« به نام بهترین »

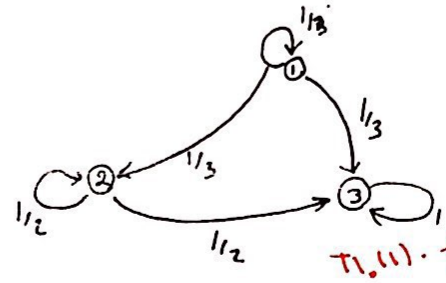
آزمون میانترم فرآیندهای تصادفی (۱) - اردیبهشت ۹۶ 80

① فرض کنید $\{N(t), t \geq 0\}$ فرآیند پواسون با پارامتر $\lambda > 0$ باشد. فرآیند $\{X(t), t \geq 0\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$X(t) = N(t+1) - N(t)$$

تابع میانگین و کواریانس فرآیند $\{X(t), t \geq 0\}$ را بدست آورده و نشان دهید که این فرآیند WSS است. (15)

② مورچه‌ای می‌خواهد یک پله را قدم به قدم از یک دیوار بلند بالا برود. او در هر حرکت با احتمال p یک قدم رو به بالا داشته و با احتمال $1-p$ به پایین سقوط می‌کند و دوباره از اول حرکت را شروع می‌کند. فرض کنید ارتفاع دیوار m باشد (m قدم). X_n را مکان مورچه نسبت به پایین دیوار در قدم nام تعریف می‌کنیم. نشان دهید X_n یک زنجیر مارکف است، فضای حالت، ماتریس احتمال انتقال و گراف آن را رسم کنید. (15)



③ زنجیر مارکف $\{X_n\}_n$ با گراف انتقال زیر را در نظر بگیرید. با فرض اینکه $\pi_0(1) = \pi_0(2) = \frac{1}{2}$ باشد مطلوبست:

$\pi_0(1) \cdot p_{12} \cdot p_{23} = (\frac{1}{2})(\frac{1}{3})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{12}$

(i) $P\{X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3\}$ (20)

(ii) $P\{X_2 = x\}$ $x = 1, 2, 3$ $= 0$

(iii) $P\{T_3 = 2\}$ $= P\{X_2 = 3, X_1 \neq 3 \mid X_0 = 3\}$ دقت که $T_3 = \min\{n \geq 0 \mid X_n = 3\}$ زمان اولین ملاقات از وضعیت 3 است.

④ دسته‌های هم‌ارزی را برای زنجیر مارکف $\{X_n\}_n$ با ماتریس احتمال انتقال زیر مشخص کنید.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}$ (10)

$x = (x_1, x_2 \ —)$ $x_1 = 1$

⑤ زنجیر $\{X_n, n \geq 0\}$ با احتمال‌های انتقال وضعیت زیر مفروض است.

$$p_{xy} = \begin{cases} p & y = x+1 \\ q & y = 0 \end{cases} \qquad p + q = 1 \qquad 0 < p < 1$$

با فرض وجود توزیع مانا، توزیع مانا را برای این زنجیر بدست آورید. (20)

مطلوبست $\lim_{n \to \infty} P^n$.

شاد و سربلند باشید.

به نام مهربانترین

برگه امتحانی میانترم

نیسمال دوم سال تحصیلی ۱۳۹۸-۱۳۹۷

مدت امتحان: دو ساعت

تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۰۲/۰۸

امتحان درس: فرآیندهای تصادفی ۱

نام مدرس: موسوی

نام و نام خانوادگی: ... شماره دانشجویی: ... شماره صندلی: ...

۱. مسئله قمارباز را در نظر بگیرید که فرد در هر دور بازی با احتمال p برنده و با احتمال q بازنده می‌شود. این فرد در هر دور یک سوم سرمایه خود را شرط‌بندی می‌کند (چنانچه یک سوم سرمایه غیر صحیح باشد آن را رو به بالا گرد می‌کند). بازی در زمانی تمام می‌شود که سرمایه فرد به ۱ دلار یا N دلار برسد. در حالت خاصی که یک سوم سرمایه در صورت برد بیشتر از N بشود فرد مقدار لازم برای رسیدن به N را آن دور شرط‌بندی می‌کند. چنانچه فرد با سرمایه a دلار $(1 < a < N)$ شروع کرده باشد و X_n نشان دهنده سرمایه فرد در گام nام باشد استدلال کنید چرا $\{X_n\}_{n\geq 0}$ یک زنجیر مارکف همگن است. احتمال انتقال یک مرحله‌ای را با یک رابطه کلی نمایش دهید. برای $N = 12, p = 1/3, a = 5$ ماتریس احتمال انتقال یک مرحله‌ای را بنویسید. 20

۲. یک زنجیر مارکف $\{X_n\}_{n\geq 0}$ با فضای حالت $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ و ماتریس احتمال انتقال زیر می‌باشد

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \end{array}$$

20

- گراف این زنجیر را رسم کنید.
- دسته‌های هم‌ارزی را برای این زنجیر به‌دست آورید.

۳. یک زنجیر مارکف $\{X_n\}_{n\geq 0}$ با فضای حالت $E = \{1, 2, 3, 4\}$ و ماتریس احتمال انتقال زیر می باشد.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

35

- توضیح دهید چرا برای این فرآیند توزیع مانای یکتا و توزیع حدی وجود دارد. ۳
- توزیع مانا را برای این فرآیند بدست آورید و پیدا کنید $i, j \in E$, $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$. ۴
- با فرض اینکه توزیع آغازین یک توزیع یکنواخت باشد، توزیع فرآیند در گام دوم را بدست آورید. ۵
- محاسبه کنید

$$P(X_3 = 3, X_2 = 4)$$

با آرزوی به‌روزی.

Scanned with CamScanner

$$P = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{array}$$

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{n} = \lambda_j = \pi_j$$

$x = (1, x_2, x_3, x_4)$

$x = \cancel{P}\, xP \quad , \quad x_j = \sum_{i\in S} x_i P_{ij}$

$x_1 = 1 \quad , \quad x_1 = \sum_i x_i P_{i1} = \cancel{P}\, x_3 P_{31} + x_4 P_{41} = x_3 + 1/3\, x_4$

$x_3 = \sum_i x_i P_{i3} = x_2 \left(\frac{1}{3}\right) + x_4 (1/3)$

$x_4 = \sum_i x_i P_{i4} = x_2\, P(1/3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_3 + x_4 = 3 \Rightarrow x_3 = \frac{3 - x_4}{3} \\ x_2 + x_4 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = 3x_4 \end{cases}$$

$3x_4 + x_4 - (3 - x_4) = 0$

$4x_4 - 3 + x_4 = 0 \Rightarrow 5x_4 = 3 , \boxed{x_4 = 3/5}$

$x_3 = \dfrac{3 - (3/5)}{3} = \dfrac{15-3}{15} = \dfrac{12}{15} \Rightarrow \boxed{4/5 = x_3}$

$x_2 = 3(3/5) = 9/5 \Rightarrow \boxed{x_2 = 9/5}$

$x = (1, 9/5, \frac{4}{5}, 3/5) \qquad \sum_i x_i = 1 + 9/5 + 4/5 + 3/5$

$= \dfrac{5+9+4+3}{5}$

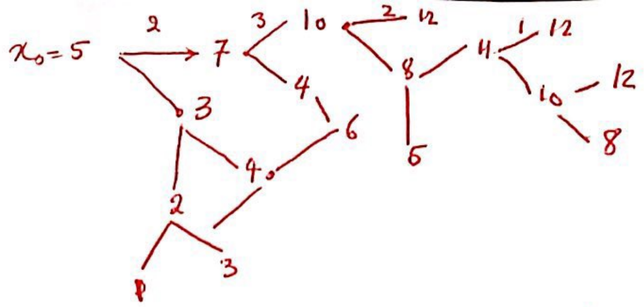
$\pi = \left(\frac{5}{21}, \frac{9}{21}, \frac{4}{21}, \frac{3}{21}\right) \qquad = \dfrac{21}{5}$

$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{n} = \pi_j$

Scanned with CamScanner

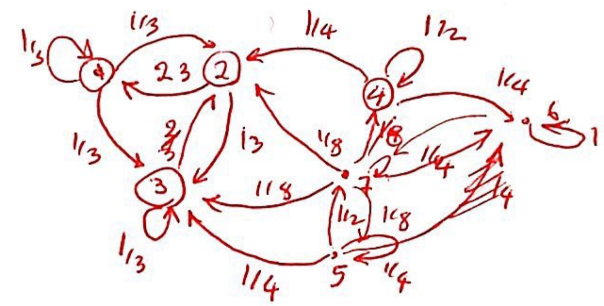
① $\{Y_n\}_{n\geq 0}$

$a=5$, $p=1/3$, $N=12$



$S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,10,11,12\}$

$$P=\begin{array}{c|ccccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 10 & 11 & 12\\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
2 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
3 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & - & - & - & -\\
4 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & - & 0\\
5 & & & & & & & & & & & \\
6 & & & & & & & & & & & \\
7 & & & & & & & & & & & \\
8 & & & & & & & & & & & \\
10 & & & & & & & & & & & \\
11 & & & & & & & & & & & \\
12 & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

