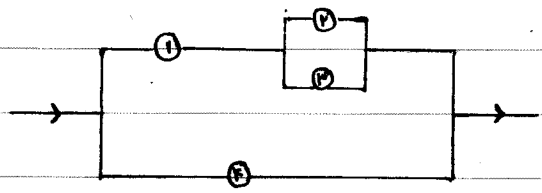
۵.۲ مسایل

۱. سیستمی را با نمودار زیر درنظر بگیرید.



الف: تابع ساختار سیستم، $\varphi(\underline{x})$، را تعیین کنید.

ب: فرض کنید اجزای سیستم به طور مستقل به ترتیب با قابلیت های $p_1=0.9$، $p_2=0.8$، $p_3=0.85$، $p_4=0.9$ عمل کنند. قابلیت اعتبار سیستم $h(\underline{p})$ را محاسبه کنید.

ج: کران های قابلیت اعتبار سیستم را بر مبنای قضیه ۴.۲ و ۵.۲ تعیین کنید.

حل: الف: $\varphi(\underline{x})=1-\prod_{i=1}^{n}(1-\prod x_i)$:موازی - متوالی

$$\varphi(\underline{x})=1-[(1-(x_1(1-x_2)(1-x_3)))(1-x_4)]=1-[(1-x_1x_3-x_1x_2+x_1x_2x_3)(1-x_4)]=$$

$$=x_4+x_1x_2+x_1x_3-x_1x_2x_3-x_1x_3x_4-x_1x_2x_4+x_1x_2x_3x_4$$

ب:

$$h(\underline{p})=E(\varphi(\underline{x}))=p_4+p_1p_2+p_1p_3-p_1p_2p_3-p_1p_3p_4-p_1p_2p_4+p_1p_2p_3p_4=$$

$$=0.90+(0.9\times0.8)+(0.9\times0.85)-(0.9\times0.8\times0.85)-(0.9\times0.85\times0.9)-(0.9\times0.8\times0.9)+$$

$$+(0.9\times0.8\times0.85\times0.9)=0.987$$

ج:

$$\prod_{i=1}^{n}p_i\leq h(\underline{p})\leq\coprod_{i=1}^{n}p_i \longrightarrow \prod_{i=1}^{n}p_i\leq h(\underline{p})\leq 1-\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)\Rightarrow 0.551\leq h(\underline{p})\leq 0.999$$

Subject: Year: Month: Day :

$$\prod_{i=1}^{k}\coprod_{j\in C_i} P_j \le h(P) \le \coprod_{i=1}^{l}\prod_{j\in P_i} P_j \Longrightarrow \prod_{i=1}^{2}\coprod_{j\in C_i} P_j \le h(P) \le \coprod_{i=1}^{3}\prod_{j\in P_i} P_j$$

مجموعه مسیر مینیمال (P)	مجموعه قطع کننده مینیمال (C)
$P_1=\{1,2\}$	$C_1=\{1,4\}$
$P_2=\{1,3\}$	$C_2=\{2,3,4\}$
$P_3=\{4\}$	

$$\prod_{i=1}^{2}\coprod_{j} P_j = [1-(1-P_1)(1-P_4)]\times[1-(1-P_2)(1-P_3)(1-P_4)] =$$

$$= [1-(1-0.9)(1-0.9)]\times[1-(1-0.8)(1-0.85)(1-0.9)] = 0.987$$

$$\coprod_{i=1}^{3}\prod_{j} P_j = 1-[(1-P_1P_2)(1-P_1P_3)(1-P_4)] =$$

$$= 1-[(1-(0.9\times0.8))(1-(0.9\times0.85))(1-0.9)] = 0.993$$

$$\Longrightarrow 0.987 \le h(P) \le 0.993$$

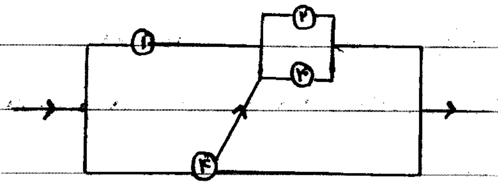
۲. قابلیت اعتماد یک سیستم ۳ از ۴ را که اجزای آن به طور مستقل و با قابلیت اعتماد یکسان ۰/۸ کار می‌کنند محاسبه کنید.

