

Nage aléatoire du requin

POL LABARBARIE ¹, GAUTHIER THURIN ¹, MEHDY HOUNKONNOU ¹ et BENJAMIN MENENDEZ ¹

¹Master 1 Modélisation Statistique et Stochastique, Université de Bordeaux

7 décembre 2019

Résumé

Les mouvements exploratoires des requins correspondent à une marche aléatoire dont la distribution est à queue lourde. Les pas de la nage aléatoire du requin suivent une loi α -stable avec $\alpha \in]0, 2]$ et avec souvenir du passé. Notre objectif ici est de simuler le comportement asymptotique de la nage du requin sur \mathbb{R} selon son paramètre de mémoire p et le paramètre α . Au cours de ce travail nous illustrerons numériquement les résultats de convergence montrés par Silvia Businger [Businger. S (2018)]. Notamment nous serons en mesure de tracer l'histogramme de la variable aléatoire Z dans le cas super-critique.

I. INTRODUCTION

La diffusion chaotique est un phénomène naturel qui apparait en physique et en biologie, comme par exemple dans les stratégies de recherche de nourriture des requins [D. W. Sims et al (2008)]. La marche aléatoire de l'éléphant, qui fut introduite par Schutz et Trimper [G. M. Schutz et al (2004)], est un modèle simple qui comprend des processus de diffusion chaotique. La nage aléatoire du requin est une marche aléatoire sur \mathbb{R} qui est très proche de la marche de l'éléphant. La description de la nage du requin fait intervenir des lois symétriques α -stable à valeurs dans \mathbb{R} .

Définition 1. Soit α et σ deux nombres réels positifs avec $\alpha \leq 2$. On dit que X est de loi symétrique α -stable de paramètres d'échelle σ , et on note $X \sim S_\alpha(\sigma)$, si sa fonction caractéristique vérifie, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[\exp(itX)] = \exp(-\sigma^\alpha |t|^\alpha)$$

Nous remarquons aisément que les lois normales centrées et les lois de Cauchy sont des lois α -stables. En effet, si $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, nous avons :

$$\varphi_X(t) = \exp\left(\frac{-\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

où φ est la fonction caractéristique de X . Et si $X \sim \mathcal{C}(\sigma)$, nous avons :

$$\varphi_X(t) = \exp(-\sigma |t|)$$

Dans toute la suite nous parlerons de loi α -stable S_α lorsque nous aurons $\sigma = 1$. Nous ne pouvons utiliser la méthode d'inversion pour simuler des variables aléatoires de loi α -stable S_α et leur simulation est loin d'être aisée. C'est pourquoi l'intégralité de nos simulations numériques utilisera la proposition suivante.

Proposition 1. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes avec $U \sim U_{([-1,1])}$ et $V \sim U_{([0,1])}$ et soit $\alpha \in]0, 2]$. On pose, pour $\alpha \neq 1$:

$$X = \frac{\sin(\alpha\pi U/2)}{(\cos(\pi U/2))^{1/\alpha}} \left(\frac{\cos((1-\alpha)\pi U/2)}{-\log(V)} \right)^{(1-\alpha)/\alpha}$$

tandis que $X = \tan(\pi U/2)$ si $\alpha = 1$. Alors, on a $X \sim S_\alpha$.

Nous allons maintenant décrire la nage du requin. Nous fixons des paramètres $\alpha \in]0, 2]$, $p \in [0, 1]$ et nous notons S_n la position du requin au temps $n \in \mathbb{N}$. On considère une suite (ξ_n) de variables aléatoires indépendantes et de même loi S_α . A l'instant 0, le requin est situé à l'origine, $S_0 = 0$. A l'instant 1, il se déplace de X_1 avec

