OLASILIK TEORİSİ VE İSTATİSTİK

Binom Dağılımı (İki Terimli Dağılım)

- **Örnek:** Bir üretimde kusurlu oranı 0,10 olsun. 4'er ürün bulunan paketlerde kusurlu ürünlerin dağılımını inceleyelim.
- Bu olayda karşılaşılacak sonuçlar, X raslantı değişkeninin değerleri ve olasılıklarını yazalım.

- Sonuçlar incelendiğinde X'in bir olasılık fonksiyonu olduğu görülür.

- 0,0001+0,0036+0,0486+0,2916+0,6561=1 dir.

- Burada paketlerde bulunan ürün sayısına n, sağlam ürün sayısına r, X'in aldığı değerlere de x dersek, olasılık fonksiyonunun;

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x} \quad x = 1,2,3,...$$

olarak yazılabileceği görülür. Ya da,

$$P(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^{x} q^{n-x} \quad x = 1,2,3,...$$

Bu binom dağılımının olasılık fonksiyonudur. Burada, n= örneklem büyüklüğü; p= ilgilenilen olayın olasılığıdır.

- Örneğin kutularda 2 sağlam ürün bulunma olasılığı,

$$P(X = 2) = \frac{4!}{2!(4-2)!} 0{,}10^{2} . 0{,}90^{4-2} = 0{,}0486$$

Poisson Dağılımı

- Belli bir zaman aralığında, belli bir alanda ya da hacimde nadir rastlanan olayların olasılık dağılımları poisson ile ifade edilir.
- **Örnekler:**
- 1)Bir kentte bir hafta içinde meydana gelen ölümcül trafik kazalarının sayısı
- 2) Bir iş kolunda belli bir sözleşme döneminde gerçekleşen grev sayısı
- 3) Bir dakikada bir kasaya müşterilerin gelme sayısı
- 4) Bir bölgede yapılan taramada, kanser hastalığı yaşanmış ailelerin sayısı
- Bu dağılımda bir parametre vardır. Ortalama, aynı zamanda varyansdır.

- **Soru:** Bir bankaya bir saatte gelen müşterilerin ortalama sayısı 20 olsun. Burada raslantı değişkeni X bir poisson dağılımı göstermekte olsun. 15 dakikada gelecek müşteri sayısı ortalama ne olur?

- Çözüm: Burada 1 saatlik zaman diliminin [t=60×(1/4)=15] ¼'ü kullanılmıştır.

- t=1 saat iken λ=20
- t=1/4 saat iken $\lambda t = 20 \times 1/4 = 5$ olur.

- Daha değişik soruları cevaplayabilmek için X poisson raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonunu ele alalım.

$$P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

- x=t birim zaman içinde ilgilenile olay sayısı
- λt=t birim zaman içinde ilgilenilen olayın ortalama sayısı
- e=tabii logaritma tabanı=2,71828
- Genellikle t= 1 alınır. Bu durumda poisson olasılık fonksiyonu;

$$P(X = x) = \frac{(\lambda)^x e^{-\lambda}}{x!}$$

- Dağılımın ortalaması $E(X)=\mu_x=\lambda$;
- varyansı $\sigma_x^2=\lambda$;
- standart sapması $\sigma_x = \sqrt{\lambda}$

- **Örnek :** Yılda 2000 defter tutan muhasebe şirketinde hatalı hesap içeren defterlerin ortalama hata sayısı $\lambda=0.4$ olan bir poisson dağılımı göstermektedir. X raslantı değişkeni hata sayısı olup olasılık fonksiyonu;

$$P(X=x)=\frac{(0,4)^x e^{-0,4}}{x!} \qquad x=0,1,2,3...$$

- Bir yıl içinde tutulan defterlerde, hiç hata içermeyen, 1 hata içeren, 2 hata içeren, 3 hata içeren defterlerin bulunma olasılıklarını ve 2000 defterde kaç tane bulunacağını hesaplayınız.

