۱

پیشگفتار

ما همه واقعیت را می‌جوییم، ولی آنچه به دست
می‌آوریم ادراک واقعیت است.
علامه طباطبایی[۱]

نظریه مجموعه‌های فازی در سال ۱۹۶۵م (۱۳۴۴ ه.ش.) توسط پروفسور لطفی عسگرزاده دانشمند ایرانی تبار عرضه شد. این نظریه از زمان ارائه‌ی آن تاکنون، گسترش و تعمیق زیادی یافته و کاربردهای گوناگونی در زمینه‌های مختلف پیدا کرده است.

به کوتاهی، نظریه مجموعه‌های فازی نظریه‌ای برای اقدام در شرایط عدم اطمینان است. این نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم و متغیرها و سیستم‌هایی را که نادقیق و مبهم هستند، همان گونه که در عالم واقع اکثراً چنین است، صورت‌بندی ریاضی ببخشد و زمینه را برای استدلال، استنتاج، کنترل و تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان فراهم آورد.

گسترش روز افزون این علم در جهان، چه از جهت نظری و چه از جهت کاربردی، و هم‌چنین توجه پژوهشگران ایرانی به این نظریه و از طرف دیگر کمبود منابع فارسی، دلائل تالیف این کتاب بوده‌اند.

نظریه مجموعه‌های فازی به شاخه‌های مختلفی تقسیم شده است که بحث کامل و جامع در هر شاخه، احتیاج به یک بلکه چندین کتاب دارد. آنچه در این کتاب آورده شده است پایه‌های اولیه‌ی این نظریه همراه با تعدادی مباحث کلیدی در نظریه مجموعه‌های فازی است.

در فصل اول، هم برای یادآوری و هم برای مقایسه‌هایی که در فصل دوم انجام داده‌ایم، مروری بر نظریه مجموعه‌های معمولی شده است. در فصل دوم تعاریف و مفاهیم اصلی مربوط به مجموعه‌های فازی ارائه شده‌اند. در فصل سوم به عملگرهای مجموعه‌ای متعارف یعنی $\max$ و $\min$ و مبنای منطقی آن‌ها و هم‌چنین عملگرهای جانشین آن‌ها (با بحثی در باره‌ی $T-$نرم‌ها و $S-$نرم‌ها) پرداخته‌ایم. در فصل چهارم موضوع اعداد فازی و حساب اعداد فازی مطالعه شده‌اند. رابطه‌های فازی و انواع آن‌ها و ویژگی‌های آن‌ها در فصل پنجم بررسی شده‌اند. در فصل ششم نظریه امکان، روی دیگر سکه نظریه مجموعه‌های فازی، مورد بررسی قرار گرفته است. در فصل هفتم به معرفی اصول منطق فازی پرداخته‌ایم. فصل‌های هشتم و نهم به استدلال تقریبی و استنتاج فازی

[۱] دینانی، غلامحسین (۱۳۷۹)، ماجرای فکر فلسفی در جهان اسلام، ج ۳، انتشارات طرح نو، ص ۴۴۵.

اختصاص یافته است، که نقشی کلیدی در بسیاری از کاربردهای فازی دارند.

تلاش شده است که جنبه‌های نظری هر بحث تا حد امکان روشن شود، گرچه در برخی موارد به خاطر اختصار از بیان برهان‌ها چشم‌پوشی کرده و علاقمندان را به منابع ارجاع داده‌ایم. مثال‌های فراوان و متنوع آورده شده است تا هم به فهم بهتر مفاهیم کمک شود و هم با زمینه‌های مختلف کاربردی آشنایی مختصری برای خواننده ایجاد شود. در پایان هر فصل مجموعه‌ای از مسائل تدوین شده است. تعدادی از مسایل به این دلیل طرح شده‌اند که خواننده خود در فرآیند یادگیری مطالب به طور متقابل شرکت کند و تعدادی هم برای تمرین و ممارست و اطمینان از درک مطالب اضافه شده‌اند. تعدادی از مسایل هم به اثبات‌های نظری باز می‌گردد که در متن کتاب به خواننده واگذار شده‌اند.

در پایان هر فصل، بخشی را با عنوان «برای مطالعه‌ی بیشتر» آورده‌ایم. در این بخش‌ها، برای افرادی که علاقمند به پیگری مباحث بوده و مایل به مطالعات تحقیقی بیشتر هستند، نکاتی را یادآور شده و منابع و مراجعی را برای مطالعه‌ی بیشتر ذکر کرده‌ایم.