$X_1 = \xi_1 \sim S_\alpha$ et l'on a $S_1 = X_1$. Ensuite, à chaque instant $n \geq 2$, on choisit uniformément au hasard un instant k parmi les instants précédents $\{1, \dots, n-1\}$, puis on détermine

$$X_n = \begin{cases} X_k & \text{avec probabilité } p \\ \xi_n & \text{avec probabilité } 1-p \end{cases}$$

La position du requin au temps n est alors donnée par

$$S_n = S_{n-1} + X_n$$

Par exemple, $S_2 = 2\xi_1$ avec probabilité p et $S_2 = \xi_1 + \xi_2$ avec probabilité $1-p$. Le comportement asymptotique de la nage du requin est étroitement lié aux valeurs de α et à la mémoire du requin p [Businger. *S* (2018)].

Dans le cas sous-critique $\alpha p < 1$, nous avons :

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{1/\alpha} S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} S_\alpha(\sigma_\alpha) \quad (1)$$

avec σ_α un paramètre dépendant de α .

Dans le cas critique $\alpha p = 1$, nous avons :

$$\left(\frac{1}{n \log(n)}\right)^{1/\alpha} S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} S_\alpha(\sigma_\alpha) \quad (2)$$

avec $\sigma_\alpha = ((1-p)\Gamma(1+\alpha))^{1/\alpha}$, de plus dans ce cas, nous pouvons encadrer p , nous obtenons $0.5 \leq p < 1$.

Dans le cas super-critique $\alpha p > 1$, nous avons :

$$\frac{S_n}{n^p} \xrightarrow{p.s.} Z \quad (3)$$

avec Z une variable aléatoire réelle finie presque sûrement, et $0.5 < p < 1$.

Cet article traite de la représentation numérique de la trajectoire de la nage du requin ainsi que des résultats de convergence présentés ci-dessus en fonction des différents régimes. Tout d'abord nous traiterons ces résultats pour des lois α -stables connues telles que la loi Normale centrée ou la loi de Cauchy. Puis nous généraliserons les résultats.

II. MÉTHODES

Les méthodes afin de simuler la trajectoire du requin et les convergences sont les mêmes en fixant un α ou avec un α aléatoire appartenant à $]0, 2]$.

I. Trajectoires du requin

Notre objectif est d'illustrer la trajectoire du requin pour les trois cas présentés. Tout d'abord il convient de fixer en premier lieu les paramètres α et p . Après avoir fixé α et p , notre code utilise la proposition 1 pour générer un n -échantillon de loi α -stable S_α . Il construit ensuite de manière itérative la trajectoire du requin.

II. Convergences

L'impossibilité de tracer la densité d'une loi α -stable nous empêche d'utiliser la méthode du cours pour simuler les convergences en loi (Méthode consistant à tracer la densité de la variable aléatoire et de vérifier que l'histogramme correspond à l'aire sous la densité). Nous ne pourrions l'utiliser que dans les cas particuliers de la loi Normale centrée et de la loi de Cauchy. Pour les cas particuliers de la loi Normale centrée et de la loi de Cauchy, nous fixerons le α correspondant et nous choisirons le p le plus petit pour chaque régime dans le but de réduire les itérations.

Pour représenter les convergences 1 et 2, nous simulons N_1 fois la trajectoire du requin sur N_2 déplacements. De cette façon, nous obtenons N_1 réalisations de la position du requin à l'instant N_2 . Puis nous traçons l'histogramme de ces N_1 réalisations et, si possible, la densité de la loi α -stable correspondante. De plus il faut faire attention, quand c'est possible, à la valeur du paramètre d'échelle σ_α . Nous pouvons donc conclure ou non quant à la convergence en loi.

Afin d'illustrer la convergence 3, nous traçons à plusieurs reprises la trajectoire du requin ajustée de la vitesse de convergence, pour constater que cette trajectoire se stabilise toujours pour N_2 grand. De plus, nous traçons l'histogramme de Z avec la même méthode que pour les convergences en loi.

