

وجود دارد. به علاوه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\lambda^*)^n} M^n = v w^T,$$

که در آن بردارهای ویژه، نرمال‌سازی شده‌اند به طوری که $w^T v = 1$.

اثبات قضیه پرون-فروبنیوس را می‌توان در بیشتر کتاب‌های جبرخطی پیشرفته از جمله هورن و جانسون^۱ (۱۹۹۰) یافت. برای یک زنجیر مارکوف ارگودیک، چون ماتریس انتقال P منظم است و P^N برای بعضی مقادیر صحیح N ، یک ماتریس مثبت است، قضیه پرون-فروبنیوس قابل استفاده است. مقدارویژه پرون-فروبنیوس ماتریس P^N برابر $\lambda^* = 1$ و بردارویژه متناظر راست $v = 1$ و بردارویژه متناظر چپ w می‌باشد.

اگر $\lambda^* = 1$ یک مقدارویژه P^N باشد آنگاه $(\lambda^*)^{1/N} = 1$ یک مقدارویژه P به ترتیب با بردارهای ویژه متناظر راست و چپ v و w است. با نرمال‌سازی w به طوری که مجموع مؤلفه‌هایش برابر ۱ شود، توزیع مانای یکتای مثبت π را نتیجه می‌دهد که توزیع حدی زنجیر نیز می‌باشد. ماتریس حدی $v w^T$ یک ماتریس تصادفی است که همه سطرهاى آن برابر w^T است.

تمرین‌ها

۱.۳ زنجیر مارکوف با ماتریس انتقال زیر را در نظر بگیرید

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

توزیع مانا را بیابید. از کامپیوتر استفاده نکنید.

۲.۳ یک ماتریس تصادفی را تصادفی دوگانه می‌نامند، اگر جمع هر سطر و هر ستون آن برابر ۱ باشد. نشان دهید زنجیر مارکوفی که ماتریس انتقال آن تصادفی دوگانه است دارای یک توزیع مانا است که روی فضای حالت یکنواخت است.

^۱Horn & Johnson

۳.۳ کدام یک از ماتریس‌های زیر منظم هستند.

$$P = \begin{pmatrix} 0/4 & 0/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 1-p \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0/25 & 0/5 & 0/25 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

۴.۳ زنجیر مارکوف با ماتریس انتقال زیر را در نظر بگیرید

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-b & b \\ c & 0 & 1-c \end{pmatrix},$$

که در آن $0 < a, b, c < 1$. توزیع مانا را پیدا کنید.

۵.۳ زنجیر مارکوفی دارای ماتریس انتقال P است

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 & 3/4 \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(الف) مجموعه توزیع‌های مانا برای زنجیر را توصیف کنید.

(ب) با استفاده از کامپیوتر $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ را بیابید. رفتار درازمدت زنجیر را شرح دهید.

(پ) شرح دهید چرا زنجیر توزیع حدی ندارد و چرا با این وجود ماتریس حدی به دست

آمده در (ب) در تناقض نیست.

۶.۳ زنجیر مارکوف با ماتریس انتقال

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & \dots \\ 3/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & \dots \\ 4/5 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & \dots \\ 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{matrix},$$

تعریف شده توسط

$$P_{ij} = \begin{cases} i/(i+1), & j = 1, \\ 1/(i+1), & j = i+1, \\ 0, & \text{سایر موارد} \end{cases}$$

را در نظر بگیرید.

(الف) آیا زنجیر دارای توزیع مانا است؟ در صورت داشتن توزیع مانا آن را به دست آورید و در صورت نداشتن توزیع مانا، توضیح دهید چرا توزیع مانا وجود ندارد.

(ب) وضعیت‌های زنجیر را دسته‌بندی کنید.

(پ) قسمت (الف) را در صورتی که درایه‌های سطری ماتریس انتقال P جابه‌جا شده است، تکرار کنید. یعنی،

$$P_{ij} = \begin{cases} 1/(i+1), & j=1, \\ i/(i+1), & j=i+1, \\ 0, & \text{سایر موارد.} \end{cases}$$

۷.۳ یک زنجیر مارکوف دارای n وضعیت است. اگر زنجیر در وضعیت k باشد، یک سکه که احتمال ظاهر شدن شیر برابر p است پرتاب می‌شود. اگر شیر ظاهر شود زنجیر در وضعیت k باقی می‌ماند. اگر خط ظاهر شود زنجیر به یک وضعیت دیگری با احتمال به‌طور یکنواخت تصادفی حرکت می‌کند. ماتریس انتقال را بیان و توزیع مانا را برای این زنجیر بیابید.

۸.۳ فرض کنید

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 \\ 4/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

یک زنجیر مارکوف با چهار وضعیت که ماتریس انتقال آن توسط ماتریس بلوکی زیر داده می‌شود در نظر بگیرید

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}.$$

(الف) آیا زنجیر مارکوف دارای توزیع مانای یکتاست؟ اگر توزیع مانا دارد آن را بیابید.

(ب) آیا $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ وجود دارد؟ در صورت وجود آن را بیابید.

(پ) آیا زنجیر مارکوف دارای توزیع حدی است؟ در صورت وجود توزیع حدی، آن را بیابید.

۹.۳ فرض کنید P یک ماتریس تصادفی باشد.

(الف) اگر P منظم باشد. آیا P^2 منظم است؟

(ب) اگر P ماتریس انتقال یک زنجیر مارکوف تحویل‌ناپذیر باشد. آیا P^2 ماتریس انتقال

یک زنجیر مارکوف تحویل‌ناپذیر است؟