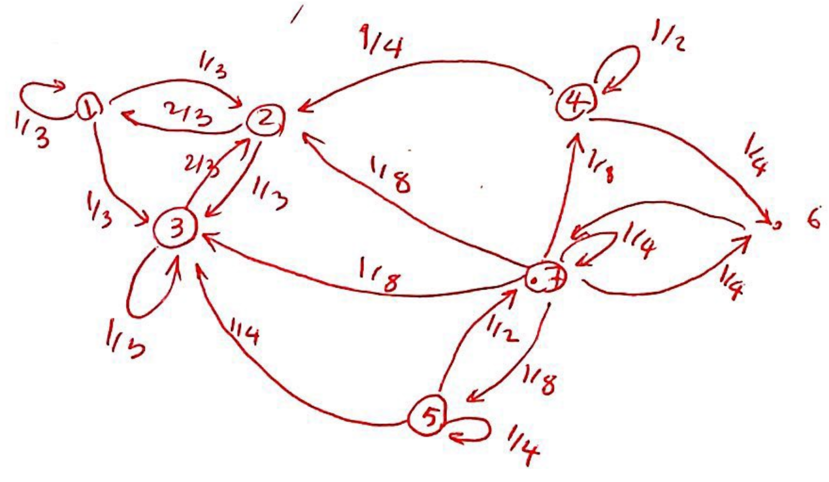


$\{1,2,3\}$

$\{5,7\}$

$\{6\}$

$\{4\}$



$$\pi_0 = (1/4 \quad 1/4 \quad 1/4 \quad 1/4)$$

$$\pi_1 = \pi_0 P = (1/4 \quad 1/4 \quad 1/4 \quad 1/4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(1/4 + \tfrac{1}{12} \quad 1/4 + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{12} \quad 1/12 + 1/12 \quad 1/12 \right)$$

$$= \left(\tfrac{4}{12} \quad \tfrac{5}{12} \quad \tfrac{2}{12} \quad \tfrac{1}{12} \right)$$

$$\pi_2 = \pi_1 P = \left(\tfrac{4}{12} \quad \tfrac{5}{12} \quad \tfrac{2}{12} \quad \tfrac{1}{12} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\tfrac{1}{36} + \tfrac{2}{12} \quad \tfrac{4}{12} + \tfrac{5}{36} + \tfrac{1}{36} \quad \tfrac{5}{36} + \tfrac{1}{36} \quad \tfrac{5}{36} \right)$$

$$= \left(\tfrac{\cancel{16}\ 7}{36} \quad \tfrac{18}{36} \quad \tfrac{6}{36} \quad \tfrac{5}{36} \right) = \left(\tfrac{7}{36} \quad \tfrac{18}{36} \quad \tfrac{6}{36} \quad \tfrac{5}{36} \right)$$

$$P(X_3 = 3, X_2 = 4) = \sum_{x \in E} P(X_3 = 3, X_2 = 4 \mid X_1 = x)\, P(X_1 = x)$$

$$= \left(\tfrac{1}{3}\right)(0)\left(\tfrac{4}{12}\right) + \left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{5}{12}\right) + \left(\tfrac{1}{3}\right)(0)\left(\tfrac{2}{12}\right)$$

$$+ \left(\tfrac{1}{3}\right)(0)\left(\tfrac{1}{12}\right) = \frac{5}{108}$$

	75
سارا مغربی	60
آذرم صالحی	60
مبینا صدیق الاسلام	46
فرشته حاجی آبادی	40
مریم علوی	66
مریم کمری	56
زهرا صدرنگی	66
سید رضا فضلی	65
هانیه رجبی	44
محمد حسین آذر	73
دردانه حیدری	69
کیمیا جلالی	54
فاطمه خزاعل	43
فاطمه حیدری	62
مهسا نظری	45
جیران انصاری	47
فاطمه بابدیسانی	32
نازنین عرب	66
یوسف مرادی	65

1.2) $P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}$, $\alpha = (0.2, 0.3, 0.5)$

(a) $P\{X_7 = 3 \mid X_6 = 2\}$

(b) $P\{X_9 = 2 \mid X_1 = 2, X_5 = 1, X_7 = 3)$

(c) $P\{X_0 = 3 \mid X_1 = 1\}$

(d) $E(X_2)$.

sol. (a) $P\{X_7 = 3 \mid X_6 = 2\} \overset{\text{Time-homogeneous}}{=} P\{X_1 = 3 \mid X_0 = 2\} = P_{23} = 0.6$

(b) $P\{X_9 = 2 \mid X_1 = 2, X_5 = 1, X_7 = 3\} \overset{\text{Markov property}}{=} P\{X_9 = 2 \mid X_7 = 3\}$

$= P^2_{32} = 0.27$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$P^2_{32} = (0.3)(0.3) + (0.2)(0.4) + (0.5)(0.2)$$
$$= 0.09 + 0.08 + 0.1 = 0.27$$

(c) $P\{X_0 = 3 \mid X_1 = 1\} = \dfrac{P\{X_0 = 3, X_1 = 1\}}{P\{X_1 = 1\}} = \dfrac{P\{X_1 = 1 \mid X_0 = 3\} P\{X_0 = 3\}}{(\alpha P)_1}$

$= \dfrac{(0.3)(0.5)}{(0.2)(0.1) + (0.3)(0) + (0.5)(0.3)} = \dfrac{0.15}{0.02 + 0.15} = \dfrac{0.15}{0.17} =$

$= 0.882$

(d) $E(X_2) = \sum_{i=1}^{3} i\, P(X_2 = i\}$

$P\{X_2 = i\} = \alpha P^2 = (0.2 \quad 0.3 \quad 0.5)\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}^2$
$= (0.182, 0.273, 0.545)$

$= (1)(0.182) + (2)(0.273) + (3)(0.545) = 2.363$

2.2) $P = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}$ $\alpha = (1/2, 0, 1/2)$

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1/2 \\ 4/9 & 5/18 & 5/18 \end{pmatrix}$$

a) $P\{X_2 = 1 \mid X_1 = 3\}$

b) $P\{X_1 = 3, X_2 = 1\}$

c) $P\{X_1 = 3 \mid X_2 = 1\}$

d) $P\{X_9 = 1 \mid X_1 = 3, X_4 = 1, X_7 = 2\}$

Sol. (a) $P\{X_2 = 1 \mid X_1 = 3\} = P_{31} = 1/3$

(b) $P\{X_1 = 3, X_2 = 1\} = P\{X_2 = 1 \mid X_1 = 3\} P\{X_1 = 3\}$

$= P_{31} \cdot (\alpha P)_3 = (1/3) \cdot [(\frac{1}{2})(1/3) + (0)(0) + (\frac{1}{2})(1/3)]$

$= (\frac{1}{3}) [\frac{1}{4} + \frac{1}{6}] = (\frac{1}{3})(\frac{5}{12}) = 5/36.$

(c) $P\{X_1 = 3 \mid X_2 = 1\} = \dfrac{P\{X_2 = 1, X_1 = 3\}}{P\{X_2 = 1\}} = \dfrac{5/36}{(\alpha P^2)_1}$

$$= \frac{5/36}{\left((1/2, 0, 1/2)\begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 4/9 & 5/18 & 5/18 \end{pmatrix}\right)_1} = \frac{5/36}{(1/2)(\frac{2}{3}) + (0)(0) + (1/2)(4/9)} = \frac{5/36}{5/9} = 1/4$$

(d) $P\{X_9 = 1 \mid X_1 = 3, X_4 = 1, X_7 = 2\} = P\{X_9 = 1 \mid X_7 = 2\} = P\{X_2 = 1 \mid X_0 = 2\}$

$= P^2_{21} = 0$

2-3 Sol. Wright–Fisher model with a population of $K = 3$ genes, (Example 2.6)

$$P_{ij} = \binom{K}{j} \left(\frac{i}{K}\right)^j (1 - i/K)^{K-j} \qquad 0 \le i, j \le K \qquad P_{00} = P_{KK} = 1$$

$$P = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8/27 & 4/9 & 2/9 & 1/27 \\ 2 & 1/27 & 2/9 & 4/9 & 8/27 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}, \quad P^3 = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.517 & 0.154 & 0.143 & 0.187 \\ 2 & 0.187 & 0.143 & 0.154 & 0.517 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$\alpha = (0, 1, 0, 0)$

probability that there are no A allels in three generation is

$P^3_{10} = 0.517$

2.7 $\{X_n, n \in I\}$ M.C. P let $Y_n = X_{3n}$, $n = 0,1,2,\ldots$

$\Rightarrow \{Y_n\}_{n \geq 0}$ is a M.C. and find P.

Sol: $P\{Y_{n+1} = j \mid Y_n = i, Y_{n-1} = y_{n-1}, Y_{n-2} = y_{n-2}, \ldots, Y_1 = y_1, Y_0 = y_0\}$

$= P\{X_{3n+3} = j \mid X_{3n} = i, Y_{3n-3} = y_{n-1}, \ldots, X_3 = y_1, X_0 = y_0\}$

$\overset{\{X_n\}_{n\geq 0} \text{ is Markov chain}}{=} P\{X_{3n+3} = j \mid X_{3n} = i\} \overset{\text{time-homogenous}}{=} P\{X_3 = j \mid X_0 = i\}$

$= P\{Y_1 = j \mid Y_0 = i\}$, so $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ is a time-homogenous M.C.

and $Q_{ij} = P\{Y_{n+1} = j \mid Y_n = i\} = P\{X_3 = j \mid X_0 = i\} = P^3_{ij}$

$\Rightarrow Q = P^3$.

(2.10) $\rightarrow$ chapter 3, section 3.7

2.11 5 dices, Roll all the dices and put aside dice which come up 6.

X_n: The number of dices which are sixes after n rolls.

$\{X_n\}_{n \geq 0}$

Sol: $\{X_n, n \in I\}$ $I = \{0,1,2,\ldots\}$, $S = \{0,1,2,\ldots,5\}$

$\{X_n, n \in I\}$ is a M.C.

