contient d'éléments, plus la longueur du contour sera grande. On suppose également pour simplifier que pour tout $((m, n), (m', n')) \in (\{1, \dots, N\}^2)^2$

$$dl((m, n), (m', n')) = dl((m', n'), (m, n))$$

On suppose aussi que

$$\text{si } (m', n') \notin \sigma(m, n) \text{ alors } dl((m, n), (m', n')) = 0$$

Pour optimiser Ω , on va procéder par des ensemble de niveau.

3.1.1 Représentation de Ω

Les méthodes basées sur les ensembles de niveaux représentent l'ensemble $\Omega \subset \{1, \dots, N\}^2$ comme un ensemble de niveau d'une image $\phi \in \mathcal{R}^{N^2}$. On pose donc

$$\Omega = \{(m, n) \in \{1, \dots, N\}^2, \phi_{m,n} \geq 0\}$$

3.1.2 Evolution de Ω

Ainsi, faire évoluer Ω revient à faire évoluer l'image ϕ pour minimiser une énergie analogue mais portant sur ϕ . On applique un algorithme de gradient à la fonctionnelle. On peut donc construire une énergie en ϕ tel que :

$$E((\phi_{m,n})_{1 \leq m, n \leq N}) = \sum_{m, n=0}^N \sum_{m', n'=0}^N dl((m, n), (m', n')) H_\epsilon(\phi_{m,n}) (1 - H_\epsilon(\phi_{m', n'}))$$

Avec

$$H_\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq \epsilon \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{t}{\epsilon} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi t}{\epsilon}\right) \right) & \text{si } -\epsilon \leq t \leq \epsilon \\ 0 & \text{si } t \leq -\epsilon \end{cases}$$

Ainsi que son gradient en $\phi = (\phi_{m,n})_{1 \leq m, n \leq N}$:

$$\nabla E(\phi) = \left(\sum_{m', n'=0}^N dl((m, n), (m', n')) H'_\epsilon(\phi_{m,n}) (1 - 2H_\epsilon(\phi_{m', n'})) \right)_{1 \leq m, n \leq N}$$

Avec

$$H'_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq \epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon} + \frac{1}{2\epsilon} \cos\left(\frac{\pi t}{\epsilon}\right) & \text{si } -\epsilon \leq t \leq \epsilon \\ 0 & \text{si } t \leq -\epsilon \end{cases}$$

Ainsi, on combine alors une étape de minimisation d'une énergie sur w , puis d'une étape d'optimisation de la forme Ω .

3.2 Convergence de l'algorithme

3.3 Implémentation numérique et résultats

Nous allons donc implémenter différentes fonctions pour pouvoir utiliser un algorithme de descente à la fois sur l'image à segmenter et sur la forme ϕ (image).

Fonction à présenter ?

En ce qui concerne l'algorithme de descente , on peut soit utiliser un pas constant ou implémenter la règle d'Armijo pour ce pas : choisir i comme étant le plus petit entier tel que :

$$E(x^k) - E(x^k - t_i \nabla E(w^k)) \geq \sigma t_i \|\nabla E(w^k)\|_2^2$$

avec E la fonctionnelle à minimiser et $\sigma \in]0, 1[$.

4 Modèle discret et implémentation numérique

On veut minimiser en $\Omega \subset \{1, \dots, N\}^2$ et en $w \in \mathbb{R}^{N^2}$ la fonctionnelle :

$$P(\Omega) + \lambda \sum_{\substack{m,n=1 \\ ((m,n),(m+1,n)) \notin \partial\Omega \\ ((m,n),(m,n+1)) \notin \partial\Omega}}^N |\Delta w_{m,n}|^2 + \mu \|w - u\|_2^2$$

où $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ sont des paramètres et $u \in \mathbb{R}^{N^2}$ est l'image à segmenter. Pour cela, on va utiliser un algorithme de descente sur Ω et w .

Le premier terme de la somme est très proche d'un terme H^1 , sauf que l'on retire de la somme les points dont le calcul du gradient fait intervenir un voisin de l'autre côté de la frontière de Ω . Ainsi, les points qui ont un très fort gradient tendent à appartenir à la frontière. Le dernier terme constitue l'attache au données.

4.1 Notion de périmètre

On veut minimiser le terme correspondant au périmètre de Ω . Pour définir ce périmètre, on considère un système de voisinage $\sigma(m, n)$ de chaque pixel $(m, n) \in \{1, \dots, N\}^2$. Les voisinages les plus utilisés sont la 4-connexité définie comme ci dessous :

$$\sigma(m, n) = \{(m', n') \in \{1, \dots, N\}^2, |m - m'| + |n - n'| = 1\}$$

Ou la 8-connexité définie comme ci dessous :

$$\sigma(m, n) = \{(m', n') \in \{1, \dots, N\}^2, \max(|m - m'|, |n - n'|) = 1\}$$

