

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

MASTER DE MODÉLISATION STATISTIQUE ET STOCHASTIQUE

20 mai 2020

Un peu de Mouvement Brownien

Auteurs :

HOUNKONNOU Mehdy
LABARBARIE Pol
THURIN Gauthier

Encadrant :

HUGUET Baptiste

Table des matières

1	Construction et propriétés du Mouvement Brownien	2
1.1	Mouvement brownien comme marche aléatoire renormalisée	2
1.2	Invariance du mouvement brownien	6
2	Equation de la chaleur	9
2.1	Le mouvement brownien comme chaîne de Markov, un opérateur bien singulier	9
2.2	Equation de la chaleur	11
2.3	Simulations numériques	12
3	Estimation statistique	14
3.1	Modèle à dérive linéaire	14
3.1.1	Maximum de vraisemblance	14
3.1.2	Qualité de nos estimateurs	15
3.1.3	Simulations	16
3.2	Modèle transformé, marée périodique	18
3.2.1	Maximum de vraisemblance	18
3.2.2	Qualité de notre estimateur	19
3.2.3	Simulations	20
4	Test de rupture	21

Introduction

Le mouvement brownien désigne deux choses : un phénomène physique et un objet mathématique. Si on souhaite aborder ce sujet, on ne peut faire l'économie de quelques noms célèbres. En 1827, le botaniste Brown, même s'il n'était pas le premier, observe la danse de particules fines en suspension dans l'eau, observation qui donnera son nom au mouvement brownien. Bachelier fait office de pionnier, au début du XXe siècle, en introduisant l'utilisation du mouvement brownien en finance, avant que celui-ci ne soit formalisé physiquement par Einstein et mathématiquement par Wiener peu après. C'est dans un article de 1905 qu'Einstein allie l'hydrodynamique et la théorie cinétique des gaz afin de donner une description quantitative du mouvement brownien. Et c'est en 1923 que Wiener donne une définition mathématique du mouvement brownien en construisant une mesure de probabilité sur l'espace des fonctions continues réelles. Près de deux siècles plus tard, les causes du mouvement brownien sont aujourd'hui établies comme étant dûes au mouvement désordonné des molécules qui l'entourent. A l'estime, ce phénomène de dispersion peut décrire l'évolution de tout objet en proie à une multitude de causes et qui, au gré d'impulsions extérieures variées et incessantes, nous paraît rapide et irrégulier. Notons que, de cette danse chaotique naît pourtant un certain équilibre statistique - l'apparente homogénéité du verre d'eau - expliqué par la loi forte des grands nombres, qui donne d'ailleurs à penser sur la structure de la matière. Ainsi, de la trajectoire instable de "grosses" particules immergées parmi des plus petites aux processus stochastiques qui tentent de prédire le prix d'actions en bourse, le mouvement brownien permet nombreuses modélisations.

Nous introduisons ici certaines caractérisations du mouvement brownien et décrivons quelques-unes de ses propriétés, dans l'optique de discuter de deux applications : Quel est le lien entre diffusion d'un processus brownien et équation de la chaleur ? Et comment modéliser la trajectoire d'une particule de pollution dans une rivière ? Nous illustrerons nos propos avec des simulations.

Il convient de préciser que notre travail n'est qu'une esquisse de la théorie enrobant les mouvements browniens. Même en ne considérant principalement que le mouvement brownien dans \mathbb{R} , nous ne prétendons pas fournir un tableau complet des caractérisations, propriétés existantes. Nous omettons notamment de parler de l'intégrale d'Itô, de la non différentiabilité des trajectoires browniennes, etc... En somme, nous espérons surtout permettre au lecteur non adepte de découvrir le mouvement brownien sans manque de rigueur, de nourrir sa curiosité mathématique avant de s'attaquer à des ouvrages plus complets. Les plus fureteurs trouveront leur bonheur en appendice. Ceci étant dit, entrons dans le vif du sujet.

1 Construction et propriétés du Mouvement Brownien

1.1 Mouvement brownien comme marche aléatoire renormalisée

Il existe de multiples manières de construire et d'illustrer numériquement un mouvement brownien. Nous nous sommes intéressés au mouvement brownien comme marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} renormalisée. Fixons le cadre de cette construction. Soit $(\varepsilon_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d* de loi de $\mathcal{R}(\frac{1}{2})$. Nous définissons alors le processus $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tel que :

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_k = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k \quad k \geq 1 \end{cases}$$

(S_k) est donc la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} . Effectuons un changement d'échelle à la fois de temps et d'espace en considérant (pour n un entier fixé) la marche aléatoire $(M_t^{(n)})_{t \in \frac{1}{n}\mathbb{N}}$ sur $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{Z}$ partant de 0 telle que :

$$M_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_k \text{ si } t = \frac{k}{n}$$

Les changements d'états ont maintenant lieu toutes les $\frac{1}{n}$ "secondes" en faisant un pas de $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$. Considérons alors le processus à temps continu qu'on notera $(X_t^{(n)})_t$, dont les trajectoires sont obtenues par

interpolation linéaire entre chaque couple de points $(\frac{k}{n}, M_{k/n}^{(n)})$ et $(\frac{k+1}{n}, M_{(k+1)/n}^{(n)})$. Après développement nous obtenons :

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]} + (nt - [nt]) \frac{\varepsilon_{[nt]+1}}{\sqrt{n}}$$

Les points sur les i

Ayant initialisé notre construction d'un mouvement brownien, il convient de spécifier la nature des objets que l'on manipule, pour clarifier notre objectif. Nous sommes partis d'une suite de variables aléatoires $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pour obtenir $(X_t^{(n)})$, chose aléatoire indexée par t et par n . Précisons ceci. Pour tout entier n , pour tout $t \in [0; 1]$, $X_t^{(n)}$ est une variable aléatoire réelle. À n fixé, on dit que $(X_t^{(n)})_{t \in [0,1]}$ est un processus stochastique. Une définition en est donnée quelques lignes en suivant, mais on peut déjà énoncer que $X^{(n)}$ est une fonction continue sur $[0,1]$:

$$\begin{aligned} X^{(n)} : [0,1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto X_t^{(n)} \end{aligned}$$

Finalement, la suite $(X^{(n)})_n$ ainsi construite est à valeurs dans l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$. Notre objectif est alors de montrer que cette suite converge en loi vers un mouvement brownien.

Nous souhaitons maintenant montrer que pour tout $p \geq 1$ et tous $0 \leq t_1 < \dots < t_p$, nous avons :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} (S_{[nt_1]}, S_{[nt_2]} - S_{[nt_1]}, \dots, S_{[nt_p]} - S_{[nt_{p-1}]}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_p} - B_{t_{p-1}})$$

où $B = (B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien.

Pour ce faire, nous allons donner une première définition du mouvement brownien. Il nous faut d'abord définir ce qu'est un processus stochastique.

Définition 1.1. On appelle processus stochastique adapté la donnée $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, (X_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$, où

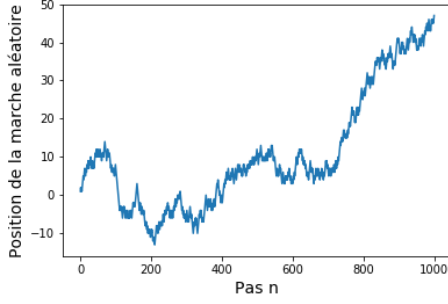
1. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité.
2. T est un sous-ensemble de \mathbb{R}_+ .
3. $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ est une filtration indexée par T (une famille croissante de sous-tribus de \mathcal{F}).
4. $(X_t)_{t \in T}$ est une famille de variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{F}) , à valeurs dans $(E, \mathcal{B}(E))$, telles que $\forall t \in T : X_t$ soit \mathcal{F}_t -mesurable.

Définition 1.2. Un processus $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles est appelé mouvement brownien si :

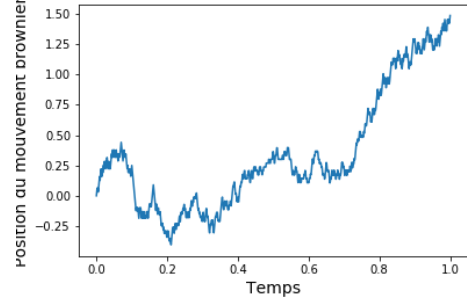
1. $B_0 = 0$ \mathbb{P} -p.s.
2. $\forall 0 \leq s \leq t$, la variable aléatoire $(B_t - B_s)$ est indépendante de \mathcal{F}_s
3. $\forall 0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ est de loi $\mathcal{N}(0, t - s)$

Autrement dit, le processus B part de 0, ses accroissements sont indépendants du passé, gaussiens centrés et de variance égale à la longueur de l'intervalle de temps.