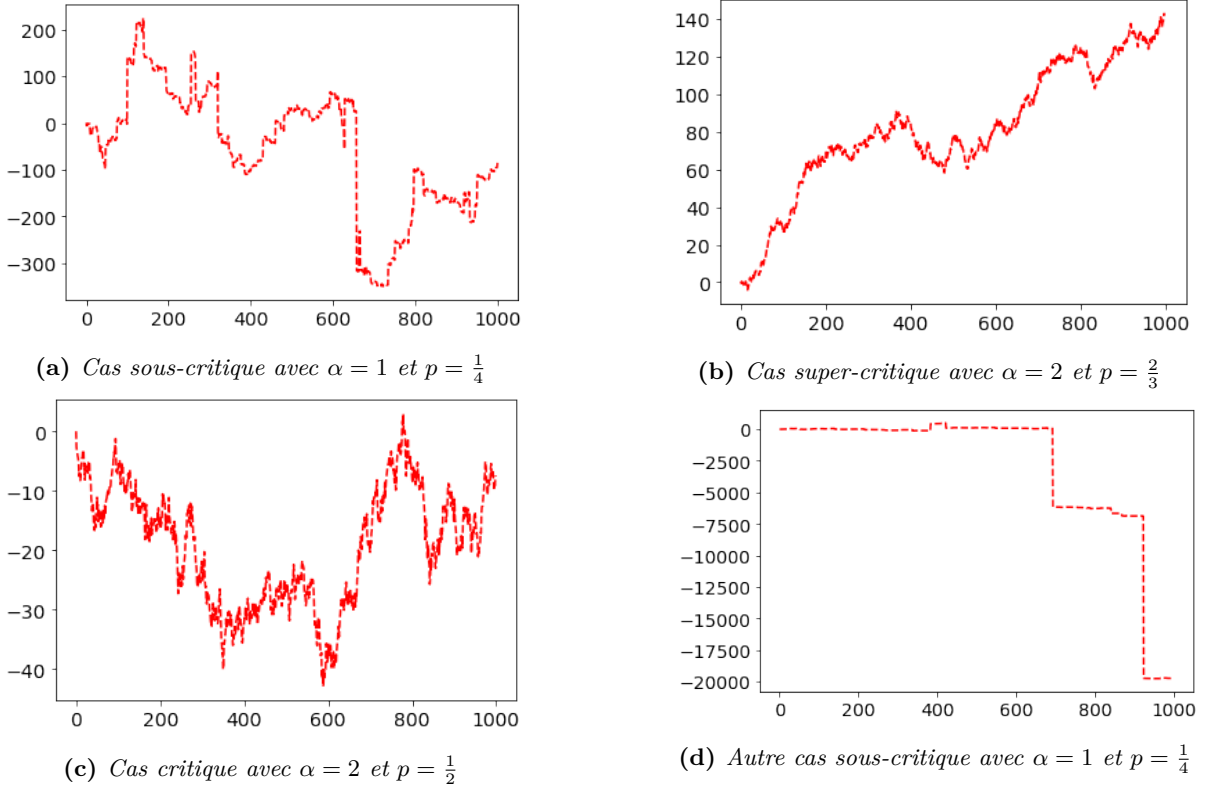


Figure 2 – Trajectoires du requin en fonction du temps selon le cas

III. RÉSULTATS ET DISCUSSION

I. Cas particuliers

La figure I illustre numériquement le fait que la loi Normale centrée et la loi de Cauchy sont des lois α -stables comme nous l'avons montré en utilisant les fonctions caractéristiques.