حل: $h(P)=\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}P^i(1-P)^{n-i}$; $k=3$, $n=4$, $P=0.8$

$$=\sum_{i=3}^{4}\binom{4}{i}(0.8)^i(1-0.8)^{4-i} = \binom{4}{3}(0.8)^3(1-0.8)^{4-3}+\binom{4}{4}(0.8)^4(1-0.8)^{4-4} = 0.819$$

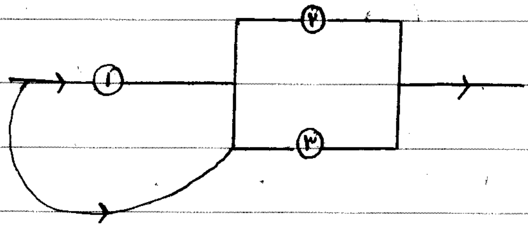
۳. با استفاده از قضیه تجزیه قابلیت اعتماد سیستمی با نمودار زیر را تحت این شرایط که اجزا مستقل و با قابلیت ۰/۸ فعالیت می‌کنند محاسبه کنید.

Subject: Year: Month: Day :



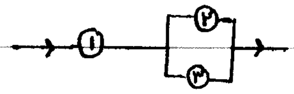
حل:

برای محاسبه قابلیت اعتماد سیستم فرض می‌کنیم جزء چهارم همواره فعال است.



$$\varphi(1_4, \underline{x}) = x\,[1-(1-x)(1-x)]$$

اکنون فرض می‌کنیم جزء چهارم در سیستم از کار افتاده است. در این حالت سیستم به یک سیستم [redacted] با سه جزء با اجزای ۱، ۲ و ۳ تبدیل می‌شود که نمودار آن در شکل زیر آمده است.



$$\varphi(0_4, \underline{x}) = x \times [1-(1-x)(1-x)]$$

برای چنین سیستمی قابلیت اعتماد برابر است با

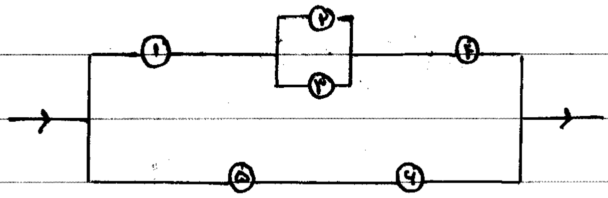
$$h(0_4, \underline{p}) = p \times [1-(1-p)(1-p)] = 2p^2 - p^3$$

بنابراین با توجه به قضیه تجزیه قابلیت اعتماد سیستم برابر است با

$$h(\underline{p}) = p_4\, h(1_4, \underline{p}) + (1-p_4)\, h(0_4, \underline{p}) =$$

AZIN

۴. با استفاده از بردارهای مسیر مینیمال و بردارهای قطع کننده مینیمال تابع قابلیت اعتماد سیستمی را با نمودار زیر به دست آورید که در آن اجزای سیستم به طور مستقل با احتمال ۰/۹ فعالیت می‌کنند.



حل:

مجموعه مسیر مینیمال (P)	بردار مسیر مینیمال (X)
$P_1=\{1,2,4\}$	$X_1=(1,1,0,1,0,0)$
$P_2=\{1,3,4\}$	$X_2=(1,0,1,1,0,0)$
$P_3=\{5,6\}$	$X_3=(0,0,0,0,1,1)$

مجموعه قطع کننده مینیمال (C)	بردار قطع کننده مینیمال (X)
$C_1=\{1,5\}$	$X_1=(0,1,1,1,0,1)$
$C_2=\{4,6\}$	$X_2=(1,1,1,0,1,0)$
$C_3=\{4,5\}$	$X_3=(1,1,1,0,0,1)$
$C_4=\{1,6\}$	$X_4=(0,1,1,1,1,0)$
$C_5=\{2,3,6\}$	$X_5=(1,0,0,1,1,0)$
$C_6=\{2,3,5\}$	$X_6=(1,0,0,1,0,1)$