Il est clair que $(S_{[nt_p]} - S_{[nt_{p-1}]}) \perp\!\!\!\perp S_{[nt_{p-1}]}$ et cela pour tout $p \geq 1$ étant donné que la suite $(\varepsilon_k)_{k \geq 1}$ est *i.i.d*. De plus, la suite $(\varepsilon_k)_{k \geq 1}$ est dans \mathcal{L}^2 (c'est une suite *i.i.d* de loi de $\mathcal{R}(\frac{1}{2})$), ainsi d'après le théorème central limite :



(a) Trajectoire de la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}



(b) Trajectoire d'un mouvement brownien

FIGURE 1 – Trajectoire d'un mouvement brownien comme marche aléatoire sur \mathbb{Z} renormalisée

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(S_{\lfloor nt_p \rfloor} - S_{\lfloor nt_{p-1} \rfloor}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, t_p - t_{p-1}), \forall p \geq 1$$

Chaque composante du vecteur est donc indépendante et convergence en loi vers une différence de loi normale centrée. Ainsi :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(S_{\lfloor nt_1 \rfloor}, S_{\lfloor nt_2 \rfloor} - S_{\lfloor nt_1 \rfloor}, \dots, S_{\lfloor nt_p \rfloor} - S_{\lfloor nt_{p-1} \rfloor}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_p} - B_{t_{p-1}})$$

où $B = (B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien.

De plus, nous pouvons remarquer que :

$$X_{t_p}^{(n)} - X_{t_{p-1}}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}(S_{\lfloor nt_p \rfloor} - S_{\lfloor nt_{p-1} \rfloor}) + (nt_p - \lfloor nt_p \rfloor) \frac{\varepsilon_{\lfloor nt_p \rfloor+1}}{\sqrt{n}} - (nt_{p-1} - \lfloor nt_{p-1} \rfloor) \frac{\varepsilon_{\lfloor nt_{p-1} \rfloor+1}}{\sqrt{n}}, \forall p \geq 1$$

avec $(nt_p - \lfloor nt_p \rfloor) \frac{\varepsilon_{\lfloor nt_p \rfloor+1}}{\sqrt{n}} - (nt_{p-1} - \lfloor nt_{p-1} \rfloor) \frac{\varepsilon_{\lfloor nt_{p-1} \rfloor+1}}{\sqrt{n}}$ qui tend vers 0 \mathbb{P} -p.s. Nous en déduisons donc par le lemme de Slutsky que :

$$(X_{t_1}^{(n)}, X_{t_2}^{(n)} - X_{t_1}^{(n)}, \dots, X_{t_p}^{(n)} - X_{t_{p-1}}^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_p} - B_{t_{p-1}})$$

Or si nous considérons la fonction continue $f(x_1, \dots, x_p) = (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \dots + x_p)$, nous pouvons conclure que :

$$(X_{t_1}^{(n)}, X_{t_2}^{(n)}, \dots, X_{t_p}^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_p})$$

Ainsi, afin de simuler une trajectoire brownienne, nous construisons une trajectoire du processus $(X_t^{(n)})_{t \geq 0}$ pour n assez grand. Nous simulons donc une marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} pour n grand. Nous obtenons les graphiques de la figure 1 :

Maintenant nous allons énoncer et démontrer quelques propriétés sur le mouvement brownien.

Proposition 1.1. Tout mouvement brownien $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ est une martingale relativement à sa filtration i.e : pour tous $s < t$, $\mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s) = B_s$ ps.

Démonstration. Soient $s < t$ des réels positifs.

Par linéarité de l'espérance conditionnelle, $\mathbb{E}[B_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s + B_s | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s | \mathcal{F}_s]$. Sachant que $B_t - B_s$ est centrée, indépendante de \mathcal{F}_s , et sachant que B_s est (\mathcal{F}_s) -adaptée, on déduit que : $\mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s) = B_s$ ps. ■

Proposition 1.2. Si B est un mouvement brownien, le processus $(B_t^2 - t)_{t \geq 0}$ est une (\mathcal{F}_t) -martingale.

Démonstration. Avant tout, B étant un mouvement brownien, pour tout $t \geq 0$, $B_t^2 - t$ est (\mathcal{F}_t) -mesurable et est intégrable. En utilisant la proposition 1.1, il suffit de remarquer que l'on peut réécrire : $\mathbb{E}[B_t^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 + B_s^2 | \mathcal{F}_s]$ Soient $s < t$ des réels positifs.

$$\mathbb{E}[B_t^2 - t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 + B_s^2 - t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_s^2 - t | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_s^2] - t + \text{Var}(B_t - B_s) = B_s^2 - s$$

■

Nous allons montrer le caractère gaussien du mouvement brownien. Nous pouvons l'admettre comme définition du mouvement brownien ou alors l'énoncer comme un théorème. Nous démontrons ici l'équivalence entre cette nouvelle définition et la définition 1.2.

Théorème 1.1. A) Soit $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un mouvement brownien. Alors il satisfait les propriétés suivantes :

1. $B_0 = 0$ \mathbb{P} -p.s.
2. $\forall 0 \leq t_1 < \dots < t_n, (B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ est un vecteur gaussien centré.
3. $\forall s, t \geq 0, \mathbb{E}(B_s B_t) = \min(s, t)$.

c'est-à-dire B est un processus gaussien réel centré et de fonction de covariance $\Gamma(s, t) = \min(s, t)$

B) Inversement, si un processus B vérifie les points ci-dessus et si on note $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$ la filtration naturelle de la famille $(B_t)_{t \geq 0}$, alors

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$$

est un mouvement brownien.

Démonstration. A) Soit $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un mouvement brownien, montrons qu'il vérifie les propriétés 1, 2 et 3.

- $B_0 = 0$ \mathbb{P} -p.s est trivial.

- Il faut montrer que toute combinaison linéaire de $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ est une variable gaussienne centrée pour tout $0 \leq t_1 < \dots < t_n$. Montrons le par récurrence.

Initialisation :

$n=1$

$$\lambda_1 B_{t_1} = \lambda_1 (B_{t_1} - B_{t_0}) \sim \mathcal{N}(0, \lambda_1^2 t_1)$$

La propriété est donc vraie au rang 1.

Hérédité :

Nous supposons la propriété vraie au rang k , i.e. $(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})$ est un vecteur gaussien centré. Montrons que $(B_{t_1}, \dots, B_{t_k}, B_{t_{k+1}})$ est un vecteur gaussien centré.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1}$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{k+1} \lambda_l B_{t_l} &= \sum_{l=1}^k \lambda_l B_{t_l} + \lambda_{k+1} B_{t_{k+1}} - \lambda_k B_{t_k} + \lambda_{k+1} B_{t_k} \\ &= \left(\sum_{l=1}^k \lambda_l B_{t_l} + \lambda_{k+1} B_{t_k} \right) + \lambda_{k+1} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \end{aligned}$$

Or, $(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$ est indépendante de \mathcal{F}_{t_k} , de loi $\mathcal{N}(0, t_{k+1} - t_k)$.

$(\sum_{l=1}^k \lambda_l B_{t_l} + \lambda_{k+1} B_{t_k})$ est une variable aléatoire gaussienne centrée d'après l'hypothèse de récurrence.

Ainsi la somme de deux variables aléatoires gaussiennes centrées indépendantes est une variable aléatoire gaussienne centrée. Ce qui nous permet de conclure que $(B_{t_1}, \dots, B_{t_k}, B_{t_{k+1}})$ est un vecteur gaussien. La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Montrons que $\forall s, t \geq 0, \mathbb{E}[B_s B_t] = \min(s, t)$
Soient, $0 \leq s < t$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(B_t - B_s)B_s] &= \mathbb{E}[B_t B_s] - \mathbb{E}[B_s^2] \\ \iff \mathbb{E}[B_t B_s] &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)B_s] + \mathbb{E}[B_s^2] \end{aligned}$$

Etant donné que, $(B_t - B_s) \perp\!\!\!\perp B_s$, nous obtenons que $\mathbb{E}[(B_t - B_s)B_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s)]\mathbb{E}[B_s] = 0$ car ce sont des variables aléatoires gaussiennes centrées.

D'où

$$\mathbb{E}[B_t B_s] = \mathbb{E}[B_s^2] = \text{Var}(B_s) = s = \min(s, t)$$

B) Nous supposons maintenant que B est un processus qui vérifie les trois propositions précédentes, montrons que c'est un mouvement brownien.

- $B_0 = 0$ \mathbb{P} -p.s est trivial.

- Montrons que pour tout $0 \leq s < t$, la variable $B_t - B_s$ est indépendante de $\tilde{\mathcal{F}}_t$

Nous posons $\tilde{\mathcal{F}}_r = \sigma(B_r; r \leq s)$. Nous voulons que pour tout $0 \leq r \leq s \leq t$, $(B_t - B_s) \perp\!\!\!\perp \tilde{\mathcal{F}}_r$. Le processus B est gaussien, il nous faut juste montrer que la covariance est nulle pour montrer l'indépendance.

