ANALYSE NUMÉRIQUE II

COURS 1

MÉTHODES DIRECTES POUR LA RÉSOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES

Ch. Baskiotis
LAPI – EISTI

25 janvier 2009

Objectif

Objectif.- Résoudre les problèmes suivants (entre autres) :

– Solution du système d'équations linéaires

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ avec } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

– Inverse d'une matrice

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$$

Méthodes directes

Deux grandes familles de méthodes :
– *directes* et
– *itératives*.

Les méthodes directes établissent la solution en un nombre fini et prédéterminé d'étapes.
Ce nombre est fonction de la taille de la matrice.

Méthodes de cette famille :
– Pivot de Gauss ;
– Décomposition ou factorisation **LU** ;
– Méthode de Cholesky ;
– ...

Fini mais pas petit

Le nombre d'étapes est fini et prédéterminé mais pas forcement petit.

Exemple : Méthode de Cramer ou méthode des déterminants :
Système avec 100 inconnues et 100 équations.
On doit exécuter 9.4×10^{161} opérations élémentaires.

$\Rightarrow$ sur un ordinateur à 1 gigaflop opérations élémentaires par seconde, il faut 3×10^{145} années pour finir les calculs !

$\Rightarrow$ Élaborer des méthodes rapides.

Principe des méthodes directes I

Remplacer la résolution du système

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

par un système plus facile à résoudre newline Par exemple par un système *équivalent* de matrice triangulaire ou diagonale.

1ère idée : Diagonaliser $\mathbf{A} \Rightarrow$ solution immédiate.

MAIS diagonaliser une matrice $\equiv$ calculer ses éléments propres

$\Rightarrow$ Problème difficile à résoudre.

Principe des méthodes directes II

2e idée : Remplacer $\mathbf{A}$ par une matrice triangulaire supérieure et calculer ensuite la solution par substitution inverse.

$\Rightarrow$ Pivot de Gauss

3e idée : Remplacer $\mathbf{A}$ par le produit de deux matrices triangulaires, notées
$\mathbf{L}$ ***triangulaire inférieure***, et
$\mathbf{U}$ ***triangulaire supérieure***

On résout alors successivement deux systèmes triangulaires :

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b} \text{ puis } \mathbf{Ux} = \mathbf{y} \text{ d'où } \mathbf{LUx} = \mathbf{Ly} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

$\Rightarrow$ Décomposition $\mathbf{LU}$.

Pivot de Gauss

Idée de base : transformer en $(n-1)$ étapes le système donné en un système équivalent $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$ où $\mathbf{U}$ matrice triangulaire supérieure :

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

et de résoudre ensuite ce système par substitution inverse selon la formule

$$x_{n-k} = \frac{1}{u_{n-k,n-k}} \left(c_{n-k} - \sum_{\ell=0}^{k-1} u_{n-k,n-\ell} x_{n-\ell} \right); \; k = 0, \ldots, n-1$$

Gauss sur un petit exemple

Soit le système

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

que nous pouvons écrire, en référence à la 1ère itération,

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} \\ a_{41}^{(1)} & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ b_4^{(1)} \end{bmatrix}$$

« Le commencement est la moitié du tout » – I

On considère la première itération effectuée sur la première ligne.
Soit $a_{11} \neq 0$. a_{11} est appelé ***pivot*** et sera noté par π_1.
Considérons la première ligne du système
$a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + a_{14}^{(1)}x_4 = b_1^{(1)}$
et on la résout par rapport à x_1. On obtient
$x_1 = -\frac{a_{12}^{(1)}}{\pi_1}x_2 - \frac{a_{13}^{(1)}}{\pi_1}x_3 - \frac{a_{14}^{(1)}}{\pi_1}x_4 + \frac{1}{\pi_1}b_1$
Si on remplace x_1 aux autres équations, on a, par exemple pour la 2e équation
$a_{21}^{(1)}\left(\frac{a_{12}^{(1)}}{\pi_1}x_2 - \frac{a_{13}^{(1)}}{\pi_1}x_3 - \frac{a_{14}^{(1)}}{\pi_1}x_4 + \frac{1}{\pi_1}b_1\right) + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = b_2^{(1)} \Rightarrow$
$0x_1 + \left(a_{22}^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1}a_{12}^{(1)}\right)x_2 + \left(a_{23}^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1}a_{13}^{(1)}\right)x_3 + \left(a_{24}^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1}a_{14}^{(1)}\right)x_4 = b_2^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1}b_1^{(1)}$