هر چند مطالعه تمام کتاب زمینه‌ای فراگیر درباره‌ی اهمّ شاخه‌های نظریه مجموعه‌های فازی فراهم می آورد، اما هر خواننده می‌تواند با توجه به نوع و میزان علاقه و هدف خود، از مطالعه‌ی بعضی فصل‌ها یا بخش‌ها چشم‌پوشی کند. البته مطالعه‌ی فصل‌های اول و دوم برای همه‌ی افراد با هر علاقه و سلیقه‌ای توصیه می‌شود. کسانی که برای نخستین بار می‌خواهند ایده‌ای کلی درباره‌ی نظریه مجموعه‌های فازی پیدا کنند، می‌توانند از مطالعه‌ی بخش‌های ۲.۱ و ۴.۲ و فصل‌های ۳ و ٦ صرف نظر کنند. افرادی که به جنبه‌های کاربردی توجه بیشتری دارند بر فصل‌های ۵ و ۸ و ۹ تأکید کنند. در بخش‌های ۲.۱ و ۴.۲ و فصل سوم به برخی جنبه‌های نظری مجموعه‌های فازی پرداخته‌ایم که برای علاقمندان به مباحث نظری مفید است. کسانی که به مطالعه نظریه امکان علاقمندند می‌توانند بعد از مطالعه فصل دوم مستقیماً به مطالعه فصل پنجم و آن‌گاه ششم بپردازند. آنچه درباره‌ی ترتیب مطالعه فصل‌های این کتاب گفته شد، در نمودار زیر خلاصه شده است.

متن اولیه‌ی این کتاب، اوائل دهه‌ی هفتاد و به توصیه و تشویق و راهنمایی‌های مرحوم دکتر ولی ا... طحانی (دانشگاه صنعتی اصفهان)، دکتر ناصر رضا ارقامی (دانشگاه فردوسی مشهد)، دکتر ماشاا... ماشین‌چی (دانشگاه شهید باهنر کرمان) و دکتر محمدعلی پور عبدا... (دانشگاه فردوسی مشهد) تدوین و توسط انتشارات جهاد دانشگاهی مشهد، همراه با بلندنظری و گشاده رویی مسئولین آن، چاپ شد.

در طول سال‌های گذشته، نظریه مجموعه‌های فازی از هر دو جنبه‌ی نظری و کاربردی پیشرفت بسیار داشته است. ازین رو تجدید نظر کلّی در مطالب متن قبلی ضروری می‌نمود. این تجدید نظر منجر به کتابی با هیأت جدید شد که هم اکنون فرا روی شماست.

در این مدت، بسیاری از همکاران و دانشجویان گرامی، نظرات سازنده‌ای در بهبهود و تکمیل مطالب کتاب مطرح نموده‌اند که از همگی آن‌ها سپاسگزارم.

سید محمود طاهری
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان
Taheri@cc.iut.ac.ir

فصل ۱

مروری بر مجموعه‌ها و عملگرهای مجموعه‌ای

به این دو دیده ز حسنت چه می‌توان دیدن
هـزار چشم نـداریم، صـد هـزار افـسوس

کلیم کاشانی [۱]

مقدمه

مجموعه‌های فازی تعمیمی از مجموعه‌های معمولی هستند. مناسب است که قبل از شروع مباحث مربوط به نظریه مجموعه‌های فازی، مفاهیم و تعاریف اصلی مجموعه‌های معمولی را یادآوری کنیم. در فصل حاضر این کار انجام می‌شود. مرور فصل حاضر از این نظر مفید و حایز اهمیت است که خوانندگان بهتر می‌توانند مفاهیم نظریه مجموعه‌های فازی و ساختار جبری آن را درک کرده و باحالت معمولی مقایسه کنند.

بخش ۲.۱، که بحث آن در بخش ۴.۲ تکمیل می‌شود، مشتمل بر یک بحث نظری است و برای علاقمندان به مطالعه ساختار جبری نظریه مجموعه‌های فازی مفید است و حذف آن ضرری به توالی منطقی مباحث کتاب نمی‌زند.

[۱] دیوان کلیم کاشانی (۱۳۶۹)، تصحیح: بیژن ترقی، انتشارات خیام.

۱.۱ مجموعه‌ها

تعریف ۱.۱ گردآیه‌ای معّین از اشیاء را مجموعه می‌نامیم. اشیاء این گردایه اعضا یا عناصر مجموعه نامیده می‌شوند.

مجموعه‌ها را با حروف بزرگ لاتین A و B و ... و اعضای آن‌ها را با حروف کوچک لاتین a و b و ... نشان می‌دهیم. اگر a عضو مجموعه A باشد می‌نویسیم $a \in A$ و می‌خوانیم: a عضو A است. در غیر این صورت می‌نویسیم $a \notin A$ و می‌خوانیم: a عضو A نیست. برای نشان دادن یک مجموعه روش‌های مختلفی به کار می‌رود که آنها را با مثال زیر توضیح می‌دهیم.