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s)B_r] = \mathbb{E}[B_t B_r] - \mathbb{E}[B_s B_r] = \min(t, r) - \min(s, r) = 0$$

- Montrons que $\forall 0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ est de loi $\mathcal{N}(0, t - s)$

Nous avons que $B_t - B_s$ est une v.a. gaussienne centrée et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] &= \mathbb{E}[B_t^2] + \mathbb{E}[B_s^2] - 2\mathbb{E}[B_t B_s] \\ &= t + s - 2\min(t, s) \\ &= t + s - 2s = t - s \end{aligned}$$

Donc $B_t - B_s$ est de loi $\mathcal{N}(0, t - s)$. ■

Nous allons maintenant montrer quelques propriétés d'invariance du mouvement brownien.

1.2 Invariance du mouvement brownien

Théorème 1.2. Soit $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un mouvement brownien, $s > 0$ et $c > 0$ des réels fixés. Les processus définis sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ par :

1. $B_t^{(1)} = -B_t$,
2. $B_t^{(2)} = B_{t+s} - B_s$,
3. $B_t^{(3)} = cB_{\frac{t}{c^2}}$,
4. $B_t^{(4)} = tB_{\frac{1}{t}}$, ($t > 0$) et $B_0^{(4)} = 0$,

sont des mouvements browniens, le premier relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, le second relativement à la filtration $(\mathcal{F}_{t+s})_{t \geq 0}$, le troisième pour la filtration $(\mathcal{F}_{\frac{t}{c^2}})_{t \geq 0}$ et le quatrième pour sa

filtration naturelle.

Démonstration. Afin de montrer que chacun de ces processus est un mouvement brownien nous allons utiliser la définition 1.1.

1. - Il est clair que $B_0^{(1)} = -B_0 = 0$ \mathbb{P} -p.s

- Soient $0 \leq t_1, \dots, < t_k$, si $(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})$ est un vecteur gaussien centré alors $(-B_{t_1}, \dots, -B_{t_k})$ est un vecteur gaussien centré. En effet c'est l'image d'un vecteur gaussien par une matrice non aléatoire.

- Soient, $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}[(B_t^{(1)})(B_s^{(1)})] = \mathbb{E}[(-B_t)(-B_s)] = t \wedge s$.

- Puisque $i(x) = -x$ est une fonction borélienne, pour tout t , $B_t^{(1)} = i(B_t)$ est \mathcal{F}_t -mesurable.

2. - $B_0^{(2)} = B_{0+s} - B_s = B_s - B_s = 0$ \mathbb{P} -p.s

- Soit $s > 0$ un réel fixé et soient $0 \leq t_1, \dots, < t_k$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} B_{t_1}^{(2)} \\ B_{t_2}^{(2)} \\ \vdots \\ B_{t_k}^{(2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B_{t_1+s} - B_s \\ B_{t_2+s} - B_s \\ \vdots \\ B_{t_k+s} - B_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{t_1+s} \\ B_{t_2+s} \\ \vdots \\ B_{t_k+s} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_s \\ B_s \\ \vdots \\ B_s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -1 & 0 & 0 & 0 \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_s \\ B_{t_1+s} \\ B_{t_2+s} \\ \vdots \\ B_{t_k+s} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ici aussi nous avons l'image d'un vecteur gaussien centré par une matrice déterministe.

- Soient $0 \leq t_1 \leq t_2$ et $s > 0$ fixés.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_{t_2}^{(2)} B_{t_1}^{(2)}] &= \mathbb{E}[(B_{t_2+s} - B_s)(B_{t_1+s} - B_s)] \\ &= \min(t_2 + s, t_1 + s) - \min(t_2 + s, s) - \min(t_1 + s, s) + s \\ &= t_1 + s - s - s + s = t_1 = \min(t_1, t_2) \end{aligned}$$

- Pour $s \geq 0$ fixé, pour tout t : B_{t+s} et B_s sont \mathcal{F}_{t+s} -mesurables, donc $B_t^{(2)}$ est \mathcal{F}_{t+s} -mesurable par somme.

3. On considère la filtration $(\mathcal{F}_{\frac{t}{c^2}})_{t \geq 0}$.

- Il est clair que $B_0^{(3)} = cB_0 = 0$ \mathbb{P} -p.s

- Soit $c > 0$ un réel fixé et soient $0 \leq t_1, \dots, < t_k$.

$$\begin{pmatrix} B_{t_1}^{(3)} \\ B_{t_2}^{(3)} \\ \vdots \\ B_{t_k}^{(3)} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} B_{t_1/c^2} \\ B_{t_2/c^2} \\ \vdots \\ B_{t_k/c^2} \end{pmatrix}$$

est un vecteur gaussien centré.

- Soient $0 < s \leq t$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_t^{(3)} B_s^{(3)}] &= \mathbb{E}[c^2 B_{t/c^2} B_{s/c^2}] \\ &= c^2 \min(\frac{t}{c^2}, \frac{s}{c^2}) = \min(t, s) \end{aligned}$$

4. - Par définition du quatrième processus, $B_0^{(4)} = 0$ \mathbb{P} -p.s
- Soient $0 < t_1, \dots, < t_k$.

$$\begin{pmatrix} B_{t_1}^{(4)} \\ B_{t_2}^{(4)} \\ \vdots \\ B_{t_k}^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 B_{1/t_1} \\ t_2 B_{1/t_2} \\ \vdots \\ t_k B_{1/t_k} \end{pmatrix}$$

- est un vecteur gaussien centré pour la filtration considérée.
- Soient $0 < s \leq t$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_t^{(4)} B_s^{(4)}] &= \mathbb{E}[(t B_{1/t})(s B_{1/s})] \\ &= t \min\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right) = \min(t, s) \end{aligned}$$

■

2 Equation de la chaleur

2.1 Le mouvement brownien comme chaîne de Markov, un opérateur bien singulier

Dans cette section, notre but est d'introduire un opérateur en lien avec le mouvement brownien, qui est solution de l'équation de la chaleur. Nous montrons d'abord qu'un mouvement brownien est une chaîne de Markov. Le fait que, à s fixé, le processus $(B_{t+s} - B_s)_t$ soit de même loi que $(B_t)_t$ revêt en soi la particularité des chaînes de Markov. Néanmoins, nous voulons ici le montrer rigoureusement en introduisant une caractéristique des dites chaînes au biais d'un opérateur issu des noyaux de transition. Cela nous permet en même temps d'introduire l'opérateur sur les mouvements browniens recherché.

Définition 2.1. Un processus $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, (X_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans l'espace d'états (E, \mathcal{B}_E) est "de Markov" si, $\forall 0 < s < t$, la loi de X_t sachant \mathcal{F}_s ne dépend que de X_s . On dit que :

$$\forall A \in \mathcal{B}_E : \forall 0 < s < t : \mathbb{P}(X_t \in A | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in A | X_s)$$

Pour ce qui suit, on note $P_{s,t}(x, A)$ la probabilité partant de x à l'instant s d'atteindre A à l'instant t . $P_{s,t}(x, A) := \mathbb{P}(X_t \in A | X_s = x)$. On admet que l'application $A \mapsto P_{s,t}(x, A)$ soit une mesure de probabilité sur la tribu \mathcal{B}_E , que l'on note $P_{s,t}(x, dx)$. Cette mesure est le noyau de transition du processus de Markov.

Il convient alors de considérer $P_{s,t}(x, dx)$ comme un opérateur $P_{s,t}$ qui transforme une fonction $f : E \mapsto \mathbb{R}$ borélienne bornée (ou positive) en une fonction $P_{s,t}f$ donnée par :

$$P_{s,t}f(x) = \mathbb{E}(f(X_t) | X_s = x) = \int_E f(y) P_{s,t}(x, dy) \quad (1)$$

C'est cet opérateur qui nous permet d'écrire une seconde définition, plus commode pour le théorème 2.1, des chaînes de Markov.

Définition 2.2. Un processus $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, (X_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ est un processus de Markov à valeurs dans (E, \mathcal{B}_E) et de famille de noyaux de transition $\{P_{s,t} ; s, t \in T : s < t\}$ si, pour toute fonction borélienne bornée $f : E \mapsto \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(f(X_t) | \mathcal{F}_s) = P_{s,t}f(X_s) \quad \mathbb{P} - ps.$$

Remarques : Les noyaux de transition $P_{s,t}$ sont aussi appelés probabilités de transition si E est fini ou dénombrable. Lorsque $P_{s,t} = P_{0,t-s}$ ne dépend que de la différence $t - s$, X est un processus de Markov homogène. Dans ce cas, $\forall s, u \in T : P_{s,s+u} = P_{0,u} := P_u$ simplifie les notations et la propriété de Markov prend la forme $\mathbb{E}(f(X_t) | \mathcal{F}_s) = P_{t-s}f(X_s) \quad \mathbb{P} - ps$.