« Le commencement est la moitié du tout » – II

En faisant les mêmes calculs aux deux lignes suivantes, on obtient à la fin

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1}a_{12}^{(1)} & a_{23}^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1}a_{13}^{(1)} & a_{24}^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1}a_{14}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} - \frac{a_{31}^{(1)}}{\pi_1}a_{12}^{(1)} & a_{33}^{(1)} - \frac{a_{31}^{(1)}}{\pi_1}a_{13}^{(1)} & a_{34}^{(1)} - \frac{a_{31}^{(1)}}{\pi_1}a_{14}^{(1)} \\ 0 & a_{42}^{(1)} - \frac{a_{41}^{(1)}}{\pi_1}a_{12}^{(1)} & a_{43}^{(1)} - \frac{a_{41}^{(1)}}{\pi_1}a_{13}^{(1)} & a_{44}^{(1)} - \frac{a_{241}^{(1)}}{\pi_1}a_{14}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1}b_1^{(1)} \\ b_3^{(1)} - \frac{a_{31}^{(1)}}{\pi_1}b_1^{(1)} \\ b_4^{(1)} - \frac{a_{41}^{(1)}}{\pi_1}b_1^{(1)} \end{bmatrix}$$

« Le commencement est la moitié du tout » – III

On voit donc que cette façon de procéder élimine la variable x_1 *de* $4-1=3$ *dernières équations.* On obtient ainsi à la fin de la 1ère itération le système

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ 0 & a_{42}^{(3)} & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(2)} \\ b_4^{(2)} \end{bmatrix}$$

que l'on peut, encore, noté

$$\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(2)}$$

L'autre moitié – I

Nous allons maintenant éliminer la variable x_2 de $4-2=2$ dernières équations de $\mathbf{A}^{(2)}$:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(3)} & a_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ b_4^{(3)} \end{bmatrix}$$

et la variable x_3 de $4-3=1$ dernière équation :

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ b_4^{(4)} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ *On peut résoudre le système par substitution inverse*

La troisième moitié : Décomposition **LU** – I

Une autre façon de voir le monde - et Gauss $\Rightarrow$ ***Gauss en couleurs !***

On pose

$$\mathbf{M}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{31}^{(1)}}{\pi_1} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_{41}^{(1)}}{\pi_1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

qui est une matrice triangulaire inférieure, avec sur la diagonale des 1.

La troisième moitié : Décomposition **LU** – II

Alors on a la relation

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1}a_{12}^{(1)} & a_{23}^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1}a_{13}^{(1)} & a_{24}^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1}a_{14}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} - \frac{a_{31}^{(1)}}{\pi_1}a_{12}^{(1)} & a_{33}^{(1)} - \frac{a_{31}^{(1)}}{\pi_1}a_{13}^{(1)} & a_{34}^{(1)} - \frac{a_{31}^{(1)}}{\pi_1}a_{14}^{(1)} \\ 0 & a_{42}^{(1)} - \frac{a_{41}^{(1)}}{\pi_1}a_{12}^{(1)} & a_{43}^{(1)} - \frac{a_{41}^{(1)}}{\pi_1}a_{13}^{(1)} & a_{44}^{(1)} - \frac{a_{241}^{(1)}}{\pi_1}a_{14}^{(1)} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{31}^{(1)}}{\pi_1} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_{41}^{(1)}}{\pi_1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} \\ a_{41}^{(1)} & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} \end{bmatrix}$$

La troisième moitié : Décomposition **LU** – III

On a aussi la relation

$$\begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1}b_1^{(1)} \\ b_3^{(1)} - \frac{a_{31}^{(1)}}{\pi_1}b_1^{(1)} \\ b_4^{(1)} - \frac{a_{41}^{(1)}}{\pi_1}b_1^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{31}^{(1)}}{\pi_1} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_{41}^{(1)}}{\pi_1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ b_4^{(1)} \end{bmatrix}$$

Ces deux relations peuvent s'écrire

$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}^{(1)} \quad \text{et} \quad \mathbf{b}^{(2)} = \mathbf{M}^{(1)}\mathbf{b}^{(1)}$$

c'est-à-dire la première itération consiste à multiplier à gauche le système initial $\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ par $\mathbf{M}^{(1)}$

La troisième moitié : Décomposition **LU** – IV

Continuons.
À la deuxième itération on aura

$$\mathbf{A}^{(3)} = \mathbf{M}^{(2)}\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}^{(1)}$$
$$\mathbf{b}^{(3)} = \mathbf{M}^{(2)}\mathbf{b}^{(2)} = \mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{b}^{(1)}$$

et à la troisième et dernière

$$\mathbf{A}^{(4)} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{A}^{(3)} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}^{(1)}$$
$$\mathbf{b}^{(4)} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{b}^{(3)} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{b}^{(2)} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{b}^{(1)}$$