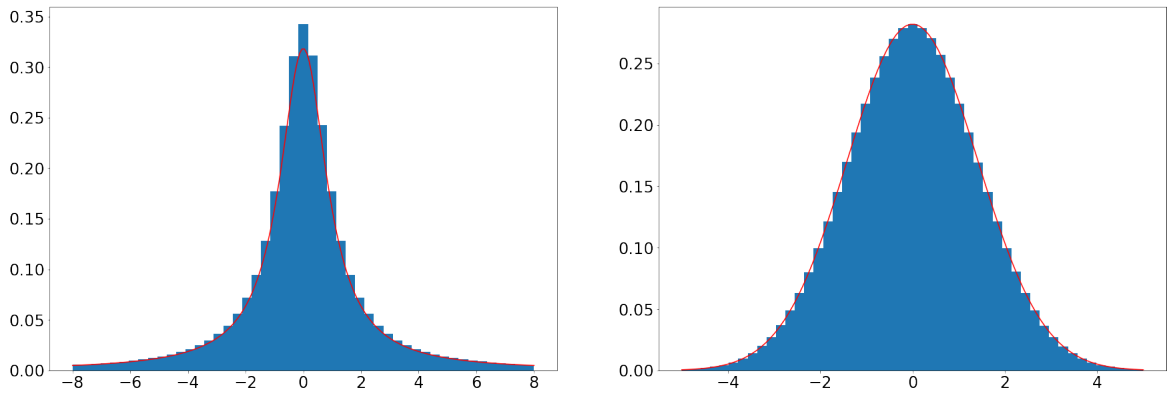


Figure 1 – (a) Histogramme d'une loi α -stable pour $\alpha = 1$ et densité de la loi $\mathcal{C}(1)$ (b) Histogramme d'une loi α -stable pour $\alpha = 2$ et densité de la loi $\mathcal{N}(0, 2)$

II. Trajectoires du requin

Afin de comprendre l'analogie avec la nage d'un requin, notons que cette nage s'effectue ici en une seule dimension. Par souci de clarté, les graphiques 2 représentent la position du requin en fonction du temps.

Les graphiques obtenus pour la trajectoire du requin sont très chaotiques. Ils diffèrent à chaque exécution du code. Nous pouvons tout de même noter ponctuellement des variations brusques de la trajectoire du requin. Ces sauts peuvent être si significativement différents des autres déplacements que l'on ne distingue plus d'autres

variations 2d. Ces sauts sont caractéristiques d'un processus de Lévy. En outre, la trajectoire est d'autant plus chaotique que p est petit. Cela s'explique par la définition de S_n . En effet, si p est proche de 1, le requin aura tendance à répéter les mêmes mouvements et sa trajectoire sera plutôt située dans un quart de plan. A l'extrême, si $p = 1$, peu importe la valeur de α , le requin, à chaque instant, effectuera le même déplacement, et sa trajectoire sera linéaire. Dans le cas sous-critique, la condition sur $\alpha p < 1$ permet à p d'être proche de 0, donc il est plus probable d'obtenir un saut 2d. Dans les cas super-critique et critique, la condition sur p rend moins fréquent l'apparition de saut.

III. Simulation des convergences

III.1 Cas quelconque

Tout d'abord, nous allons représenter les convergences pour un cas quelconque. La figure III.1 est l'histogramme d'une loi α -stable pour $\alpha = 1.5$.