Proposition 2.1. Cette caractérisation des chaînes de Markov coïncide avec ce que l'on connaît déjà.

Autrement dit, pour un processus $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, (X_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans (E, \mathcal{B}_E) , $\forall 0 < s < t$, dire que $\forall A \in \mathcal{B}_E : \mathbb{P}(X_t \in A | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in A | X_s)$ est équivalent à dire que pour toute fonction borélienne bornée $f : E \mapsto \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(f(X_t) | \mathcal{F}_s) = P_{s,t}f(X_s) \quad \mathbb{P} - ps$.

Démonstration. Fixons $0 < s < t$.

Donnons-nous un processus $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, (X_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans (E, \mathcal{B}_E) vérifiant :

$$\forall A \in \mathcal{B}_E : \mathbb{P}(X_t \in A | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in A | X_s)$$

Montrons que, nécessairement, pour toute fonction f borélienne bornée :

$$\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_s) = P_{s,t}f(X_s) \mathbb{P} - ps$$

Nous procédons tour-à-tour avec f une indicatrice, une fonction étagée, puis une fonction borélienne bornée.

1) Par simple ré-écriture : $\forall A \in \mathcal{B}_E$, si $f = 1_A$, $\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_s) = P_{s,t}f(X_s) \mathbb{P} - ps$.

2) Considérons $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction étagée quelconque. On peut écrire, avec certains $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ ensembles mesurables disjoints deux à deux et certains $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ éléments de E :

$$\forall x \in E, f(x) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}(x).$$

Alors : $\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_s) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{P}(X_t \in A_i | \mathcal{F}_s)$ par linéarité de l'espérance conditionnelle. D'après le premier point, on a $\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_s) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}(1_{A_i}(X_t) | \mathcal{F}_s)$. D'où, encore par linéarité de l'espérance conditionnelle, le résultat escompté.

3) Considérons enfin f borélienne bornée. On sait que, comme f est borélienne, il existe une suite $(f_n)_n$ de fonction étagées qui converge simplement vers f . Qui plus est, comme f est bornée, pour n assez grand au moins, f_n est intégrable. Dès lors, toutes les conditions sont réunies pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\lim_n f_n(X_t) | \mathcal{F}_s) = \lim_n \mathbb{E}(f_n(X_t) | \mathcal{F}_s)$$

Par suite, en utilisant le deuxième point (f_n étant étagée pour tout n), et encore par convergence dominée, $\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_s) = P_{s,t}f(X_s) \mathbb{P} - ps$ pour toute fonction f borélienne bornée.

Réciproquement, si un processus X vérifie que pour toute fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne bornée, $\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_s) = P_{s,t}f(X_s) \mathbb{P} - ps$, alors en particulier il vérifie cela pour $f = 1_A$ où A un ensemble quelconque de \mathcal{B}_E . ■

Théorème 2.1. Un mouvement brownien B sur \mathbb{R} est un processus de Markov homogène, de loi initiale δ_0 et dont le semi-groupe est de la forme suivante :

$$\forall t > 0 : P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) f(y) dy$$

ce quelque soit f fonction borélienne bornée.

Remarques :

- Autrement dit, $P_t(x, dy)$ est la mesure gaussienne de moyenne x et de variance t .
- Comme $x + B_t \sim \mathcal{N}(x, t)$, on écrit que $P_t f(x) = \mathbb{E}(f(x + B_t))$.

Pour démontrer ce théorème, il est plus clair de rappeler un lemme sur l'espérance conditionnelle.

Lemme 2.1. Soient G une tribu, $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne bornée, X une v.a G -mesurable et Y une v.a indépendante de G . Alors si $\tilde{g}(x) = \mathbb{E}(g(x, Y))$, on a $\mathbb{E}(g(X, Y) | G) = \tilde{g}(X)$.

Démonstration. Fixons f borélienne bornée et $0 < s < t$.

Considérons la fonction $\tilde{f}(x) = \mathbb{E}(f(x + B_t - B_s))$.

Comme $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s) : x + B_t - B_s \sim \mathcal{N}(x, t-s)$. De ceci on déduit que

$$\tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}\right) f(y) dy$$

On reconnaît $P_{t-s}f(x)$ avec P énoncé dans le théorème. Alors, en appliquant le lemme avec $X = B_s$, $Y = B_t - B_s$, $g(x, y) = f(x + y)$, $G = \mathcal{F}_s$, à $\mathbb{E}(f(B_t) | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(f(B_t - B_s + B_s) | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(g(X, Y) | \mathcal{F}_s)$, on

obtient que $\mathbb{E}(f(B_t)|\mathcal{F}_s) = \tilde{f}(B_s) = P_{t-s}f(B_s)$. On reconnaît la définition 2 d'un processus de Markov homogène. ■

Maintenant qu'on a introduit l'opérateur P_t relatif au mouvement brownien, discutons des curieuses (ou pas?) propriétés que P_t vérifie. On s'était jusqu'ici fixé f borélienne bornée. A présent, pour l'instant seulement, nous exigerons de f qu'elle soit C^∞ à support compact. Nous préciserons ces hypothèses sur f plus tard.

2.2 Equation de la chaleur

Proposition 2.2. L'opérateur P_t vérifie la propriété dite de semi-groupe suivante :

$$P_{t+s}f(x) = P_t P_s f(x)$$

Démonstration. Fixons $0 < s < t$ et $x \in [0, L]$. Par propriété de l'espérance conditionnelle, nous avons :

$$P_{t+s}f(x) = \mathbb{E}(f(x + B_{t+s})) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(f(x + B_{t+s})|\mathcal{F}_s))$$

ie,

$$P_{t+s}f(x) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(f(x + B_{t+s} - B_s + B_s)|\mathcal{F}_s))$$

Or, d'une part, $B_{t+s} - B_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$ par définition d'un mouvement brownien, donc $x + B_{t+s} - B_s$ aussi. Et, d'autre part, B_s est \mathcal{F}_s -mesurable. On note $X = x + B_{t+s} - B_s$, $Y = B_s$ et g la fonction telle que $g(x, y) = f(x + y)$. En utilisant le même lemme que dans la preuve précédente :

$$\mathbb{E}(f(x + B_{t+s} - B_s + B_s)|\mathcal{F}_s) = \tilde{g}(Y) \text{ où } \tilde{g}(y) = \mathbb{E}(g(X, y))$$

Dès lors, $P_{t+s}f(x) = \mathbb{E}(\tilde{g}(B_s))$.

Mais $\forall y \in \mathbb{R} : \tilde{g}(y) = \mathbb{E}(g(X, y)) = \mathbb{E}(f(x + B_{t+s} - B_s + y))$. Notons alors que $(B_{t+s} - B_s)_t$ est un mouvement brownien, ce qui, soit dit en passant, correspond à la propriété de Markov faible. On le note $(M_t)_t$.

Alors, $\forall y \in \mathbb{R} : \tilde{g}(y) = \mathbb{E}(f(x + y + M_t)) = P_t f(x + y)$ par construction de P_t , le noyau de transition du mouvement brownien.

Donc $\tilde{g}(B_s) = P_t f(x + B_s)$.

Finalement, $P_{t+s}f(x) = \mathbb{E}(P_t f(x + B_s)) = P_s P_t f(x)$. ■

Proposition 2.3. L'opérateur P_t vérifie, pour toute fonction f à support compact C^∞ :

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} P_t f \right|_{t=0} = \frac{1}{2} f''$$

Démonstration. Rappelons que $P_t f(x) = \mathbb{E}(f(x + B_t))$. Appliquons un développement de Taylor à f en x . Nous avons :

$$f(x + B_t) = f(x) + B_t f'(x) + \frac{B_t^2}{2} f''(x) + \frac{B_t^3}{6} f^{(3)}(x) + \frac{B_t^4}{24} f^{(4)}(x) + R_4(B_t)$$

Ainsi, nous obtenons par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}[f(x + B_t)] - f(x) = \mathbb{E}[B_t] f'(x) + \mathbb{E}\left[\frac{B_t^2}{2}\right] f''(x) + \mathbb{E}\left[\frac{B_t^3}{6}\right] f^{(3)}(x) + \mathbb{E}\left[\frac{B_t^4}{24}\right] f^{(4)}(x) + \mathbb{E}[R_4(B_t)]$$

Or, puisque $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, tous les moments impairs sont nuls. Les moments d'ordre k , notés m_k , s'écrivent en effet $m_k = \mathbb{E}(X^k) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^k}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{2t}) dx$. D'où, si k est impair, $g(x) := \frac{x^k}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{2t})$

est impaire également et $\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 0$.

