فرآیندهای تصادفی فصل 2:

	شماره سئوال
زنجیر مارکوف: فرض کنید S یک مجموعه گسسته باشد. یک زنجیر مارکوف، یک دنباله از متغیرهای تصادفی $X_0, X_1, \ldots$ است که مقادیر خود را در S اختیار کند با این ویژگی:	

$$P(X_{n+1}=j \mid X_0=x_0, X_1=x_1, \ldots, X_{n-1}=x_{n-1}, X_n=i) = P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$$

برای همه $i,j \in S$ و $x_0, \ldots, x_{n-1}$ و $n \geq 0$. مجموعه S فضای حالت زنجیر مارکوف است.

ماتریس تصادفی: ماتریس تصادفی یک ماتریس مربعی P است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

i) $P_{ij} \geq 0 \quad \forall i,j$

ii) برای هر سطر i، $\sum_j P_{ij} = 1$

ماتریس انتقال n-مرحله‌ای: فرض کنید $X_0, X_1, \ldots$ یک زنجیر مارکوف با ماتریس انتقال P باشد. ماتریس P^n، ماتریس انتقال n مرحله‌ای زنجیر است، برای $n \geq 0$،

$$P_{ij}^n = P(X_n=j \mid X_0=i), \quad \forall i,j$$

رابطه چپمن-کولموگروف:

برای $m,n \geq 0$، اتحاد ماتریسی $P^{m+n} = P^m * P^n$ یعنی

$$P_{ij}^{m+n} = \sum_k P_{ik}^m P_{kj}^n, \quad \forall i,j$$

توزیع X_n:

فرض کنید $X_0, X_1, \ldots$ یک زنجیر مارکوف با ماتریس انتقال P و توزیع آغازین α باشد، برای هر $n \geq 0$ توزیع X_n برابر است با αP^n یعنی:

$$P(X_n=j) = (\alpha P^n)_j, \quad \forall j$$

ویژگی مارکوفی:

فرض کنیم $X_0, X_1, \ldots$ یک زنجیر مارکوف باشد. بنابراین برای هر $m<n$،

$$P(X_{n+1}=j \mid X_0=i, \ldots, X_{n-m-1}=i_{n-m-1}, X_{m-n}=i)$$
$$= P(X_{n+1}=j \mid X_{n-m}=i) = P(X_{m+1}=j \mid X_0=i) = P_{ij}^{m+1}$$

برای همه $i_0, \ldots, i_{n-m-1}$ و i,j و $n \geq 0$

فرآیند های تصادفی فصل دوم

شماره سئوال

توزیع توأم : فرض کنید $X_0, X_1, \dots$ یک زنجیر مارکوف با ماتریس انتقال P و توزیع آغازین α باشد. برای هر $0 \le n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1} < n_k$ و حالت های $i_1, i_2, \dots, i_k$

$$P(X_{n_1}=i_1, X_{n_2}=i_2, \dots, X_{n_k}=i_k) = (\alpha P^{n_1})_{i_1} (P^{n_2})_{i_1, i_2} \dots (P^{n_k - n_{k-1}})_{i_{k-1}, i_k}$$

فرآیندهای تصادفی فصل سوم :

توزیع حدی :

فرض کنیم $X_0, X_1, \dots$ یک زنجیر مارکوف با ماتریس انتقال P باشد. یک توزیع حدی برای زنجیر مارکوف یک توزیع احتمالی λ با این ویژگی است که برای هر i و j :

$$\lim_{n \to \infty} P_{ij}^n = \lambda_j$$

توزیع حدی منحصر بفرد است .

توزیع مانا :

فرض کنیم $X_0, X_1, \dots$ یک زنجیر مارکوف با ماتریس انتقال P باشد. توزیع مانا ، یک توزیع احتمالی π است که در رابطه ی زیر صدق می کند :

$$\pi = \pi P$$

$$\Rightarrow \pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \quad \forall j .$$

توزیع های حدی توزیع های مانا هستند .

ماتریس انتقال منظم :

P را ماتریس منظم گوییم اگر بعضی از توان های P مثبت باشند ، یعنی برای بعضی مقادیر $n \ge 1$ ، $P^n > 0$.

★ اگر ماتریس انتقال یک زنجیر مارکوف منظم باشد آنگاه زنجیر دارای توزیع حدی است که توزیع مانای یکتای زنجیر نیز خواهد بود .

یافتن توزیع مانا : دستگاه خطی $\sum_i \pi_i P_{ij} = \pi_j$ ، بدون قید $\sum_j \pi_j = 1$ ، یک معادله ی مازاد دارد.

