OLASILIK TEORİSİ VE İSTATİSTİK

Kesikli Olasılık Dağılımından Yararlanarak Olasılık Hesaplama

- Olasılık dağılımları rasgele değişken için bir fonksiyon vereceği için bu fonksiyon yardımıyla istenilen olasılıklar, tüm örneklem uzayını tek tek yazmadan elde edilecektir. Örneğin;

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=a),\ \ \mathrm{P}(\mathrm{X}\leq a),\ \ \mathrm{P}(\mathrm{X}\geq a)\ \ ve\ \ \mathrm{P}(a\leq \mathrm{X}\leq b)$

- olasılıkları toplam alınarak bulunabilir:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=a)=p(a) \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}\geq a)=\sum_{x_k=a}^{\infty}\mathrm{P}(x_k)$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\leq a)=\sum_{x_k=-\infty}^{a}\mathrm{P}(x_k) \qquad \mathrm{P}(a\leq \mathrm{X}\leq b)=\sum_{x_k=a}^{b}\mathrm{P}(x_k)$$

- **Örnek:** Bir zarın iki kez atılmasında üste gelen yüzlerdeki sayıların toplamı raslantı değişkenimiz ise olasılık dağılımını bulup bu dağılımdan yararlanarak

a- $P(10 \leq X)=?$ b- $P(4>X)=?$ c- $P(9<X \leq 12)=?$

- **Çözüm:** Bu problemde olasılık dağılımın bulmak için S örneklem uzayını oluşturalım.

- $P(X=x_i)$'nin aldığı değerleri verebilecek bir fonksiyon

$$P(X=x_i)=(6-|x_i-7|)/36$$

Bu fonksiyondan yararlanarak,

- a)

$$P(10 \le X) = \sum_{x_i=10}^{12} P(X = x_i) = \sum_{x_i=10}^{12} \left(\frac{6 - |x_i - 7|}{36} \right)$$

$$\frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

- b)

$$P(4 > X) = \sum_{x_i=-\infty}^{3} P(X = x_i) = \sum_{x_i=-\infty}^{1} P(X = x_i) + \sum_{x_i=2}^{3} P(X = x_i)$$

$$= 0 + \left(\frac{6 - |2 - 7|}{36} + \frac{6 - |3 - 7|}{36} \right)$$

- C)

$$P(9 < X \leq 12) = \sum_{x_i=10}^{12} P(X = x_i) = \sum_{x_i=10}^{12} \left(\frac{6 - |x_i - 7|}{36} \right)$$

$$\frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

Kesikli Dağılımlarda Ortalama

- Raslantı değişkenlerinde **beklenen değer** bir merkezi eğilim ölçüsü olan ortalamadır.

- **Örnek1:** Bir kitapta sayfalardaki yanlış sözcük sayılarının sayısı belirlenmiştir. Sayfaların % 81 inde hiç yanlış bulunmamıştır. % 17 sinde 1, % 2 sinde 2 yanlış sözcük bulunmuştur.Burada X raslantı değişkeni yanlış sözcük sayısı olarak belirlenmiş ise,

- $P(X=0)=0.81$; $P(X=1)=0.17$; $P(X=2)=0.02$

- Bu kitapta ortalama yanlış sözcük sayısı ne kadardır?

$0\times0.81+1\times0.17+2\times0.02=0.21$

- **Tanım:** Bir kesikli RD'inin ortalaması,

- μx=E(X) dir ve E(X)= $\sum_x xP(X = x)$
- eşitliği ile bulunur.
- E(X) , X raslantı değişkeninin beklenen değeri adını alır.
- Beklenen değer, raslantı değişkeninin çok sayıda denemede alacağı değerlerin uzun dönem ortalaması olarak görülebilir.

- **Beklenen değer ile ilgili özellikler:**

- k herhangi bir sabit sayı olmak üzere;

- *E(k)=k; **E(kX)=kE(X) dır.

