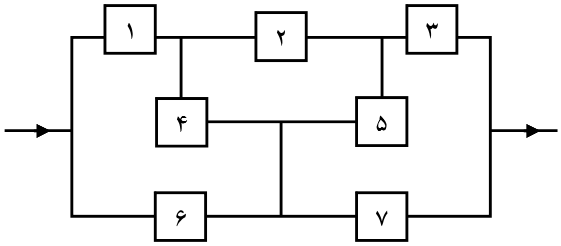
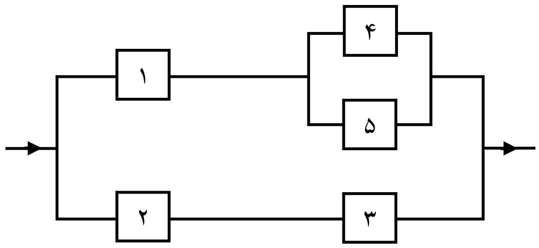
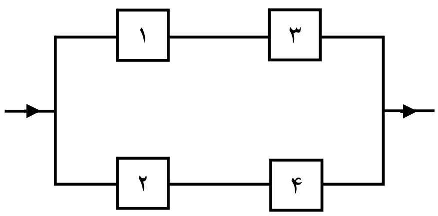
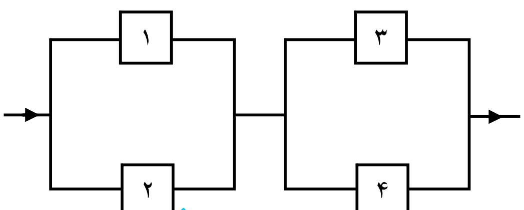
۲. بردارهای مسیر مینیمال و بردارهای قطع کننده مینیمال سیستمهایی با نمودار زیر را تعیین کنید.





۳. بردارهای مسیر مینیمال و بردارهای قطع کننده مینیمال سیستم‌های زیر را به دست آورده و با هم مقایسه کنید. تابع ساختار هر یک از دو سیستم را مشخص کنید.





حل تمرین ۵ - اگر سیستم موازی باشد آنگاه به راحتی می‌توان دید که موازی سازی در سطح اجزای سیستم با موازی سازی در سطح سیستم یکی است. پس تساوی در الف - قضیه ۲.۱ برقرار است. اگر سیستم سری باشد آنگاه سری سازی در سطح اجزای سیستم با سری سازی در سطح سیستم یکی است پس تساوی در ب - قضیه ۲.۱ برقرار است.

سیستم ①* قدرتمندتر است.

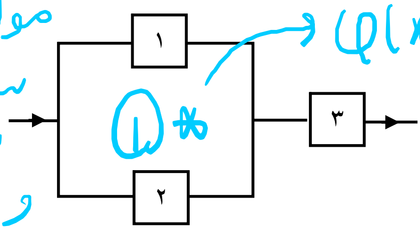
$\varphi(\underline{x} \amalg \underline{y})$

۴. فرض کنید φ تابع ساختار سیستمی با نمودار زیر باشد. درقضیه ۳.۱،

الف) نمودار $\varphi(\mathbf{x}\amalg\mathbf{y})$ و $\varphi(\mathbf{x})\amalg\varphi(\mathbf{y})$ را مشخص کنید.

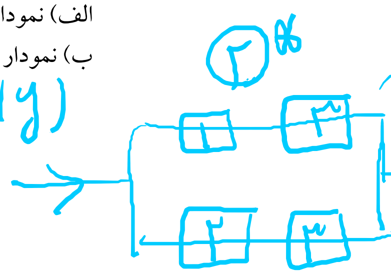
ب) نمودار $\varphi(\mathbf{x}.\mathbf{y})$ و $\varphi(\mathbf{x}).\varphi(\mathbf{y})$ را مشخص کنید.

موازی سازی در سطح اجزای سیستم و سری سازی در سطح سیستم



$\varphi(x).\varphi(y)$

و



$\varphi(\underline{x}.\underline{y})$

$\varphi(\underline{x})\amalg\varphi(\underline{y})$

سری سازی در سطح اجزای سیستم و موازی سازی در سطح سیستم - موازی-متوالی

۵. در قضیه ۳.۱ ثابت کنید که در قسمت (الف) تساوی اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر سیستم موازی باشد و در قسمت (ب) تساوی برقرار است اگر و تنها اگر سیستم متوالی باشد.