مثال ۱.۱ می‌خواهیم اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰ را به صورت یک مجموعه توصیف کرده و نشان دهیم. فرض کنید این مجموعه را A بنامیم. روش‌های زیر برای نشان دادن مجموعه A متداول است

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$$
$$A = \{x \in N | x \leq 10\}$$
$$A = \{x_{i+1} = x_i + 1; i = 0, 1, 2, \dots, 9, x_0 = 0\}$$

توجه کنید که ممکن است برای یک مجموعه، مثلاً مجموعه اعداد حقیقی بین صفر و یک، نتوانیم از همه‌ی روش‌های فوق برای توصیف آن مجموعه استفاده کنیم.

از تعریف مجموعه آشکار است که لزومی ندارد که اعضای یک مجموعه با هم هماهنگی داشته باشند. افزون اینکه تکرار و ترتیب هم بی تأثیر است.

مثال ۲.۱ هر سه گردآیه‌ی زیر نشان دهنده‌ی یک مجموعه هستند

$$A = \{\sqrt{2}, \text{سعدی}, -20, \text{مشهد}\}$$
$$B = \{\text{سعدی}, \sqrt{2}, -20, \text{مشهد}\}$$
$$C = \{\sqrt{2}, \sqrt{2}, \text{سعدی}, -20, \text{مشهد}, \text{سعدی}\}$$

در هر بحث و موضوع، مجموعه‌ی شامل تمام عناصر مورد بحث را مجموعه مرجع نامیده و با علامت U یا X نشان می‌دهیم. مثلاً هنگامی که درباره‌ی ویژگی‌های اعداد حقیقی صحبت می‌کنیم، فرض می‌کنیم $X = R$.

گاهی یک مجموعه مانند A را با یک ویژگی کاملاً معین، مشخّص می‌کنند. یعنی اگر P یک ویژگی خوشتعریف در مورد عناصر X باشد که مجموعه A توسط آن مشخص می‌شود، می‌توان نوشت $A = \{x \in X | P(x)\}$.

مثال ۳.۱ اگر X مجموعه انسانها و P ویژگی «قد بلندتر از (cm) ۱۸۰» باشد، آنگاه $A = \{x \in X | P(x)\}$ عبارت است از مجموعه تمام انسانهایی که دارای ویژگی P هستند، یعنی قد آنها از (cm) ۱۸۰بیشتر است.

قبل از ادامه‌ی بحث یک نکته‌ی بسیار مهم را یادآوری می‌کنیم. در نظریه مجموعه‌ها بر لفظ معّین در تعریف مجموعه تأکید می‌شود. این تأکید به مفهوم عضویت باز می‌گردد. به این معنی که به یک گردآیه وقتی و فقط وقتی لفظ مجموعه اطلاق می‌شود که اعضای آن دقیقاً مشخص باشند. برای مثال، دانشجویانی از یک دانشگاه که طول قد آنها از (cm) ۱۸۰ بیشتر است یک مجموعه را مشخص می‌کنند، امّا دانشجویانی از آن دانشگاه که «بلند قد»، هستند، تشکیل یک مجموعه نمی‌دهند. زیرا ویژگی بلند قد یک مفهوم و ویژگی دقیق و معّین و خوشتعریف نیست و در نتیجه نمی‌توانیم راجع به عضویت و یا عدم عضویت یک دانشجو مثلاً با طول قد (cm) ۱۸۵ در گردآیه دانشجویان «بلند قد» اتفاق نظر داشته باشیم. به عبارت دیگر برای آنکه یک گردآیه، مجموعه باشد باید خاصیتی مانند P که گردآیه توسط آن تعریف می‌شود، کاملاً خوشتعریف و واضح باشد. در مثال فوق «قد بلندتر از (cm) ۱۸۰» یک ویژگی خوشتعریف است ولی ویژگی «بلند قد بودن» یک ویژگی ناخوشتعریف و مبهم است و تشخیص این که یک شخص دارای این ویژگی هست یا خیر (و یا تا چه اندازه واجد این ویژگی است) به عوامل مختلف از جمله دیدگاه فرد نظر دهنده بستگی دارد.

شمولیت و تساوی

تعریف ۲.۱ گوییم مجموعه A زیر مجموعه B است (و یا B شامل A است)، اگر هر عضو A عضوی از B باشد. دراین حالت می نویسیم $A \subseteq B$. دو مجموعه A و B را مساوی گوییم و می‌نویسیم $A = B$، اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

مجموعه‌ای را که شامل هیچ عضو نباشد، مجموعه تهی نامیده با$\{\}$ یا $\emptyset$ نشان می‌دهیم. مثلاً مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از صفر و مجموعه انسان‌های ساکن کره مریخ، مجموعه‌هایی تهی هستند. روشن است که برای هر مجموعه دلخواه A داریم $\phi \subseteq A$.

عملگرهای مجموعه‌ای

در ادامه‌ی بحث، X مجموعه مرجع است و همه‌ی مجموعه‌های مورد بحث، زیر مجموعه‌های X فرض می‌شوند.