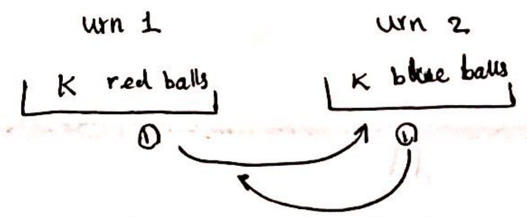
(a) $P_{ij} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = \binom{5-i}{j-i} \left(\frac{1}{6}\right)^{j-i} \left(\frac{5}{6}\right)^{\overbrace{(5-i)-(j-i)}^{5-j}}$ $\quad 0 \leq i,j \leq 5$

(b) $P\{X_3 = 5 \mid X_0 = 0\} = P^3_{05} = 0.01327$

(c) $$P^{100} \simeq \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

2.12

X_0 :



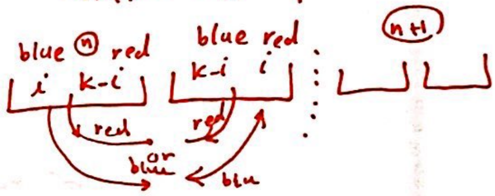
X_n : The number of blue balls in the left urn.

necessarily $X_0 = 0$, $X_1 = 1$

Explain $\{X_n\}_{n\geq 0}$ is a M.C. and Find the transition matrix

Sol. As the number of blue balls in the left urn at time $n+1$ depends only on the number of blue balls in the left urn at time n, $\{X_n\}_{n\geq 0}$ is a Markov chain, i.e.

$$P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i, X_{n-1}=x_{n-1}, \ldots, X_0=x_0\} = P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\}$$



$$P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\} = \begin{cases} 2\,i(k-i)/k^2 & j=i \\ (k-i)^2/k^2 & j=i+1 \\ i^2/k^2 & j=i-1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$P_{01} = 1$, $P_{K,K-1} = 1$

2.16 P is a stochastic matrix with equal rows. $\Rightarrow P^n = P$ for all $n \geq 1$

Sol. As P is a stochastic matrix and rows are equal, we have $P_{ij} = p_j$. By mathematical induction, we have $n=1$, $P_{ij} = p_j$, suppose $P_{ij}^{n-1} = p_j$, we need to show that $P_{ij}^{n} = p_j$.

$$P_{ij}^{n} = \sum_{K\in S} P_{iK}^{n-1} P_{Kj} = \sum_{K\in S} p_K P_{Kj} = p_j \underbrace{\sum_{K\in S} p_K}_{1} = p_j.$$

2.18) doubly stochastic matrix $P = \left(\begin{array}{c} \\ \end{array} \right)$

$\{X_n\}_{n \geq 1}$ be a M.C. on $\{1, \dots, k\}$ with doubly stoch. matrix

and initial distribution is uniform

$\Rightarrow$ distribution of X_n is uniform as well

Sol.

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) = (1/k, 1/k, \dots, 1/k)$ doubly stoch.

distribution of X_1 is (αP) with

$$(\alpha P)_j = \sum_i \alpha_i P_{ij} = \sum_i \frac{1}{k} P_{ij} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} P_{ij} = \frac{1}{k}(1) = \frac{1}{k}$$

suppose distribution of X_n is uniform, we need to show that distribution of X_{n+1} is uniform on $\{1, \dots, k\}$.

$$(\alpha P^n)_j = (\underbrace{\alpha P^{n-1}}_{\alpha} P)_j = (\alpha P)_j = \frac{1}{k}$$

2.26 $S = \{80, 135, 139, 445, NO\}$

$$P = \begin{array}{c|ccccc} & 80 & 135 & 139 & 445 & NO \\ \hline 80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 135 & 0 & 8/13 & 3/13 & 1/13 & 1/13 \\ 139 & 1/16 & 3/16 & 3/8 & 1/4 & 1/8 \\ 445 & 0 & 1/11 & 4/11 & 5/11 & 1/11 \\ NO & 0 & 1/8 & 1/2 & 1/8 & 1/4 \end{array}$$

a) distribution of X_2. $\alpha = (0, 0, 0, 0, 1)$

```
> mat <- matrix(c(0,0,0,0,1,0,8/13,3/13,1/13,1/13,...,0,1/8,1/2,1/8,1/4),
+               nrow=5, byrow=T)
>init <- c(0,0,0,0,1)
> init %*% (mat %*% mat)
```

80	135	139	445	NO
0.03125	0.2133	0.3868	0.2226	0.1460
min		max		

(5)

```
> round(matrixpower(mat, 15), 4)
```

0.0215	0.2669	0.3435	0.2273	0.1408
0.0215	0.2670	0.3435	0.2273	0.1408
0.0215	0.2669	0.3435	0.2273	0.1408
0.0215	0.2669	0.3435	0.2273	0.1408
0.0215	0.2669	0.3435	0.2273	0.1408

```
> round(matrixpower(mat, 16), 4)
```

0.0215	0.2669	0.3435	0.2273	0.1408
0.0215	0.2669	0.3435	0.2273	0.1408
"	"	"	"	"
"	"	"	"	"
"	"	"	"	"

So, the long-term distribution of attacked ports is

80	135	139	445	NO
0.0215	0.2669	0.3435	0.2273	0.1408

2.27

```
> trials <- 10000
> simlist <- replicate(trials, gamble(2, 5, 0.5))
```

(a)
```
> mean(simlist)
0.6055
```

(b)
```
> mat <- matrix(c(1, 0, 0, 0, 0, 0,
                  1/2, 0, 1/2, 0, 0, 0,
                  0, 1/2, 0, 1/2, 0, 0,
                  0, 0, 1/2, 0, 1/2, 0,
                  0, 0, 0, 1/2, 0, 1/2,
                  0, 0, 0, 0, 0, 1), nrow = 6, byrow = T)
> rownames(mat) <- 0:5
> colnames(mat) <- 0:5
```

```
> round(matrixpower(mat,100),5)
```

	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	0.8	0	0	0	0	0.2
2	$\boxed{0.6}$	0	0	0	0	0.4
3	0.4	0	0	0	0	0.6
4	0.2	0	0	0	0	0.8
5	0	0	0	0	0	1

```
> # desired probability is (5-2)/5 = 0.6
```

1.3)
$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

<u>stationary distribution.</u>

suppos $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $x_1 = 1$, $x = xP$,

$$x_j = \sum_{i=1}^{4} x_i P_{ij} \quad \text{for } j = 1,2,3,4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 P_{11} + x_2 P_{21} + x_3 P_{31} + x_4 P_{41} \\ x_2 = x_1 P_{12} + x_2 P_{22} + x_3 P_{32} + x_4 P_{42} \xrightarrow{*} P_{i2} \neq 0 \ \forall i = 1,2,3,4 \\ x_3 = x_1 P_{13} + x_2 P_{23} + x_3 P_{33} + x_4 P_{43} \\ x_4 = x_1 P_{14} + x_2 P_{24} + x_3 P_{43} + x_4 P_{44} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = (1)(\tfrac{1}{2}) + x_2(0) + x_3(1/4) + x_4(0) \\ x_3 = (1)(0) + x_2(1/2) + x_3(1/2) + x_4(1/2) \\ x_4 = (1)(1/4) + x_2(0) + x_3(0) + x_4(1/4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} x_3 & (1) \\ x_3 = \tfrac{1}{2} x_2 + \tfrac{1}{2} x_3 + \tfrac{1}{2} x_4 & (2) \\ x_4 = 1/4 + \tfrac{1}{4} x_4 & (3) \end{cases}$$

$(3) \Rightarrow x_4 - 1/4\, x_4 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} x_4 = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{x_4 = 1/3}$

$(1) \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} x_3 \Rightarrow \frac{1}{4} x_3 = 1/2 \Rightarrow \boxed{x_3 = \frac{4}{2} = 2}$

$(2) \Rightarrow \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3 + \frac{1}{2} x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = 5/3$

$\Rightarrow \underline{x} = (1, 5/3, 2, 1/3)$

$$\Rightarrow \pi = x \Big/ \sum_{i=1}^{4} x_i = \frac{1}{1 + \frac{5}{3} + 2 + \frac{1}{3}} (1, 5/3, 2, \tfrac{1}{3}) = (\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{15})$$

$$\boxed{\pi = (\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{15})}$$

1

2.3)

اگر $\{X_n, n\in I\}$ یک زنجیر مارکف با فضای حالت K عضوی باشد می‌خواهیم نشان دهیم $\pi=(\frac{1}{K},\frac{1}{K},\dots,\frac{1}{K})$ یک توزیع مانا برای $\{X_n, n\in I\}$ است، ماتریس احتمال انتقال تصادفی دوگانه است. یعنی

$$1)\ \sum_j P_{ij}=1\ ,\qquad \sum_i P_{ij}=1$$

برای این منظور رابطه $\pi=\pi P$ را بررسی کنیم. داریم

$$\pi_j=\sum_i \pi_i\cdot P_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{K}\frac{1}{K}P_{ij}=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}P_{ij}=(\tfrac{1}{K})(1)=1/K \Rightarrow \boxed{\pi_j=1/K}$$