سیستم متوالی - موازی

۶. ثابت کنید در یک سیستم منسجم با تابع ساختار φ، $\varphi(1,1,\ldots,1)=1$ و $\varphi(0,0,\ldots,0)=0$.

از شرایط سیستم یکنوا که باید به شرایط سیستم یکنوا اضافه شود و بدیهی است.

۷. نمادهای زیر را در نظر بگیرید.

$$(1_i,\mathbf{x})=(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

$$(0_i,\mathbf{x})=(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

و ثابت کنید تابع ساختار φ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد

$$\varphi(\mathbf{x})=x_i\varphi(1_i,\mathbf{x})+(1-x_i)\varphi(0_i,\mathbf{x})$$

۸. مثالی از یک سیستم ارائه کنید که در آن یک جزء نامربوط وجود داشته باشد.

۹. فرض کنید C_1، C_2، C_3، C_4 و C_5 به طور مستقل از یکدیگر عمل می‌کنند. همچنین فرض کنید سیستم i که با k_i نمایش می‌دهیم به صورت زیر ساخته شده باشد

k_1 شامل اجزای C_1 و C_2 است که متوالی‌اند

k_2 شامل اجزای C_3 و C_4 است که موازی‌اند

k_3 شامل C_5 است

اگر سیستم k متشکل از k_1، k_2 و k_3 باشند که متوالی‌اند

الف) نمودار سیستم k را رسم کنید.

ب) بردارهای مسیر مینیمال و بردارهای قطع کننده مینیمال k را تعیین کنید.

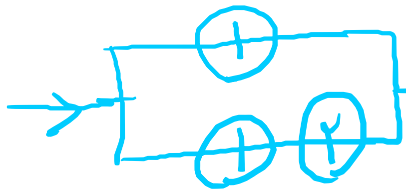
۷-

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{اگر سیستم با بردار وضعیت } \underline{x} \text{ فعال باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{اگر } x_i=1 \text{ و سیستم با بردار وضعیت } (1_i,\underline{x}) \text{ فعال باشد یا } x_i=0 \text{ و سیستم با بردار وضعیت } (0_i,\underline{x}) \text{ فعال باشد.} \\ 0 & \text{O.W} \end{cases}$$

$$= x_i \varphi(1_i, \underline{x}) + (1-x_i)\varphi(0_i, \underline{x})$$

با توجه بالا در واقع روی جزء iام شرط کرده انجام شده است.



۸ـ جزء ۲ نامربوط است

۲

قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم

۱.۲ مقدمه

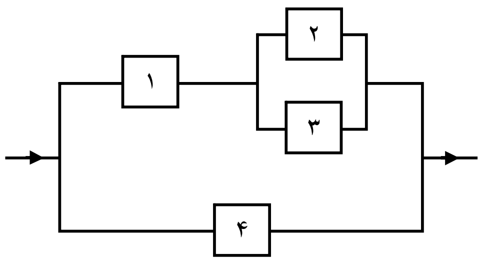
در فصل اول تابع ساختار سیستم‌های منسجم را تعریف کرده و ساختارهای پایه در قابلیت اعتماد مانند ساختارهای موازی-متوالی، k از n و ... را معرفی کردیم. با معرفی مفاهیم بردارهای مسیر و قطع کننده مینیمال دیدیم که چگونه می‌توان تابع ساختار یک سیستم منسجم را بر حسب مسیرها و قطع‌کننده‌های مینیمال نمایش داد. در این فصل قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ابتدا، در بخش در بخش ۲.۲، قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم را بر حسب قابلیت اعتماد اجزای آن در حالتی که اجزای سیستم مستقل هستند به دست می‌آوریم. سپس دو روش برای محاسبه قابلیت اعتماد سیستم ارائه می‌کنیم. روش اول استفاده از بردارهای مسیر و بردارهای قطع کننده مینیمال است. روش دوم استفاده از قضیه‌ی تجزیه است که بعضاً محاسبات قابلیت اعتماد سیستم‌های پیچیده را ساده‌تر می‌کند. در بخش ۳.۲، معیاری ارائه می‌کنیم که با استفاده از آن اهمیت نسبی قابلیت اعتماد سیستم را اندازه‌گیری می‌کنیم. بخش ۴.۲ قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم را در حالتی که اجزای سیستم وابسته هستند (استقلال آماری ندارند) مورد مطالعه قرار می‌دهد. در این بخش، با توجه به این که محاسبه قابلیت اعتماد در حالت وابستگی اجزاء مشکل است، کران‌هایی برای قابلیت اعتماد سیستم ارائه می‌کنیم که از نقطه نظر محاسباتی ساده‌تر هستند و در مقاصد عملی کاربردهایی فراوانی دارند.