تعریف ۳.۱ متمم مجموعه A (نسبت به X) که با A^C نشان داده می‌شود، عبارت است از مجموعه عناصری از X که در A نیستند. یعنی

$$A^C = \{x \in X \mid x \notin A\}$$

بدیهی است که $\phi^C = X$ و $X^C = \phi$. به علاوه متمم، ویژگی برگشت پذیری دارد یعنی $(A^C)^C = A$.

تعریف ۴.۱ اشتراک دو مجموعه A و B که با $A \cap B$ نشان داده می‌شود، عبارت است از مجموعه عناصری که در A و در B هر دو عضو باشند. یعنی

$$A \cap B = \{x | x \in A \quad \text{و} \quad x \in B\}$$

بدیهی است که برای مجموعه دلخواه A داریم

$$A \cap A = A, \quad A \cap \phi = \phi, \quad A \cap X = A$$

و به ویژه این که

قانون طرد $\qquad A \cap A^C = \phi$

در حالت کلّی اگر $A_1, \ldots, A_n$ مجموعه‌هایی دلخواه باشند، اشتراک آنها عبارت است از مجموعه‌ای از عناصر که هر کدام در همه‌ی A_iها عضو باشند. در این صورت گاهی به جای $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ می‌نویسیم $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$.

تعریف ۵.۱ اگر برای دو مجموعه A و B داشته باشیم $A \cap B = \phi$، آنگاه A و B را جدا از هم گوییم.

تعریف ٦.۱ اجتماع دو مجموعه A و B که با $A \cup B$ نشان داده می‌شود، عبارت است از مجموعه عناصری که یا در A عضو باشند یا در B (یا در هر دو). یعنی

$$A \cup B = \{x | x \in A \quad \text{یا} \quad x \in B\}$$

بدیهی است که برای مجموعه دلخواه A داریم

$$A \cup A = A, \quad A \cup \phi = A, \quad A \cup X = X$$

و به ویژه این که

$$A \cup A^C = X \qquad \text{قانون شمول}$$

در حالت کلّی اگر $A_1, \ldots, A_n$ مجموعه‌هایی دلخواه باشند، اجتماع آنها عبارت است از مجموعه‌ای از عناصر که هر کدام دست کم در یک A_i عضو باشند. در این صورت گاهی به جای $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ می‌نویسیم $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$.

گزاره ۱.۱ عملگرهای اشتراک و اجتماع و متمم دارای ویژگی‌های زیر هستند

خود توانی	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
جابه‌جایی	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cup A$
شرکت پذیری	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
توزیع پذیری	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
قوانین دمورگان	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$	$(A \cap B)^C = A^C \cap B^C$

تعریف ۷.۱ تفاضل دو مجموعه A و B که با $A - B$ نشان داده می‌شود عبارت است از مجموعه عناصری از A که عضو B نباشند. $A - B$ متمّم نسبی B نسبت به A نیز نامیده می‌شود. (بدیهی است که در حالت کلّی $A - B \neq B - A$).

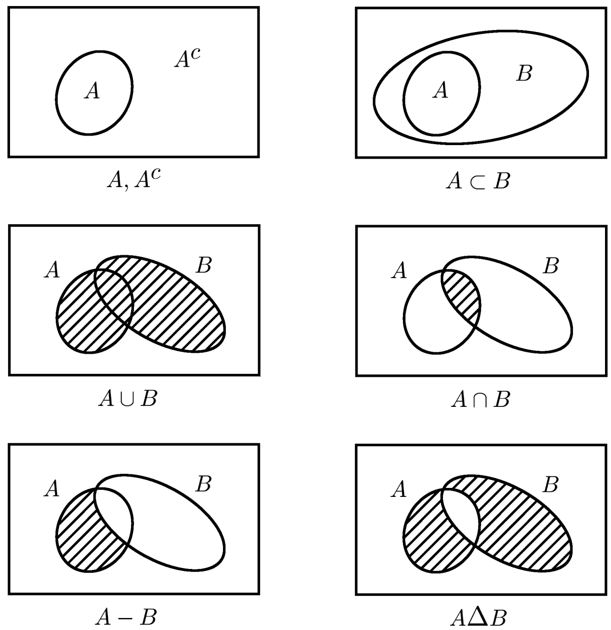
تعریف ۸.۱ تفاضل متقارن دو مجموعه A و B به صورت زیر تعریف و نشان داده می‌شود

$$A \Delta B = (A - B) \cap (B - A)$$

به عبارت دیگر $A \Delta B$ عبارت است از مجموعه عناصری که یا در A عضو باشند یا در B (و نه در هر دو)، یعنی $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

نمایش مجموعه‌ها به کمک نمودار ون

برای درک بهتر روابط بین مجموعه‌ها، از نمودار ون استفاده می‌شود. در این روش مجموعه مرجع با یک مستطیل و هر زیر مجموعه از آن با یک منحنی بسته داخل مستطیل نمایش داده می‌شود. در شکل ۱.۱ مجموعه‌ها و عملگرهای تعریف شده در بالا با استفاده از نمودار ون نشان داده شده‌اند.