همانطور که دیدیم سیستم دارای سه مسیر مینیمال با مجموعه‌های مینیمال $P_1=\{1,2,4\}$، $P_2=\{1,3,4\}$ و $P_3=\{5,6\}$ است. لذا تابع ساختار آن برابر است با

$$\varphi(\underline{x})=1-(1-x_1x_2x_4)(1-x_1x_3x_4)(1-x_5x_6)$$

Subject: Year: Month: Day :

اگر عبارت سمت راست را با توجه به اینکه $x_i^2 = x_i$ ساده کنیم بدست می آوریم

$$\varphi(\underline{x}) = x_5x_6 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 - x_1x_2x_3x_4 - x_1x_3x_4x_5x_6 - x_1x_2x_4x_5x_6 + x_1x_2x_3x_4x_5x_6$$

در نتیجه $h(\underline{p})$ قابلیت اعتماد، برابر است با

$$h(\underline{p}) = E(\varphi(\underline{x})) = p_5p_6 + p_1p_3p_4 + p_1p_2p_4 - p_1p_2p_3p_4 - p_1p_3p_4p_5p_6 - p_1p_2p_4p_5p_6 + p_1p_2p_3p_4p_5p_6$$

$$\xrightarrow{p_i = p \quad ; i=1,2,\dots,6} h(\underline{p}) = p^2 + p^3 + p^3 - p^4 - p^5 - p^5 + p^6 = p^2 + 2p^3 - p^4 - 2p^5 + p^6$$

$$p = 0/9 \Rightarrow h(0/9) = (0/9)^2 + 2(0/9)^3 - (0/9)^4 - 2(0/9)^5 + (0/9)^6 = 0/992$$

همانطور که دیدیم سیستم دارای شش قطع کننده مینیمال با مجموعه های مینیمال $C_1 = \{1, 5\}$ ، $C_2 = \{4, 6\}$ ، $C_3 = \{4, 5\}$ ، $C_4 = \{1, 6\}$ ، $C_5 = \{2, 3, 6\}$ و $C_6 = \{2, 3, 5\}$ است. لذا تابع ساختار آن برابر است با

$$\varphi(\underline{x}) = (1-(1-x_1)(1-x_5)) \times (1-(1-x_4)(1-x_6)) \times (1-(1-x_4)(1-x_5)) \times (1-(1-x_1)(1-x_6)) \times$$
$$\times (1-(1-x_2)(1-x_3)(1-x_6)) \times (1-(1-x_2)(1-x_3)(1-x_5)) =$$
$$= (x_1 + x_5 - x_1x_5) \times (x_4 + x_6 - x_4x_6) \times (x_4 + x_5 - x_4x_5) \times (x_1 + x_6 - x_1x_6) =$$
$$= (x_1x_4 + x_1x_6 - x_1x_4x_5 + x_5x_4 + x_5x_6 - x_5x_4x_5 - x_4x_1x_5 - x_1x_5x_6 + x_1x_5x_4x_5) \times$$
$$\times (x_4x_1 + x_4x_6 - x_4x_1x_6 + x_5x_1 + x_5x_6 - x_5x_1x_6 - x_4x_5x_1 - x_4x_5x_6 + x_4x_5x_1x_6) =$$
$$= \dots$$

اگر عبارت سمت راست را با توجه به اینکه $x_i^2 = x_i$ ساده کنیم بدست می آوریم

$$\varphi(\underline{x}) = \dots$$

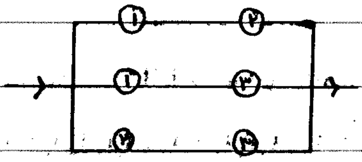
در نتیجه $h(\underline{p})$ قابلیت اعتماد، برابر است با

$$h(\underline{p}) = E(\varphi(\underline{x})) = \dots$$

AZIN

۵. در یک سیستم ۲ از ۳ که اجزاء به طور مستقل و با قابلیت‌های p_1، p_2 و p_3 کار می‌کنند، اهمیت نسبی اجزاء را تعیین و بر حسب مقادیر p_i، $i=1,2,3$ در مورد آن‌ها بحث کنید.