3.4)

$$P=\begin{pmatrix}0.4 & 0.6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$P^6=\begin{pmatrix}0.292 & 0.294 & 0.374 & 0.0384\\ 0.064 & 0.096 & 0.24 & 0.6\\ 0.628 & 0.038 & 0.096 & 0.24\\ 0.49 & 0.375 & 0.038 & 0.496\end{pmatrix}>0$$

$$Q=\begin{pmatrix}0 & 1\\ p & 1-p\end{pmatrix}\qquad Q^2=\begin{pmatrix}p & 1-p\\ (1-p)p & p+(1-p)^2\end{pmatrix}\qquad 0<p<1$$

$$\Rightarrow Q^2>0 \qquad n=2,\quad Q^n>0$$

$$R=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0.25 & 0.5 & 0.25\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$R^3=\begin{pmatrix}0.375 & 0.5 & 0.125\\ 0.25 & 0.625 & 0.125\\ 0.25 & 0.5 & 0.25\end{pmatrix}>0 \qquad n=3$$

4.3 $P = \begin{pmatrix} 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-b & b \\ c & 0 & 1-c \end{pmatrix}$ $0<a,b,c<1$

$x = (1, x_2, x_3)$ $x = xP$

$x_j = \sum_i x_i P_{ij}$

$j=1$ $x_1 = \sum_i x_i P_{i1} = (1-a)(1) + (c)(x_3) \Rightarrow 1 = 1-a+cx_3$
$\Rightarrow \boxed{x_3 = \frac{a}{c}}$

$j=2$ $x_2 = \sum_i x_i P_{i2} = (a)(1) + (1-b)x_2$

$\Rightarrow x_2 = a + (1-b)x_2 \Rightarrow -bx_2 = -a \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{a}{b}}$

$\Rightarrow \underline{x} = (1, \frac{a}{b}, \frac{a}{c})$, , $\sum_{i=1}^{3} x_i = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$

$$\boxed{\pi = x / \sum x_i = \frac{1}{ab+ac+bc}(bc+ac+ab)}$$

5.3 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 & 3/4 \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

الف) توزیع توزیع‌ها را

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$,

$x_j = \sum_i x_i P_{ij}$
$j=1 \Rightarrow x_1 = (x_2)(3/4) + x_5(1/4) \Rightarrow x_1 - \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_5 = 0$
$j=2 \Rightarrow x_2 = (1)(1/4) + (3/4)x_5 \Rightarrow x_2 - \frac{3}{4}x_5 = \frac{1}{4}$
$j=5 \Rightarrow x_5 = (1)(3/4) + (x_2)(1/4) \Rightarrow x_5 - \frac{1}{4}x_2 = 3/4$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_5 = x$

$y = x_3$, $x_4 = z$

$$\boxed{x = (x, x, y, z, x)}$$

$$\boxed{\pi = \frac{1}{3x+y+z}(x, x, y, z, x)}$$

$$P^{40} = \begin{pmatrix} 0.333333 & 0.333333 & 0 & 0 & 0.333333 \\ 0.333333 & 0.333333 & 0 & 0 & 0.333333 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.333333 & 0.333333 & 0 & 0 & 0.333333 \end{pmatrix}$$

$$P^{41} = (\quad '' \quad)$$

$$\lim_{n\to\infty} P^n = (\quad '' \quad)$$

$i = 1, 2, 5 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = 1/3 \qquad j = 1, 2, 5$

$i = 3 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = 1 \qquad j = 3$

$i = 4 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = 1 \qquad j = 4$

ج) به شروع فرآیند بستگی دارد. یعنی

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n \overset{?}{\neq} \lambda_j$$

6.3

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & \cdots \\ 3/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & \cdots \\ 4/5 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & \cdots \\ 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad P_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{i+1} & j = 1 \\ 1/i+1 & j = i+1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

الف)

$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \quad \boxed{x_1 = 1} \quad , x_j = \sum_i x_i P_{ij}$

$j=2 \quad x_2 = (\frac{1}{2}) x_1 + 0 + 0 \cdots \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{1}{2} x_1 = \frac{1}{2}}$

$j=3 \quad x_3 = (\frac{1}{3}) x_2 = \frac{1}{3} (\frac{1}{2}) = \frac{1}{3!}$

$j=4 \quad x_4 = (\frac{1}{4}) (x_3) = \frac{1}{4} (\frac{1}{3!}) = \frac{1}{4!}$

$\vdots$

$$\Rightarrow \boxed{x_j = \frac{1}{j!}}$$

$$\Rightarrow x = \left(1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \cdots\right)$$

$$\pi = x \Big/ \sum_{i=1}^{\infty} x_i = \frac{1}{\sum_{i=1}^{\infty} x_i}\left(1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \cdots\right)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - 1 = e^1 - 1 = e - 1$$

$$\Rightarrow \pi = \frac{1}{e-1}\left(1, \frac{1}{2!}, \cdots\right) = \left(\frac{1}{e-1}, \frac{1}{2!(e-1)}, \frac{1}{3!(e-1)}, \cdots\right)$$

(ج

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i+1} & j = 1 \\ i/(i+1) & j = i+1 \\ 0 & o.w. \end{cases} \qquad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \cdots \\ 1/4 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$x_j = \sum_i x_i P_{ij}$$

$$x_2 = (x_1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$x_3 = (x_2)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \qquad \Rightarrow x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right)$$

$$x_4 = (x_3)\left(\frac{3}{4}\right) = 1/4 \qquad \sum x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

$$\vdots$$

پس توزیع مانا وجود ندارد.

(7-31)

$$\{X_n, n \in I\} \qquad S = \{1, 2, \cdots, n\}$$

$$P_{ij} = \begin{cases} p & j = i \\ (1-p)\frac{1}{n-1} & j = 1, 2, \cdots, n, \ j \neq i \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$P = \begin{pmatrix} p & \frac{1-p}{n-1} & \frac{1-p}{n-1} & \cdots & \frac{1-p}{n-1} \\ \frac{1-p}{n-1} & p & \frac{1-p}{n-1} & \cdots & \frac{1-p}{n-1} \\ \frac{1-p}{n-1} & \frac{1-p}{n-1} & p & \cdots & \frac{1-p}{n-1} \\ \vdots & & & & \\ \frac{1-p}{n-1} & \frac{1-p}{n-1} & \frac{1-p}{n-1} & \cdots & p \end{pmatrix}$$

ماتریس دوگانه تصادفی پس

$$\pi = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right)$$

8.3

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 \\ 4/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

یک زنجیر مارکوف با ۴ وضعیت، با این احتمال انتقال در نظر بگیرید.

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$$

(الف)

$$\pi = (\pi(1)\ \pi(2)\ \pi(3)\ \pi(4))$$

$$\pi = \pi P$$

$$x = xP \qquad P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 4/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$x = (1, x_2, x_3, x_4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = 1/4 + x_2(1/2) \\ x_2 = 3/4 + \frac{1}{2}(x_2) \end{cases} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} x_3 = (1/5)\, x_3 + 4/5\, x_4 \\ x_4 = 4/5\, x_3 + 1/5\, x_4 \end{cases} \Rightarrow x_3 = x_4$$

$$\Rightarrow x = (1, 2/3, b, b) \quad , \quad \pi = x / \sum_{i=1}^{4} x_i$$

زنجیر دارای توزیع مانای یکتا نیست.

(ب)

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lim_{n\to\infty} P_1^n & 0 \\ 0 & \lim_{n\to\infty} P_2^n \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \pi_1 = \pi_1 P_1 \Rightarrow \quad x = (1, x_2) \quad ①$$

$$y = (1, y_2) \quad ②$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 \\ 4/5 & 1/5 \end{pmatrix} \quad \pi_2 = \pi_2 P_2 \quad \Rightarrow$$

$$① \begin{cases} 1 = 1/4 + x_2(\frac{1}{2}) \\ x_2 = 3/4 + x_2(\frac{1}{2}) \end{cases} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \pi_1 = \left(2/5 \quad \frac{3}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_1^n = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$② \begin{cases} 1 = \frac{1}{5} + y_2(\frac{4}{5}) \\ y_2 = 4/5 + \frac{1}{5} y_2 \end{cases} \Rightarrow y_2 = 1 \Rightarrow \pi_2 = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_2^n = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ 2/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(ج) زنجیر دارای توزیع حدی نیست

(10.3)

اگر $\{X_n\}_{n\geq 1}$ با P، توزیع حدی π، و π توزیع آغازین فرض است.

الف)

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n=j \mid X_{n-1}=i) = \lim_{n\to\infty} P(X_1=j \mid X_0=i)$$

$$= P_{ij} \qquad \text{احتمال انتقال یک مرحله از وضعیت } i \text{ به وضعیت } j$$

ب)

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n=j \mid X_0=i) = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{n} = \pi_j \qquad \text{(تعریف توزیع حدی)}$$

ج)

$$\lim_{n\to\infty} P(X_{n+1}=k, X_n=j \mid X_0=i) = \lim_{n\to\infty} P(X_{n+1}=k \mid X_n=j, X_0=i)\, P(X_n=j \mid X_0=i)$$

$$\overset{\text{ویژگی مارکوف}}{=} \lim_{n\to\infty} P\{X_{n+1}=k \mid X_n=j\}\, P\{X_n=j \mid X_0=i\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\{X_1=k \mid X_0=j\}\, P\{X_n=j \mid X_0=i\}$$

$$= P\{X_1=k \mid X_0=j\} \lim_{n\to\infty} P\{X_n=j \mid X_0=i\}$$

$$= P_{jk} \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{n} = P_{jk}\, \pi_j$$