Rappelons que *la matrice $\mathbf{A}^{(4)}$ est une matrice triangulaire supérieure et que la matrice $\mathbf{M}^{(3)}$ est aussi, par construction une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale.*

La troisième moitié : Décomposition $\mathbf{LU}$ – V

Récapitulons : nous avons

$$\mathbf{A}^{(4)} = \mathbf{MA} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}$$
$$\mathbf{b}^{(4)} = \mathbf{Mb} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{b}$$

Donc

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^{(4)} = \left[\mathbf{M}^{(1)}\right]^{-1}\left[\mathbf{M}^{(2)}\right]^{-1}\left[\mathbf{M}^{(3)}\right]^{-1}\mathbf{A}^{(4)}$$
$$\mathbf{b} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}^{(4)} = \left[\mathbf{M}^{(1)}\right]^{-1}\left[\mathbf{M}^{(2)}\right]^{-1}\left[\mathbf{M}^{(3)}\right]^{-1}\mathbf{b}^{(4)}$$

Nous avons

$$\mathbf{M}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{31}^{(1)}}{\pi_1} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_{41}^{(1)}}{\pi_1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{L}^{(1)} = \left[\mathbf{M}^{(1)}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{31}^{(1)}}{\pi_1} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{a_{41}^{(1)}}{\pi_1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La troisième moitié : Décomposition $\mathbf{LU}$ – VI

Nous avons donc

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{L}^{(3)}\mathbf{A}^{(4)} = \mathbf{LU},$$
$$\mathbf{b} = \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{L}^{(3)}\mathbf{b}^{(4)} = \mathbf{Lb}^{(4)}$$

avec

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{L}^{(3)} \quad \text{et} \quad \mathbf{U} = \mathbf{A}^{(4)}$$

Cette relation est *la décomposition* $\mathbf{LU}$ *de la matrice* $\mathbf{A}$, où $\mathbf{L}$ est une matrice triangulaire inférieure, avec des 1 sur la diagonale et $\mathbf{U}$ est une matrice triangulaire supérieure.

La quatrième et dernière moitié :

Soit le système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
En tenant compte de la décomposition $\mathbf{LU}$ on peut écrire

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{LUx}$$

En posant $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ on obtient

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{Ly} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Ly} = \mathbf{b}$$

ce qui permet de calculer $\mathbf{y}$ comme suit

$$\mathbf{y} = \mathbf{Mb}$$

et la solution du système est obtenue par substitution inverse du système

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$$

Complexité

En termes de complexité l'élimination de Gauss et la décomposition $\mathbf{LU}$ sont de l'ordre de $O\left(n^3\right)$.

La décomposition $\mathbf{LU}$ est particulièrement utile quand on veut inverser une matrice.

Dans ce cas on a $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ et la décomposition $\mathbf{LU}$ donne un premier calcul $\mathbf{LY} = \mathbf{I}$, d'où $\mathbf{Y} = \mathbf{L}^{-1}$ et ensuite on obtient la matrice inverse par la résolution de $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$.

Donc cette méthode permet d'inverser une matrice avec un nombre d'opérations de l'ordre de $O\left(n^3\right)$.

Factorisation de Cholesky

Soit $\mathbf{A}$ symétrique.

De la décomposition $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ nous pouvons obtenir la décomposition $\mathbf{A} = \mathbf{LDU}'$ où $\mathbf{L}$ matrice comme précedement, $\mathbf{U}'$ matrice triangulaire supérieure avec éléments diagonaux égaux à 1 et $\mathbf{D} = \mathrm{diag}\,(u_{11}, \dots u_{nn})$ matrice diagonale.
Il est facile de voir que $\mathbf{U}' = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}$ où la matrice $\mathbf{D}^{-1}$ existe car la matrice $\mathbf{U}$ est régulière.
Si $\mathbf{A}$ symétrique, alors
$\mathbf{A} = \mathbf{LDU}' = \mathbf{LDL}^\top$
Si, de plus, $\mathbf{A}$ définie positive, c'est-à-dire $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} > \mathbf{0}$, alors
$\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^\top = \mathbf{L}\sqrt{\mathbf{D}}\sqrt{\mathbf{D}}\mathbf{L}^\top = \mathbf{CC}^\top$
avec $\mathbf{C} = \mathbf{L}\sqrt{\mathbf{D}}$ et où on a noté $\sqrt{\mathbf{D}} = \mathrm{diag}\left(\sqrt{d_{11}}, \dots, \sqrt{d_{nn}}\right)$.
Cette décomposition est la ***factorisation de Cholesky***.