شکل ۱.۱ نمایش مجموعه‌ها و عملگرهای مجموعه‌ای به کمک نمودار ون.

مثال ۴.۱ فرض کنید $X = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰\}$ مجموعه مرجع باشد و

$$A = \{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰\},\ B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\},$$
$$C = \{۸, ۹, ۱۰\},\ D = \{۲, ۴, ۸\}$$

در این صورت

$$A^C = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\}$$
$$A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۸, ۱۰\}\ ,\ A \cap B = \{۲, ۴\}$$
$$A - B = \{۶, ۸, ۱۰\},\ B - A = \{۱, ۳, ۵\},\ A \Delta B = \{۱, ۳, ۵, ۶, ۸, ۱۰\}$$

توجه کنید که در اینجا مثلاً $D \subset A$ ولی $B \not\subseteq D$ و $A \not\subseteq C$. به علاوه چون $A \cap C \neq \phi$، A و C جدا از هم نیستند، ولی چون $B \cap C = \phi$، B و C جدا از هم‌اند.

مجموعه‌ی توانی یک مجموعه

تعریف ۹.۱ مجموعه‌ی شامل تمام زیر مجموعه‌های A، مجموعه‌ی توانی A نامیده می‌شود و با $\mathcal{P}(A)$ نشان داده می‌شود.

اگر A یک مجموعه متناهی با n عضو باشد، مجموعه‌ی توانی آن ۲^n عضو دارد. به عبارت دیگر هر مجموعه با n عضو، تعداد ۲^n زیر مجموعه دارد. برای دو مجموعه A و B داریم $\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}(A\cap B)$، امّا در حالت کلّی $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)\neq\mathcal{P}(A\cup B)$.

مثال ۵.۱ فرض کنید $A=\{۱,۵,۸\}$، آن‌گاه داریم

$$\mathcal{P}(A)=\Big\{\phi,\{۱\},\{۵\},\{۸\},\{۱,۵\},\{۱,۸\},\{۵,۸\},\{۱,۵,۸\}\Big\}$$

تابع نشانگر

یک روش بسیار مفید در تعریف و نشان دادن یک مجموعه، استفاده از تابع نشانگر است.

تعریف ۱۰.۱ فرض کنید A یک زیر مجموعه دلخواه از مجموعه مرجع X باشد. تابع نشانگر A به صورت زیر تعریف و نشان داده می‌شود

$$\chi_A(x)=\begin{cases} ۱ & x\in A \\ ۰ & x\notin A \end{cases} \qquad (۱.۱)$$

ملاحظه می‌کنید که دامنه‌ی تابع نشانگر، مجموعه مرجع، و برد آن مجموعه دو عنصری $\{۰,۱\}$ است. یعنی

$$\chi_A(x):X\to\{۰,۱\}$$

استفاده از تابع نشانگر گامی به سوی انتزاعی شدن مفهوم مجموعه است، زیرا به جای در نظر گرفتن عضوهای یک مجموعه، با اعداد صفر و یک سر و کار داریم. اگر یک عنصر مثلاً x در مجموعه A عضو باشد، و به عبارت دیگر اگر دارای خاصیت مورد نظر باشد، می‌نویسیم $\chi_A(x)=۱$ و گر نه می‌نویسیم $\chi_A(x)=۰$. تأکید می‌کنیم که هر مجموعه یک تابع نشانگر دارد و بالعکس هر تابع به صورت (۱.۱) دقیقاً یک مجموعه را تعریف و مشخص می‌کند.

مثال ۶.۱ اگر $X=\{۱,۲,۳,\ldots,۱۰\}$ و $A=\{۲,۵,۷\}$، آنگاه

$$\chi_A(x)=\begin{cases} ۱ & x=۲,۵,۷ \\ ۰ & x=۱,۳,۴,۶,۸,۹,۱۰ \end{cases}$$

مثلاً $\chi_A(۵)=۱$ و $\chi_A(۶)=۰$.

نکته‌ی مهم در مورد توابع نشانگر آن است که عملگرهای مجموعه‌ای را می‌توانیم برحسب توابع نشانگر بیان کنیم. رابطه شمولیت، بر اساس توابع نشانگر به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x) \quad x \in X \text{ برای هر } \tag{۲.۱}$$

هم‌چنین تعریف عملگرهای متمم، اجتماع و اشتراک با استفاده از توابع نشانگر بسیار ساده است: برای هر x از X

$$\chi_{A^C}(x) = ۱ - \chi_A(x) \tag{۳.۱. الف}$$

$$\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x) = \max[\chi_A(x), \chi_B(x)] \tag{۳.۱. ب}$$

$$\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x) = \min[\chi_A(x), \chi_B(x)] \tag{۳.۱. پ}$$

مثال ۷.۱ فرض کنید $X = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰\}$ و

$$A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}, \; B = \{۲, ۴, ٦, ۸, ۱۰\}$$

