Projet signal

Groupe:Abdessamad Baahmed
Hamza Benkhalil
Mehdi kossir
Professeur: Mme Natalie Fortier

Introduction :

+ Initialement appliqué aux télécommunications, le traitement du signal se retrouve à présent dans tous domaines nécessitant d'analyser et transformer de l'information numérique. La manipulation de données par capteurs bio-médicaux, lors d'expériences physique ou biologique, sont aussi des problemes de traitement du signal. Le téléphone, la radio et la télévision ont motivé l'élaboration d'algorithmes de filtrage linéaires permettant de coder des sons ou des images, de les transmettre, et de supprimer certains bruit de transmission.

Projet Signal :

1)

- Un signal périodique de période T

On a $x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_k \, e^{2\pi j \frac{k}{T} t}$

On a $x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \, h(t-\tau) \, d\tau$

$$x(t) * h(t) \longrightarrow X_k \, h(f)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} X_k \, e^{2\pi j \frac{k}{T} t} \quad h(t-\tau) \, d\tau$$

on pose $t - \tau = \theta$

$\theta = t - \tau$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} X_k \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) \, e^{2\pi j \frac{k}{T} t} \quad e^{-2\pi j \frac{k}{T} \theta} \quad d\tau$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} X_k \, e^{2\pi j \frac{k}{T} t} \quad H\left(\frac{k}{T}\right)$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} X_k \, H\left(\frac{k}{T}\right) \, e^{2\pi j \frac{k}{T} t}$$ $\Rightarrow$ périodique

- $x(t) = 1$ $\quad |t| \leq \theta \leq \frac{T}{2}$ et $x(t) = 0$ pour $|t| > \theta$

- si $t \geq 0$

$x(t) = 1$ si $t \leq \theta \leq \frac{T}{2}$ et $x(t) = 0$ pour $t > \theta$

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_k \, e^{2\pi j \frac{k}{T} t}$$

où $X_k = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) \, e^{-2\pi j \frac{k}{T} t} \, dt$

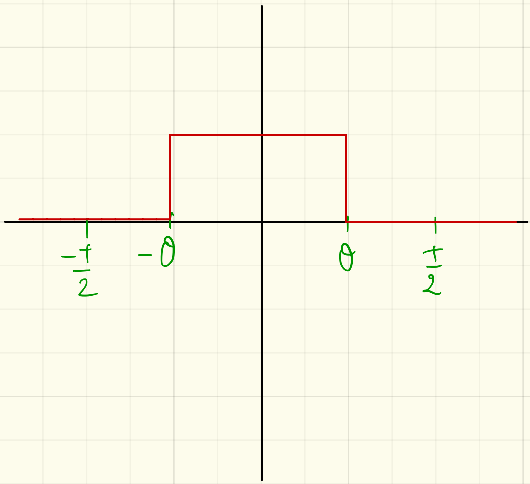
Si $t \leq 0$

$x(t) = 1$ $\quad -t \leq \theta \leq \frac{T}{2}$ et $x(t) = 0$ pour $-t > \theta$

donc $t \leq -\theta$

$-t \leq \theta \Rightarrow t > -\theta$

$\theta \leq \frac{T}{2} \Rightarrow -\theta > -\frac{T}{2}$



- calcul de coefficients de Fourier X_k

On a $X_k = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-2\pi j \frac{k}{T} t}\, dt$

$$= \frac{1}{T}\left(\cancelto{0}{\int_{-T/2}^{-\theta} x(t)\, e^{-2\pi j \frac{k}{T} t}\, dt} + \int_{-\theta}^{\theta} x(t)\, e^{-2\pi j \frac{k}{T} t}\, dt \right.$$

$$\left. + \cancelto{0}{\int_{\theta}^{T/2} x(t)\, e^{-2\pi j \frac{k}{T} t}\, dt} \right)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\theta}^{\theta} e^{-2\pi j \frac{k}{T} t}\, dt$$