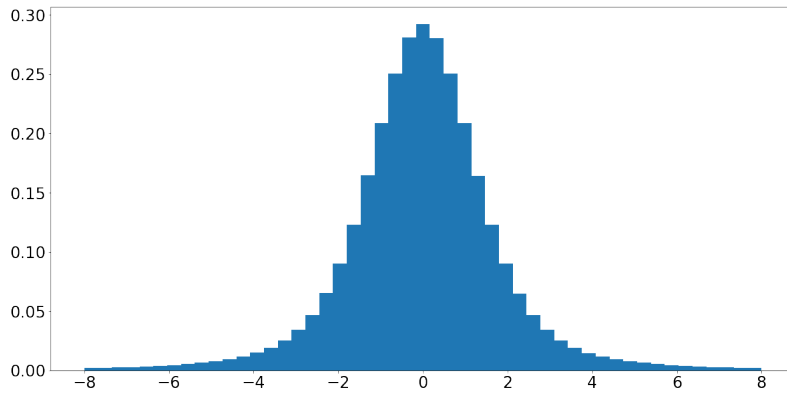


Figure 3 – Histogramme de la loi α -stable pour $\alpha = 1.5$

En comparant l'histogramme d'un échantillon issu d'une loi α -stable, figure III.1, et l'histogramme d'un échantillon de $\left(\frac{1}{n}\right)^{1/\alpha} S_n$ pour n grand, figure 4a, on reconnaît que les deux histogrammes sont centrés et présentent la même forme en cloche. Ceci simule bien la première convergence en loi. Les paramètres d'échelles σ_α étant différents, seule la dispersion des probabilités change.

De même, l'histogramme d'un échantillon issu d'une loi α -stable, figure 6a, et l'histogramme d'un échantillon de $\left(\frac{1}{n \log(n)}\right)^{1/\alpha} S_n$ pour n grand sont semblables, modulo le paramètre d'échelle σ_α .

Le graphique 4c rassemble plusieurs trajectoires du requin ajustées par $\frac{1}{n^p}$. Il apparaît que toutes ces trajectoires se stabilisent pour un grand nombre d'itérations. Cela illustre la convergence presque-sûre de notre variable aléatoire. Enfin, l'histogramme de Z , figure 4d, appuie ce résultat.

III.2 Cas particuliers

Pour les valeurs particulières de α énoncées précédemment, nous savons qu'une loi α -stable peut être une loi Normale centrée ou une loi de Cauchy. Sur les figures 5 et 6, nous avons tracé les mêmes histogrammes que dans la section précédente en ajoutant les densités des lois respectives.

Dans le cas sous-critique notamment, figures 5a et 6a, l'expression du paramètre d'échelle de la loi asymptotique $S_\alpha(\sigma_\alpha)$ est compliquée [Businger. *S* (2018)]. Néanmoins, il est possible de l'approcher par itération. Ces graphiques représentent les résultats de convergence en loi pour le cas 1.

Dans le cas critique, figures 5b et 6b, nous pouvons calculer σ_α . Pour la loi normale centrée nous avons $\sigma_\alpha \simeq 1$, ainsi $S_\alpha(\sigma_\alpha) \sim \mathcal{N}(0, 2)$.