در این صورت

$$\chi_A(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ \\ ۰ & x = ٦, ۷, ۸, ۹, ۱۰ \end{cases} \qquad \chi_B(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۲, ۴, ٦, ۸, ۱۰ \\ ۰ & x = ۱, ۳, ۵, ۷, ۹ \end{cases}$$

بنا بر این

$$\chi_{A^C}(x) = ۱ - \chi_A(x) = \begin{cases} ۰ & x = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ \\ ۱ & x = ٦, ۷, ۸, ۹, ۱۰ \end{cases}$$

و این یعنی $A^C = \{٦, ۷, ۸, ۹, ۱۰\}$. هم‌چنین، برای نمونه

$$\chi_{A\cap B}(۱) = \min[\chi_A(۱), \chi_B(۱)] = \min[۱, ۰] = ۰$$

$$\chi_{A\cap B}(۴) = \min[\chi_A(۴), \chi_B(۴)] = \min[۱, ۱] = ۱$$

$$\chi_{A\cap B}(۱۰) = \min[\chi_A(۱۰), \chi_B(۱۰)] = \min[۰, ۱] = ۰$$

و به طور خلاصه

$$X_{A\cap B(X)} = \begin{cases} ۱ & x = ۲, ۴ \\ ۰ & x = ۱, ۳, ۵, ٦, ۷, ۸, ۹, ۱۰ \end{cases}$$

یعنی $A \cap B = \{۲,۴\}$. همچنین

$$\chi_{A\cup B}(۱) = \max[\chi_A(۱), \chi_B(۱)] = \max[۱, ۰] = ۱$$
$$\chi_{A\cup B}(\mathbf{۷}) = \max[\chi_A(\mathbf{۷}), \chi_B(\mathbf{۷})] = \max[۰, ۰] = ۰$$
$$\chi_{A\cup B}(۱۰) = \max[\chi_A(۱۰), \chi_B(۱۰)] = \max[۰, ۱] = ۱$$

و همین طور برای بقیه‌ی موارد. پس به طور خلاصه

$$\chi_{A\cup B}(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۱,۲,۳,۴,۵,۶,۸,۱۰ \\ ۰ & x = ۷,۹ \end{cases}$$

یعنی $A \cup B = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۸,۱۰\}$.

روش دیگر در نمایش یک مجموعه با استفاده از مقادیر تابع نشانگر، به صورتی است که همه‌ی اعضای مجموعه مرجع را با مشخص کردن مقدار تابع نشانگر هر عضو به طور جداگانه نمایش دهیم. برای نمونه، مجموعه‌های A و B و $A \cap B$ مثال فوق این گونه مشخص می‌شوند

$$A = \left\{\frac{۱}{۱}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۵}, \frac{۰}{۶}, \frac{۰}{۷}, \frac{۰}{۸}, \frac{۰}{۹}, \frac{۰}{۱۰}\right\}$$
$$B = \left\{\frac{۰}{۱}, \frac{۱}{۲}, \frac{۰}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۰}{۵}, \frac{۱}{۶}, \frac{۰}{۷}, \frac{۱}{۸}, \frac{۰}{۹}, \frac{۱}{۱۰}\right\}$$
$$A \cap B = \left\{\frac{۰}{۱}, \frac{۱}{۲}, \frac{۰}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۰}{۵}, \frac{۰}{۶}, \frac{۰}{۷}, \frac{۰}{۸}, \frac{۰}{۹}, \frac{۰}{۱۰}\right\}$$

متناظر با مجموعه‌ی توانی $\mathcal{P}(X)$ مجموعه همه‌ی توابع نشانگر روی X را با $Ch(X)$ نشان می‌دهیم. یعنی

$$Ch(X) = \Big\{\chi | \chi : X \to \{۰, ۱\}\Big\}$$

در حالت خاص، دو تابع $\{۰,۱\} \to X$:$\mathbf{0}$ و $\mathbf{1}$، که به ترتیب مشخص کننده‌ی مجموعه‌های تهی و مرجع هستند، به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\mathbf{0}(x) = ۰,\ \mathbf{1}(x) = ۱ \quad \forall x \in X$$

نکته ۱.۱ ثابت می‌شود که $\mathcal{P}(X)$ و $Ch(X)$ به عنوان دو مجموعه، یکریخت هستند. بنابراین می‌توان به جای استفاده از زیر مجموعه‌های X، با توابع نشانگر آنها کار کنیم. در این صورت به جای مجموعه $\mathcal{P}(X)$ و عملگرهای $\cap$ و $\cup$ و متمم، با مجموعه $Ch(X)$ و عملگرهای $\wedge$ و $\vee$ و متمم سر و کار داریم.

