Induction et restriction des représentations, réciprocité de Frobenius et applications dans le cas des groupes symétriques.

Mehdy HOUNKONNOU
Iona FLORES
Florian ROBERT

Université de Bordeaux

Master 1ère année

24 Mai 2019

Sommaire

Représentations restreinte et induite de groupes finis

Représentation restreinte

Définition

Soient H un sous groupe de G et $(\rho,\ V)$ une représentation de G ie : $\rho : G \to GL(V)$. On appelle une représentation restreinte de G sur H, le morphisme de groupe de G restreint a H :
$\rho_H : H \to GL(V)$
On a que $\rho_H(h) = \rho(h)$, pour tout $h \in H$.

Représentations restreinte et induite de groupes finis

Représentation induite

Définition

Soit H un sous-groupe d'un groupe G fini. Soit (ρ, W) une représentation de H. W étant un $\mathbb{C}[H]$-module. On appelle la représentation de G induite par W :

$$V = Ind_H^G(W) := \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$$

Représentations restreinte et induite de groupes finis

Représentation induite

Remarque

Soit $T = \{\tau_i, 1 \leq i \leq n\}$ *un ensemble des représentants des classes à gauches de* G *sur* H*, où* $n = [G : H] = \frac{|G|}{|H|}$*. Ainsi,*

$$G = \bigsqcup_{i=1}^{n} \tau_i.H$$

et

$$V = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W = \bigoplus_{i=1}^{[G:H]} \underbrace{(\tau_i \otimes_{\mathbb{C}[H]} W)}_{=: V_i}$$

Représentations restreinte et induite de groupes finis

Matrice d'une représentation induite

Soient H un sous-groupe de G et (ρ, W) une représentation de H de degré m. Soient $T = \{\tau_1, ..., \tau_n\}$ un ensemble de représentant des classes à gauche de H dans G et $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ une base de W.

But : Donner une description explicite de la matrice de $Ind_H^G(W)(g)$ dans une base.

Représentations restreinte et induite de groupes finis

Caractère et réciprocité de Frobenius

Proposition (Caractère d'une représentation induite)

Si $g \in G$, on a

$$\chi_{Ind_H^G(W)}(g) = \sum_{\substack{\tau \in T \\ \tau^{-1} g \tau \in H}} \chi_W(\tau^{-1} g \tau)$$

Représentations restreinte et induite de groupes finis

Caractère et réciprocité de Frobenius

Théorème (Réciprocité de Frobenius)

Soient W une représentation de H et V une représentation de G, on a

$$\langle \chi_{Ind_H^G(W)} | \chi_V \rangle_G = \langle \chi_W | \chi_{Res_H^G(V)} \rangle_H$$

Représentations du groupe symétrique

But : Décrire toutes les représentations irréductibles du groupe symétrique.

Représentations du groupe symétrique

Tableaux de Young

Remarque

Les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ sont en correspondance bijective avec les partitions de l'entier n

Example

Dans $\mathfrak{S}_9$, on considère

$$\sigma = (2\ 5\ 4\ 8)\ (1\ 3)\ (7)\ (6\ 9)$$

Représentations du groupe symétrique

Tableaux de Young

Définition

On appelle une partition de n un ensemble de nombres entiers naturels $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l)$ *tel que* $|\lambda| = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i = n$ *avec la famille* (λ_i) *étant décroissante . On note* $\lambda \vdash n$ *.*

Représentations du groupe symétrique

Tableaux de Young

Définition

Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l) \vdash n$ *. Le diagramme de Ferrer associé à* λ *est un tableau constitué de n points et de l lignes de sorte que la i-ème ligne soit constituée de* λ_i *points.*

Représentations du groupe symétrique

Tableau de Young

But : Associer à toute partition λ un certain sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ que l'on appelle le sous-groupe de Young correspondant à $\lambda \vdash n$

Définition

Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l) \vdash n$. Le sous-groupe de Young de $\mathfrak{S}_n$ correspondant est

$$\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}_{\{1,2,3,..,\lambda_1\}} \times \mathfrak{S}_{\{\lambda_1+1,\lambda_1+2,...,\lambda_1+\lambda_2\}} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\{n-\lambda_l+1,n-\lambda_l+2,...,n\}}$$

Représentations du groupe symétrique

Tableau de Young

Pour construire les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ on considère $Ind_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n}(\mathbb{C})$.
Et $\{\tau_1, ..., \tau_k\}$ un ensemble de représentants des classes à gauche de $\mathfrak{S}_\lambda$ dans $\mathfrak{S}_n$, on obtient que :

$$Ind_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n}(\mathbb{C}) := \bigoplus_{i=1}^{k} \tau_i \otimes \mathbb{C}$$

Et on le note

$$V^\lambda := \mathbb{C}\{\tau_1\mathfrak{S}_\lambda, ..., \tau_k\mathfrak{S}_\lambda\}$$

Représentations du groupe symétrique

Tableau de Young

Définition

Soit $\lambda \vdash n$. Un tableau de Young de forme λ est un tableau t obtenu en remplaçant les points du diagramme de Ferrer par les éléments de $\{1, 2, 3, ..., n\}$. Un tableau de Young de forme λ est aussi appelé λ-tableau et est noté t^λ.

Représentations du groupe symétrique

Tableau de Young

Définition (Equivalence de tableaux)

On dit que deux tableaux de même forme λ sont équivalents en lignes, si chaque ligne des deux tableaux contiennent les mêmes éléments. On appelle tabloïde de forme λ ou un λ-tabloïde, et on le note $\{t\}$, une classe d'équivalence pour cette relation ie. $\{t\} = \{t_1 \mid t_1 \sim t\}$.