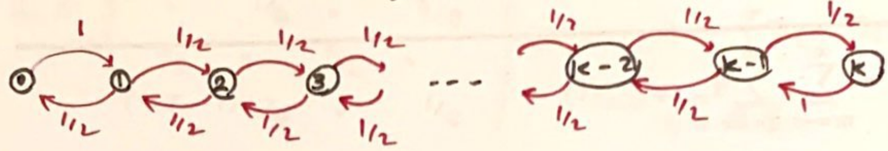
د)

$$\lim_{n\to\infty} P(X_0=j \mid X_n=i) = \lim_{n\to\infty} \frac{P(X_0=j, X_n=i)}{P(X_n=i)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{P(X_n=i \mid X_0=j)\, P(X_0=j)}{P(X_n=i)}$$

$$= \frac{\left(\lim_{n\to\infty} P_{ji}^{n}\right) \pi_j}{\lim_{n\to\infty} P(X_n=i)} = \frac{\pi_i\, \pi_j}{\pi_i} = \pi_j$$

۱۱.۳) مدل قدم زدن تصادفی متقارن روی $\{0,1,2,\dots,k\}$ با مرزهای انعکاسی



$0<i$ و $j<k$ $\quad P_{ij} = \begin{cases} 1/2 & j=i+1 \\ 1/2 & j=i-1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$ $\qquad P_{0j} = \begin{cases} 1 & j=1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$ $\qquad P_{kj} = \begin{cases} 1 & j=k-1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ k-1 \\ k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & k-1 & k \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

الف) توزیع مانا

$\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$ $\qquad \pi = \pi P$

$x = xP, \quad \pi = x \Big/ \sum_{i=0}^{k} x_i$

$x = (1, x_1, x_2, \dots, x_k)$

$x_j = \sum_{i=0}^{k} x_i P_{ij}$ $\qquad \boxed{x_0 = 1}$

$x_0 = x_1\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}x_1 \Rightarrow \boxed{x_1 = 2}$

$x_1 = x_0 + \frac{1}{2}x_2 \Rightarrow \boxed{x_2 = 2}$

$x_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \Rightarrow \boxed{x_3 = 2}$

$\vdots \qquad \vdots$

$\boxed{x_{k-1} = 2}$

$x_k = \frac{1}{2}x_{k-1} \Rightarrow x_k = 1$

$\Rightarrow x = (1, 2, 2, \dots, 2, 1), \quad \sum_{i=0}^{k} x_i = 1 + 2 + \dots + 2 + 1 = 2k$

$\Rightarrow \pi = \left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \dots, 1/k, \frac{1}{2k}\right)$

ب) $k = 1000$،

زنجیر تحویل‌ناپذیر + متناهی، قضیه حدی برای زنجیرهای مارکوف تحویل‌ناپذیر متناهی

$\mu_0 = E[T_0 \mid X_0 = 0], \quad \mu_0 = \frac{1}{\pi_0} = 1\Big/\frac{1}{2(1000)} = 2000$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$$

$$\pi = \pi P$$

$$x = (1, x_2, x_3, x_4) \quad , \; x = xP \;\Rightarrow\; \pi = x \Big/ \sum_{i=1}^{4} x_i$$

$$x_j = \sum x_i P_{ij}$$

$$\boxed{x_1 = 1}$$

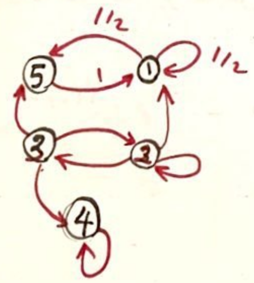
$$x_1 = \frac{1}{2} x_3 \;\Rightarrow\; x_3 = 2x_1 = 2 \;\Rightarrow\; \boxed{x_3 = 2}$$

$$x_2 = (x_2)\left(\tfrac{1}{4}\right) + (3/4)(x_4) \;\Rightarrow\; \frac{3}{4} x_2 = \frac{3}{4} x_4 \;\Rightarrow\; \boxed{x_2 = x_4}$$

$$x = (1, a, 2, a) \;\Rightarrow\; a > 0, \quad \pi = \left(\frac{1}{3+2a}, \frac{a}{3+2a}, \frac{2}{3+2a}, \frac{a}{3+2a}\right)$$

۱۳.۴) رده‌ها هم‌ارزی

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



$1 \leftrightarrow 5$ $\qquad \{1,5\}, \{2,3\}, \{4\}$

$2 \leftrightarrow 3$

4 $\qquad \{2,3\}$ گذرا

$\{5,1\}$ بازگشتی

$\{4\}$ بازگشتی

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{matrix} & P = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1/2 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

۱۴.۳

$$P = \begin{array}{c} \text{Nonepisode} \\ \text{Episode} \end{array} \begin{pmatrix} 0.77 & 0.23 \\ 0.24 & 0.76 \end{pmatrix}$$

زنجیر تحویل‌ناپذیر متناهی، نادوره‌ای، بازگشتی مثبت

$$\pi = (\pi_1, \pi_2) \qquad \pi = \pi P \qquad \Rightarrow \pi = (0.510638, 0.489362)$$

(الف)

$$\lim_{n \to \infty} P_{12}^{n} = \pi_2 = 0.489362$$

(ب)

$$E(\text{Episode}) = (365)(0.489362) = 178.62$$

(ج)

$$\mu_2 = E[T_2 \mid X_0 = 2] = \frac{1}{\pi_2} = \frac{1}{0.489362} = 2.043$$

۱۷.۳

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} (1/2)^2 & (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^3 & (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^2 + 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

با استقرا می‌توان نشان داد

$$P^n = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n & (\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{2})^{n-1} + \cdots + (\frac{1}{2})^2 + 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n & \sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{2})^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n & \frac{1/2 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - 1/2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n & 1 - (\frac{1}{2})^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

البته با استفاده از تجزیه طیفی نیز توان n ام ماتریس P^n را بدست آورد.

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^n = \begin{pmatrix} 2 & +\infty \\ 0 & +\infty \end{pmatrix}$$

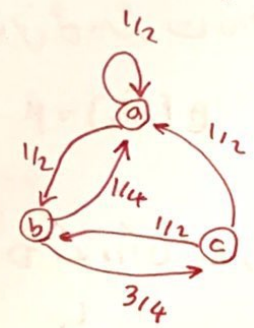
بنابراین وضعیت ۱ گذرا و وضعیت 2 بازگشتی است.

۱۸.۳) تحلیل گام اول برای یافتن زمان بازگشت مورد انتظار به وضعیت b

$$P = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 1/2 & 1/2 & 0 \\ b & 1/4 & 0 & 3/4 \\ c & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}$$

تعریف می‌کنیم

$$f_x = E[T_b \mid X_0 = x] \quad , \quad x = a, b, c$$



$$f_a = E[T_b \mid X_0 = a]$$

$$\Rightarrow \boxed{f_a = \frac{1}{2}(1 + f_a) + \frac{1}{2}(1)}$$

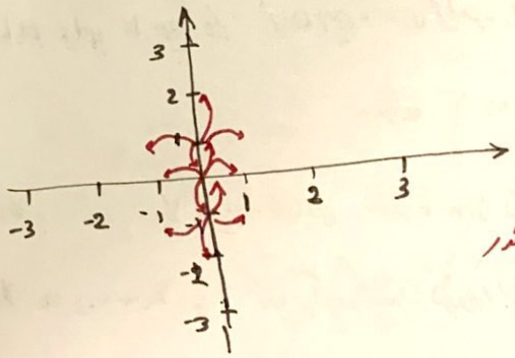
$$\boxed{f_b = \frac{1}{4}(1 + f_a) + \frac{3}{4}(1 + f_c)}$$

$$\boxed{f_c = \frac{1}{2}(1 + f_a) + \frac{1}{2}(1)}$$

با حل کردن این اتحادها به دست می‌آوریم

$$f_a = 2 , \quad f_c = 2 , \quad \boxed{f_b = 3}$$

۲۰.۳ قدم زدن تصادفی دوبعدی متقارن (روی Z^2)



زنجیر کاهش‌ناپذیر است. برای بررسی بازگشتی بودن زنجیر، یک وضعیت مثلاً صفر (0) را بررسی می‌کنیم. برای این منظور $\sum_{n=0}^{\infty} P_{00}^{n}$ را محاسبه می‌کنیم.

واضح است که P_{00}^{n} وقتی n فرد است برابر صفر است. یعنی تعداد گام‌ها در مورد بالا باید زوج باشد. باید تعداد گام‌ها به سمت راست و چپ با هم برابر و تعداد گام‌ها به سمت بالا و پایین نیز با هم برابر باشند.

$$P_{00}^{2n} =$$

از $2n$ گام $\binom{2n}{2k}$ $\left\{ \begin{array}{l} k \text{ گام به سمت راست} \\ k \text{ گام به سمت چپ} \end{array} \right.$

از $2n$ گام $2k$ گام به سمت چپ و راست و $2n-2k$ گام هم به سمت بالا و پایین می‌رود که لازم است تعداد گام‌ها به سمت بالا و پایین برابر باشند یعنی $n-k$ گام به سمت بالا و $n-k$ گام به سمت پایین می‌رود.

$$P_{00}^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k,\, k,\, n-k,\, n-k} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{k} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{k} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-k} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{k!\,k!\,(n-k)!\,(n-k)!} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{2n}$$

ضرب و تقسیم $n!n!$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!\;\; n!\, n!}{k!\,k!\,(n-k)!\,(n-k)!\;\; n!\,n!} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{2n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{2n!}{n!\,n!} \; \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \; \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{2n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{2n} = \binom{2n}{n} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{2n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{2}$$

$$= \left(\tfrac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n}^{2} = \left(\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n} \binom{2n}{n} \right)^{2}$$

در تمرین درس نشان دادیم که با استفاده از تقریب استرلینگ نشان دادیم که

$$\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n} \binom{2n}{n} \simeq \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

بنابراین

$$\left(\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n} \binom{2n}{n} \right)^{2} \simeq \frac{1}{\pi n}$$

ولذا

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{00}^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{2n} \binom{n}{k}^{2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n} \binom{2n}{n} \right)^{2} \simeq \sum_{n=0} \frac{1}{\pi n}$$

ولی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ یک سری واگرا است پس سری فوق واگرا است ولذا ۰ یک حالت بازگشتی است و بنابراین زنجیره بازگشتی است .

