OLASILIK TEORİSİ VE İSTATİSTİK

İki Değişkenli Olasılık

- Bu bölümde yapılan bir deneyin iki değişkene bağlı olan sonuçları dikkate alınacaktır.
- Örneğin: Bir gazete yöneticisi, politikasını belirlemek için ekonomi sayfasını okuyan müşterilerin yaşları ile ilgilenebilir.
- Burada A olayı ekonomi sayfasının okunması,
- B olayı da yaşlar ile ilgili bilgiyi tanımlamaktadır.
- B olayı B_1 (← 25), B_2 (26 – 40), B_3 (41→) olarak ayrık alt olaylardan oluşabilir.
- A olayı da A_1 (hiç okumuyor), A_2 (ara sıra okuyor), A_3 (devamlı okuyor) şeklinde ayrık alt olaylardan oluştuğu düşünülebilir.
- Bu rasgele deneyde;

İki Değişkenli Olasılık

- Şekil1’de görüldüğü gibi A ve B olaylarının sonuçları birleşerek iki değişkenli sonuçları oluşturmuşlardır. Toplam sonuç sayısı A’nın sonuç sayısı ile B’nin sonuç sayıları çarpımı kadardır (3 x 3 = 9). Bu sonuçlara olasılıklar da bağlanabilir. Verdiğimiz örneğin alan araştırması sonuçları Çizelge_2 verildiği gibi olsun.

(A) Ekonomi Sayfasını Okuma	(B) Yaşlar			
	(B_1) (← 25)	(B_2) (26 – 40)	(B_3) (41→)	Toplam
(A_1) Hiç okumuyor	0,13	0,02	0,03	0,18
(A_2) Ara sıra okuyor	0,11	0,13	0,21	0,45
(A_3) Düzenli okuyor	0,03	0,21	0,13	0,37
Toplam	0,27	0,36	0,37	1

Gazetede Ekonomi Sayfası Okuma

- Burada deneysel olasılığın kullanıldığını görüyoruz. Eğer araştırmanın geniş bir örneklem de yapıldığı düşünülür ise bu sonuçların olasılıklara yaklaştığı düşünülebilir. Böylece gazete okuyucu kitlesinin davranışları hakkında bilgi alınabilir.
- Örneğin; $P(A_1 \cap B_2) = 0{,}02$
- olan sonucun 26 – 40 yaş grubunda, ekonomi sayfasını okumayanların 0,02 olduğu söylenebilir. Burada şu iki tanım verilebilir.

- **Kenar Olasılıklar**: İki değişkenli olasılıklarda (çapraz tablo oluşturuluyor) tekil olay olasılıklarına $P(A_i)$ ya da $P(B_j)$ kenar olasılık denir.
- **Ortak Olasılıklar**: İki değişkenli olasılıklarda arakesit olasılıkları $P(A_i \cap B_j)$ ortak olasılıklar denir.

Burada kenar olasılıklar örneğin $P(A_i)$, A_i olayını oluşturan ve birbirlerinden ayrık olan

$$A_i \cap B_1 ; A_i \cap B_2 ; \ldots ; A_i \cap B_r$$

olasılıklarının toplamına eşittir.

$$P(A_i) = P(A_i \cap B_1) + P(A_i \cap B_2) + \cdots + P(A_i \cap B_r)$$

- Bu sonuç $P(B_j)$ için de geçerlidir. Yani

$$P(B_j) = P(A_1 \cap B_j) + P(A_2 \cap B_j) + \ldots + P(A_k \cap B_j)$$

- Ekonomi sayfasını okuma örneğinde rasgele seçilmiş bir kimsenin bu sayfayı ara sıra okuyor olma olasılığı:

$$P(Arasıra \quad okuyor) = P\left[Arasıra \quad okuyor \cap (\leftarrow 25 yaş)\right]$$

$$+P\left[Arasıra \quad okuyor \cap (26 yaş - 40 yaş)\right]$$

$$+P\left[Arasıra \quad okuyor \cap (41 yaş \rightarrow)\right]$$

$$= 0,11 + 0,13 + 0,21 = 0,45$$

- Benzer şekilde,

$$P(Düzenli \quad okuyor) = 0,37$$

$$P(Hiç \quad okumuyor) = 0,18$$

$$P(25 yaş \quad ve \quad daha \quad küçük) = 0,27$$

$$P(26 yaş \quad 40 yaş \quad arası) = 0,36$$

$$P(41 yaş \quad ve \quad daha \quad büyük) = 0,37$$

- A_1 A_2 ... A_k ayrık ve bütünü tamamlayan olaylar olduğu için olasılıkları toplamı **1** dir. Aynı durum B olayları için de geçerlidir.
- Aynı durum arakesit olayları olan $(A_i \cap B_j)$
- ait ortak olasılıklar için de geçerlidir.
- Yani