حل:



[redacted]

بردار مسیر مینیمال (X)	مجموعه مسیر مینیمال (P)
$X_1=(1,1,0)$	$P_1=\{1,2\}$
$X_2=(1,0,1)$	$P_2=\{1,3\}$
$X_3=(0,1,1)$	$P_3=\{2,3\}$

همانطور که دیدیم سیستم دارای ۳ مسیر مینیمال با مجموعه‌های مینیمال $P_1=\{1,2\}$، $P_2=\{1,3\}$ و $P_3=\{2,3\}$ است. لذا تابع ساختار آن برابر است با

$$\varphi(\underline{x})=1-[(1-x_1x_2)(1-x_1x_3)(1-x_2x_3)]$$

اگر عبارت سمت راست را (با توجه به اینکه $x_i^2=x_i$) ساده کنیم بدست می‌آوریم

$$\varphi(\underline{x})=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3-2x_1x_2x_3$$

در نتیجه $h(\underline{p})$ قابلیت اعتماد سیستم، برابر است با

$$h(\underline{p})=E(\varphi(\underline{X}))=p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3-2p_1p_2p_3$$

$$I_h(i)=\frac{\partial}{\partial p_i}h(\underline{p}) \qquad i=1,2,3$$

$$I_h(1)=\frac{\partial}{\partial p_1}h(\underline{p})=p_2+p_3-2p_2p_3$$

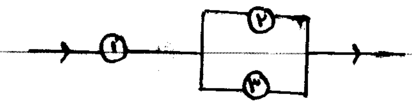
$$I_h(2)=\frac{\partial}{\partial p_2}h(\underline{p})=p_1+p_3-2p_1p_3$$

$$I_h(3)=\frac{\partial}{\partial p_3}h(\underline{p})=p_1+p_2-2p_1p_2$$

اگر $p_i\geq\frac{1}{2}$ برای $i=1,2,3$ آنگاه $I_h(3)\geq I_h(2)\geq I_h(1)$ یعنی در سیستم مولفه‌ای که بیشترین قابلیت اعتماد را دارد از بقیه مولفه‌ها مهم‌تر است.

اگر $p_i\leq\frac{1}{2}$ برای $i=1,2,3$ آنگاه $I_h(1)\geq I_h(2)\geq I_h(3)$ یعنی در سیستم مولفه‌ای که کمترین قابلیت اعتماد را دارد از بقیه مولفه‌ها مهم‌تر است.

۶. سیستمی با نمودار زیر را در نظر بگیرید. اهمیت نسبی قابلیت اعتماد اجزاء را با این فرض که اجزاء به طور مستقل و به ترتیب با قابلیت ۰/۹۵، ۰/۹۰ و ۰/۹۹ فعالیت کنند تعیین کنید.



حل:

مجموعه مسیر مینیمال (P_i)	بردار مسیر مینیمال (X_i)
$P_1=\{1,2\}$	$X_1=(1,1,0)$
$P_2=\{1,3\}$	$X_2=(1,0,1)$

همانطور که دیدیم سیستم دارای دو مسیر مینیمال با مجموعه‌های مینیمال $P_1=\{1,2\}$ و $P_2=\{1,3\}$ است.