$$= -\frac{1}{T \times \frac{2\pi j k}{T}} \left[e^{-2\pi j \frac{k}{T} t} \right]_{-\theta}^{\theta}$$

$$= \frac{1}{2\pi j k} \left(e^{2\pi j \frac{k}{T}\theta} - e^{-2\pi j \frac{k}{T}\theta} \right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\pi \cancel{j} k}\, \cancel{2}\cancel{j} \sin\left(2\pi \frac{k}{T}\theta \right)$$

$$= \frac{\sin\left(2\pi \frac{k}{T}\theta\right)}{\pi k}$$

$- \; y(t) = \cos(k\omega t)$ avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et periode $\frac{k}{T}$

$$Y_k = \frac{T}{k} \int_{-\frac{k}{2T}}^{\frac{k}{2T}} \cos(k\omega t)\, e^{-2\pi j \frac{k}{T} t} \, dt$$

$$Y_k = \frac{T}{k} \int_{-\frac{k}{2T}}^{\frac{k}{2T}} \frac{e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}}{2} \times e^{-2\pi j \frac{k}{T} t} \, dt$$

$$Y_k = \frac{T}{2k} \int_{-\frac{k}{2T}}^{\frac{k}{2T}} e^{jk\omega t} e^{-2\pi j \frac{k}{T} t} + e^{-jk\omega t} e^{-2\pi j \frac{k}{T} t} \, dt$$

$$Y_k = \frac{T}{2k} \int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2T}} e^{-jt\left(2\pi \frac{k}{T} - k\omega\right)} + e^{-jkt\left(\frac{2\pi}{T} + \omega\right)} \, dt$$

$$Y_k = \frac{T}{2k} \int_{-\frac{k}{2T}}^{\frac{k}{2T}} e^{-jtk\left(\frac{2\pi}{T} - \omega\right)} + e^{-jkt\left(\frac{2\pi}{T} + \omega\right)} \, dt$$

$$Y_k = \frac{T}{2k} \left[- \frac{e^{-jkt\left(\frac{2\pi}{T} - \omega\right)}}{jk\left(\frac{2\pi}{T} - \omega\right)} \right]_{-\frac{k}{2T}}^{\frac{k}{2T}} + \frac{T}{2k} \left[- \frac{e^{-jkt\left(\frac{2\pi}{T} - \omega\right)}}{jk\left(\frac{2\pi}{T} + \omega\right)} \right]_{-\frac{k}{2T}}^{\frac{k}{2T}}$$

$$Y_k = \frac{T}{2k} \left(- \frac{e^{-jk \times \frac{k}{2T}\left(\frac{2\pi}{T} - \omega\right)}}{jk\left(\frac{2\pi}{T} - \omega\right)} + \frac{e^{+jk \times \frac{k}{2T}\left(\frac{2\pi}{T} - \omega\right)}}{jk\left(\frac{2\pi}{T} - \omega\right)} \right) +$$

$$\frac{T}{2k} \left(- \frac{e^{-jk\frac{k}{2T}\left(\frac{2\pi}{T} - \omega\right)}}{jk\left(\frac{2\pi}{T} + \omega\right)} + \frac{e^{jk\frac{k}{2T}\left(\frac{2\pi}{T} - \omega\right)}}{jk\left(\frac{2\pi}{T} + \omega\right)} \right)$$

$$Y_k = \frac{T}{2k} \left(- \frac{e^{-jk^2\left(\frac{\pi}{T^2} - \frac{\omega}{T}\right)}}{jk\left(\frac{2\pi}{T} - \omega\right)} + \frac{e^{jk^2\left(\frac{\pi}{T^2} - \frac{\omega}{T}\right)}}{jk\left(\frac{2\pi}{T} - \omega\right)} \right) +$$

$$\frac{T}{2k}\left(-\frac{e^{-jk^2\left(\frac{\pi}{T^2}-\frac{\omega}{T}\right)}}{jk\left(\frac{2\pi}{T}+\omega\right)}+\frac{e^{jk^2\left(\frac{\pi}{T^2}-\frac{\omega}{T}\right)}}{jk\left(\frac{2\pi}{T}+\omega\right)}\right)$$

