OLASILIK TEORİSİ VE İSTATİSTİK

PERMÜTASYON

- Bir olayın olasılığı hesaplanırken, örneklem uzayında ilgilenilen olayın temel sonuçlarının sayılması sorun olur. Bunun için permütasyon ve kombinasyon yararlı yöntemlerdir. Bu bölümde bu iki konu tartışılacaktır.
- Önce Permütasyon=sıralama

  ile ilgilenelim.

- x tane nesneyi her biri bir kez kullanılmak üzere sıraya koyalım.
- Kaç değişik sıralama yapılabilir.
- Aşağıdaki şekilde verilen kutuları düşünelim.
- İlk kutuya x tane rakamı x farklı şekilde yerleştirebiliriz.
- Geriye (x-1) tane kalan rakam sonra gelen kutuya x-1 farklı şekilde yerleşir. Bu uygulamaya devam edilirse,

- İlk iki kutuya doldurmanın yolu x(x-1) tane farklı yoldur.
- Üçüncü kutuda düşünüldüğünde,
- x.(x-1).(x-2) tane farklı yolda yerleştirme yapılabilir.
- En son kutuya gelindiğinde yerleştirilecek bir nesne kalır. Bütün sıralamanın faklı sayısı
- x(x-1)(x-2)(x-3)...2.1=x! kadardır.

- **Örnek:** A,B,C harfleri kaç değişik biçimde sıralanabilir. Bu sorunun çözümünü ağaç çizimi ile gerçekleştirelim.
- Görüldüğü gibi 3!=6 değişik biçimde sıralama gerçekleşmiştir.

- Permutasyon :

$$_{n}P_{x} = \frac{n!}{(n-x)!}$$

Örnek: A,B,C,D,E harfleri arasından iki harf seçilip bunların sıralanacağını düşünelim. N=5, x=2 permütasyon sayısı

- $_{5}P_{2} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$ tanedir. Bu sonucun anlamı; sıralamanın 20 farklı şekilde yapılabileceğidir.
- **Örnek:** 8 kişi 3 kişilik yere kaç farklı şekilde oturtulabilir.

$$_{8}P_{3} = \frac{8!}{(8-3)!} = 336$$

KOMBİNASYON

- Burada n tane nesneden x tanesini kaç değişik şekilde seçeceğimiz ile ilgileniriz. Kombinasyonda yerine koyma ve sıralama yapıldığı düşünülmez ise bu farklı çekim sayısı

$$ {}_{n}C_{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} $$

KOMBİNASYON

Örnek: Bir personel yöneticisinin boş 4 kadroyu doldurmak için 8 adayı vardır. Adaylardan beşi erkek, üçü kadındır.

a) Adaylardan her birinin seçilme şansı eşitse,

b) Eğer hiç kadın işe alınmayacak ise, kadrolar kaç farklı şekilde doldurulur.

Bu problemin çözümü sıralamanın önemli olmadığı farklı seçilme işlemi olan kombinasyon ile çözümlenir.

a) için 8 kişiden hiçbir ayrım yapılmadan 4 kişi seçilecektir.

$$ {}_{8}C_{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = 70 $$

farklı şekilde seçim yapılabilir.

b) Eğer hiç kadın seçilmeyecek ise seçimler yalnız erkekler içinden yapılır.

$$ {}_{5}C_{4} = \frac{5}{4!(5-4)!} = 5 $$

OLASILIK

- Olasılık kavramı, bir olayın gerçekleşebilirliğinin sayısal bir ölçüsünü verme amacını taşır.
- Olasılık 0 ile 1 arasında bir ölçekle ölçülür. Olayın gerçekleşmesi olanaksız ise, 0; olayın gerçekleşmesi kesin ise 1 değerini alır. Belirsiz olaylarda olayın gerçekleşebilirliği ne kadar fazla ise olasılık değeri de o kadar yüksek olacaktır. Gerçekleşebilirliği ne kadar düşük ise, olasılık değeri de o kadar küçük olur.
- Bir yazı–tura atma deneyinde; yazı gelme olasılığı ½, tura gelme olasılığı ½'dir.

OLASILIK ÖNERMELERİ

- Bir rasgele deneyin örneklem uzayını S, temel sonuçlarını Oi , olayı da A ile gösterelim.
- "A olayının gerçekleşmesi olasılığı" için P(A) gösterimi kullanılmak üzere aşağıdaki önermeler söz konusudur.

1. A, örneklem uzayı S içinde yer alan bir olaysa,

   $0 \leq P(A) \leq 1$

2. A, S içinde yer alan bir olay, Oi de temel sonuçlar olsun. O zaman

$$P(A) = \sum_{A} P(O_i)$$

Burada toplama işlemi A içindeki bütün temel sonuçları kapsar.

3. P(S)=1'dir.

OLASILIK ÖNERMELERİ

- İlk önerme olasılığın 0 ile 1 arasında olması gerektiğini söyler.
- İkinci önerme, göreli sıklık bağlamında kullanılabilir. Bir rasgele denemenin N kez tekrarlandığını düşünelim. Oi temel sonucunun gerçekleşme sayısı Ni, A olayının gerçekleşme sayısı da NA olsun. O zaman, temel sonuçlar bağdaşmaz olduğundan, A'daki bütün temel sonuçlar için Ni'lerin toplamı NA'yı verir, yani

$$N_A = \sum_A N_i$$

- Üçüncü önerme, örneklem uzayındaki bütün temel sonuçların olasılıkları toplamının 1 olduğunu ifade eder.

ÖNERMELERİN DOĞURDUĞU SONUÇLAR

- Örneklem uzayı S, her birinin gerçekleşeceği aynı olan O1,O2,...,On gibi n tane temel sonuçtan oluşuyorsa, bunların her birinin olasılığı 1/n'dir. Yani;

$$P(O_i) = \frac{1}{n} \qquad (i = 1,2,...,n)$$

- Örneğin bir zar atıldığında temel sonucun her birinin gerçekleşme olasılığı olasılığı 1/6 'dir.

ÖNERMELERİN DOĞURDUĞU SONUÇLAR

- Örneklem uzayı S, gerçekleşebilirliği aynı n tane temel sonuçtan oluşuyorsa, A olayı da bu sonuçlardan n_A tanesini içeriyorsa,

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

olacaktır.

- Örneğin bir zar atma olayında A olayı "Gelen sayı çifttir" ise, n=6 temel sonuç vardır, ve bunların n_A=3 tanesi A'dadır. O halde P(A)=3/6=1/2'dir.

ÖNERMELERİN DOĞURDUĞU SONUÇLAR

- A ile B bağdaşmaz olaylar (ayrık) olsun. O zaman bunların birleşiminin olasılığı, her bir olasılığın toplamadır, yani

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

olur.

Daha genel olarak $E_1, E_2, ..., E_k$

bağdaşmaz olaylar ise şu yazılabilir:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_k) = P(E_1) + P(E_2) + ... + P(E_k)$$

ÖNERMELERİN DOĞURDUĞU SONUÇLAR

- $E_1, E_2, ..., E_k$ tam sistem oluşturan olaylar ise, bunların birleşimlerinin olasılığı 1'dir.

$$P(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_k) = 1$$

- Bu olaylar tam sistem oluşturduklarından birleşimleri bütün örneklem uzayı S'dir.