Mehir Seyum Wolde
CINTE3
mswolde@kth.se

Mästarprov 2

Uppgift 1: Lokal vaccinfördelning

Frågeställningen för denna uppgift utgår från att givet ett visst antal doser(D), skapa en fördelning av dessa doser över ett givet antal åldersgrupper(n). Åldersgrupperna består av ett angivet antal personer($a_1, \ldots, a_n$) och varje person i en åldersgrupp som vaccineras får ett angivet antal doser($d_1, \ldots, d_n$). Två ytterligare krav är att en viss andel($t_1, \ldots, t_n$) av varje åldersgrupp måste bli färdigvaccinerad samt att det finns ett maximum på antal kvarliggande doser(S).

I detta mästarprov ska det visas att detta problem är NP-fullständigt. För att visa att ett givet beslutsproblem Q är NP-fullständigt krävs det att problemet uppfyller dessa två följande krav:

1. Problemet Q ligger i NP, alltså det går att verifiera en ja-instans för Q i polynomisk tid
2. Problemet Q är NP-Svårt, alltså att alla problem som ligger i NP kan karpreduceras till Q i polynomisk tid.

NP-tillhörighet

För att visa att vårt problem ligger i NP måste det visas att man kan verifiera en ja-instans i polynomisk tid. En ja-instans för vårt problem kommer att bestå av en given fördelning av antal fullvaccinerade i varje åldersgrupp i en lista med n platser: [$FullyV_1, \ldots, FullyV_n$], som alltså beskriver hur många i varje åldersgrupp som fått sina angivna doser. Verifikationen fungerar genom att kontrollera att alla krav är uppfyllda givet den angivna lösningen. Kraven är att man uppfyllt den minsta andel av hur många som måste bli vaccinerade i varje grupp, att summan av doser inte överstiger D samt att man inte överstiger det maximala svinnet S.

verify_vaccination($D, n, a_1, \ldots, a_n, d_1, \ldots, d_n, t_1, \ldots, t_n, S, FullyV_1, \ldots, FullyV_n$) =
 $sum \leftarrow 0$
 for $i \leftarrow 1$ to n **do**
  if $FullyV_i < (t_i \div 100) \cdot a_i$ **then return** false
  if $FullyV_i > a_i$ **then return** false
  $sum \leftarrow sum + d_i \cdot FullyV_i$

 if sum > D **then return** false

 $diff \leftarrow D - sum$
 return $diff \leq S$

Tidskomplexitet för verifiering

Denna verifiering består av en for slinga som endast kör n gånger och endast utför jämförelse samt aritmetiska operationer. Dessa operationer går i konstant tid och därför kommer algoritmen att ha en komplexitet som endast beror på hur många varv for loopen kommer att

Mehir Seyum Wolde
CINTE3
mswolde@kth.se
köra, vilket i detta fall är *n* och ger oss en tidskomplexitet $O(n)$. Alltså är denna verifikationsalgoritm polynomisk(linjär).

Reduktion

För att nu visa att vårt problem är NP-svårt kommer vi reducera ett känt NP-fullständigt problem, *delmängdssumma*, eftersom att detta per definition också är ett känt NP-svårt problem. Delmängdssumma är ett beslutsproblem som löser problemet: “från en given lista med tal *P*, går det att bilda en delmängd av denna vars summa är *K*?”

Denna reduktion grundar sig att det finns en likhet mellan att hitta en given delmängd vars summa blir *K* i en mängd *P* av storlek *n* och att hitta en fördelning av alla *D* doser bland *n* personer, där varje person *i* kan ta ett specifikt antal doser d_i. Eftersom att vaccin problemet kräver ett flertal krav som inte direkt motsvarar kraven för delmängdssumma, behöver vi därför begränsa det.

Vi låter den sökta delmängdssumman, *K*, motsvara det totala antal doser, *D*. Sedan begränsas vaccinfördelningsproblemet till att endast ta emot åldersgrupper bestående av en person. Varje index i *P* från delmängdssumma motsvarar sedan en åldersgrupp i vaccinfördelning, på detta sätt om storleken av *P* är *n* finns det också *n* åldersgrupper. En åldersgrupp kommer nu bestå av en person *i* och denna person kommer kunna behöver vaccineras av d_i doser som kommer att vara motsvarande element som står på index P_i. Kravet om den minsta andel personer som behöver vaccineras i varje åldersgrupp, $t_1, ..., t_n$, sätts sedan till noll för varje element eftersom det inte finns något krav på vilka element som behöver vara med i delmängden. Det maximala svinnet, S, sätts också till noll eftersom vi vill bilda en delmängd vars summa är exakt lika med *K* och inte en rest av *K* - *S*.

Pseudokod:

Delmängdssumma($P_1, ..., P_n, K$) =
  for $i = 1$ **to** n **do**
    $a_i \leftarrow 1$
    $d_i \leftarrow P_i$
    $t_i \leftarrow 0$
  $D \leftarrow K$
  $S \leftarrow 0$
  return LokalVaccinfördelning(D , n , $a_1, ..., a_n$, $d_1, ..., d_n$, $t_1, ..., t_n$, S)

Ett ytterligare krav för att denna reduktion ska vara giltig är att den går i polynomisk tid. Reduktionen består endast av två tilldelningar, som går på konstant tid, samt en for-slinga som dessutom utför 3 konstant tids operationer(går att förkorta om man endast skickar vidare $P_1, ..., P_n$ istället för att sätta in den i $d_1, ..., d_n$). Denna for-slinga går *n* gånger, där *n* är storleken på indata mängden. Alltså är denna reduktion polynomisk, även linjär, och har en komplexitet $O(n)$.

Mehir Seyum Wolde
CINTE3
mswolde@kth.se

Korrekthet

För att bevisa att denna reduktionen är korrekt krävs det i allmänhet att vi visar att för varje ja-instans från delmängdssumma, ett känt NP-fullständigt problem, finns det en transformation från det problemet till en ja-instans av lokal vaccinfördelningsproblemet. Detta ska även stämma för nej-instanser, alltså ska det finnas en transformation från varje nej-instans i delmängdssumma till en motsvarande nej-instans i lokal vaccinfördelningsproblemet. Detta är även motsvarande till att visa att varje ja-instans från lokal vaccinfördelningsproblemet har en transformation till en ja-instans i delmängdssumma.

Alltså för ja-instanser behöver man visa att om det finns en delmängd *P'* från *P* vars summa är lika med *K*, ska denna kunna transformeras enligt reduktionen till en motsvarande möjlig vaccinfördelning av $D = K$ doser över n personer. Liknande för nej-instanser ska det visas att om det inte finns en delmängd *P'* av *P* vars summa är lika med *K*, ska denna kunna transformeras till en icke-möjlig vaccinfördelning av $D = K$ doser över n personer. Detta är även ekvivalent med att bevisa det omvända fast med ja instanser från vaccinfördelning till ja instanser i delmängdssumma.