Scanned with CamScanner

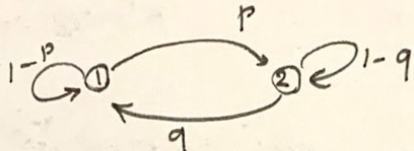
۲۲.۳

$$
P = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1-p & p \\ 2 & q & 1-q \end{array}
$$

T: زمان اولین بازگشت به ۱ وقتی که زنجیر از (۱) شروع شده باشد

(الف)

$$n \geq 1 \,, \quad P\{T \geq n\} = p(1-p)^{n-2}$$



پیشامد $\{T \geq n\}$ به این معنا است که ابتدا فرآیند باید از وضعیت (۱) خارج شود و سپس فرآیند حداقل برای $n-2$ بار در وضعیت 2 باقی بماند و سپس به وضعیت (۱) بیاید که این احتمال برابر است با

$$P\{T \geq n\} = p(1-q)^{n-2}$$

(ب) چون T یک متغیر تصادفی صحیح است می‌دانیم که

$$
\begin{aligned}
E(T) &= \sum_{n=0}^{\infty} n P\{T=n\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{T \geq n\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P\{T \geq n\} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} P\{T \geq n\} \\
&= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} p(1-q)^{n-2} = 1 + \frac{p}{1-(1-q)} = \frac{p+q}{q}
\end{aligned}
$$

اگر $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ توزیع مانا باشد در آن صورت می‌دانیم

$$\pi = \left(\frac{q}{p+p} \,,\ \frac{p}{p+q} \right)$$

لذا

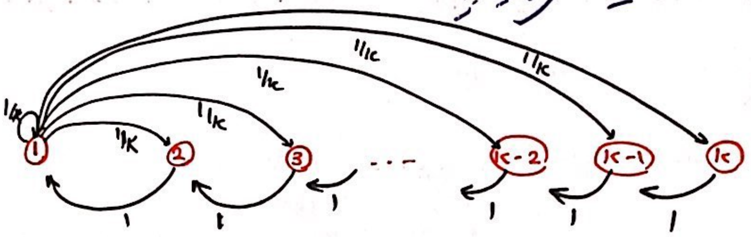
$$E(T) = \frac{p+q}{q} = \frac{1}{\pi_1}$$

Scanned with CamScanner

۲۴.۴ زنجیر مارکوف k حالته با ماتریس انتقال

$$P = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & \cdots & k-2 & k-1 & k \\ \hline 1 & 1/k & 1/k & 1/k & \cdots & 1/k & 1/k & 1/k \\ 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ k-2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ k-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

را در نظر میگیریم. نشان دهید که زنجیر ارگودیک است و توزیع مانای آن را بیابید.



هر حالت ها در دسترس 1 هستند یعنی

$$\forall j \in S \qquad 1 \to j$$

$$\forall j \in S, \ \exists n>0, \ P_{j1}^{(n)} > 0 \qquad j \to 1 \quad \Rightarrow 1 \leftrightarrow j$$

پس همه حالت های $j \in S$ ، در دسترس حالت 1 است. یعنی داریم $i,j \in S$ ، $i \leftrightarrow j$ پس این زنجیر فقط دارای یک رده هم‌ارزی است و فقط تحویل‌ناپذیر است. چون $P_{11} > 0$ پس حالت 1 نادوره‌ای است لذا زنجیر تحویل‌ناپذیر نادوره‌ای است.

چون $P_{11} = 1/k > 0$ پس 1 نادوره‌ای است و لذا زنجیر تحویل‌ناپذیر نادوره‌ای است. و این نیز متناهی است پس زنجیر تحویل‌ناپذیر نادوره‌ای متناهی است. لذا زنجیر ارگودیک است.

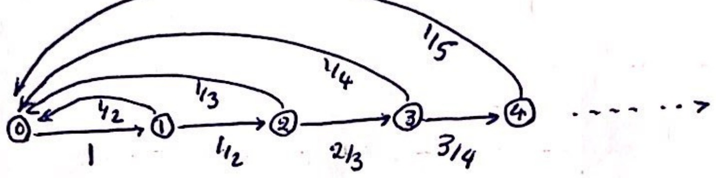
Scanned with CamScanner

۲۷.۴) سینگلیر (۲۰۰۵) زنجیر مارکوف نامتناهی روی اعداد صحیح نامنفی نشان داده شده توسط شکل ۱۶.۳ را در نظر بگیرید

الف) نشان دهید که زنجیر تحویل ناپذیر و نادوره‌ای است.

ب) با محاسبه اولین زمان بازگشت به ۰ وقتی که زنجیر از ۰ شروع شده باشد نشان دهید زنجیر بازگشتی است.

ج) نشان دهید زنجیر بازگشتی پوچ است.



حل:

$$P_{0j} = \begin{cases} 1 & j=1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \qquad P_{ij} = \begin{cases} i/_{i+1} & j=i+1 \\ 1/_{i+1} & j=0 \end{cases}$$

(الف) $\forall\ i, j \in E, \quad i \leftrightarrow j$

اگر $j<i$ آنگاه صددرصد می‌توان از i به $i+1$، $i+2$ و ... رفت و اگر $j>i$ آنگاه صددرصد ابتدا می‌توان از i به ۰ رفت و سپس از وضعیت ۰ به j رفت، پس $j \leftrightarrow i$. بنابراین زنجیر تحویل ناپذیر است.

$$d(0) = g.c.d \{ n>0 ,\ P_{00}^{(n)} > 0 \}$$
$$= g.c.d \{ 2, 3, \dots \} = 1 \implies$$ وضعیت ۰ یک وضعیت نادوره‌ای است.

چون زنجیر تحویل ناپذیر است پس زنجیر تحویل ناپذیر نادوره‌ای خواهد بود.

(ب) باید نشان دهیم $f_{00}=1$. چون $f_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)}$ بنابراین نیاز داریم تا $f_{00}^{(n)}$ را حساب کنیم. $f_{00}^{(n)}$ یعنی احتمال اینکه فرآیند از ۰ شروع شود و برای اولین بار در مرحله nام ۰ را دوباره ملاقات کند. (تفاوت $f_{00}^{(n)}$، $P_{00}^{(n)}$ را درک کنید!)

$$f_{00}^{(1)} = 0, \quad f_{00}^{(2)} = (\tfrac{1}{2})(1) = P\{X_2=0, X_1\neq 0 \mid X_0=0\} = \tfrac{1}{2}$$

$$f_{00}^{(3)} = P\{X_3=0, X_2\neq 0, X_1\neq 0 \mid X_0=0\} = (1)(1/2)(1/3) = (\tfrac{1}{2})(1/3)$$

$$f_{00}^{(4)} = (1)(1/2)(2/3)(1/4) = (\tfrac{1}{3})(1/4)$$

$$f_{00}^{(5)} = (1)(1/2)(2/3)(3/4)(1/5) = (1/4)(1/5)$$

$$f_{00}^{(n)} = (1)(1/2)(2/3)(3/4)\cdots(\tfrac{n-2}{n-1})(1/n) = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n}$$

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow f_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1}\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-1/4\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[1-\frac{1}{n}\right] = 1$$

(ج)

$$m_0 = E_0(T_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P_0\{T_0 = n\}$$

$$P_0\{T_0=n\} = P\{X_n = 0, X_{n-1} \neq 0, \dots, X_1 \neq 0 \mid X_0 = 0\} = f_{00}^{(n)} = \left(\frac{1}{n-1}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

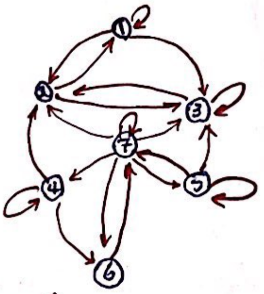
$$\Rightarrow m_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{00}^{(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{n-1}\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} = \infty$$

بنابراین ۰ یک وضعیت بازگشتی پوچ است. و چون زنجیر تحویل‌ناپذیر است پس همه حالت‌ها بازگشتی پوچ است و زنجیر بازگشتی پوچ است.

۲۸.۳ زنجیر مارکوف با ماتریس انتقال

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right) \end{array}$$

با در نظر گرفتن رده‌های هم‌ارزی را مشخص کنید. وضعیت‌ها را به عنوان گذرا و بازگشتی دسته‌بندی کنید. و برای هر i و j، مقادیر $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$ را به دست آورید.



رده‌های هم‌ارزی

$$\begin{array}{c} 1 \leftrightarrow 2 \\ 1 \leftrightarrow 3 \end{array} \Rightarrow 1 \leftrightarrow 3 \qquad \{1,2,3\}$$

$$\{4,5,6,7\}$$

رده‌ی $\{1,2,3\}$ بازگشتی و $\{4,5,6,7\}$ گذرا هستند.

زیرماتریس مربوط به حالت‌های بازگشتی یک ماتریس دوگانه تصادفی است. و بنابراین توزیع مانا برای یک ماتریس دوگانه تصادفی یک توزیع یکنواخت است. بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

۳۸.۴ ۵ تاس را پرتاب می‌کنیم و آنهایی را که ۶ آمده‌اند کنار می‌گذاریم. تاس‌های باقی‌مانده را دوباره پرتاب ... تاس‌هایی که ۶ آمده‌اند را کنار می‌گذاریم. این کار را تا زمانی که همه شش‌ها ظاهر شوند ادامه دهید.