$$\sum_{j}^{r} \sum_{i}^{k} P\left(A_i \cap B_j\right) = 1$$

Koşullu Olasılık

- Genellikle uygulamada kenar olasılıkları ile çok ilgilenilmez.
- Örneğin, yukarıda verilen araştırmada (26-40) yaş grubunda ekonomi sayfasını okuyanlar bizi daha çok ilgilendirebilir.
- Ya da, bir sigorta şirketinde sağlık sigortası yaptıran müşterilerden herhangi birinin bir yıl içinde sigorta primi almak için başvurma olasılığı yerine (50-60) yaş grubunda olan müşterilerden birinin başvurması olasılığı bizi daha çok ilgilendirir.

Koşullu Olasılık

- Bu iki örnekte görüldüğü gibi istenen olasılık bir ek koşul altında belirlenmektedir. Burada, belli bir olayın gerçekleşme olasılığı, bir başka olayın gerçekleşmesi verilmişken ilgilenmemizi gerektirmektedir. Bu duruma koşullu olasılık diyoruz.
- **Tanım:** A ile B iki olay olsun. B olayı verilmişken A olayının gerçekleşme olasılığına koşullu olasılık denir ve $P(A/B)$ ile gösterilir. $P(B)>0$ olma şartı ile

Koşullu Olasılık

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

olarak tanımlanır. Benzer şekilde eğer koşul A olayı ise P(A)>0 şartı ile

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Koşullu Olasılık

- Ekonomi sayfası ile ilgili araştırmada rasgele seçilmiş bir kişinin (26-40) yaş grubunda olduğu bilindiğine göre bu sayfayı ara sıra okuma olasılığı:

$$P\left[Arasıra \quad okuma / (26-40)\, yaş \quad grubu \right] = \frac{P\left[Arasıra \quad okuma \cap (26-40)\, yaş \quad grubu \right]}{P\left[(26-40)\, yaş \quad grubu \right]}$$

$$= \frac{0{,}13}{0{,}36} = 0{,}36$$

Koşullu Olasılık

- ya da

$$P\left[Hiç \quad okumuyor / 25yaş \quad ve \quad daha \quad küçük\right] = \frac{P\left[Hiç \quad okumuyor \cap 25yaş \quad ve \quad küçük\right]}{P\left(25yaş \quad ve \quad küçük\right)}$$

$$= \frac{0,13}{0,27} = 0,48$$

Koşullu Olasılık

- **Örnek:** Büyük bir şehirde elektrik kesintilerinin nedenleri incelendiğinde elde edilen verilerden aşağıdaki sonuçlara varılmıştır. Kesintilerin 0,05'i trafo arızasına, 0,80'i hattın zarar görmesine, 0,01'i her iki nedene de bağlıdır. Aşağıdaki olasılıkları hesaplayın?
- A)Hattın arızalı olduğu verilmişken, trafonun da arızalı olması olasılığı

$A:\{Trafo \quad arızalı\}$

$B:\{Hattın \quad arızalı \quad olması\}$

A)Hattın arızalı olduğu verilmişken, trafonun da arızalı olması olasılığı

$$A:\{Trafo \quad arızalı\}$$

$$B:\{Hattın \quad arızalı \quad olması\}$$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0,01}{0,80}=\frac{1}{80}$$

- B)Trafo arızası verilmişken, hattın da arızalı olması

$$P(B/A) = \frac{0,01}{0,05} = \frac{1}{5}$$

- C)Hattın arızalı olmadığı ve trafonun arızalı olması

$$P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= 0,05 - 0,01 = 0,04$$

- D)Hattın arızalı olmadığı verilmişken, trafonun arızalı olması

$$P(A/\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0,04}{0,20} = \frac{1}{5}$$

- E)Trafonun veya hattın arızalı olması

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0,05 + 0,80 - 0,01 = 0,84$$