جدول ۱.۲ کران بالا و پایین قابلیت اعتماد سیستم در سیستم پل

p	h_s	h_{mc}	$h(p)$	h_{mp}	h_p
۰/۹۹	۰/۹۵۱	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
۰/۹۵	۰/۷۷۴	۰/۹۹۵	۰/۹۹۵	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
۰/۹۰	۰/۵۹۱	۰/۹۷۸	۰/۹۷۹	۰/۹۹۷	۱/۰۰۰
۰/۷۵	۰/۲۳۷	۰/۸۵۲	۰/۸۶۱	۰/۹۳۶	۰/۹۹۹
۰/۶۰	۰/۰۷۵	۰/۶۱۸	۰/۶۶۰	۰/۷۴۸	۰/۹۹۰
۰/۵۰	۰/۰۳۱	۰/۴۳۱	۰/۵۰۰	۰/۵۶۹	۰/۹۶۹

۵.۲ مسایل

۱. سیستمی را با نمودار زیر در نظر بگیرید



الف) تابع ساختار سیستم، $\varphi(\mathbf{x})$، را تعیین کنید.

ب) فرض کنید اجزای سیستم به طور مستقل به ترتیب با قابلیت‌های $p_1 = ۰/۹$ ، $p_2 = ۰/۸$ ، $p_3 = ۰/۸۵$ و $p_4 = ۰/۹$ عمل کنند. قابلیت اعتماد سیستم $h(\mathbf{p})$ را محاسبه کنید.

ج) کران‌های قابلیت اعتماد سیستم را بر مبنای قضیه ۴.۲ و ۵.۲ تعیین کنید.

۲. قابلیت اعتماد یک سیستم ۳ از ۴ را که اجزای آن به طور مستقل و با قابلیت اعتماد یکسان ۰/۸ کار می‌کنند محاسبه کنید.

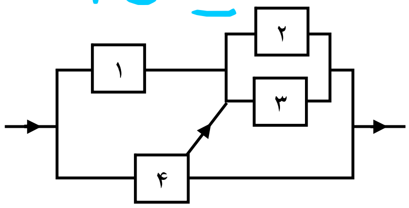
۳. با استفاده از قضیه تجزیه قابلیت اعتماد سیستمی با نمودار زیر را تحت این شرایط که اجزاء مستقل و با قابلیت ۰/۸ فعالیت می‌کنند محاسبه کنید.

حل تمرین ۳-.

بردار وضعیت $\underline{x}$	$\varphi(\underline{x})$	بردار وضعیت $\underline{x}$	$\varphi(\underline{x})$		$\varphi(\underline{x})$
(1,1,1,1)	1	(0,1,0,1)	1	(0,0,1,0)	0
(1,1,1,0)	1	(1,1,0,0)	1 ✓	(1,0,0,0)	0
(1,1,0,1)	1	(1,0,0,1)	1	(0,0,0,0)	0
(1,0,1,1)	1	(0,1,1,0)	0	(0,1,0,0)	0
(0,1,1,1)	1	(0,0,0,1)	1 ✓		
(0,0,1,1)	1	(1,0,1,0)	1 ✓		

۷: بردارهای مسیر می‌نیمال

قابلیت اعتماد سیستم براساس بردارهای می‌نیمال به صورت زیر است:

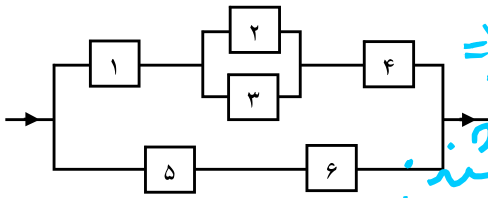


$P_1(\underline{x}) = x_4 ;\ P_2(\underline{x}) = x_1 x_2$

$P_3(\underline{x}) = x_1 x_3$

۴. با استفاده از بردارهای مسیر مینیمال و بردارهای قطع کننده مینیمال قابلیت اعتماد سیستمی را با نمودار زیر به دست آورید که در آن اجزای سیستم به طور مستقل با احتمال ۰/۹ فعالیت می‌کنند.