$- z(t) = |\sin \omega t|$

$$z_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |\sin \omega t|\, e^{-2\pi j \frac{k}{T} t}\, dt$$

$$z_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left|\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\right| e^{-2\pi j \frac{k}{T} t}\, dt$$

si $t \geq 0$

$$1 = \frac{1}{2Tj}\int_0^{T/2}\left(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}\right)e^{-2\pi j\frac{k}{T}t}\,dt$$

$$1 = \frac{1}{2T}\int_0^{T/2}\frac{e^{-jt\left(2\pi\frac{k}{T}-\omega\right)}}{j}-\frac{e^{-jt\left(2\pi\frac{k}{T}+\omega\right)}}{j}\,dt$$

$$1 = \frac{1}{2T}\left[-\frac{e^{-jt\left(2\pi\frac{k}{T}-\omega\right)}}{j^2\left(2\pi\frac{k}{T}-\omega\right)}\right]_0^{T/2}+\frac{1}{2T}\left[\frac{e^{-jt\left(\frac{2\pi k}{T}+\omega\right)}}{j^2\left(\frac{2\pi k}{T}+\omega\right)}\right]_0^{T/2}$$

$$1 = \frac{1}{2T}\left(-\frac{e^{-j\frac{T}{2}\left(2\pi\frac{k}{T}-\omega\right)}}{j^2\left(\frac{2\pi k}{T}-\omega\right)}+\frac{1}{j^2\left(2\pi\frac{k}{T}-\omega\right)}\right)+$$

$$\frac{1}{2T}\left(\frac{e^{-j\frac{T}{2}\left(\frac{2\pi k}{T}+\omega\right)}}{j^2\left(\frac{2\pi k}{T}+\omega\right)}-\frac{1}{j^2\left(2\pi\frac{k}{T}+\omega\right)}\right)$$

si $t<0$

$$(2) = \frac{1}{2jT}\int_{-T/2}^{0}\left(e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}\right) e^{-2\pi j \frac{k}{T} t}\, dt$$

$$(2) = \frac{1}{2jT}\int_{-T/2}^{0} e^{-j\omega t} e^{-2\pi j \frac{k}{T} t} - e^{j\omega t - 2\pi j \frac{k}{T} t}\, dt$$

$$(2) = \frac{1}{2T}\int_{-T/2}^{0} \frac{e^{-jt\left(\omega + 2\pi \frac{k}{T}\right)}}{j} - \frac{e^{-jt\left(2\pi\frac{k}{T} - \omega\right)}}{j}\, dt$$

$$(2) = \frac{1}{2T}\left[-\frac{e^{-jt\left(\omega + 2\pi\frac{k}{T}\right)}}{j^2}\right]_{-T/2}^{0} - \frac{1}{2T}\left[-\frac{e^{-jt\left(2\pi\frac{k}{T} - \omega\right)}}{j^2}\right]_{-T/2}^{0}$$

$$(2) = \frac{1}{2T}\left[-\frac{e^{-jt\left(\omega + 2\pi\frac{k}{T}\right)}}{j^2\left(\omega + 2\pi\frac{k}{T}\right)}\right]_{-T/2}^{0} + \frac{1}{2T}\left[\frac{e^{-jt\left(2\pi\frac{k}{T} - \omega\right)}}{j^2\left(\frac{2\pi k}{T} - \omega\right)}\right]_{-T/2}^{0}$$