افراز یک مجموعه

تعریف ۱۴.۱ گوییم زیر مجموعه‌های $A_{۱}, A_{۲}, \ldots, A_n$ از مجموعه A، یک افراز برای A هستند، اگر در سه شرط زیر صدق کنند

$$
\begin{array}{l}
۱) A_i \neq \phi, \quad \forall i = ۱, \ldots, n \\
۲) A_i \cap A_j = \phi, \quad \forall_i \neq j \\
۳) \bigcup_{i=۱}^{n} A_i = A
\end{array}
$$

بدیهی است که برای هر مجموعه می‌توان افرازهای مختلفی در نظر گرفت.

مثال ۸.۱ فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳۰, ۴۰\}$. یک افراز برای A با در نظر گرفتن زیر مجموعه‌های زیر از A حاصل می‌شود

$$A_{۱} = \{۱\}, \quad A_{۲} = \{۲, ۳۰\}, \quad A_{۳} = \{۴۰\}$$

یک افراز دیگر را می‌توان این گونه تشکیل داد

$$A_{۱} = \{۱, ۳۰\}, \quad A_{۲} = \{۲, ۴۰\}$$

امّا مجموعه‌های زیر یک افراز برای A نیستند

$$A_{۱} = \{۱\}, \quad A_{۲} = \{۲, ۳۰\}, \quad A_{۳} = \{۳۰, ۴۰\}$$

هم‌چنین مجموعه‌های زیر یک افراز برای A نیستند

$$A_{۱} = \{۱, ۲\}, \quad A_{۲} = \{۴۰\}$$

مجموعه‌های محدّب

تعریف ۱۲.۱ فرض کنید A مجموعه‌ای از نقاط (در یک فضای خطی حقیقی) باشد. مجموعه A را محدب گوییم اگر به ازای هر $x_{۱}$ و $x_{۲}$ از A و هر $۰ \leq \lambda \leq ۱$،

$$(\lambda x_{۱} + (۱ - \lambda) x_{۲}) \in A$$

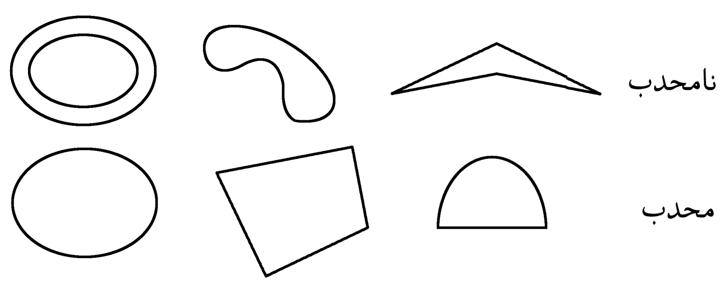
ترکیب خطی $\lambda x_{۱} + (۱ - \lambda) x_{۲}$، یک ترکیب محدّب از دو نقطه $x_{۱}$ و $x_{۲}$ نامیده می‌شود.

مفهوم ترکیب محدب به حالت بیش از دو نقطه نیز تعمیم داده می‌شود. در حالت کلی، اگر $x_{۱}, x_{۲}, \ldots, x_n$ نقاط دلخواهی از یک فضای خطی حقیقی باشند، آنگاه ترکیب

خطی $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n$ که در آن $0\le\lambda_i$ و $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$، یک ترکیب محدب از این نقاط نامیده می‌شود. با توجه به مفهوم ترکیب محدب، تعریف مجموعه محدب به طور معادل چنین بیان می‌شود: مجموعه‌ای از نقاط را محدب گوییم اگر هر ترکیب محدب از هر دو یا چند نقطه از آن مجموعه، درون مجموعه قرار گیرد.

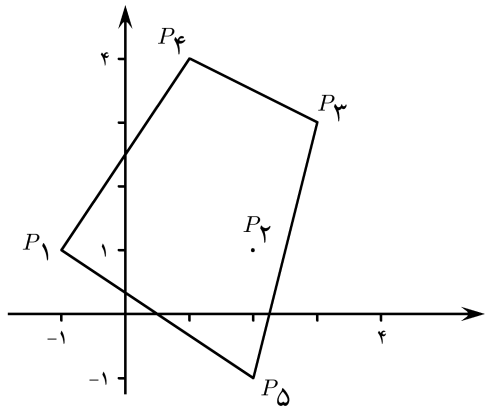
مثال ۹.۱ در حالت یک بعدی، ترکیب‌های محدبِ مختلفِ دو نقطه‌ی متمایز روی خط اعداد حقیقی، دقیقاً مجموعه همه‌ی نقاط بین آن دو نقطه است. پس مجموعه نقاط روی یک پاره‌خط، یک مجموعه محدب یک بعدی است. امّا مجموعه نقاط روی دو پاره‌خط جدا از هم یک مجموعه محدب نیست. زیرا نقاط بین دو پاره خط می‌توانند به صورت ترکیب خطی از دو نقطه‌ی انتهایی این دو پاره‌خط بیان شوند، در حالی که درآن مجموعه قرار ندارند.

مثال ۱۰.۱ در شکل ۲.۱ چند مجموعه محدب و چند مجموعه نامحدب از فضای دوبعدی R^2 نشان داده شده‌اند.