Alors :

$$P_t f(x) - f(x) = \frac{f''(x)}{2}t + \frac{f^{(4)}(x)}{24}m_4 + \mathbb{E}[R_4(B_t)]$$

Comme $m_4 = \mathbb{E}(B_t^4) = 3t^2$ et $f(x) = \mathbb{E}[f(x)] = P_0 f(x)$.

$$\frac{P_t f(x) - P_0 f(x)}{t} = \frac{f''(x)}{2} + \frac{f^{(4)}(x)}{8}t + \mathbb{E}[R_4(B_t)]$$

Notons que, f étant définie sur un certain intervalle fermé borné, et f étant C^∞ , les dérivées n -ièmes de f sont bornées.

En particulier, il existe M tel que $|f^{(5)}| \leq M$. Cela nous permet d'appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange, $|R_4(B_t)| \leq \frac{M|B_t|^5}{5!}$. D'où $\mathbb{E}[R_4(B_t)] = 0$. En outre, $\frac{f^{(4)}(x)}{8}t = o(t)$ et, finalement :

$$\frac{P_t f(x) - f(x)}{t} = \frac{f''(x)}{2} + o(t)$$

En faisant tendre t vers 0, nous obtenons le résultat escompté. ■

NB : Cette preuve n'exige en fait pas que f soit C^∞ . Il aurait suffi de considérer $f \in C^5$.

Proposition 2.4. L'opérateur P_t est solution de l'équation de la chaleur.

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t f(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_t f(x)$$

Démonstration. Fixons (x, t) un point de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et s un réel positif.

D'après la proposition 4,

$$\frac{P_{t+s}f(x) - P_t f(x)}{s} = \frac{P_{s+t}f(x) - P_t f(x)}{s} = \frac{P_s P_t f(x) - P_t f(x)}{s}.$$

D'où :

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t f(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P_s P_t f(x) - P_t f(x)}{s},$$

ce qui est équivalent à :

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t f(x) = \frac{\partial}{\partial s} P_s(P_t f)(x)|_{s=0}.$$

Alors, en appliquant la proposition 5 à $\frac{\partial}{\partial s} P_s(P_t f)(x)|_{s=0}$, on trouve que

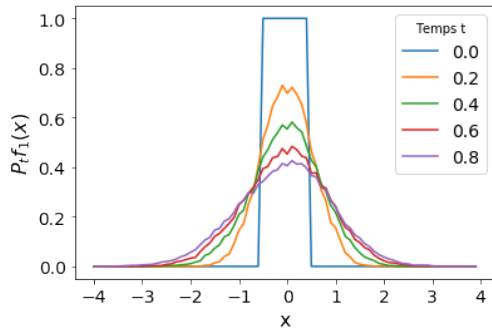
$$\frac{\partial}{\partial t} P_t f(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_t f(x)$$
■

2.3 Simulations numériques

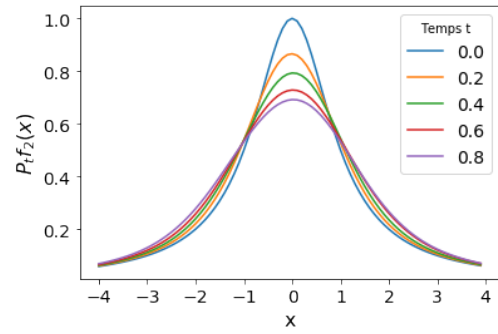
Nous voulons simuler $P_t f$ pour une fonction f donnée. Pour ce faire, nous allons utiliser des méthodes de Monte-Carlo. Nous devons prendre des fonctions f au moins C^5 avec $f^{(5)}$ bornée. Nous choisissons pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_1(x) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x) \text{ et } f_2(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Nous simulons donc $N = 1000$ échantillons de mouvement brownien sur $t \in [0, 1]$ en discrétisant cet intervalle en $n = 1000$ points. Puis pour un temps t fixé, nous traçons en fonction de x l'opérateur de semi-groupe $P_t f$. Nous répétons l'opération pour chaque temps.



(a) Opérateur du semi-groupe pour f_1 en fonction du temps et de x



(b) Opérateur du semi-groupe pour f_2 en fonction du temps et de x

FIGURE 2 – Opérateur du semi-groupe pour différentes fonctions

Nous remarquons deux choses. Tout d'abord, l'opérateur $P_t f$ transforme f en une fonction qui semble d'autant plus aplatie que t est grand. Ce phénomène est dû à l'augmentation de la variance du mouvement brownien. Puis, l'opérateur rend continue notre fonction f_1 qui est discontinue. En effet, c'est l'une des propriétés de l'opérateur de semi-groupe.

3 Estimation statistique

Dans cette section, nous tentons de prévoir la pollution dans une rivière due au déversement de substances chimiques en amont. Cela revient à estimer la distribution des particules polluantes à un temps quelconque. Pour simplifier, nous supposons que tous les mouvements se font en une dimension, le long d'une droite. Afin de prédire au mieux, nous présentons deux modèles. Le premier prend en compte le phénomène de diffusion et le courant de la rivière, supposé constant dans le temps et dans l'espace. Dans le deuxième modèle, on considère de plus le phénomène de marées. Supposons qu'on observe une particule polluante à plusieurs instants $0 < t_1 < \dots < t_n$, ce qui fournit les mesures x_1, x_2, \dots, x_n .

3.1 Modèle à dérive linéaire

Nous considérons ces mesures comme des observations d'un mouvement brownien avec dérive :

$$X_i = at_i + \sqrt{2D}B_i$$

avec a, D rendant compte respectivement de la vitesse du courant et du phénomène de diffusion, et $(B_t)_t$ un mouvement brownien. L'enjeu réside donc dans l'estimation de ces coefficients (a, D) .

Par convention, $t_0 = 0$ et $X_0 = 0$. Pour tout $i = 1, \dots, n$, définissons :

$$s_i = t_i - t_{i-1} \text{ et } Y_i = X_i - X_{i-1}$$

de sorte que

$$Y_i = as_i + \sqrt{2D}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$$

Alors, avec ce que l'on sait sur le mouvement brownien (accroissements gaussiens centrés de variance la durée de l'accroissement), les $(Y_i)_i$ apparaissent comme des variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(as_i, 2Ds_i)$ tandis que les $(X_i)_i$ sont des variables aléatoires de lois respectives $\mathcal{N}(at_i, 2Dt_i)$ non indépendantes. Pour construire un estimateur de (a, D) , nous procédons par la méthode du maximum de vraisemblance.

3.1.1 Maximum de vraisemblance

La vraisemblance du n -uplet (Y_1, \dots, Y_n) est notée $L_y(a, D)$, où $y = (y_1, \dots, y_n)$ est une observation de $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ obtenue avec les mesures x_1, \dots, x_n . Par indépendance des Y_i et connaissant leurs densités, nous pouvons écrire :

$$L_y(a, D) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi D s_i}} \right) \exp \left(-\frac{(y_i - as_i)^2}{4Ds_i} \right)$$

Puisque maximiser la vraisemblance revient à maximiser son logarithme, modulo des constantes additives qui ne dépendent ni de a , ni de D , on se ramène à maximiser la quantité suivante :

$$\phi_y(a, D) = \sum_{i=1}^n -\frac{1}{2} \log(D) - \frac{(y_i - as_i)^2}{4Ds_i}$$

Après calculs, le gradient et la hessienne de ϕ_y sont donnés respectivement par :

$$\nabla \phi_y(a, D) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2D} (y_i - as_i) \\ \sum_{i=1}^n -\frac{1}{2D} + \frac{(y_i - as_i)^2}{4s_i D^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 \phi_y(a, D) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n -\frac{s_i}{2D} & \sum_{i=1}^n -\frac{(y_i - as_i)}{2D^2} \\ \sum_{i=1}^n -\frac{(y_i - as_i)}{2D^2} & \sum_{i=1}^n \frac{1}{2D^2} - \frac{(y_i - as_i)^2}{2D^3 s_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{t_n}{2D} & \frac{at_n - x_{t_n}}{2D^2} \\ \frac{at_n - x_{t_n}}{2D^2} & \frac{n}{2D^2} - \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - as_i)^2}{2D^3 s_i} \end{pmatrix}$$

Notons (a_n, D_n) le point qui annule le gradient. La hessienne évaluée en ce point nous donne la matrice diagonale, avec les termes diagonaux strictement négatifs qui suit :

$$\nabla^2 \phi_y(\hat{a}_n, \hat{D}_n) = \begin{pmatrix} -\frac{t_n}{2D} & 0 \\ 0 & -\frac{n}{2D^2} \end{pmatrix}$$

Cette hessienne est définie négative, d'où (\hat{a}_n, \hat{D}_n) est bien l'estimateur du maximum de vraisemblance, où (\hat{a}_n, \hat{D}_n) admet comme expression :

$$\hat{a}_n = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n s_i}$$

$$\hat{D}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \hat{a}_n s_i)^2}{2s_i}$$

3.1.2 Qualité de nos estimateurs

Soit donc (\hat{a}_n, \hat{D}_n) l'estimateur du maximum de vraisemblance. En tant que tel, il est asymptotiquement efficace et consistant. De plus, il est convergent dans \mathcal{L}^2 et ps. Nous détaillons dans cette partie ces résultats de convergence.