Représentations du groupe symétrique

Tableau de Young

Maintenant, étant donné $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, cet élément agit sur le tableau $t = (t_{i,j})$ de forme $\lambda \vdash n$ en posant : $\sigma.t = (\sigma t_{i,j})$.

Ceci induit une action de $\mathfrak{S}_n$ sur les tabloïdes :

$$\sigma.\{t\} = \{\sigma t\} \tag{1}$$

Représentations du groupe symétrique

Tableau de Young

Définition

Soient $\lambda \vdash n$ et $(\{t_1\}, ..., \{t_k\})$ une liste complète de λ-tabloïdes. On définit $M^\lambda :=\mathbb{C}\{\{t_1\}, ..., \{t_k\}\}$, appelé module de permutation correspondant à λ.

Représentations du groupe symétrique

Tableau de Young

Proposition

$$\dim M^{\lambda} = \frac{n!}{\lambda!}$$

Représentations du groupe symétrique

Module de Specht

Définition

On suppose que le tableau t a pour colonnes $C_1, \ldots, C_k$. Alors

$$C_t := \mathfrak{S}_{C_1} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{C_k}$$

est le stabilisateur des colonnes de t. C'est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

Représentations du groupe symétrique

Module de Specht

Définition

Considérons :

$$k_t := C_t^- = \sum_{\tau \in C_t} \operatorname{sgn}(\tau)\tau \qquad \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \tag{2}$$

Représentations du groupe symétrique

Module de Specht

Définition (polytabloïde)

Si t est un tableau, le polytabloïde associé à t est :

$$e_t := k_t\{t\}$$

Représentations du groupe symétrique

Module de Specht

Définition

Soit $\lambda \vdash n$. Le module de Specht S^λ est le sous-module de M^λ, engendré par tous les polytabloïdes e_t, où t est de forme λ.

Représentations du groupe symétrique

Théorème

Théorème

Les S^λ, avec $\lambda \vdash n$, énumèrent toutes les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{C}$.
Autrement dit, les S^λ sont des $\mathfrak{S}_n$-modules irréductibles deux à deux non isomorphes et tout $\mathfrak{S}_n$-module irréductible est isomorphe à l'un d'entre eux.

Représentations du groupe symétrique

Théorème

Corollaire

On a :

$$M^{\mu} = \bigoplus_{\lambda \trianglerighteq \mu} m_{\lambda\mu} S^{\lambda}$$

Représentations du groupe symétrique

Applications

Définition

Soit $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_l) \vdash n$, $\mu = (\mu_1, ..., \mu_m) \vdash n$. *On dit que* λ *domine* μ *et on écrit* $\lambda \trianglerighteq \mu$, *si :*

$$\forall i \geq 1,\ \lambda_1 + ... + \lambda_i \geq \mu_1 + ... + \mu_i$$

Si $i > l$, *on prend* $\lambda_i = 0$ *et si* $i > m$, *on prend* $\mu_i = 0$.
$\trianglerighteq$ *est une relation d'ordre.*

Représentations du groupe symétrique

Applications

Exemple

Prenons pour exemple $\mathfrak{S}_4$. Rappelons que son tableau de caractère est le suivant :

	Id	(1 2)	(1 2)(3 4)	(1 2 3)	(1 2 3 4)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ϵ	1	-1	1	1	-1
χ_S	3	1	-1	0	-1
χ_4	2	0	2	-1	0
χ_C	3	-1	-1	0	1

Représentations du groupe symétrique

Applications

Les partitions de $n = 4$:

$$\begin{array}{l} (4) \\ (3 \quad 1) \\ (2 \quad 2) \\ (2 \quad 1 \quad 1) \\ (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1) \end{array}$$

Représentations du groupe symétrique

Applications

On a pour la partition (4) :

$$M^{(4)} = S^{(4)} \text{ et donc } \dim(M^{(4)}) = \dim(S^{(4)}) = \frac{4!}{4!} = 1$$

$S^{(4)}$ correspond à la représentation triviale.

Représentations du groupe symétrique

Applications

Pour la partition (3 1), on a :

$$M^{(3\ 1)} = S^{(3\ 1)} \oplus m_{(4)(3\ 1)}(S^{(4)})$$

où $m_{(4)(3\ 1)}$ est la multiplicité associée à $S^{(4)}$
Or, $\dim(M^{(3\ 1)}) = \frac{4!}{3! \times 1!} = 4$ et $\dim(S^{(4)}) = 1$.

Représentations du groupe symétrique

Applications

De plus, d'après la formule de la réciprocité de Frobenius, on peut en déduire $m_{(4)(3\ 1)}$. En effet,

$$\langle \chi_{Ind_{\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_1}^{\mathfrak{S}_4}(\mathbb{C})} | \chi_1 \rangle_{\mathfrak{S}_4} = \langle \chi_{\mathbb{C}} | \chi_{Res_{\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_1}^{\mathfrak{S}_4}(1)} \rangle_{\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_1}$$
$$= 1$$

avec 1 et $\mathbb{C}$ les représentations triviales respectives de G et H. Ainsi le nombre de fois où $S^{(4)}$ apparaît dans la décomposition de $M^{(3\ 1)}$ est 1, d'où $m_{(4)(3\ 1)} = 1$. On en déduit donc que $\dim(S^{(3\ 1)}) =$ 3

MERCI DE VOTRE ATTENTION