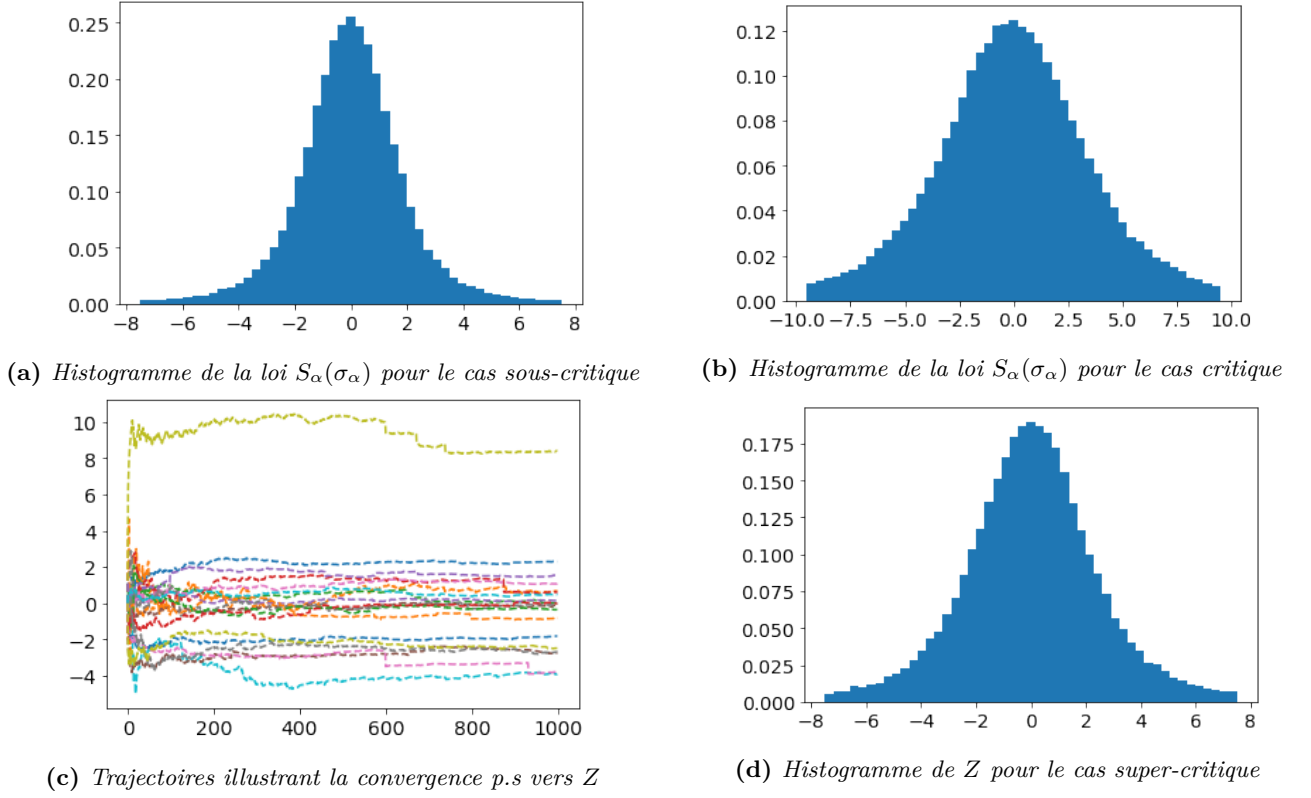


Figure 4 – Histogrammes et trajectoire illustrant les convergences pour $\alpha = 1.5$

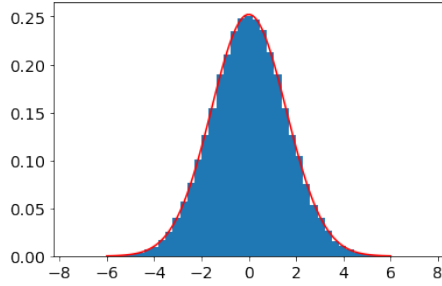
Enfin, les figures 5c et 5d illustrent la convergence p.s. A noter que pour la loi de Cauchy, il est impossible d'être dans le cas super-critique. De même, par itération, il est possible de trouver la loi Normale centrée qui correspond à la loi de Z .

IV. CONCLUSION

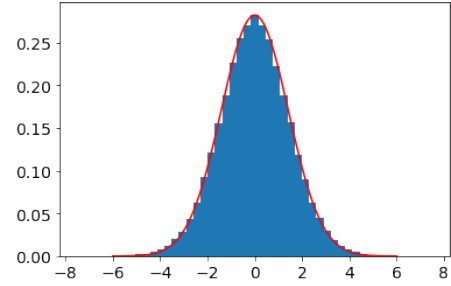
- La trajectoire de la nage du requin dépend des paramètres α et p . Plus p est grand, plus elle sera linéaire.
- Nos résultats numériques illustrent bien les convergences démontrées par [Businger. S (2018)]. Notamment, pour certains paramètres, nous retrouvons des lois usuelles.