Proposition 3.1. \hat{a}_n est un estimateur sans biais de a

Démonstration. On peut écrire (sommes télescopiques) que :

$$\hat{a}_n = \frac{X_{t_n}}{t_n} = a + \frac{\sqrt{2D}}{t_n} B_{t_n}$$

D'où le résultat. ■

Proposition 3.2. \hat{a}_n converge dans L^2 vers a .

Démonstration. Sachant que $\hat{a}_n - a$ est sans biais, de variance $\text{Var}(\hat{a}_n - a) = \frac{2D}{t_n}$, on conclut :

$$\mathbb{E}[(\hat{a}_n - a)^2] = \frac{2D}{t_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

■

Proposition 3.3. \hat{a}_n converge ps vers a .

Démonstration. Par continuité ps, $\lim_{t \rightarrow 0^+} B_t = 0$ ps, et par inversion du temps, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{t} = 0$ ps.

On conclut avec $\hat{a}_n = a + \sqrt{2D} \frac{B_{t_n}}{t_n}$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{a}_n = a$ ps. ■

Proposition 3.4. \hat{D}_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de D .

Démonstration. **NB :** Il est nécessaire d'avoir $t_n = \mathcal{O}(n)$.

On obtient aisément que :

$$2\hat{D}_n = \frac{t_n}{n} (a - \hat{a}_n)^2 + 2(a - \hat{a}_n) \sqrt{2D} \frac{B_{t_n}}{n} + \frac{2D}{n} \sum_{j=1}^n N_j^2 \quad \text{avec} \quad N_j = \frac{B_{t_j} - B_{t_{j-1}}}{\sqrt{s_j}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{des v.a iid}$$

Ainsi,

$$2\mathbb{E}[\hat{D}_n] = \frac{t_n}{n} \mathbb{E}[(a - \hat{a}_n)^2] + 2\sqrt{2D} \mathbb{E} \left[(a - \hat{a}_n) \frac{B_{t_n}}{n} \right] + \frac{2D}{n} \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^n N_j^2 \right]$$

Mais alors,

1. $\frac{t_n}{n} \mathbb{E}[(a - \hat{a}_n)^2] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ puisque \hat{a}_n converge dans L^2 vers a .
2. $\mathbb{E} \left[(a - \hat{a}_n) \frac{B_{t_n}}{n} \right] = \sqrt{2D} \mathbb{E} \left[\frac{B_{t_n}^2}{nt_n} \right] = \frac{\sqrt{2D}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
3. $\frac{2D}{n} \mathbb{E}[\sum_{j=1}^n N_j^2] = 2D$ connaissant l'espérance d'une khi-deux

D'où \hat{D}_n est asymptotiquement sans biais. ■

Proposition 3.5. \hat{D}_n converge dans L^2 vers D .

Démonstration. Utilisons encore que

$$2\hat{D}_n = \underbrace{\frac{t_n}{n}(a - \hat{a}_n)^2}_{(1)} + \underbrace{2(a - \hat{a}_n)\sqrt{2D}\frac{B_{t_n}}{n}}_{(2)} + \underbrace{\frac{2D}{n} \sum_{j=1}^n N_j^2}_{(3)}$$

- ① $\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ dans L^2 . En effet, comme $\frac{t_n}{n} \leq K$ pour une certaine constante K , $|\frac{t_n}{n}(a - \hat{a}_n)| \leq K(a - \hat{a}_n)$. Or \hat{a}_n converge vers a dans L^2 . D'où le résultat.
 - ② $\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ dans L^2 . En effet, en développant, il tombe que $\mathbb{E} \left[\left((a - \hat{a}_n) \frac{B_{t_n}}{n} \right)^2 \right] = \frac{2D}{n^2} \mathbb{E} \left[\left(\frac{B_{t_n}}{\sqrt{t_n}} \right)^4 \right]$. Il suffit alors de reconnaître le moment d'ordre 4 d'une $\mathcal{N}(0,1)$.
 - ③ $\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2D$ dans L^2 , en remarquant que les moments d'ordre 1 et 2 d'une $\chi^2(n)$ sont respectivement n et $2n$.
- Finalement, on a le résultat escompté par somme. ■

Proposition 3.6. \hat{D}_n converge ps vers D .

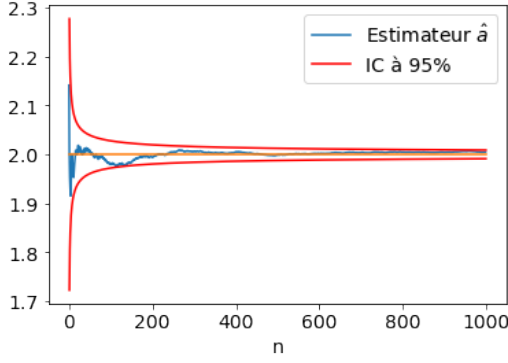
Démonstration. D'après la même décomposition que précédemment :

- ① $\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ p.s car $\hat{a}_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ p.s.
- ② $\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ps en rajoutant que $\frac{B_{t_n}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ps, du fait que $\frac{B_{t_n}}{n} = \frac{B_{t_n} t_n}{nt_n}$.
- ③ $\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2D$ par la loi forte des grands nombres.

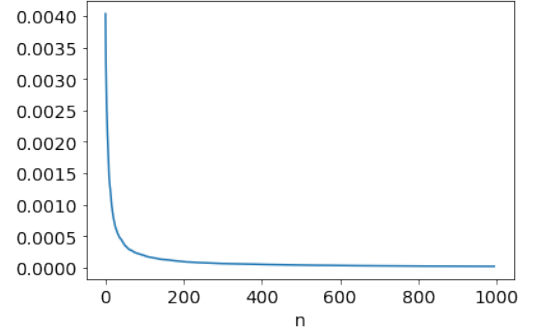
On conclut ainsi que $\hat{D}_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} D$ p.s. ■

3.1.3 Simulations

Nous voulons maintenant illustrer les différents résultats de convergence démontrés précédemment. Pour chaque illustration, nous simulons un ou plusieurs mouvements browniens sur un intervalle de temps allant de 0 à $t_{max} = 100$ par pas de 0.1. Afin de simuler le mouvement brownien sur cet intervalle de temps, nous utilisons le théorème 1.2 afin de dilater notre mouvement brownien initialement sur $[0,1]$ sur ce nouvel intervalle. De plus les constantes a et D seront fixées à $a = 2$ et $D = 10^{-3}$. Le choix de a est purement arbitraire, cependant le choix de D correspond au coefficient de diffusion d'une particule de pollution dans l'eau. Nous utiliserons des méthodes de Monte-Carlo pour illustrer

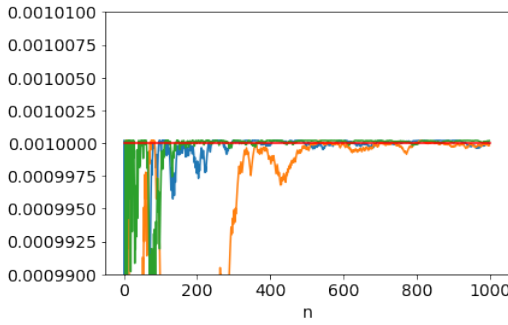


(a) Trajectoire d'une réalisation de \hat{a}_n illustrant la convergence p.s. et I.C à 95% de \hat{a}_n

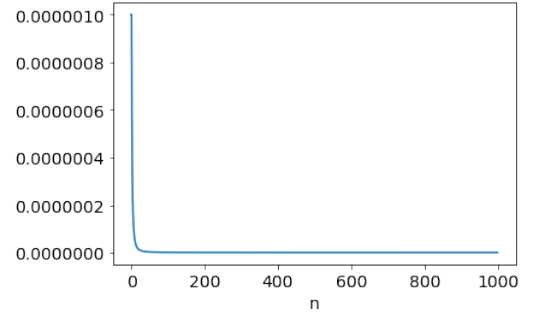


(b) Estimateur de Monte-Carlo de $\mathbb{E}[(\hat{a}_n - a)^2]$

FIGURE 3 – Graphiques illustrant la convergence presque-sûre et L^2 de \hat{a}_n



(a) Trajectoire de plusieurs réalisations de \hat{D}_n illustrant la convergence p.s. de \hat{D}_n