لذا تابع ساختار آن برابر است با

$$\varphi(\underline{x})=1-[(1-x_1x_2)(1-x_1x_3)]$$

اگر عبارت سمت راست را با توجه به اینکه $x_1^2=x_1$ ساده کنیم بدست می‌آوریم

$$\varphi(\underline{x})=x_1x_2+x_1x_3-x_1x_2x_3$$

در نتیجه $h(\underline{p})$ قابلیت اعتماد سیستم، برابر است با

$$h(\underline{p})=E(\varphi(\underline{x}))=p_1p_2+p_1p_3-p_1p_2p_3$$

$$I_h(i)=\frac{\partial}{\partial p_i}h(\underline{p})\qquad i=1,2,3$$

$$I_h(1)=\frac{\partial}{\partial p_1}h(\underline{p})=p_2+p_3-p_2p_3=0.90+0.99-(0.99\times 0.90)=0.999$$

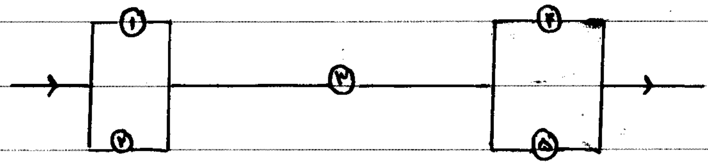
$$I_h(2)=\frac{\partial}{\partial p_2}h(\underline{p})=p_1-p_1p_3=0.95-(0.95\times 0.99)=0.0095$$

$$I_h(3)=\frac{\partial}{\partial p_3}h(\underline{p})=p_1-p_1p_2=0.95-(0.95\times 0.90)=0.095$$

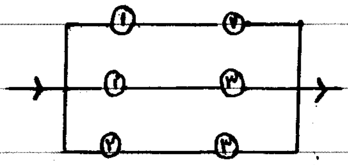
۷. برای سیستم‌های زیر با اجزای وابسته کران بالا و پایین قابلیت اعتماد را بر اساس قضایای ۴.۲ و ۵.۲ به دست آورید.

الف: سیستم ۲ از ۳

ب: سیستمی با نمودار



حل: الف:



$$\prod_{i=1}^{n} P_i \le h(P) \le \coprod_{i=1}^{n} P_i \Longrightarrow \prod_{i=1}^{3} P_i \le h(P) \le \coprod_{i=1}^{3} P_i$$

مجموعه مسیر مینیمال (P)	مجموعه قطع کننده مینیمال (C)
$P_1=\{1,2\}$	$C_1=\{2,3\}$
$P_2=\{1,3\}$	$C_2=\{1,3\}$
$P_3=\{2,3\}$	$C_3=\{1,2\}$

$$\prod_{i=1}^{k} P(C_i(\underline{x})=1) \le h(P) \le \coprod_{i=1}^{k} P(P_i(\underline{x})=1) \Longrightarrow \prod_{i=1}^{3} P(C_i(\underline{x})=1) \le h(P) \le \coprod_{i=1}^{3} P(P_i(\underline{x})=1)$$

طبق سوال ۵ ⇐ $\coprod_{i=1}^{3} P(P_i(\underline{x})=1) = P_1P_2 + P_1P_3 - 2P_1P_2P_3$

$$\prod_{i=1}^{3} P(C_i(\underline{x})=1) = \dots$$

$$\varphi(\underline{x}) = (1-(1-x_2)(1-x_3)) \times (1-(1-x_1)(1-x_3)) \times (1-(1-x_1)(1-x_2)) = \dots$$

ب :
$\prod_{i=1}^{n} P_i \leq h(P) \leq \coprod_{i=1}^{n} P_i \Longrightarrow \prod_{i=1}^{5} P_i \leq h(P) \leq \coprod_{i=1}^{5} P_i$

مجموعه مسیر مینیمال (P)	مجموعه قطع کننده مینیمال (C)
$P_1 = \{1, 3, 4\}$	$C_1 = \{1, 2\}$
$P_2 = \{1, 3, 5\}$	$C_2 = \{4, 5\}$
$P_3 = \{2, 3, 4\}$	$C_3 = \{3\}$
$P_4 = \{2, 3, 5\}$	

$\prod_{i=1}^{k} P(C_i(x)=1) \leq h(P) \leq \coprod_{i=1}^{L} P(P_i(x)=1) \Longrightarrow \prod_{i=1}^{3} P(C_i(x)=1) \leq h(P) \leq \coprod_{i=1}^{4} P(P_i(x)=1)$