- **Örnek :** Bir beyaz eşya servis istasyonunda günlük verilen hizmetler için olasılık dağılımı aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Günlük verilen servis sayısı(X)	Olasılık P(X=x)	xP(X=x)
• 0	0.075	0×0.075
• 1	0.100	1×0.100
• 2	0.250	2×0.250
• 3	0.200	3×0.200
• 4	0.175	4×0.175
• 5	0.150	5×0.150
• 6	0.050	6×0.050

E(X)= μx=2.95

Kesikli Dağılımlarda Varyans

- Tanım: X kesikli bir raslantı değişkeni olsun.
- Ortalamadan sapmaların karelerinin beklenen değeri

$$E(x - \mu_x)^2$$

- varyansdır, σ_x^2 ile gösterilir.

$$\sigma_x^2 = \sum_x (x - \mu_x)^2 P(X = x)$$

- olarak hesaplanır. Bu formülün daha basit hesaplama şekli:

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - \mu_x^2 = \sum_x x^2 P(X = x) - \mu_x^2$$

- Varyans'ın kare kökü standart sapmadır ve σ_x ile gösterilir.

- **Varyans ile ilgili özellikler:**

- k herhangi bir sabit sayı olmak üzere;
- * V(k)=0 ; ** V(kX)=k² V(X)

- **Örnek 3:** Kitap sayfalarındaki yazım hataları ile ilgili problemde varyans ve standart sapma bulalım.

$$\sigma_x{}^2 = 0{,}25 - (0{,}21)^2 = 0{,}2059$$

- ve standart sapma $\sigma_x = \sqrt{0{,}2059} = 0{,}45$

olarak elde edilir.

- **Örnek :** Servis istasyonunun günlük hizmeti için varyans ve standart sapma bulalım.

Günlük verilen servis sayısı(X)	Olasılık P(X=x)	x^2 P(X=x)
0	0.075	$0^2 \times 0.075$
1	0.100	$1^2 \times 0.100$
2	0.250	$2^2 \times 0.250$
3	0.200	$3^2 \times 0.200$
4	0.175	$4^2 \times 0.175$
5	0.150	$5^2 \times 0.150$
6	0.050	$6^2 \times 0.050$

- E(X)= μx=2.95 bulunmuştu.
- Varyans ise, $\sigma_x^{\ 2} = \sum_x x^2 P(X = x) - \mu_x^{\ 2} = 2{,}5475$
- Standart sapma, σx=1,596

Kesikli Olasılık Dağılımları

Bu bölümde kesikli raslantı değişkenlerinde sık raslanan bazı özel olasılık dağılımlarına değineceğiz.

Bernoulli Dağılımı

- Olasılık konularında verdiğimiz örneklerde tek bir deneme için ortaya çıkacak sonuçlar iki durum içeriyorsa, Bernoulli dağılımı söz konusudur.
- Örneğin, paranın tek atışında Y ya da T gelmesi, tek bir oyunda kazanma ya da kaybetme vb.

- **Tanım:** X raslantı değişkeni başarı için 1, başarısızlık için 0 değerini alsın.
- X’in olasılık fonksiyonu;
- $P(X=1)=p$
- $P(X=0)=1-p=q$
- olur.
- Ya da
- $P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x}$ $x=0,1$
- ise bu dağılıma **bernoulli dağılımı** denir.
-
- Bernoulli dağılımının beklenen değeri ve varyansı aşağıda verilmiştir:
- $E(X)=\mu=p$; $\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$ $=pq$

Binom Dağılımı (İki Terimli Dağılım)

Bernoulli denemelerinin n kez tekrarlandığını düşünelim. Bu denemelerde başarılı sonuçların toplam sayısı X R.D. olarak gösterilsin. X R.D. aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir binom R.D. olarak isimlendirilir.

- Deneyde iki sonuç vardır. Başarılı olma olasılığı p, başarısız olma olasılığı (1-p)=q dur.
- Deney boyunca yapılan n deneme aynı koşullar altında gerçekleştirilir.
- Bir tek deneme için başarılı olma olasılığı p her deneme için aynı, başarısızlık olasılığı q da her deneme için aynıdır.
- Denemeler birbirinden bağımsızdır.
- Deney boyunca n sabit kalır

- **Örnekler:**

- 3 çocuklu ailelerde kız çocuk sayısı
- Bir paranın 4 kez atılmasında yazıların sayısı
- Kusurlu oranı 0,03 olan bir üretimde, 10’arlık ürün içeren paketlerde kusurlu parça sayısı