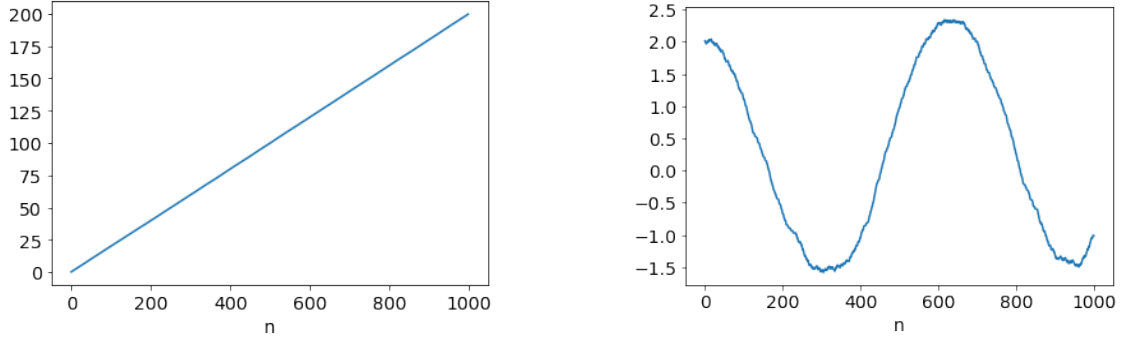
(b) Estimateur de Monte-Carlo de $\mathbb{E}[(\hat{D}_n - D)^2]$

FIGURE 4 – Graphiques illustrant la convergence presque-sûre et L^2 de \hat{D}_n

les convergences L^2 . Nous simulerons $N = 1000$ réalisations de mouvement brownien pour ces méthodes de Monte-Carlo.

On illustre d'abord les convergences de \hat{a}_n . Nous obtenons les graphiques de la figure 3. Ces résultats corroborent les résultats théoriques trouvés auparavant. Notons que l'intervalle de confiance pour \hat{a}_n est obtenu en écrivant simplement $\hat{a}_n = \frac{X_{t_n}}{t_n} \sim \mathcal{N}\left(a, \frac{2D}{t_n}\right)$. D'où $a \in [\hat{a}_n - 1.96\sqrt{\frac{2D}{t_n}}; \hat{a}_n + 1.96\sqrt{\frac{2D}{t_n}}]$ au risque 5 %.

On illustre ensuite les résultats de convergence pour \hat{D}_n . Nous obtenons les graphiques de la figure 4. De nouveau, ces résultats confortent les résultats théoriques.



(a) Trajectoire d'une particule pour le modèle à dérive linéaire (b) Trajectoire d'une particule pour le modèle à marée périodique

FIGURE 5 – Graphiques des trajectoires des particules selon le modèle considéré

3.2 Modèle transformé, marée périodique

Nous considérons à nouveau le contexte d'estimation statistique précédent, mais en transformant notre modèle. Nous voulons maintenant prendre en compte le phénomène de marée plus que le phénomène de dérive. Notons que toutes les démonstrations de convergences sont similaires, avec une condition que s_n ne s'écroule pas trop vite. La figure 5 représente les trajectoires d'une particule dans le modèle avec dérive et dans le modèle transformé. Le graphique 5a est presque linéaire en n , puisque X_i est presque égal à at_i , ($D = 10^{-3}$). Le graphique 5b est sinusoïdal. Ces graphiques illustrent que la particule dérive plus dans le modèle 1, et que, pour le modèle 2, la prise en compte des marées fait que la particule avance/recule en fonction de la période des marées.

Ici on considère, pour $w = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation des marées, (T la période) :

$$X_i = a \cos(wt_i) + \sqrt{2D}B_{t_i}$$

L'enjeu réside donc de nouveau dans l'estimation de ces coefficients (a, D) . Définissons :

$$c_i = \cos(wt_i) - \cos(wt_{i-1}) \text{ et}$$

$$Y_i = X_i - X_{i-1} = ac_i + \sqrt{2D}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$$

Ainsi les $(Y_i)_i$ apparaissent comme des variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(ac_i, 2Ds_i)$. Pour construire un estimateur de (a, D) , procédons par la méthode du maximum de vraisemblance.

3.2.1 Maximum de vraisemblance

La vraisemblance du n -uplet (Y_1, \dots, Y_n) est notée $L_y(a, D)$, où $y = (y_1, \dots, y_n)$ est une observation de $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ obtenue avec les mesures x_1, \dots, x_n . Par indépendance des Y_i et connaissant leurs densités, nous pouvons écrire :

$$L_y(a, D) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi D s_i}} \right) \exp \left(-\frac{(y_i - ac_i)^2}{2Ds_i} \right)$$

Puisque maximiser la vraisemblance revient à maximiser son logarithme, modulo des constantes additives qui ne dépendent ni de a , ni de D , on se ramène à maximiser la quantité suivante :

$$\phi_y(a, D) = \sum_{i=1}^n -\frac{1}{2} \log(D) - \frac{(y_i - ac_i)^2}{4Ds_i}$$

Après calculs, le gradient et la hessienne de ϕ_y sont donnés respectivement par :

$$\nabla \phi_y(a, D) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{2Ds_i} (y_i - ac_i) \\ \sum_{i=1}^n -\frac{1}{2D} + \frac{(y_i - ac_i)^2}{4D^2 s_i} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 \phi_y(a, D) = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{2Ds_i} & \sum_{i=1}^n -\frac{c_i(y_i - ac_i)}{2D^2 s_i} \\ \sum_{i=1}^n -\frac{c_i(y_i - ac_i)}{2D^2 s_i} & \sum_{i=1}^n \frac{1}{2D^2} - \frac{(y_i - ac_i)^2}{2D^3 s_i} \end{pmatrix}$$

Notons (a_n, D_n) le point qui annule le gradient, il a pour expression :

$$a_n = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{y_i c_i}{s_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{c_i^2}{s_i}}$$

$$D_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - ac_i)^2}{2s_i}$$

De plus, la hessienne évaluée au point (a_n, D_n) , nous donne la matrice diagonale, avec les termes diagonaux strictement négatifs, qui suit :

$$\nabla^2 \phi_y(a_n, D_n) = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{2Ds_i} & 0 \\ 0 & -\frac{n}{2D^2} \end{pmatrix}$$

La matrice hessienne est donc définie négative, dès lors, (\hat{a}_n, \hat{D}_n) est bien l'estimateur du maximum de vraisemblance, où (\hat{a}_n, \hat{D}_n) est écrit comme :

$$\hat{a}_n = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{Y_i c_i}{s_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{c_i^2}{s_i}}$$

$$\hat{D}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \hat{a}_n c_i)^2}{2s_i}$$

3.2.2 Qualité de notre estimateur

Soit donc (\hat{a}_n, \hat{D}_n) l'estimateur du maximum de vraisemblance. En tant que tel, il est asymptotiquement efficace et consistant. De plus, il est convergent dans \mathcal{L}^2 et *ps*. Les preuves sont similaires à celles de la partie précédente, avec une condition que s_n ne s'écrase pas trop vite, pour avoir que la série de terme général $\frac{1}{(s_n)n^2}$ converge.. On ne détaille que la convergence *ps* de \hat{a}_n , qui utilise une loi forte des grands nombres sans équidistribution.

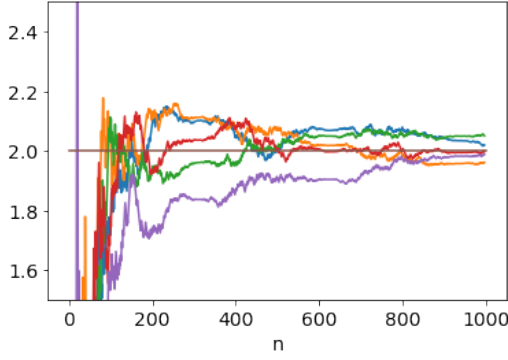
Proposition 3.7. \hat{a}_n est un estimateur sans biais de a

Proposition 3.8. \hat{a}_n converge dans L^2 vers a .

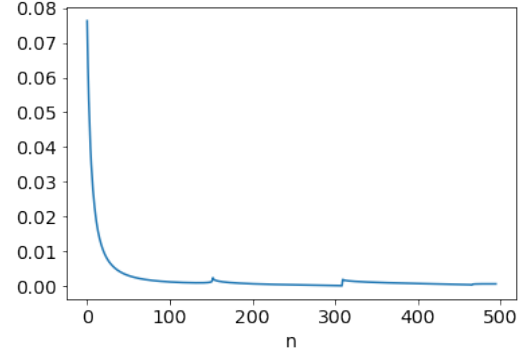
Proposition 3.9. \hat{a}_n converge *ps* vers a .