$\prod_{i=1}^{3} P(C_i(x)=1) = \dots$

$\varphi(x) = (1-(1-x_1)(1-x_2)) \times (1-(1-x_4)(1-x_5)) \times (1-(1-x_3)) = \dots$

$\coprod_{i=1}^{4} P(P_i(x)=1) = \dots$

$\varphi(x) = 1 - [(1-x_1x_3x_4)(1-x_1x_3x_5)(1-x_2x_3x_4)(1-x_2x_3x_5)]$

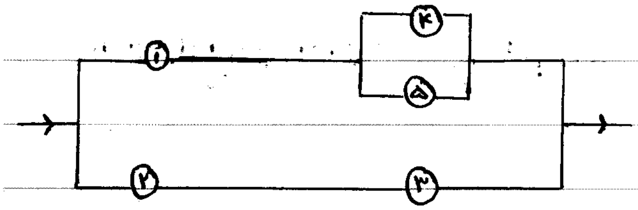
۸. یک سیستم را در نظر بگیرید که شامل ۳ دستگاه خنک کننده یکسان است که هر یک شامل دو لوله جریان آب هستند که لوله‌ها به طور موازی کنار یکدیگر متصل شده‌اند. برای عملکرد سیستم لازم است که حداقل ۲ تا از ۳ خنک کننده کار کنند. قابلیت اعتماد هر یک از لوله‌ها ۰/۹ است و به طور مستقل عمل می‌کنند. قابلیت اعتماد سیستم را تعیین کنید.

حل:
$$h(\underline{p})=\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}p^{i}(1-p)^{n-i} \qquad k=2 \;;\; n=3 \;;\; p=0.9$$

$$h(\underline{p})=\sum_{i=2}^{3}\binom{3}{i}(0.9)^{i}(1-0.9)^{3-i}=\binom{3}{2}(0.9)^{2}(1-0.9)^{3-2}+\binom{3}{3}(0.9)^{3}(1-0.9)^{3-3}=0.948$$

---

۹. سیستمی با نمودار زیر را در نظر بگیرید.



الف: بردارها و مجموعه‌های مسیر مینیمال سیستم را تعیین کنید.

ب: بردارها و مجموعه‌های قطع کننده مینیمال سیستم را تعیین کنید.

ج: با فرض آنکه اجزای سیستم مستقل و هر یک با قابلیت ۰/۸ کار کنند، قابلیت اعتماد سیستم را تعیین کنید.

حل: الف:

بردار مسیر مینیمال (X)	مجموعه مسیر مینیمال (P_i)
$X_1=(1,0,0,1,0)$	$P_1=\{1,4\}$
$X_2=(1,0,0,0,1)$	$P_2=\{1,5\}$
$X_3=(0,1,1,0,0)$	$P_3=\{2,3\}$

ب:

بردار قطع کننده مینیمال (X)	مجموعه قطع کننده مینیمال (C)
$X_1=(0,0,1,1,1)$	$C_1=\{1,2\}$
$X_2=(1,1,0,0,0)$	$C_2=\{3,4,5\}$
$X_3=(0,1,0,1,1)$	$C_3=\{1,3\}$
$X_4=(1,0,1,0,0)$	$C_4=\{2,4,5\}$

ج: همانطور که دیدیم سیستم دارای سه مسیر مینیمال با مجموعه‌های مینیمال $P_1=\{1,4\}$، $P_2=\{1,5\}$ و $P_3=\{2,3\}$ است. لذا تابع ساختار آن برابر است با

$$\varphi(\underline{x})=1-[(1-x_1x_4)(1-x_1x_5)(1-x_2x_3)]$$

اگر عبارت سمت راست را با توجه به اینکه $x_i^2=x_i$ ساده کنیم بدست می‌آوریم:

$$\varphi(\underline{x})=x_2x_3+x_1x_5+x_1x_4-x_1x_4x_5-x_1x_2x_3x_5-x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_3x_4x_5$$

درنتیجه $h(\underline{p})$ قابلیت اعتماد سیستم، برابر است با

$$h(\underline{p})=E(\varphi(\underline{x}))=p^2+p^2+p^2-p^3-p^4-p^4+p^5=3p^2-p^3-2p^4+p^5$$

$$\xrightarrow{p=0/8} h(0/8)=3(0/8)^2-(0/8)^3-2(0/8)^4+(0/8)^5=0/916$$

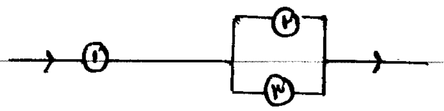
---

۱۰. با توجه به قضیه ۳.۲ ثابت کنید.