الف) برای زنجیره مارکوف مربوطه ماتریس انتقال را نمایش دهید که در آن X_n تعداد ۶ها بعد از n پرتاب است. ... ۱۰۰۳ را بیابید.

ب) تعداد متوسط مراحل ... تا اینکه همه ۶ها ظاهر شده باشند.

شماره تمرین ۱۱.۰۳ ... نوشت

(الف) $$P_{ij} = \binom{5-i}{j-i}\left(\frac{1}{6}\right)^{j-i}\left(\frac{5}{6}\right)^{5-j} \qquad 0\le i,j\le 5$$

$$P_{ij} = P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\}$$

و بنابراین ماتریس احتمال انتقال را به دست می‌آوریم:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0\\1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}0&1&2&3&4&5\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 0.402 & 0.402 & 0.161 & 0.032 & 0.003 & 0.000\\ 0 & 0.482 & 0.368 & 0.116 & 0.015 & 0.008\\ 0 & 0 & 0.579 & 0.347 & 0.069 & 0.005\\ 0 & 0 & 0 & 0.694 & 0.278 & 0.028\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.833 & 0.167\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\end{array}$$

Q, R, O, I

ب) ماتریس اساسی یعنی $F=(I-Q)^{-1}$ را تشکیل می‌دهیم

$$F=(I-Q)^{-1}=$$

$$\underset{5\times5}{I}-\underset{5\times5}{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0.402&0.402&0.161&0.032&0.003\\0&0.482&0.368&0.116&0.015\\0&0&0.579&0.347&0.069\\0&0&0&0.694&0.278\\0&0&0&0&0.833\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.598&-0.402&-0.161&-0.032&-0.003\\0.00&0.518&-0.368&-0.116&-0.015\\0&0&0.421&-0.347&-0.069\\0&0&0&0.306&-0.278\\0&0&0&0&0.167\end{pmatrix}$$

$$F^{-1}=\begin{pmatrix}1.672&1.298&1.774&2.678&5.338\\0&1.93&1.687&2.645&5.274\\0&0&2.375&2.693&5.465\\0&0&0&3.267&5.440\\0&0&0&0&5.988\end{pmatrix}\rightarrow \underline{12.76049}$$

جمع سطر اول ماتریس اول برابر است با

۱۴.۴۱ نشان دهید زنجیر مارکوف با ماتریس انتقال

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 0 & 2/3 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/6 & 1/2 \\ 4/9 & 0 & 1/3 & 2/9 \end{pmatrix} \end{array}$$

برگشت پذیر است. این زنجیر مارکوف توسط یک قدم زدن تصادفی روی یک گراف وزن دار نشان داده می‌شود. گراف را با شرح دهید که وزن‌های آن اعداد صحیح باشند.

حل: برای برگشت پذیری لازم است بررسی کنیم $\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$ برای هر $i,j \in S$. توزیع مانا برای این ماتریس احتمال انتقال به دست

$\pi = (3/13,\ 5/26,\ 3/13,\ 19/26)$ است. مثلاً برای

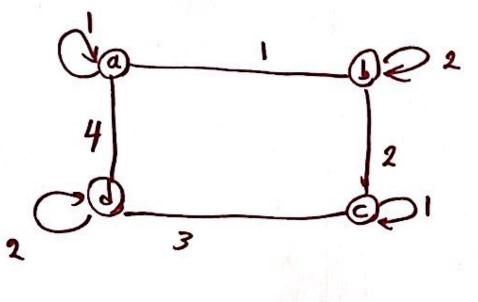
$i=1,\quad j=2$
$$\pi_i P_{ij} = \pi_1 P_{12} = \left(\frac{3}{13}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{26}$$
$$\pi_j P_{ji} = \pi_2 P_{21} = \left(\frac{5}{26}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{26}$$

به همین ترتیب برای بقیه می‌توان بررسی کرد.

$$w(i,j) = \pi_i P_{ij}$$

$$w(1,2) = \pi_1 P_{12} = \left(\frac{3}{13}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{26}$$
$$w(1,1) = \pi_1 P_{11} = \left(\frac{3}{13}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{26}$$
$$w(1,3) = \pi_1 P_{13} = \left(\frac{3}{13}\right)(0) = 0$$
$$w(1,4) = \pi_1 P_{14} = \left(\frac{3}{13}\right)(2/3) = \frac{2}{13} = \frac{4}{26}$$
$$w(2,1) = \pi_2 P_{21} = \left(\frac{5}{26}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{26}$$
$$w(2,2) = \pi_2 P_{22} = \left(\frac{5}{26}\right)(2/5) = \frac{2}{26}$$
$$\vdots$$

حال برای تبدیل وزن‌ها به عدد صحیح، اعداد حاصل را در 26 ضرب می‌کنیم

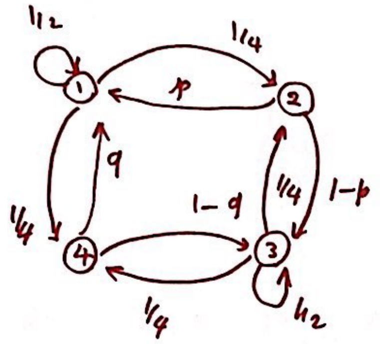


۴۴، ۳) یک زنجیر مارکوف با ماتریس انتقال زیر است

$$P=\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4 \end{array}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4\\ p & 0 & 1-p & 0\\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4\\ q & 0 & 1-q & 0 \end{pmatrix}$$

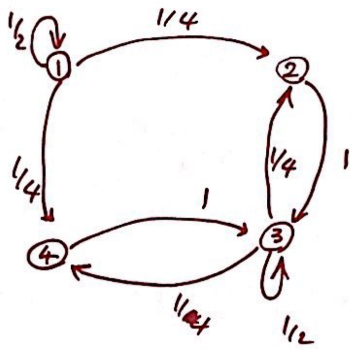
الف) به ازای چه مقادیری از p، q این زنجیر ارگودیک است.

ب) به ازای چه مقادیری از p، q این زنجیر برگشت‌پذیر است.



زنجیر متناهی است و تحویل‌ناپذیر است به ازای $0<p,q\le 1$.

بجز برای $p=q=0$, $p=q=1$ .. به عنوان مثال نقض در $p=q=0$ در این صورت گراف به صورت زیر خواهد بود.



که در این حالت زنجیر تحویل‌ناپذیر نخواهد بود.

پس با فرض $0\le p,q\le 1$ بجز $p=q=0$, $p=q=1$ ، زنجیر تحویل‌ناپذیر متناهی و نادوره‌ای خواهد بود. در نتیجه این زنجیر ارگودیک است.

ب) توزیع مانا $\pi=\pi P$ است.

$$\pi_j=\sum_{i\in S}\pi_i P_{ij}$$

$$\pi_1=\sum \pi_i P_{i1} \Rightarrow \pi=\left(\frac{p+q}{3},\frac{1}{6},\frac{2-p-q}{3},\frac{1}{6}\right)$$

برای برگشت‌پذیری نیاز است که شرط $\pi_i P_{ij}=\pi_j P_{ji}$ برقرار باشد برای هر $i,j\in S$.

$$\pi_1 P_{12}=\pi_2 P_{21} \Rightarrow \left(\frac{p+q}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6}(p) \Rightarrow \frac{p+q}{2}=p \Rightarrow p+q=2p \Rightarrow p=q$$

$$\pi_1 P_{13}=\pi_3 P_{31} \Rightarrow \left(\frac{p+q}{3}\right)(0)=\left(\frac{2-p-q}{3}\right)(0)$$

$\vdots$

پس با این فرض $p=q$ ، $0<p,q<1$ زنجیر برگشت‌پذیر است.

۱.۴ یک فرآیند شاخه‌ای با توزیع نوزادان $a=(a,b,c)$ که در آن $a+b+c=1$ است در نظر بگیرید. ماتریس انتقال مارکوف را P در نظر بگیرید. سه سطر اول ماتریس P را بنویسید. یعنی P_{ij} را برای $i=0,1,2$ و $j=0,1,2$ بدست آورید. حل:

$S=\{0,1,2,\dots\}$

$P_{00}=1\ ,\quad P_{0j}=0 \quad j\geq 1$

$a=(a,b,c)$

$P(X=0)=a,\ P(X=1)=b$

$P(X=2)=c$

$P_{10}=a\ ,\ P_{11}=b,\ P_{12}=c\ ,\ P_{1j}=0 \quad j\geq 3$

$P_{20}=a^2 \xrightarrow{X_1=2}$ $\quad P_{21}=ab+ba=2ab \quad P_{22}=ac+b^2+ca$

$P_{23}=2bc\ ,\ P_{24}=c^2 \quad P_{2j}=0 \quad j\geq 5$

$$P=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a^2 & 2ab & 2ac+b^2 & 2bc & c^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \end{pmatrix}\end{array}$$

۲.۴ تابع مولد احتمال یک متغیر تصادفی پواسن را پیدا کنید. از این تابع مولد برای یافتن میانگین و واریانس توزیع پواسن به کار ببرید.

$$X\sim \text{Poisson}(\lambda) \Rightarrow p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & x=0,1,2,\dots\\ 0 & \text{o.w.}\end{cases}$$

$$G(s)=E(s^X)=\sum_{k=0}^{\infty}s^k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}(s\lambda)^k/k!=e^{-\lambda}e^{s\lambda}=e^{\lambda(s-1)}$$

$G'(s)=\lambda e^{\lambda(s-1)}\ ,\quad G''(s)=\lambda^2e^{\lambda(s-1)},\quad \mu=E(X)=G'(1)=\lambda$

$G''(1)=E(X(X-1))=\lambda^2$

$\Rightarrow E(X^2)-E(X)=\lambda^2$

$\Rightarrow E(X^2)=\lambda^2+\lambda$

$\text{var}(X)=E(X^2)-E^2(X)$

$=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$

۵.۴) kامین گشتاور فاکتوریل از متغیر تصادفی X به صورت زیر است

$$E\left(X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)\right) = E\left(\frac{X!}{(X-k)!}\right) \qquad k\geq 0$$

الف) با فرض داشتن تابع مولد احتمال G از X، نشان دهید چگونه kامین گشتاور فاکتوریل X را می‌توان پیدا کرد.

