

بسمه تعالی

تکلیف دوم درس شناسایی آماری الگو، گروه هوش مصنوعی، دانشکده مهندسی کامپیوتر، دانشگاه اصفهان

تاریخ ارائه: ۱۳۹۶/۸/۶

موعد تحویل: ۱۳۹۶/۸/۲۰

۱- در بسیاری از مسایل شناسایی الگو این گزینه وجود دارد که بتوان یک الگو را به یکی از C دسته منسوب کرده، یا آن را بعنوان یک الگوی غیرقابل شناسایی رد (reject) کرد (البته بشرط اینکه هزینه رد کردن خیلی بالا نباشد). فرض کنید هزینه دسته بندی بصورت زیر تعریف شده باشد:

$$\lambda(\omega_i | \omega_j) = \begin{cases} 0 & \omega_i = \omega_j & \longrightarrow \text{دسته بندی صحیح} \\ \lambda_r & \omega_i = \omega_0 & \longrightarrow \text{رد کردن} \\ \lambda_s & o.w. & \longrightarrow \text{خطا} \end{cases}$$

نشان دهید برای دسته بندی با حداقل خطر (risk)، قانون تصمیم گیری باید یک بردار آزمایشی \mathbf{x} را به دسته ω_i منسوب کند، اگر $P(\omega_i | \mathbf{x}) \geq P(\omega_j | \mathbf{x})$ برای تمام j ها و نیز $1 - (\lambda_r / \lambda_s) \leq P(\omega_i | \mathbf{x})$ ؛ و در غیراینصورت باید آنرا رد کند.

۲- در یک مسأله دو دسته‌ای، چگالی‌های مشروط بر دسته برای یک ویژگی اسکالر (غیر برداری) \mathbf{x} مشروط بر دسته-های ω_1 و ω_2 به ترتیب بصورت زیر هستند:

$$P(x | \omega_2) = k_2 \exp(-(x - 6)^2 / 12) \quad \text{و} \quad P(x | \omega_1) = k_1 \exp(-x^2 / 20)$$

(الف) مقادیر k_1 و k_2 را یافته، و هر دو چگالی را بر روی یک نمودار با استفاده از MATLAB رسم نمایید.
 (ب) فرض کنید احتمالات پیشین (prior) دو دسته با هم برابر بوده، و هزینه انتخاب صحیح صفر باشد. اگر هزینه-های انتخاب نادرست $C_{12} = \sqrt{3}$ و $C_{21} = \sqrt{5}$ باشند (که C_{ij} هزینه مربوط به پیشگویی دسته i است وقتی که الگو متعلق به دسته j باشد)، عبارت مربوط به خطر مشروط را بنویسید.
 (پ) نواحی تصمیم‌گیری که خطر بیز را حداقل می‌کنند را یافته، و آنها را در نمودار بخش (الف) مشخص نمایید.
 (ت) مقدار عددی خطر بیز را برای نواحی تصمیم‌گیری بخش (پ) بدست آورید.

۳- یک سیستم مخابراتی ساده را در نظر بگیرید. فرستنده پیام‌های $m = 0$ یا $m = 1$ را به ترتیب با یک احتمال اولیه $3/4$ و $1/4$ ارسال می‌کند. پیام توسط یک نویز n که مقادیر -1 ، 0 ، و 1 را به ترتیب با احتمالات $1/8$ ، $5/8$ ، و $2/8$ اختیار می‌کند، مخدوش می‌شود. سیگنال دریافتی (یا همان مشاهده) می‌تواند بصورت $r = m + n$ نمایش داده شود. می‌خواهیم از روی r استنتاجی درباره اینکه پیام ارسالی m چه بوده است انجام دهیم، که نتیجه استنتاج را با \hat{m} نمایش می‌دهیم. متغیر \hat{m} نیز مقادیر 0 یا 1 را اختیار می‌کند. وقتی $m = \hat{m}$ باشد دریافت بدرستی انجام گرفته، و در غیر اینصورت یک خطا رخ داده است:

(الف) قانون تصمیم‌گیری که بیشترین احتمال تصمیم‌گیری صحیح را فراهم می‌سازد، را بدست آورید.
 (ب) فرض کنید نویز یک متغیر تصادفی پیوسته با توزیع یکنواخت در بازه $-3/4$ تا $2/4$ بوده و همچنان مستقل از m نیز باشد. ابتدا تابع چگالی احتمال n را رسم کنید. سپس یک قانون تصمیم‌گیری که حداقل احتمال خطا را موجب می‌شود، بدست آورده و احتمال خطا را محاسبه نمایید.

۴- یک توزیع نرمال سه بعدی $p(\mathbf{x}|\omega)$ با میانگین \mathbf{m} و ماتریس کوواریانس Σ بصورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

ماتریسهای در بردارنده بردارهای ویژه و مقادیر ویژه، Φ و Λ ، را محاسبه کرده و با استفاده از آنها (در صورت نیاز) به موارد زیر پاسخ دهید (برای محاسبات می‌توانید از MATLAB استفاده کنید، اما جزئیات و مراحل یافتن پاسخ‌ها را بطور کامل بصورت دستی بنویسید):

(الف) مقدار چگالی احتمال را در نقطه $\mathbf{x}_0 = (5 \ 6 \ 3)^T$ بدست آورید.

(ب) یک تبدیل متعامد یکه $\mathbf{y} = \Phi^T \mathbf{x}$ را تشکیل دهید. ثابت کنید که تبدیلات متعامد یکه فاصله اقلیدسی را حفظ می‌کنند (یعنی $\|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$).

(پ) پس از اعمال تبدیل متعامد یکه فوق، یک تبدیل دیگر بصورت $\Lambda^{-1/2}$ را نیز اضافه کرده و توزیع را به یک توزیع با میانگین مبدأ مختصات و ماتریس کوواریانس همانی تبدیل نمایید. توجه داشته باشید که $\mathbf{A}_w = \Phi \Lambda^{-1/2}$ یک تبدیل خطی است (یعنی $\mathbf{A}_w(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\mathbf{A}_w\mathbf{x} + b\mathbf{A}_w\mathbf{y}$).

(ت) تبدیل کلی بند قبل را بر روی نقطه \mathbf{x}_0 اعمال کرده و نقطه \mathbf{x}_w را بدست آورید.

(ث) فاصله ماحالانوبیس از \mathbf{x}_0 تا میانگین \mathbf{m} و نیز از \mathbf{x}_w تا $\mathbf{0}$ را محاسبه کنید. آیا این دو فاصله با هم برابر هستند یا خیر؟ دلیل آن چیست؟

۵- توزیع توأم دو متغیر تصادفی X و Y در شکل زیر مشخص شده است، بدین ترتیب که مقدار توزیع در نواحی خاکستری ثابت و در بقیه نواحی صفر است.

(الف) فرض کنید دسته اول (ω_1) نقاط با $X \leq 0$ و دسته دوم (ω_2) نقاط با $X > 0$ را شامل شوند. احتمال پیشین برای دو دسته، $P(\omega_1)$ و $P(\omega_2)$ ، را تعیین کنید.

(ب) فرض کنید مشاهداتی که از روی آن استنتاج راجع به وقوع دسته اول یا دوم صورت می‌پذیرد، مقادیر Y باشند. توابع شباهت را بدست آورید (یعنی نمودار دو تابع چگالی مشروط $p(Y|\omega_1)$ و $p(Y|\omega_2)$ را بدست آورید).

(پ) قانون تصمیم‌گیری که حداقل کننده احتمال خطا می‌باشد را بدست آورید. احتمال کمینه خطا را نیز بیابید.