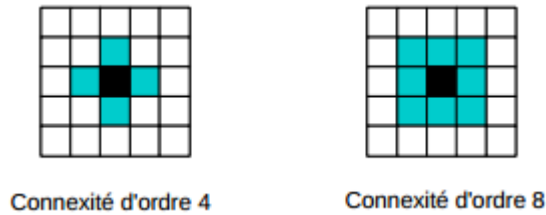


FIGURE 3: 4-connexité et 8-connexité

<https://ensiwiki.ensimag.fr/index.php?title=Fichier:Connexite.png>

On définit alors la frontière de $\Omega \subset \{1, \dots, N\}^2$ comme l'ensemble :

$$\partial\Omega = \{((m, n), (m', n')) \in (\{1, \dots, N\}^2)^2, (m', n') \in \sigma(m, n) \text{ et } (m, n) \in \Omega \text{ et } (m', n') \notin \Omega\}$$

Le périmètre de Ω est alors définie par :

$$P(\Omega) = \sum_{((m,n),(m',n')) \in \partial\Omega} dl((m, n), (m', n')),$$

Où $dl((m, n), (m', n')) > 0$ sont des éléments de longueur. Plus la frontière de Ω contient d'éléments, plus la longueur du contour sera grande. On suppose également pour simplifier que pour tout $((m, n), (m', n')) \in (\{1, \dots, N\}^2)^2$

$$dl((m, n), (m', n')) = dl((m', n'), (m, n))$$

On suppose aussi que

$$\text{si } (m', n') \notin \sigma(m, n) \text{ alors } dl((m, n), (m', n')) = 0$$

Pour optimiser Ω , on va procéder par des ensemble de niveau.

4.1.1 Représentation de Ω

Les méthodes basées sur les ensembles de niveaux représentent l'ensemble $\Omega \subset \{1, \dots, N\}^2$ comme un ensemble de niveau d'une image $\phi \in \mathcal{R}^{N^2}$. On pose donc

$$\Omega = \{(m, n) \in \{1, \dots, N\}^2, \phi_{m,n} \geq 0\}$$

4.1.2 Evolution de Ω

Ainsi, faire évoluer Ω revient à faire évoluer l'image ϕ pour minimiser une énergie analogue mais portant sur ϕ . On applique un algorithme de gradient à la fonctionnelle. On peut donc construire une énergie en ϕ pour le terme correspondant au périmètre tel que :

$$E((\phi_{m,n})_{1 \leq m, n \leq N}) = \sum_{m,n=0}^N \sum_{m',n'=0}^N dl((m, n), (m', n')) H_\epsilon(\phi_{m,n}) (1 - H_\epsilon(\phi_{m',n'}))$$

Avec

$$H_\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq \epsilon \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{t}{\epsilon} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi t}{\epsilon}\right) \right) & \text{si } -\epsilon \leq t \leq \epsilon \\ 0 & \text{si } t \leq -\epsilon \end{cases}$$

Ainsi que son gradient en $\phi = (\phi_{m,n})_{1 \leq m, n \leq N}$:

$$\nabla E(\phi) = \left(\sum_{m',n'=0}^N dl((m, n), (m', n')) H'_\epsilon(\phi_{m,n}) (1 - 2H_\epsilon(\phi_{m',n'})) \right)_{1 \leq m, n \leq N}$$

Avec

$$H'_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq \epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon} + \frac{1}{2\epsilon} \cos\left(\frac{\pi t}{\epsilon}\right) & \text{si } -\epsilon \leq t \leq \epsilon \\ 0 & \text{si } t \leq -\epsilon \end{cases}$$

Ainsi, on combine alors une étape de minimisation d'une énergie sur w , puis d'une étape d'optimisation de la forme Ω , en utilisant un algorithme de descente de gradient.

4.2 Convergence de l'algorithme

4.2.1 Optimisation de $P(\Omega)$

L'énergie minimisée ici n'est pas forcément convexe, mais on espère trouver un minimum local. Il est nécessaire de partir d'une bonne initialisation de Ω pour que le problème d'optimisation ai au moins une solution. + Theoreme 2 page 18 du poly ? pour la convergence

4.2.2 Optimisation de la somme

...

4.3 Implémentation numérique et résultats

Présenter les différentes fonctions, leurs interets, algorithme de descente pas constant, résultat, graphique de l'énergie minimisée...

5 Conclusion

Table des figures

1	Dimension de Hausdorff de la Grande Bretagne	3
2	4-connexité et 8-connexité https://ensiwiki.ensimag.fr/index.php?title=Fichier:Connexite.png	4
3	4-connexité et 8-connexité https://ensiwiki.ensimag.fr/index.php?title=Fichier:Connexite.png	7

Références

- [1] Tony F. Chan and Luminita A. Vese. A level set algorithm for minimizing the Mumford-Shah functional in image processing. 2002.
- [2] Laurent D. Cohen. Segmentation d'énergie minimale. 1999.
- [3] Thibaut Deheuvels. Mesure et dimension de hausdorff.
- [4] Olivier Elchinger. Les dimensions fractales. 2006.
- [5] Antoine Lemenant. Initiation à la fonctionnelle de Mumford-Shah. 2012.
- [6] Wikipedia. Dimension de hausdorff.