ب) kامین گشتاور فاکتوریل از یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای n و p را پیدا کنید.

حل: با توجه به تعریف تابع مولد احتمال $G(s)=E(s^X)$، واضح است که kامین گشتاور فاکتوریل از X برابر است با مشتق مرتبه kام تابع مولد احتمال در نقطه $s=1$. یعنی

$$E\left(X(X-1)\cdots(X-k+1)\right) = G^{(k)}(s)\Big|_{s=1}$$

ب)

$$X \sim \text{Binomial}(n,p), \quad P_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x=0,1,\dots,n \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$G(s) = E(s^X) = \sum_{k=0}^{n} s^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \left((1-p)+ps\right)^n$$

$$\Rightarrow E\left[X(X-1)\cdots(X-k+1)\right] = \frac{d^k G(s)}{ds^k}\Big|_{s=1} = n(n-1)\cdots(n-k+1)\left((1-p)+ps\right)^{n-k} p^k\Big|_{s=1}$$

$$= n(n-1)\cdots(n-k+1)\, p^k$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!} p^k.$$

۷.۴) تابع مولد احتمال برای توزیع نوزادان را پیدا کنید که هر فرد با احتمال $1-p$ می‌میرد یا با احتمال p سه فرزند به دنیا می‌آورد. میانگین و واریانس تعداد نوزادان در نسل سوم را پیدا کنید.

حل: توزیع تعداد نوزادان $a=(a_0,a_1,a_2,a_3)=(1-p,0,0,p)$ است، بنابراین تابع مولد احتمال عبارت است از

$$G(s) = E(s^X) = \sum_{k=0}^{3} s^k P(X=k) = 1-p+s^3 p$$

$$\mu = E(X) = G'(s)\Big|_{s=1} = 3s^2 p\Big|_{s=1} = 3p$$

$$E(X(X-1)) = G''(s)\Big|_{s=1} = 6sp\Big|_{s=1} = 6p \Rightarrow Var(X) = E(X^2)-E^2(X)$$

$$= 6p+3p-(3p)^2$$

$$= 9p(1-p)$$

$$E(Z^4) = \mu^4 = (3p)^4$$

$$Var(Z^4) = 9p(1-p)(3p)^3(81p^4-1)/(3p-1)$$

م.۱۲ یک فرآیند شاخه‌ای دارای توزیع نوزادان $a=(1/4, 1/4, 1/2)$ است موارد زیر را پیدا کنید.

الف) μ ب) $G(s)$ ج) احتمال انقراض د) $G_2(s)$ ه) $P(Z_2=0)$

حل: توزیع نوزادان به صورت $a=(1/4, 1/4, 1/2)$ است. بنابراین

الف) $$E(X)=\sum_x x P(X=x) = (0)(1/4)+(1)(1/4)+2(1/2) = 5/4.$$

ب) $$G(s)=E(s^X)=\sum_{k=0}^{2} s^k P(X=k) = \frac{1}{4}+(1/4)s+\frac{1}{2}s^2$$

ج) چون $\mu>1$ است پس احتمال انقراض کوچکتر از ۱ است و می‌توان احتمال انقراض را از حل معادله $s=G(s)$ پیدا کرد.

$$s=G(s)=1/4+\frac{1}{4}s+\frac{1}{2}s^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}s^2-\frac{3}{4}s+1/4=0$$

$$\Rightarrow 2s^2-3s+1=0$$

$$\Rightarrow 2s(s-1)+(1-s)=0$$

$$\Rightarrow (1-s)[2s-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} s=1 \\ s=1/2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{احتمال انقراض} = \frac{1}{2}}$$

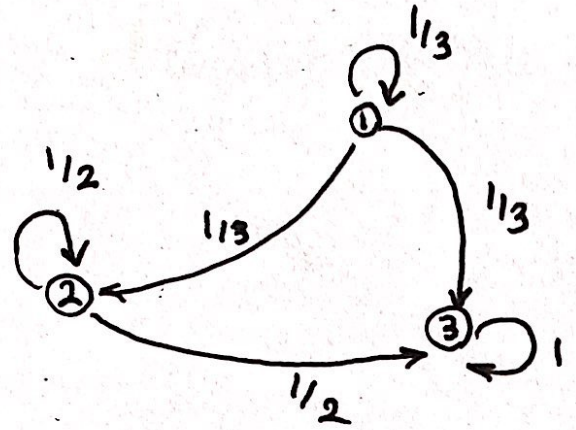
د) $$\Rightarrow G_2(s)=G(G(s))=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left[1/4+\frac{1}{4}s+\frac{1}{2}s^2\right]+\frac{1}{2}\left[1/4+1/4s+\frac{1}{2}s^2\right]^2$$

$$=\frac{1}{32}\left(11+4s+9s^2+4s^3+4s^4\right)$$

ه) با استفاده از $G_2(s)$ در بالا واضح است که $P(Z_2=0)=\frac{11}{32}$.

«به نام خدا»

سوال 1 : زنجیره مارکف $\{X_n\}_{n\in I}$ با گراف روبرو را در نظر بگیرید:



با فرض اینکه توزیع آغازین به صورت $\pi_0=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ باشد مطلوبست محاسبه

(i) $P\{X_0=1, X_1=2, X_2=3\}$

(ii) $P\{X_2=i\}$ $\quad i=1,2,3$

(iii) اگر $T_3=\min\{n\geq 0 \mid X_n=3\}$ (زمان اولین ملاقات از وضعیت 3)

مقدار $P\{T_3=2\}$ را محاسبه کنید.

سوال (۲) رده های هم ارزی را برای زنجیره مارکف $\{X_n\}_{n\in I}$ با ماتریس احتمال انتقال زیر را مشخص کنید.

$$P=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0\\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\end{array}$$

سوال (۳) زنجیره $\{X_n, n\geq 0\}$ با احتمال های انتقال

$$p_{xy}=\begin{cases} p & y=x+1\\ q & y=0\end{cases} \qquad p+q=1 \;,\; 0<p<1$$

آیا توزیع مانا برای این زنجیره وجود دارد (استدلال کنید) توزیع مانا را بدست آورده و محاسبه کنید $\lim_{n\to\infty} P^n$.

(موفق باشید !

«به نام خدا»

«تمرین‌های فصل سوم»

① یک زنجیر مارکوف با فضای حالت $\{0,1,2,3\}$ دارای ماتریس احتمال انتقال

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

است. توزیع مانای π را پیدا کنید. آیا به طور مستقل از توزیع آغازین می‌توان نشان داد $\lim_{n\to\infty} P^n_{ij}=\pi_j$

② فرض کنید X_n یک قدم‌زدن تصادفی ساده روی $\mathcal{X}=\{0,1,2,\dots\}=\mathbb{Z}_+$ با انعکاس روی صفر باشد یعنی

$X_{n+1}=1$ هرگاه $X_n=0$، و $X_{n+1}=X_n+1$ یا $X_{n+1}=X_n-1$ (با احتمال $1/2$) وقتی که $X_n\geq 1$.

فرض کنید قدم‌زدن از صفر شروع می‌کند یعنی $X_0=0$.

(a) نشان دهید توزیع مانا برای زنجیر مارکوف X_n وجود ندارد.

(b) حال یک تعدیل از زنجیر مارکوف بالا با محدود کردن آن به $\{0,1,\dots,r\}$ و معرفی کردن یک انعکاس در نقطه r در نظر می‌گیریم. یعنی فرض می‌کنیم $\mathcal{X}=\{0,1,\dots,r\}$ برای یک r صحیح مثبت و $X_{n+1}=r-1$ هرگاه $X_n=r$، و بقیه احتمال‌های انتقال وقتی $X_n=k$، $k=0,1,\dots,r-1$ مشابه حالت بالا باشد.

آیا زنجیر مارکوف دارای توزیع مانا است؟ اگر جواب مثبت است آن را بیابید. آیا $\lim_{n\to\infty} P^n_{ij}=\pi_j$؟

(اختیاری: ابتدا مسأله را برای rهای کوچک مثلاً $r=3$ یا 4 حل کنید.)

دو تمرین بالا به همراه تمرین‌های ۲، ۴، ۵، ۶ و ۷ از فصل سوم کتاب را حل نمایید. حل مسائل می‌بایست با جزئیات و توضیح کامل باشد. به جواب‌های خلاصه شده و بدون ذکر جزئیات و توضیحات امتیازی تعلق نخواهد گرفت.

محصلین در جلسه حل تمرین مربوطه برای همه ارزیابی‌ها و امتیازات ارزشیابی پرسش و پاسخ دانشجویان اشتراک کرده، میکروفون و وب‌کم را داشته باشند. ارزشیابی کلاس از طریق این جلسات انجام خواهد شد.

«موفق و شاد باشید.»