$$P(\text{Hiç hata içermeme}) = \frac{(0,4)^{x}\, e^{-0,4}}{0!} = 0,6703$$

$=0,6703 \times 2000 = 1340,6$

$$P(1\,\text{hata içerme}) = \frac{(0,4)^{x}\, e^{-0,4}}{1!} = 0,2681$$

$=0,2681 \times 2000 = 536,2$

Sürekli Raslantı Değişkeni

- Raslantı değişkenlerini kesikli ve sürekli olarak iki yapıda inceliyoruz.
- Önceki derslerde kesikli raslantı değişkenleri ve dağılımları ele alındı.
- Bu bölümde sürekli raslantı değişkenleri ve onların olasılık yoğunluk fonksiyonları üzerinde durulacaktır.

- **Tanım:** X raslantı değişkeni, x_i değerlerini x'in a, b aralığında her bir değeri alma olasılığına sahip ise X sürekli raslantı değişkenidir. Örneğin boy uzunluğu, ağırlık, 100 üzerinden alınan notlar vb...

- X SRD ninin belli değerlerini alma olasılıklarını hesaplamak için kullanılan fonksiyona olasılık yoğunluk fonksiyonu denir.
- Kesikli raslantı değişkenlerinde olasılık fonksiyonunun gördüğü tüm işlevleri sürekli raslantı değişkenlerinde olasılık fonksiyonu üslenir.

Normal Dağılım

- Sürekli yoğunluk fonksiyonlarının en önemli ve en sık kullanılanıdır.
- X sürekli raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu normal dağılım gösteriyorsa, genellikle aşağıda belirtilen özelliklere sahiptir.

- Tek tepeli bir dağılımdır.
- Genellikle simetrik ya da simetriye yakındır.
- Ortalama, ortanca, tepe değeri birbirine eşit ya da çok çok yakındır.
- X raslantı değişkeni $-\infty$ ile $+\infty$ arasında değerler alabilir.
- Gözlemlerin ,
- %68 i, $\mu_x \pm 1\sigma$
- %95 i, $\mu_x \pm 2\sigma$
- %99,7 si, $\mu_x \pm 3\sigma$
- %100 ü $\mu_x \pm 4\sigma$

arasındadır.

- Dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Burada,
- **x**= X raslantı değişkeninin herhangi bir değeri
- **σ**= Kitlenin standart sapması
- **e**=2.76183 değeridır.
- Eşitlik 1 ile verilen ifade bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğu için integralinin değeri 1’e eşittir. Yani,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

- Dağılımı tanımlayabilmek için μ ve σ ' yı bilmek gerekir. Eğrinin alanı, belli bölgelerde bulunma olasılıklarını verir. P(a≤X≤b) olasılığı,

$$\int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

- İstatistikte sık kullanılan bu dağılım için, bu integralin sürekli alınması pratik ve kolay bir iş değildir. Bu iş için dağılımın standartlaştırılması işlemi uygulanır.

- **Tanım:** Bir dağılımın standartlaştırılması, alanı değişmemek şartı ile ortalamanın sıfıra kaydırılması, varyansın 1'e eşitlenmesidir. Tüm normal dağılımlar standart normal dağılıma dönüştürülebilir.

Standart Normal Dağılım

- Standart normal dağılımda (SND) ortalama 0, varyans 1'dir. Ortalamaya göre tam simetrik bir dağılımdır. SND'ın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad -\infty < z < \infty$$

- Bu dağılım, X raslantı değişkenlerinin belli bölgelerde bulunma olasılığını bulmak için kullanılır. Örneğin bir standart normal dağılımda z=0.00 ile z=1.45 arasında bulunma olasılığı,

$$P(0.00 \leq z \leq 1.45) = \int_0^{1.45} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

- integrali alınarak bulunur. Ancak uygulamada, bu alanlar hesaplanarak oluşturulmuş tablolar kullanılır.