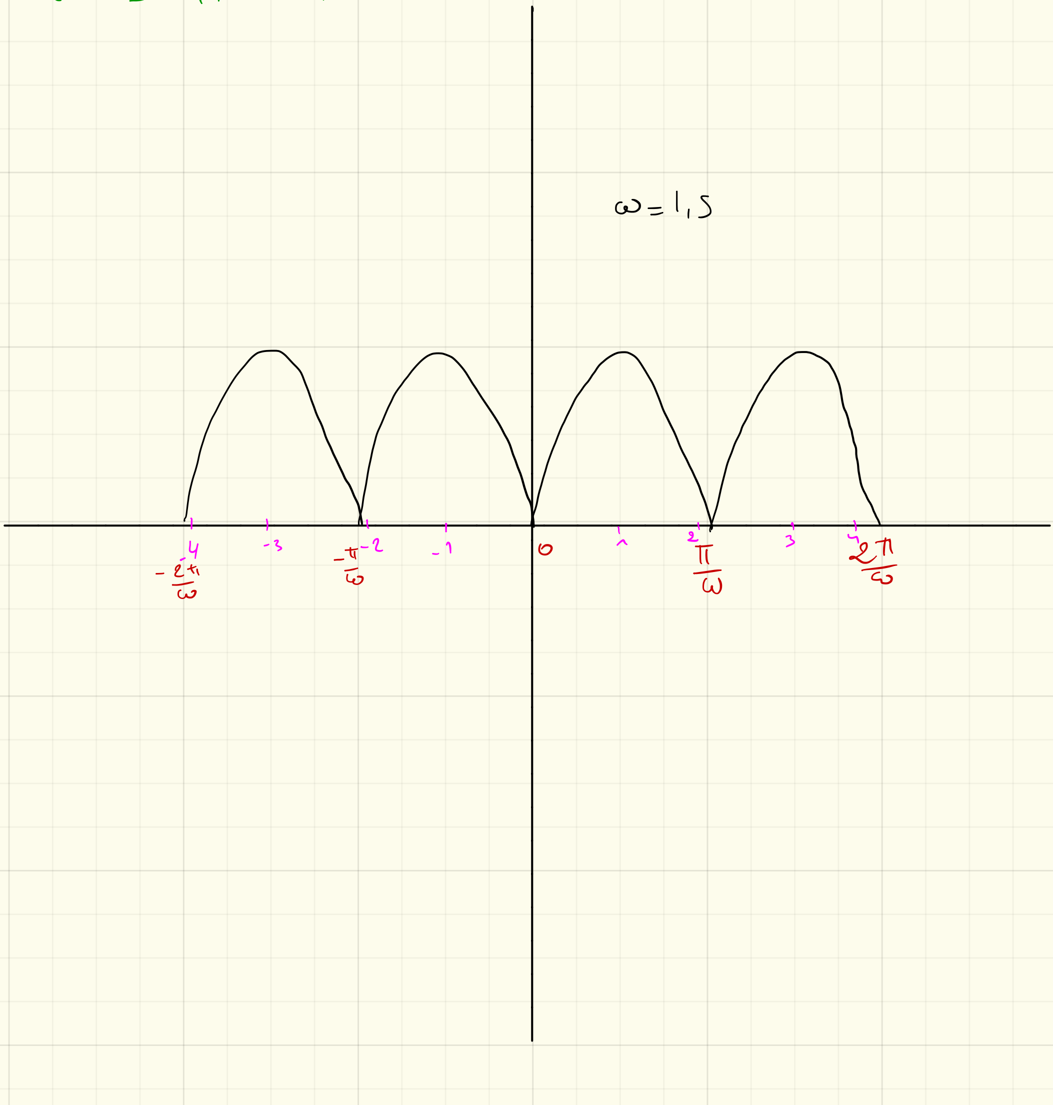
$$(2) = \frac{1}{2T}\left(-\frac{1}{j^2\left(\omega + \frac{2\pi k}{T}\right)} + \frac{e^{jT/2\left(\omega + \frac{2\pi k}{T}\right)}}{j^2\left(\omega + \frac{2\pi k}{T}\right)}\right) +$$

$$\frac{1}{2T}\left(\frac{1}{j^2\left(\frac{2\pi k}{T} - \omega\right)} - \frac{e^{jT/2\left(2\pi\frac{k}{T} - \omega\right)}}{j^2\left(\frac{2\pi k}{T} - \omega\right)}\right)$$