Démonstration. On pose $u_i = \frac{c_i^2}{s_i}$, on considère la décomposition suivante de \hat{a}_n

$$\hat{a}_n = a + \frac{\sqrt{2D}}{\sum_{i=1}^n u_i} \sum_{i=1}^n N_i \quad \text{avec } N_i = \frac{c_i(Y_i - ac_i)}{s_i \sqrt{2D}} \sim \mathcal{N}(0, u_i)$$



(a) Trajectoire de plusieurs réalisations de \hat{a}_n illustrant la convergence p.s de \hat{a}_n



(b) Estimateur de Monte-Carlo de $\mathbb{E}[(\hat{D}_n - D)^2]$

FIGURE 6 – Graphiques illustrant la convergence presque-sûre de \hat{a}_n et L^2 de \hat{D}_n

Ensuite on a que $\mathbb{V}(N_i) = u_i$ et sachant que $c_i \in [-1, 1]$,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\mathbb{V}(N_n)}{n^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{c_n^2}{s_n n^2} \leq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{s_n n^2} \quad \text{ce qui converge par hypothèse}$$

Les $(N_i)_i$ sont des v.a indépendantes, d'espérance nulle et $\sum_{n \geq 0} \frac{\mathbb{V}(N_n)}{n^2} < +\infty$, alors d'après le critère de convergence de Kolmogorov $\frac{\sum_{i=1}^n N_i}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ p.s

On obtient donc que \hat{a}_n converge ps vers a. ■

Proposition 3.10. \hat{D}_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de D .

Proposition 3.11. \hat{D}_n converge dans L^2 vers D .

Proposition 3.12. \hat{D}_n converge ps vers D .

3.2.3 Simulations

Illustrons numériquement les résultats du nouveau modèle. Les simulations se déroulent de la même manière que pour le modèle précédent. Cependant, nous avons un nouveau paramètre w . Nous fixons celui-ci à $w = 0.1$. Les autres constantes sont fixées aux mêmes valeurs. Le graphique 6a illustre le résultat de convergence presque-sûre de \hat{a}_n et le graphique 6b illustre le résultat de convergence L^2 de \hat{D}_n .

4 Test de rupture

Dans cette dernière partie, nous utilisons les mouvements browniens pour faire des statistiques. Cette démarche diffère un peu de la partie précédente, qui faisait plutôt l'inverse, c.a.d des statistiques sur un modèle qui utilise le mouvement brownien.

On se fixe le cadre d'un échantillon supposé gaussien *i.i.d*, de moyenne et de variance connue. On veut tester si nos données vérifient bien ce modèle, ou si notre jeu de données se compose d'un premier groupe de moyenne μ_1 et d'un second de moyenne μ_2 différente. Nous présenterons une statistique de test et un intervalle de confiance pour cette statistique, afin de fournir un critère de décision. Nos hypothèses de test sont :

$$\begin{cases} H_0 : & \text{Toutes les gaussiennes ont même moyenne} \\ H_1 : & \text{Il existe un instant où les échantillons changent de moyenne.} \end{cases}$$

On se donne (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon gaussien $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On définit $(S_k)_{k \geq 1}$ par $S_k = \sum_{i=1}^k \frac{X_i - m}{\sigma}$ et T_n par $T_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_k S_k$. Alors, S_k est la somme de variables iid de moyenne 0 et de variance 1. Ces hypothèses sont les seules que nous avons utilisé pour le TCL lorsque nous avons construit un mouvement brownien comme une marche aléatoire. En fait, la même preuve que celle fournie en première partie de ce rapport suffit pour montrer que, pour n'importe quelle somme S_k de variables iid centrées réduites, le processus $(\frac{1}{\sqrt{n}} S_k)_t$ si $t = \frac{k}{n}$ est asymptotiquement une discrétisation d'un brownien. Ainsi, le processus (T_n) converge en loi vers le sup d'un brownien.

Ceci justifie que l'on cherche à déterminer la loi du sup d'un brownien. Pour ce faire, nous admettons le résultat suivant.

Lemme 4.1. La loi jointe du couple $(B_t, M_t)_{t > 0}$, où $M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} B_s$, admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^2 donnée par :

$$f_t(x, y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(2y-x)}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{(2y-x)^2}{2t}\right) & \text{si } y \geq 0 \text{ et } x \leq y \\ 0 & \text{si } y < 0 \text{ ou } x > y. \end{cases}$$

Alors, si on fixe ϕ une fonction réelle borélienne bornée, et qu'on écrit :

$$\mathbb{E}[\phi(M_t)] = \int_{y \geq 0} \int_{x \leq y} \phi(y) f_t(x, y) dx dy,$$

on peut déduire, en effectuant un changement de variable $(u, v) = (y, y - x)$, que

$$\mathbb{E}[\phi(M_t)] = \int_{\mathbb{R}} \phi(u) \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \exp\left(-\frac{u^2}{2t}\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(u) du.$$

On en déduit que la loi du sup d'un brownien $M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} B_s$ admet la densité de Lebesgue sur \mathbb{R} donnée par :

$$g_t(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{t}} \exp\left(-\frac{u^2}{2t}\right) & \text{si } u \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De ceci, on déduit que, sous H_0 , notre statistique de test $T_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_k S_k = \sup_{0 \leq t \leq 1} B_t$ admet asymptotiquement pour densité :

$$g_t(u) = \begin{cases} \sqrt{2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) & \text{si } u \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons donc n suffisamment grand, et cherchons q_1 et q_2 positifs tels que $\mathbb{P}(q_1 \leq T_n \leq q_2) = 1 - \alpha$ pour $\alpha \in]0, 1[$. En l'écrivant, on se ramène via l'intégrale de Gauss à chercher q_1 et q_2 positifs tels que $\mathbb{P}(q_1 \leq Z \leq q_2) = (1 - \alpha)/(2\sqrt{\pi})$ pour Z une gaussienne centrée réduite. On choisit alors $q_1 = 0$ pour simplifier, et, puisque la densité de Z est symétrique par rapport 0, il reste à trouver q_2 tel que $\mathbb{P}(Z \leq q_2) = \frac{(1-\alpha)}{2\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2}$.

D'après la table de $\mathcal{N}(0, 1)$, pour un intervalle de confiance à 95%, il faut choisir $q_2 = 0,73$.

Ainsi, en utilisant la construction du mouvement brownien comme une marche aléatoire renormalisée et la loi du sup d'un brownien, nous avons construit un critère de décision pour vérifier que la moyenne d'un échantillon gaussien ne change pas au cours du temps. La figure suivante est un extrait d'un code python, illustrant la praticité de cette procédure de test.

```
1 # Conditions initiales , ici deux groupes de moyenne différente
2 n=10**5
3 mu1 = 100
4 mu2 = 110
5 sigma = 15
6 x1 = mu1 + sigma * np.random.randn(int(n/2))
7 x2 = mu2 + sigma * np.random.randn(int(n/2))
8 x = np.concatenate((x1,x2))
9
10 # Test de rupture
11
12 x_centre_reduit = (x-mu1)/sigma
13 S=np.zeros(n)
14 S[0]=x_centre_reduit[0]
15
16 for k in range(1,n):
17     S[k] = S[k-1] + (x_centre_reduit[k])
18
19 T = max(S)/np.sqrt(n)
20 T
21 #Si T est plus grand que 0.73, ou négatif, on rejette l'hypothèse nulle.
```

Conclusion

Nous avons décrit en première partie une construction du mouvement brownien par marche aléatoire renormalisée et plusieurs définitions et propriétés d'invariance, fixant ainsi un premier cadre théorique. Puis nous avons donné une caractérisation du mouvement brownien par chaînes de Markov, ce qui nous a permis d'introduire un opérateur solution de l'équation de la chaleur. Nous avons aussi visualisé cet opérateur pour différentes fonctions f afin de mieux l'appréhender. En outre, nous avons utilisé le mouvement brownien pour établir deux modèles statistiques visant à prévoir la diffusion de particules de pollution dans une rivière. Dans une logique plus réaliste, il serait intéressant de pouvoir combiner le modèle à dérive avec le modèle à marée, où de prendre également en compte la composante mensuelle des marées. Enfin, plutôt que d'appliquer des statistiques paramétriques à un modèle brownien, nous avons utilisé la loi du sup d'un brownien pour donner un test de détection de rupture de la moyenne d'un échantillon de loi normale.

Remerciements

Nous tenons à remercier Baptiste Huguet pour sa disponibilité (jusqu'aux samedi matin et dimanche soir!) pour son engouement et son enthousiasme à nous faire découvrir ce nouveau domaine et ces nouvelles connaissances.

Références

- [L. Gallardo (2008)] Léonard Gallardo (2008), Mouvement brownien et calcul d'Itô, Hermann
- [B. Duplantier (2015)] Bertrand Duplantier (2015), Le mouvement brownien, "divers et ondoyant", Séminaire Poincaré 1
- [F. Malrieu (2008)] Florent Malrieu (2008), Diffusion d'une particule, Aggrégation externe en Mathématiques, Université Rennes I
- [J-F Le Gall (2013)] Jean-François Le Gall (2013), Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique, Springer