$\Rightarrow \varphi(\underline{x}) = 1-[1-x_1 x_2][1-x_1 x_3][1-x_4]$

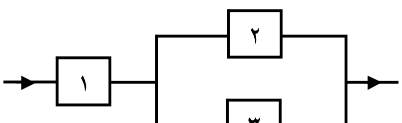


حال اگر قابلیت اعتماد اجزاء همگی برابر p باشند.

$h(p) = 2p^2 + p - 3p^3 + p^4$

۵. در یک سیستم ۲ از ۳ که اجزاءبه طور مستقل و با قابلیت‌های p_1، p_2 و p_3 کار می‌کنند، اهمیت نسبی اجزاء را تعیین و برحسب مقادیر p_i، $i = 1,2,3$، در مورد آن‌ها بحث کنید.

۶. سیستمی با نمودار زیر را در نظر بگیرید. اهمیت نسبی قابلیت اعتماد اجزاء را با این فرض که اجزاء به طور مستقل و به ترتیب با قابلیت ۰/۹۵، ۰/۹۰ و ۰/۹۹ فعالیت کنند تعیین کنید.

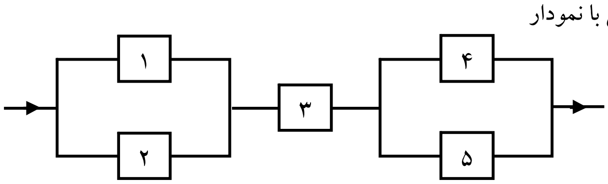


۷. برای سیستم‌های زیر با اجزای وابسته کران بالا و پایین قابلیت اعتماد را بر اساس قضایای ۴.۳ و ۵.۳ به دست آورید.

الف) سیستم ۲ از ۳

ب) سیستمی با نمودار

حال اگر براساس قضیه کرنس جزء ۲ حذف گردد می‌توان قابلیت اعتماد $h(0_2, \underline{x})$



را از طریق مسیرهای می‌نیمال به صورت زیر محاسبه نمود:

$h(0_2, p) = E\{\max\{\min\{x_1, x_3\}, x_4\}\}$

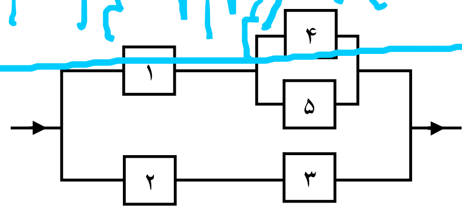
اگر همواره جزء دوم فعال باشد می‌توان قابلیت اعتماد $h(1_2, \underline{x})$ را از طریق مسیرهای می‌نیمال به صورت زیر محاسبه نمود: در این حالت جزء سوم جزء نامربوط است (زیرا بردارهای $(1,1,1,0)$، $(1,1,1,1)$ و $(0,1,1,1)$ مسیرهای می‌نیمال نمی‌باشند)

$h(\frac{1}{2}, \underline{x}) = E(\max\{x_1, x_2\})$ → از قضیه تجزیه ا

۸. یک سیستم را در نظر بگیرید که شامل ۳ دستگاه خنک کننده یکسان است که هر یک شامل دو لوله جزیان آب هستند که لوله‌ها به طور موازی کنار یکدیگر متصل شده‌اند. برای عملکرد سیستم لازم است که حداقل ۲ تا از ۳ خنک کننده کار کنند. قابلیت اعتماد هر یک از لوله‌ها ۰/۶ است و به طور مستقل عمل می‌کنند. قابلیت اعتماد سیستم را تعیین کنید.

$h(p) = p_2(p_1 + p_4 - p_1p_4) + (1-p_2)[1-[1-p_4](1-p_1p_3)]$

۹. سیستمی با نمودار زیر را در نظر بگیرید.



حل تمرین ۱۰ - الف)

الف) بردارها و مجموعه‌های مسیر مینیمال سیستم را تعیین کنید.

ب) بردارها و مجموعه‌های قطع کننده مینیمال سیستم را تعیین کنید.

ج) با فرض آنکه اجزای سیستم مستقل و هر یک با قابلیت ۰/۸ کار کنند، قابلیت اعتماد سیستم را تعیین کنید.