الف: $h(p_1\sqcup p_2)\geq h(p_1)\sqcup h(p_2)$

ب: $h(p_1.p_2)\leq h(p_1).h(p_2)$

ج: صحت درستی نتایج (الف) و (ب) را در سیستمی با نمودار زیر بررسی کنید که در آن اجزاء مستقل و هر یک با احتمال P عمل می‌کنند.



حل:

فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ و $Y_1, \ldots, Y_n$ متغیرهای تصادفی دو مقدار مستقل باشند و $P(X_i=1)=P_1$ و $P(Y_i=1)=P_2$ آنگاه طبق قضیه: فرض کنید φ تابع ساختار یک سیستم منسجم باشد. آنگاه الف: $\varphi(x \sqcup y) \geq \varphi(x) \sqcup \varphi(y)$ ، ب: $\varphi(x.y) \leq \varphi(x).\varphi(y)$. داریم:

$$h(P_1 \sqcup P_2) - h(P_1) \sqcup h(P_2) = \sum_x \sum_y \left(\varphi(x \sqcup y) - \varphi(x) \sqcup \varphi(y)\right) =$$

$$= \sum_x \sum_y \left(\varphi(x \sqcup y) - \varphi(x) \sqcup \varphi(y)\right) P(X=x) P(Y=y) \geq 0$$

ج:

$$\varphi(\underline{x}) = x_1 \times [1-(1-x_2)(1-x_3)] = x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_2x_3$$

$$h(\underline{p}) = E(\varphi(\underline{x})) = p^2 + p^2 - 2p^3 = 2p^2 - p^3 = p(2p - p^2)$$

$$\Rightarrow h(\underline{p}) = p(2p - p^2) \quad \bigstar$$

$$h(p) \sqcup h(p) \overset{①}{=} 1-(1-h(p))(1-h(p)) = 1-(1-h(p))^2 = 1-(1-p(2p-p^2))^2$$

$$h(p \sqcup p) = h(1-(1-p)(1-p)) = h(1-(1-p)^2) = h(2p-p^2)$$

$$= (2p-p^2)(2(2p-p^2)-(2p-p^2)^2)$$

در ★ جای p ، $2p-p^2$ قرار می‌دهیم

رابطه ① $x_1 \sqcup x_2 = 1-(1-x_1)(1-x_2)$

Subject: Year: Month: Day :

۱۱. فرض کنید φ یک ساختار منسجم باشد، P_1 و P_2 و ... و P_l مجموعه مسیرهای مینیمال و K_1 و K_2 و ... و K_s مجموعه قطع کننده‌های مینیمال باشد. اگر اجزای سیستم وابسته باشند ثابت کنید،

$$\max_{1\leqslant r\leqslant l} \prod_{i\in P_r} p_i \leqslant h(\underline{p}) \leqslant \min_{1\leqslant j\leqslant s} \coprod_{i\in K_s} p_i$$

حل:

$$\varphi(\underline{x}) = \max_{1\leqslant r\leqslant p} \min_{i\in P_r} x_i = \min_{1\leqslant j\leqslant s} \max_{i\in K_s} x_i$$

بنابراین

$$\min_{i\in P_r} x_i \leqslant \varphi(\underline{x}) \leqslant \max_{i\in K_s} x_i$$

$$\Longrightarrow P(\min_{i\in P_r} x_i = 1) \leqslant P(\varphi(\underline{x}) = 1) \leqslant P(\max_{i\in K_s} x_i = 1)$$

برای $1\leqslant r\leqslant l$ و $1\leqslant j\leqslant s$.

AZIN