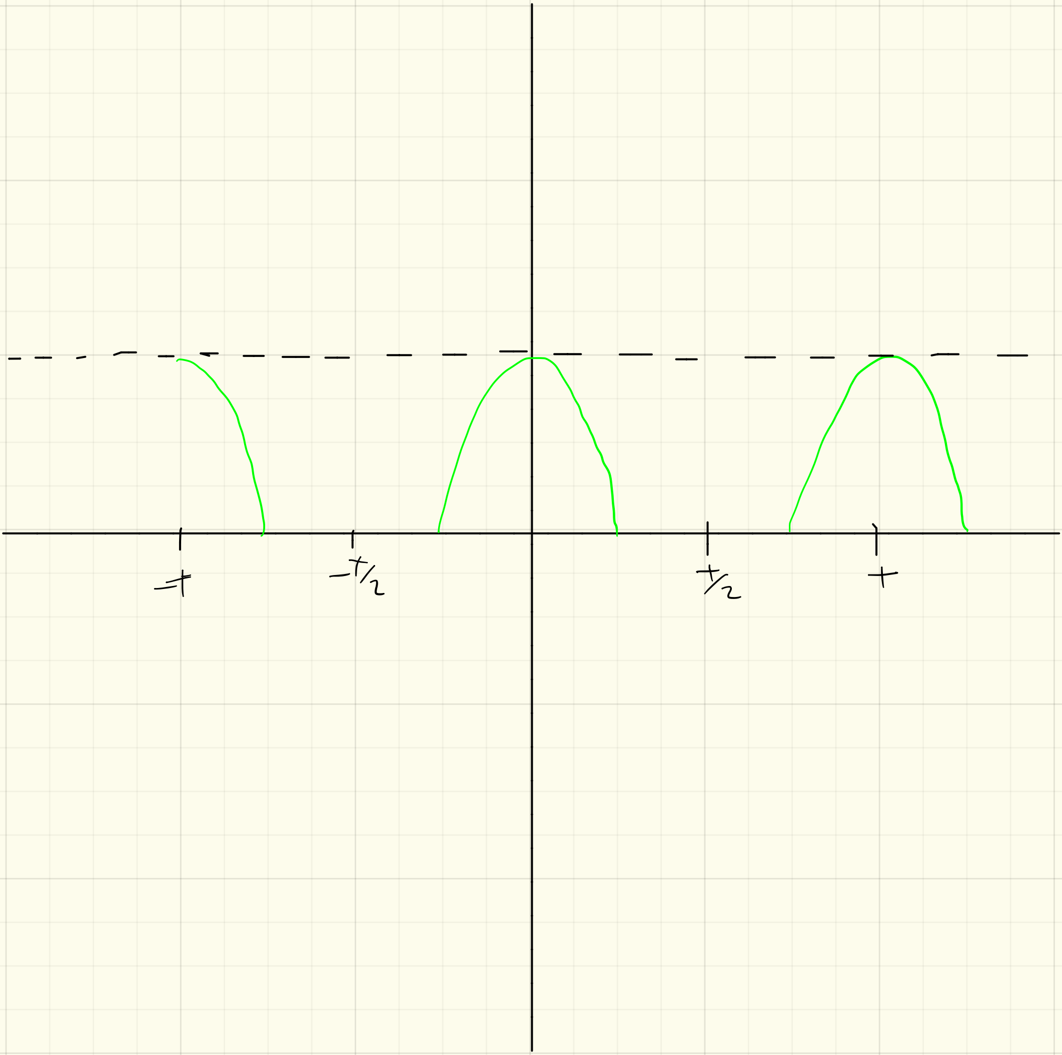
$$z_k = (1) + (2)$$

Representation graphique de $z(t)$:

$z(t) = |\sin \omega t|$

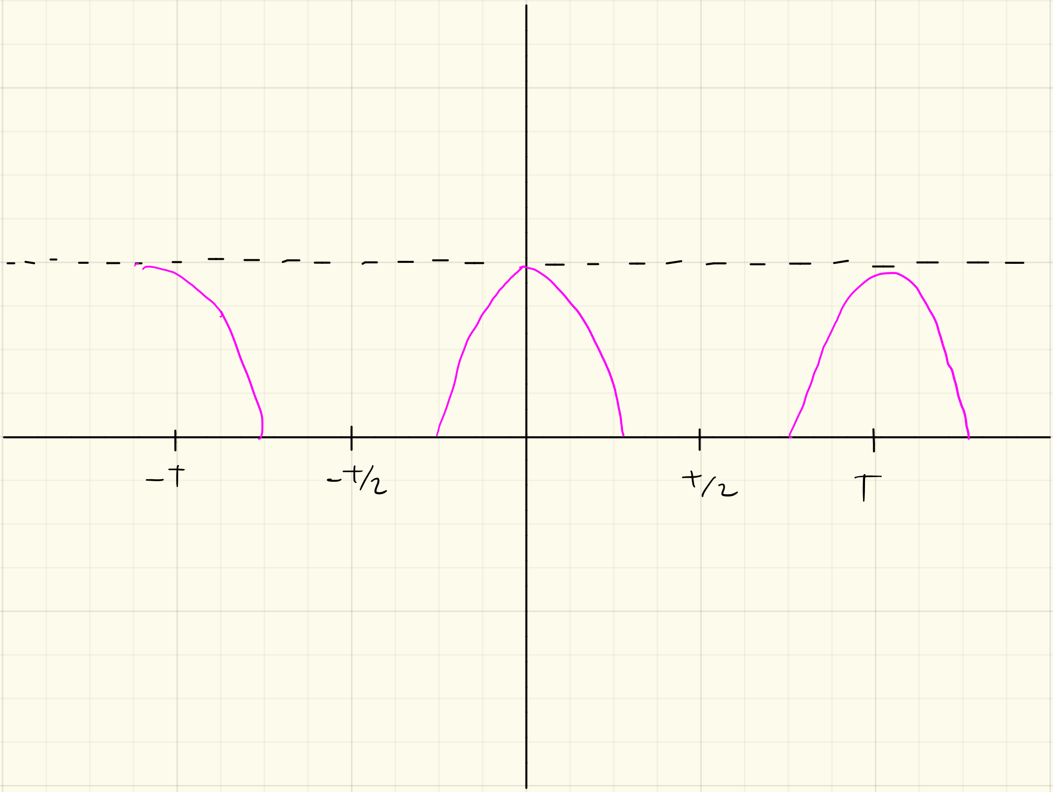


Representation graphique de $|\cos(k\omega t)|$ pour $k=1$



- $\omega(t) = |\cos \omega t|$

-> Representation graphique de $\omega(t)$:



Calcul des coefficients de Fourier X_k de $\omega(k)$:

$$X_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |\cos \omega t|\, e^{-2\pi j \frac{k}{T} t}\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left|\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right| e^{-2\pi j \frac{k}{T} t}\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \times e^{-2\pi j \frac{k}{T} t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-jk\left(2\pi\frac{k}{T} - \omega\right)} + e^{-jk\left(\omega + 2\pi\frac{k}{T}\right)}\, dt$$