روش حل : i) حذف معادله ی مازاد ii) حل کردن دستگاه حاصل شده برای $x = (1, x_2, x_3, \dots)$ که اولین یا هر مولفه از x با عدد 1 جایگذین شده است و در آخر :

$$\pi = \frac{1}{(1 + x_2 + x_3 + \dots x_k)} (1, x_2, \dots, x_k)$$

شماره سوال	

توزیع مانا برای قدم زدن تصادفی روی یک گراف وزن دار:

فرض کنیم G یک گراف وزن دار با تابع وزن یال $w(i,j)$ باشد، برای قدم زدن تصادفی روی G، توزیع مانا π متناسب با مجموع وزن های یال واقع بر هر رأس است یعنی:

$$\pi_v = \frac{w(v)}{\sum_z w(z)}$$ برای همه رأس های v

که در آن $w(v) = \sum_{z \sim v} w(v,z)$

مجموع وزن های یال روی همه ی یال های گراف واقع بر v است.

توزیع مانا برای قدم زدن تصادفی روی یک گراف:

برای قدم زدن تصادفی ساده روی گراف ساده غیر وزن دار، قرار می دهیم $w(i,j)=1$ برای همه ی i و j

در آن صورت $w(v) = deg(v)$ که نتیجه می شود $\pi_v = \frac{deg(v)}{\sum_z deg(z)} = \frac{deg(v)}{2e}$

که e تعداد کل یال های موجود در گراف است.

★ **نکته:** اگر π توزیع مانای یک زنجیر مارکوف باشد و در برابری $\pi P = \pi$ ($\pi P = \pi$) صدق کند، آنگاه π یک بردار ویژه چپ ماتریس P است با مقدار ویژه $\lambda = 1$.

تحویل ناپذیری:

اگر یک زنجیر مارکوف فقط یک رده ی هم ارزی داشته باشد، آنگاه تحویل ناپذیر می نامند. یعنی، همه حالت ها باهم در ارتباط اند.

وضعیت های گذرا و بازگشتی:

اگر زنجیر مارکوف با شروع از وضعیت j در نهایت j را دوباره ملاقات کند، وضعیت j را بازگشتی می گویند. یعنی $f_j = 1$

وضعیت j بازگشتی است اگر و تنها اگر $\sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^n = \infty$

وضعیت j گذرا گوییم اگر احتمال مثبتی وجود داشته باشد که زنجیر مارکوف با شروع از وضعیت j هرگز به j بازنگردد یعنی $f_j < 1$.

وضعیت j گذرا است اگر و تنها اگر $\sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^n < \infty$

بازگشتی و گذرا بودن از ویژگی های رده ی هم ارزی می باشد و وضعیت های یک رده هم ارزی یا بازگشتی اند یا گذرا.

شماره سئوال

نکته: برای یک زنجیره مارکوف تحویل ناپذیر متناهی، همه حالت ها بازگشتی اند.

یک رده هم ارزی بسته است اگر شامل همه وضعیت های بازگشتی است و یک رده ی هم ارزی متناهی بسته است فقط اگر شامل همه حالت های بازگشتی باشد.

تجزیه کانونی: یک زنجیره مارکوف را می توان به مجموعه حالت های گذرا و بازگشتی مانند فضای حالت S یک زنجیره مارکوف افراز کرد که T یک مجموعه از تمام حالت های گذرا و R_i ها رده های هم ارزی مرتبط بسته از حالت های بازگشتی هستند، این افراز را تجزیه کانونی می نامیم. $S = T \cup R_1 \cup R_2 \ldots \cup R_m$

$$P = \begin{array}{c} \\ T \\ R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T & R_1 & \cdots & R_m \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} * & * & \cdots & * \\ 0 & P_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_m \end{array} \right] \end{array}$$

قضیه: قضیه حدی برای زنجیره های تحویل ناپذیر متناهی:

فرض کنید $X_0, X_1, \ldots$ یک زنجیره مارکوف تحویل ناپذیر متناهی باشد. برای هر وضعیت j، $\mu_j = E[T_j | X_0 = j]$ را زمان بازگشت مورد انتظار به وضعیت j در نظر بگیریم، در آن صورت μ_j متناهی است و توزیع مانای مثبت یکتا π وجود دارد به طوری که:

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_j}, \quad \forall j \quad \text{و} \quad \pi_j = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} P_{ij}^m$$

تحلیل گام اول: زمان بازگشت مورد انتظار در این روش بر اساس شرطی کردن روی گام اول زنجیره و استفاده از قانون امید ریاضی کل است یعنی: $E[T_j | X_0 = j]$

دوره: برای زنجیره مارکوف با ماتریس انتقال P، دوره وضعیت i که با $d(i)$ نمایش داده می شود بزرگترین مقسوم علیه مشترک مجموعه زمان های بازگشت ممکن به وضعیت i می باشد یعنی:

$$d(i) = \gcd\{n > 0 : P_{ii}^n > 0\}.$$

اگر $d(i) = 1$، وضعیت i نادوره ای نامیده می شود. اگر مجموعه زمان های بازگشت تهی باشد، قرار می دهیم $d(i) = +\infty$

یعنی با شروع از وضعیت i، بازگشت به i فقط در مضرب هایی از $d(i)$ گام می تواند اتفاق بیافتد و دوره $d(i)$ بزرگترین چنین عددی با این ویژگی است.