$\varphi(\underline{p}_1 \sqcup \underline{p}_2) \geq \varphi(\underline{p}_1)$ ①

$\Rightarrow h(\underline{p}_1 \sqcup \underline{p}_2) \geq h(\underline{p}_1)$

اثبات قضیه ۳.۱ را ملاحظه نمایید

۱۰. با توجه به قضیه ۳.۱ ثابت کنید

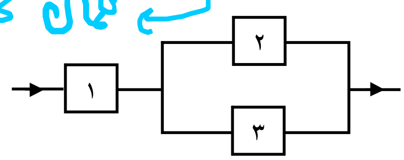
الف) $h(\mathbf{p}_1 \amalg \mathbf{p}_2) \ge h(\mathbf{p}_1) \amalg h(\mathbf{p}_2)$

ب) $h(\mathbf{p}_1.\mathbf{p}_2) \le h(\mathbf{p}_1).h(\mathbf{p}_2)$

و $\varphi(\underline{p}_1 \sqcup \underline{p}_2) \geq \varphi(\underline{p}_2)$ ②

ج) صحت درستی نتایج (الف) و (ب) را در سیستمی با نمودار زیر بررسی کنیدکه در آن اجزاء مستقل و هر یک با احتمال p عمل می‌کنند.

عمل کلی چیه؟ تمرین ۵ فصل اول



$\Rightarrow h(\underline{p}_1 \sqcup \underline{p}_2) \geq h(\underline{p}_2)$

۱۱. فرض کنید φ یک ساختار منسجم باشد. $p_1, p_2, \ldots, p_l$ مجموعه مسیرهای مینیمال و $k_1, k_2, \ldots, k_s$ مجموعه قطع کننده‌های مینیمال باشد. اگر اجزای سیستم وابسته باشند ثابت کنید.

①, ② $\Rightarrow$

$$\max_{1 \le r \le l} \prod_{i \in p_r} p_i \le h(\mathbf{p}) \le \min_{1 \le j \le s} \coprod_{i \in k_j} p_i$$

قابلیت اعتماد جزء i ام

$h(\underline{p}_1 \sqcup \underline{p}_2) \geq \max\{h(\underline{p}_1), h(\underline{p}_2)\}$
$= h(\underline{p}_1) \sqcup h(\underline{p}_2)$

ب)

$\varphi(\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2) \leq \varphi(\underline{p}_1) \Rightarrow h(\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2) \leq h(\underline{p}_1)$ ③

$\varphi(\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2) \leq \varphi(\underline{p}_2) \Rightarrow h(\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2) \leq h(\underline{p}_2)$ ④

③, ④ $\Rightarrow h(\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2) \leq \min\{h(\underline{p}_1), h(\underline{p}_2)\}$
$= h(\underline{p}_1) \cdot h(\underline{p}_2)$

حل تمرین ۱۱- مشابه قضیه ۵.۲ و نمادهای صفحه ۱۴ کتاب:

$$h(p) = P\left(\prod_{j=1}^{s} K_j(\underline{X})=1\right) \geq \min_{1\le j\le s} P(K_j(\underline{X})=1) = \min_{1\le j\le s}\left\{\coprod_{i\in K_j} p_i\right\}$$

و

$$h(p) = P\left(\coprod_{r=1}^{\ell} P_r(\underline{X})=1\right) \leq \max_{1\le r\le \ell} P(P_r(\underline{X})=1) = \max\left\{\prod_{i\in P_r} p_i\right\}$$

۳
قابلیت اعتماد وابسته به زمان و مفاهیم سالخوردگی

۱.۳ مقدمه

در فصل قبل قابلیت اعتماد سیستم را به عنوان تابعی از قابلیت اعتماد اجزای آن مورد بحث قرار دادیم. وضعیتی را که در آن فصل مورد بررسی قرار دادیم، برای اجزاء سیستم و در نتیجه برای سیستم دو وضعیت کارکرد یا عدم کارکرد را در نظر می‌گرفت. در این فصل علاقه‌مندیم قابلیت اعتماد سیستم را به عنوان تابعی از زمان مورد مطالعه قرار دهیم. بدین منظور، فرض می‌کنیم اجزای سیستم و در نتیجه خود سیستم دارای طول عمر هستند. طول عمر سیستم یک متغیر تصادفی است که بر اساس یک الگوی احتمال مقدار می‌گیرد. با فرض معلوم بودن مدل احتمال طول عمر سیستم قادریم در هر لحظه از زمان احتمال کارکرد سیستم را محاسبه کنیم. در همین ارتباط کمیت‌های مهمی را جهت بررسی خواص متغیر طول عمر سیستم معرفی کرده و ویژگی‌ها و ارتباط بین آن‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در بخش ۲.۳، قابلیت اعتماد را به عنوان تابعی از زمان تعریف می‌کنیم و خصوصیات آن را بررسی می‌کنیم. در بخش ۳.۳ به معرفی تابع نرخ خطر که از مفاهیم اساسی تحلیل داده‌های طول عمر است می‌پردازیم و مثال‌هایی در ارتباط با آن ارائه می‌کنیم. نشان می‌دهیم که رابطه بین تابع نرخ خطر با توزیع احتمال جامعه مورد بررسی یک به یک است. بخش ۴.۳یکی دیگر از مفاهیم اساسی را در مطالعات طول عمر به نام میانگین عمر باقیمانده معرفی می‌کنیم و خواص آن را بررسی می‌کنیم. در بخش ۵.۳ بعضی از مفاهیم مهم سالخوردگی سیستم‌ها را معرفی و نتایجی در مورد آن‌ها

