بسمه تعالی

تکلیف اول درس شناسایی آماری الگو، گروه هوش مصنوعی، دانشکده مهندسی کامپیوتر، دانشگاه اصفهان

تاریخ ارائه: ۱۳۹۶/۸/۶ **موعد تحویل: ۱۳۹۶/۸/۱۳**

۱- دو متغیر تصادفی X و Y را در نظر گیرید. فرض کنید $\mu_X \equiv E[X]$ امید ریاضی X و $\sigma_X^2 \equiv E[(X-\mu_X)^2]$ واریانس X باشد. پاسخ موارد زیر را بطور کامل و دقیق (با ذکر تمام جزئیات) ارائه نمایید:

(الف) نشان دهید $E[X+Y]=E[X]+E[Y]$.

(ب) نشان دهید $\sigma_X^2 = E[X^2]-\mu_X^2$.

(پ) نشان دهید که استقلال عدم همبستگی را ایجاب می‌کند.

(ت) نشان دهید عدم همبستگی استقلال را ایجاب نمی‌کند.

(ث) فرض کنید Z=X+Y باشد. نشان دهید اگر X و Y غیرهمبسته باشند، آنگاه $\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$.

(ج) فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی پیوستهٔ مستقل و دارای توزیع یکسان[1] باشند. آیا می‌توان احتمال $P[X_1 \le X_2]$ را محاسبه کرد؟ اگر پاسخ مثبت است، مقدار آن را بیابید. در غیراینصورت دلیل آنرا توضیح دهید.

(چ) فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی گسستهٔ مستقل و دارای توزیع یکسان باشند. آیا می‌توان احتمال $P[X_1 \le X_2]$ را محاسبه کرد؟ اگر پاسخ مثبت است، مقدار آن را بیابید. در غیراینصورت دلیل آنرا توضیح دهید.

۲- فرض کنید $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ یک بردار تصادفی باشد، که X_i ها متغیرهای تصادفی پیوسته مستقل و دارای توزیع یکسان (.i.i.d) بوده و دارای تابع چگالی احتمال یکنواخت (uniform) بین 0 و 1 بصورت زیر باشند:

$$p(x_i) = \begin{cases} 1 & 0 \le x_i \le 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

هر مقدار **x** از بردار تصادفی **X** می‌تواند بعنوان یک نقطه در یک ابرمکعب n بعدی فرض شود. چون تابع چگالی احتمال **X** یکنواخت است، حجم در این ابرمکعب مستقیماً متناظر با احتمال خواهد بود. عبارتی برای درصد حجم یک ابر مکعب n بعدی قرار گرفته در ε از سطح این ابرمکعب بدست آورید. این درصد را بعنوان تابعی از n برای $1 \le n \le 100000$ و $\varepsilon=0.0001$ ترسیم نمایید. از مشاهده وضعیت برای ابرمکعبهای دارای بعد بالا چه نتیجه‌ای می‌توان درباره متغیرهای تصادفی گرفت؟

۳- فرض کنید $p(x,y) = \frac{1}{2\pi ab}\exp\left\{-\left(\frac{(y-\mu)^2}{2a^2}+\frac{(x-y)^2}{2b^2}\right)\right\}$:

(الف) توابع $p(x)$، $p(y)$، $p(x|y)$، و $p(y|x)$ را بیابید. توصیفی کوتاه برای هریک از این توزیعها ارائه کنید.

(ب) با فرض $\mu=0$، $\alpha=40$، و $\beta=3$، نمودار $p(y)$ و $p(y|x=11.9)$ را برای یک محدوده منطقی از y ترسیم نمایید. تفاوت بین این دو توزیع در چیست؟

۴- فرض کنید $\Sigma = \begin{bmatrix} 64 & -25 \\ -25 & 64 \end{bmatrix}$:

(الف) نشان دهید که $\mathbf{\Sigma}$ یک ماتریس کوواریانس معتبر است.

(ب) مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ آن را بطور دستی پیدا کنید (تمام جزئیات نوشته شود).

---

[1] Independent and identically distributed (i.i.d.).

(پ) با استفاده از MATLAB برنامه‌ای برای محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه نوشته و درستی پاسخ بند قبل را با آن بسنجید (کد برنامه را چاپ کرده و تحویل دهید).

(ت) تعداد ۲۰۰ نقطه از توزیع $N(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ تولید شده که در فایل ضمیمه موجود است. ابتدا این داده‌ها را در یک نمودار دو بعدی نمایش دهید. سپس آنها را بر روی بردارهای ویژه ماتریس کوواریانس تصویر (project) کنید و نمودار داده‌های تبدیل یافته بدین ترتیب را نیز ترسیم نمایید. چه تفاوتی بین دو نمودار مشاهده می‌شود؟

۵- فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی .i.i.d با توزیع زیر بوده:

$$p(x_i) = \begin{cases} 1 & 0 \le x_i \le 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}, \qquad i = 1,2$$

و فرض کنید $Y=X_1+X_2$ باشد.

(الف) عبارتی برای $p(y)$ بدست آورده و $p(y)$ را در یک محدوده منطقی از y رسم نمایید.

(ب) عبارتی برای $p(x_1 \mid y)$ بدست آورده و $p(x_1 \mid y)$ را بعنوان تابعی از x_1 و با y بعنوان یک پارامتر معلوم، با چند مقدار منطقی برای y و در یک محدوده منطقی از x_1 رسم نمایید.

(پ) دو قسمت فوق را این بار با در نظر گرفتن توزیع $N(0,1)$ برای X_1 و X_2 تکرار کنید.

نمودارها به صورت چاپ شده همراه با توضیحات کافی و پاسخ‌ها به صورت تفصیلی در قالب یک گزارش فنی (Technical Report) ارائه شوند.

موفق باشید – ادیبی