شماره سئوال	
	دوره ای بودن یک ویژگی رده های هم ارزی است و وضعیت های یک رده هم ارزی، همگی دارای یک دوره ی یکسان اند.

زنجیرهای مارکوف دوره ای و نادوره ای:

یک زنجیره مارکوف دوره ای است، اگر تحویل ناپذیر باشد و همه حالت ها دارای دوره بزرگتر از یک باشند.

یک زنجیر مارکوف نادوره ای است اگر تحویل ناپذیر باشد و همه حالت ها دارای دوره برابر یک باشند.

اگر درایه های قطری یکیشان ناصفر باشد، نادوره ای است.

زنجیره های مارکوف ارگودیک:

اگر یک زنجیره مارکوف، تحویل ناپذیر نادوره ای و همه حالت ها دارای زمان عود انتظار متناهی باشند، آنگاه زنجیره مارکوف ارگودیک می نامند.

نکته: رده زنجیره های مارکوف ارگودیک دارای توزیع های حدی مثبت هستند.

قضیه حدی اساسی برای زنجیره های مارکوف ارگودیک:

ق: فرض کنید $X_0, X_1, \ldots$ یک زنجیره مارکوف ارگودیک باشد، توزیع مانای یکتای مثبت π وجود دارد بطوریکه توزیع حدی زنجیره نیز هست، یعنی: $\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n \;, \forall i,j.$

برگشت پذیری زمانی:

یک زنجیره تحویل ناپذیر، با ماتریس انتقال P و توزیع مانای π، برگشت پذیر زمانی یا برگشت پذیر است، اگر:

$$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji} \qquad \forall i,j$$

* قدم زدن تصادفی روی یک گراف ساده، با برگشت پذیر زمانی است اگر خودی همسایه باشند

یعنی:

$$\pi_j P_{ji} = \left(\frac{deg(j)}{2e}\right)\left(\frac{1}{deg(j)}\right) = \frac{1}{2e} = \left(\frac{deg(i)}{2e}\right)\left(\frac{1}{deg(i)}\right) = \pi_i P_{ij}$$

و به همین ترتیب برای گراف جهت دار وزن دار نیز برقرار است یعنی: آنها هم برگشت پذیرند.

شماره سئوال	

زنجیرهای جاذب: وضعیت i یک وضعیت جاذب است اگر $P_{ii}=1$:
اگر زنجیره مارکوفی حداقل یک وضعیت جاذب داشته باشد، زنجیره مارکوف جاذب نامیده می شود.

زنجیره مارکوف با گذار $P = \left[\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$ در این صورت

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \left[\begin{array}{c|c} 0 & (I-Q)^{-1}R \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$$

زیرماتریس $(I-Q)^{-1}R$ را زیرماتریس جذبی می نامیم

★ برای یک زنجیره مارکوف با همه حالت های یا جاذب یا گذرا، $F=(I-Q)^{-1}$ قرار می دهیم

① احتمال جذب: احتمال اینکه از وضعیت گذرای i، زنجیره جذب j شود برابر: $(FR)_{ij}$ است

② زمان جذب: تعداد گام های مورد انتظار از وضعیت گذرای i تا اینکه زنجیره جذب یک وضعیت جاذب شود، برابر: $(F1)_i$ است.

فصل چهارم: فرآیند های شاخه ای: در یک فرآیند شاخه ای، همه وضعیت های غیر صفر گذرا هستند.

خواص تابع مولد احتمال: ① فرض کنیم $G(s)=E[s^X]$ تابع مولد احتمال یک متغیر تصادفی X باشد آنگاه:

الف) $G(1)=1$

ب) $k\geq 0$ و $P(X=k)=G^{(k)}(0)/k!$

ج) $E[X]=G'(1)$

د) $Var(X)=G''(1)+G'(1)-G'(1)^2$

② اگر X و Y متغیرهای تصادفی باشند که $G_X(s)=G_Y(s)$، برای هر s، آنگاه X,Y هم توزیع اند.

③ اگر X,Y مستقل باشند، آنگاه $G_{X+Y}(s)=G_X(s)\cdot G_Y(s)$

قضیه: برای یک فرآیند شاخه ای داده شده، فرض کنیم G تابع مولد احتمال توزیع فرزندان باشد. در آن صورت احتمال انقراض نهایی، کوچکترین ریشه مثبت معادله $s=G(s)$ است.

اگر $\mu \leq 1$ یعنی فرآیند در حالت بحرانی و زیر بحرانی بود احتمال انقراض 1 است.

$$\lim_{n\to\infty} E[Z^n]=\lim_{n\to\infty} \mu^n = \begin{cases} \infty & \mu>1 \text{ زبر بحرانی} \\ 1 & \mu=1 \text{ بحرانی} \\ 0 & \mu<1 \text{ زیر بحرانی} \end{cases} \leftarrow E[Z_n]=\mu^n$$

Scanned with CamScanner