راه حل دوم برای تمرین ۳-۱ از فصل دوم:
حال اگر جزء چهارم در سیستم همواره فعال باشد

$$h(1_4, \underline{X}) = 1$$

چون $(0,0,0,1)$ مسیر مینیمال است.
حال اگر جزء چهارم از سیستم حذف شود:

$$h(0_4, \underline{X}) = E\left(\min\{X_1, \max\{X_2, X_3\}\}\right)$$

$$\Rightarrow h(p) = p_4 + (1-p_4)(p_1p_2 + p_1p_3 - p_1p_2p_3)$$

دقت کنید اگر هر جزئی را در حقیقت تجزیه به کار ببریم

ارائه می‌کنیم. در بخش ۶.۳ به طور مختصر اندازه‌های قابلیت اعتماد سیستم را در حالتی که طول عمر آن گسسته باشد ارائه می‌کنیم. در نهایت بخش ۷.۳ قابلیت اعتماد سیستم را به عنوان تابعی از قابلیت اعتماد اجزای آن در هر لحظه از زمان مورد مطالعه قرار می‌دهد.

باز هم به قابلیت اعتماد سیستم

$h(p)=2p^2-3p^3+p+p^4$

می‌رسیم

۲.۳ تابع قابلیت اعتماد

فرض کنید یک سیستم، یک قطعه الکتریکی یا هر وسیله یا شئ دیگر دارای طول عمر T باشد. طبیعی است که T یک متغیر تصادفی است که می‌تواند در فاصله $(0,\infty)$ مقدار بگیرد. متغیر T می‌تواند پیوسته و یا گسسته باشد. به عبارت دیگر سیستم می‌تواند طول عمری داشته باشد که هر مقدار را در فاصله $(0,\infty)$ اختیار کند یا می‌تواند طول عمر آن را طوری تعریف کرد که مقادیر شمارش پذیر (مثلاً اعداد طبیعی) را در فاصله $(0,\infty)$ اختیار کند. به عنوان مثال اگر سیستم را لامپ فلورسنت در نظر بگیریم طول عمر آن یک متغیر تصادفی T است که هر مقدار را در فاصله $(0,\infty)$ می‌گیرد. اگر سیستم را مثلاً یک دستگاه فتوکپی در نظر بگیریم طول عمر آن، T، را می‌توان تعداد کپی‌هایی در نظر گرفت که قبل از خرابی گرفته است. در ادامه این فصل فرض می‌کنیم متغیر تصادفی T پیوسته است (هر گاه T گسسته باشد صراحتاً به آن اشاره می‌کنیم).

تابع توزیع احتمال T را با $F(t)$ نمایش می‌دهیم. طبق تعریف $F(t)$ برابر است با

$$F(t)=P(T\le t)$$

تابع توزیع F در سه خاصیت زیر صدق می‌کند.

الف) F تابعی غیر نزولی است.

ب) $F(0)=0$ و $F(\infty)=1$.

ج) F از راست پیوسته است.

فرض می‌کنیم T دارای تابع چگالی f باشد. در این صورت f در رابطه زیر صدق می‌کند

$$f(t)=\frac{dF(t)}{dt}$$

واضح است که $f(t)$ در دو شرط زیر صادق است و هر تابع که دارای دو شرط زیر باشد را می‌توان به عنوان یک تابع چگالی احتمال استفاده کرد.

الف) به ازای هر $t\ge 0$، $f(t)\ge 0$

ب) $\int_0^\infty f(t)\,dt=1$