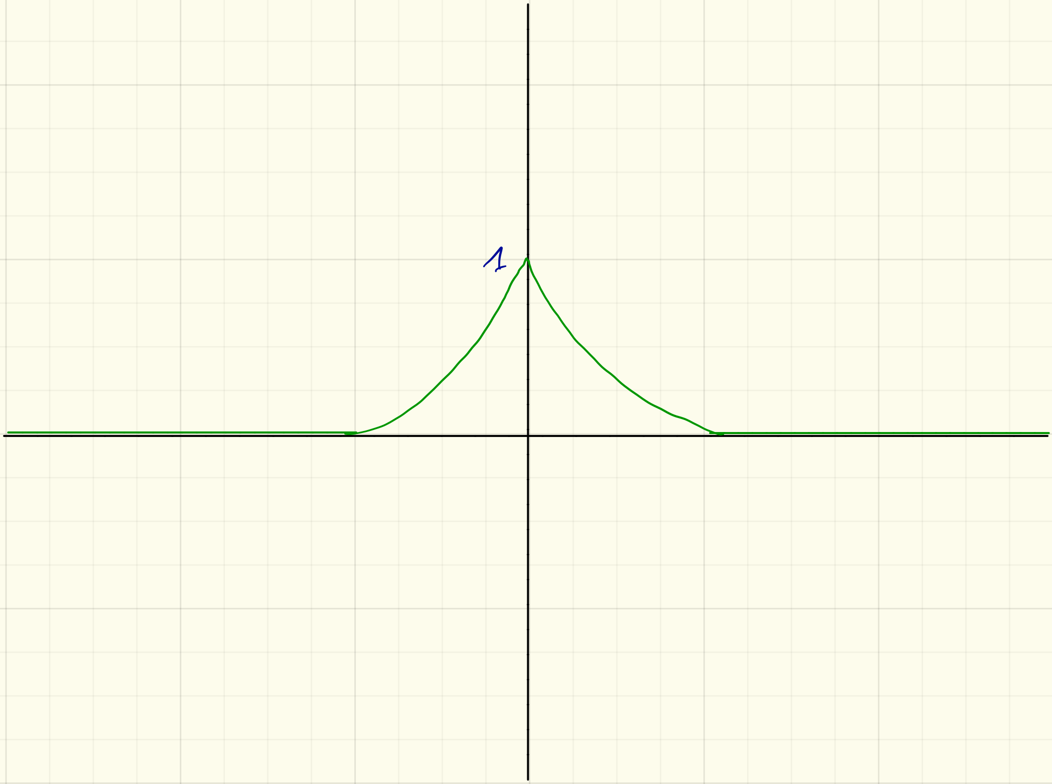
$$= \frac{1}{2T}\left[-\frac{e^{-jk\left(2\pi\frac{k}{T} - \omega\right)}}{j\left(2\pi\frac{k}{T} - \omega\right)}\right]_{-T/2}^{T/2} + \frac{1}{2T}\left[-\frac{e^{-jk\left(\omega + 2\pi\frac{k}{T}\right)}}{j\left(\omega + 2\pi\frac{k}{T}\right)}\right]_{-T/2}^{T/2}$$

$$= \frac{1}{2T}\left[-\frac{e^{-jT/2\left(2\pi\frac{k}{T} - \omega\right)}}{j\left(2\pi\frac{k}{T} - \omega\right)} + \frac{e^{jT/2\left(2\pi\frac{k}{T} - \omega\right)}}{j\left(2\pi\frac{k}{T} - \omega\right)}\right] +$$

$$\frac{1}{2T}\left[-\frac{e^{-jT/2\left(\omega + 2\pi\frac{k}{T}\right)} + e^{jT/2\left(\omega + 2\pi\frac{k}{T}\right)}}{j\left(\omega + 2\pi\frac{k}{T}\right)}\right]$$

- $a(t) = e^{-a|t|}$ $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$

→ Representation graphique de $a(t)$:



→ Calcul des coefficients de Fourier X_k de $a(t)$

$$A_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-a|t|}\, e^{-2\pi j \frac{k}{T} t}\, dt$$

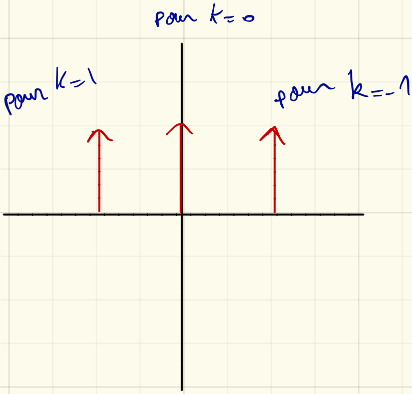
si $t \geq 0$
$$= \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} e^{-at}\, e^{-2\pi j \frac{k}{T} t}\, dt$$
$$= \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} e^{-t\left(a + 2\pi j \frac{k}{T}\right)}\, dt$$
$$= \frac{1}{T}\left[-\frac{e^{-t\left(a+2\pi j \frac{k}{T}\right)}}{a + 2\pi j \frac{k}{T}}\right]_0^{T/2}$$
$$= \frac{1}{T}\left[-\frac{e^{-T/2\left(a+2\pi j \frac{k}{T}\right)}}{a + 2\pi j \frac{k}{T}} + \frac{1}{a + 2\pi j \frac{k}{T}}\right]$$

si $t < 0$
$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} e^{at}\, e^{-2\pi j \frac{k}{T}}\, dt$$
$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} e^{-t\left(2\pi j \frac{k}{T} - a\right)}$$
$$= \frac{1}{T}\left[-\frac{e^{-t\left(2\pi j \frac{k}{T} - a\right)}}{2\pi j \frac{k}{T} - a}\right]_{-T/2}^{0}$$
$$= \frac{1}{T}\left[\frac{-1 + e^{T/2\left(2\pi j \frac{k}{T} - a\right)}}{2\pi j \frac{k}{T} - a}\right]$$

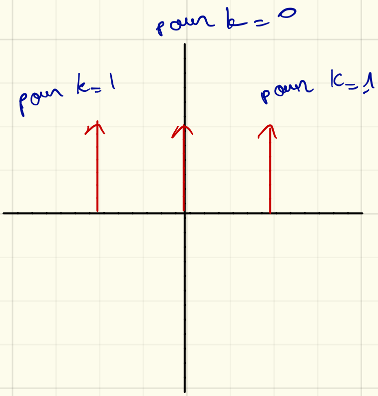
Donc

$$A_k = \frac{1}{T}\left[\frac{1 - e^{-T/2\left(a + 2\pi j \frac{k}{T}\right)}}{a + 2\pi j \frac{k}{T}} + \frac{e^{T/2\left(2\pi j \frac{k}{T} - a\right)} - 1}{2\pi j \frac{k}{T} - a}\right]$$

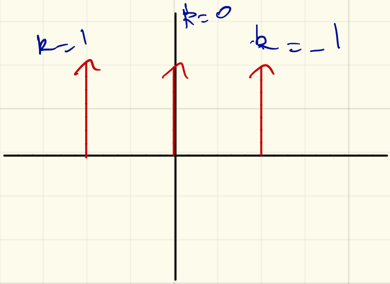
representation graphique de $y(t)$:



representation graphique de $w(t)$:



representation graphique de $z(t)$:



- $x(t)$ pour quelques valeurs particulières :

pour $t = 0$ on a $x(t) = 1$

pour $t = T$ on a $x(t) = 0$

pour $t = \frac{T}{2}$ on a $x(t) = 0$

pour $t = \frac{T}{4}$ si $\theta \leq \frac{T}{4}$ on a $x(t) = 0$

sinon on a $x(t) = 1$

Références:pcsi1.physique.pagesperso-orange.fr
www.ilemaths.net