RÉFÉRENCES

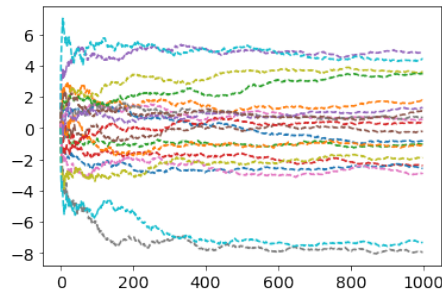
- [G. M. Schutz et al (2004)] G. M. Schutz et S. Trimper (2004), Elephants can always remember : Exact long-range memory effects in a non-Markovian random walk, Phys. Rev.E, 70 :045101.
- [Businger. S (2018)] Sylvia Businger (2018), The Shark Random Swim, disponible à <https://arxiv.org/pdf/1710.05671.pdf>
- [D. W. Sims et al (2008)] D. W. Sims, E. J. Southall, N. E. Humphries, G. C. Hays, C. J. A. Bradshaw, J. W. Pitchford, A. James, M. Z. Ahmed, A. S. Brierley, M. A. Hindell, D. Morritt, M. K. Musyl, D. Righton, E. L. C. Shepard, V. J. Wearmouth, R. P. Wilson, M. J. Witt, and J. D. Metcalfe. Scaling laws of marine predator search behaviour. Nature, 451(7182) :1098–1102, 2008



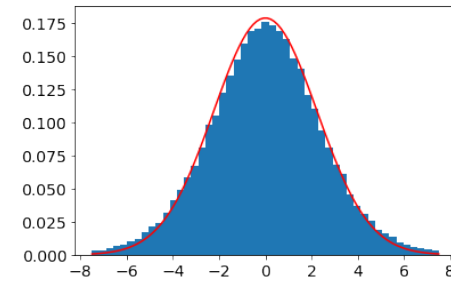
(a) Histogramme de la loi $S_\alpha(\sigma_\alpha)$ pour le cas sous-critique et densité de la loi $\mathcal{N}(0, 2.5)$



(b) Histogramme de la loi $S_\alpha(\sigma_\alpha)$ pour le cas sous-critique et densité de la loi $\mathcal{N}(0, 2)$

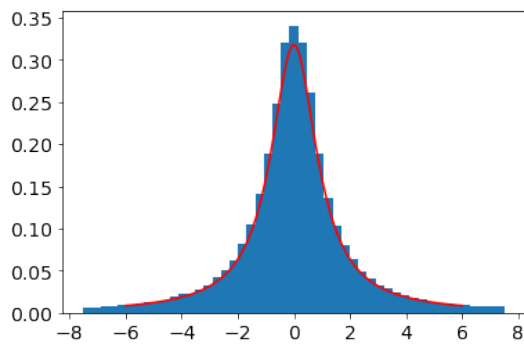


(c) Trajectoires de $\frac{S_n}{n^p}$ pour n grand

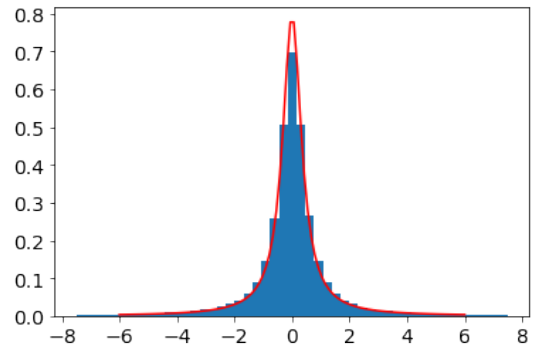


(d) Histogramme de la loi $S_\alpha(\sigma_\alpha)$ pour le cas sous-critique et densité de la loi $\mathcal{N}(0, 5)$

Figure 5 – Histogrammes et trajectoire illustrant les convergences pour la loi Normale centrée



(a) Histogramme de la loi $S_\alpha(\sigma_\alpha)$ pour le cas sous-critique et densité de la loi $C(1)$



(b) Histogramme de la loi $S_\alpha(\sigma_\alpha)$ pour le cas sous-critique et densité de la loi $C(0.4)$

Figure 6 – Histogrammes illustrant les convergences pour la loi de Cauchy