شکل ۲.۱ چند مجموعه محدب و نامحدب در R^2.

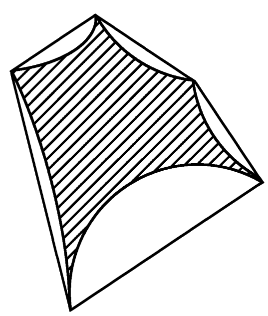
مثال ۱۱.۱ نقاط $P_1=(-1,1)$، $P_2=(2,1)$، $P_3=(3,3)$، $P_4=(1,4)$ و $P_5=(2,-1)$ را در نظر بگیرید. مجموعه محدب تولید شده توسط این نقاط عبارت است از یک چهار ضلعی که نقاط داخل و روی آن همه‌ی ترکیب‌های محدب این پنج نقطه را تشکیل می‌دهد.



شکل ۳.۱ مجموعه محدب تولید شده توسط پنج نقطه در $R^۲$.

تعریف ۱۳.۱ فرض کنید مجموعه‌ای از نقاط داده شده باشد. کوچکترین مجموعه محدبی را که شامل آن نقاط باشد، پوسته‌ی محدب آن نقاط گوییم.

مثال ۱۲.۱ در شکل ۴.۱ یک مجموعه (هاشوردار) و پوسته‌ی محدب آن (مجموعه همه‌ی نقاطی که درون محیط بزرگترند) نشان داده شده است.


شکل ۴.۱ پوسته‌ی محدب یک مجموعه در $R^۲$.

مثال ۱۳.۱ فرض کنید A و B دو مجموعه محدب و α و β دو عدد دلخواه باشند. مجموعه $\alpha A + \beta B$ که به صورت زیر تعریف می‌شود یک مجموعه محدب است

$$\alpha A + \beta B = \{z | z = \alpha x + \beta y; \quad x \in A, y \in B\}$$

نکته ۲.۱ ثابت می‌شود که اگر A و B دو مجموعه محدب باشند، آنگاه $A \cap B$ نیز یک مجموعه محدب است. این نتیجه برای $A \cup B$ برقرار نیست.

۱.۲ جبرهای بولی و شبکه‌ها

فرض کنید V و U دو مجموعه دلخواه باشند. حاصلضرب دکارتی $U \times V$ به صورت مجموعه زوج‌های مرتب $\{(u,v), u \in U, v \in V\}$ تعریف می‌شود. هر زیرمجموعه از $U \times V$ یک رابطه از U به V نامیده می‌شود. به ویژه، یک رابطه بر U عبارت از یک زیرمجموعه از حاصلضرب دکارتی $U \times U$ است.

تعریف ۱۴.۱ یک مجموعه مرتب جزئی توسط یک زوج $(U, \leq)$ تعریف می‌شود که در آن U یک مجموعه و $\leq$ یک ترتیب جزئی بر U است، یعنی برای هر $a, b, c \in U$،

۱) ویژگی بازتابی (انعکاسی): $a \leq a$

۲) ویژگی پاد تقارن: $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$

۳) ویژگی انتقالی (تعدی، ترایایی): $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$

مثال ۱۴.۱ اگر $\mathcal{P}(X)$ مجموعه‌ی توانی مجموعه X باشد و برای هر $A, B \subseteq X$، رابطه $A \leq B$ را به معنی $A \subseteq B$ تعریف کنیم، آنگاه $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ یک مجموعه مرتب جزئی است.

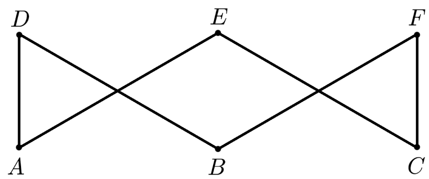
مثال ۱۵.۱ فرض کنید برای هر دو عدد طبیعی a و b، $a \leq b$ به این معنی باشد که a، b را عاد می‌کند، آنگاه $(N, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی است.

تعریف ۱۵.۱ فرض کنید U یک مجموعه مرتب جزئی باشد. اگر $a \leq b$، و هیچ عنصری از U مانند x نباشد که $a \leq x \leq b$، گوییم a, b را می‌پوشاند.

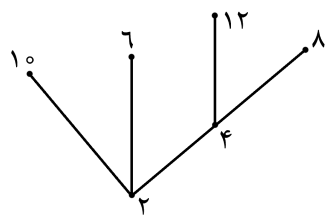
یک مجموعه مرتّب جزئی را می‌توان توسط یک نمودار نشان داد. عناصر مجموعه را با دایره‌های کوچک نشان می‌دهیم. اگر a, b را بپوشاند، با یک خط مستقیم واصل بین دو دایره مربوط به b و a این مطلب را نشان می‌دهیم.

مثال ۱۶.۱ فرض کنید $U = \{a, b, c\}$ و $A = \{a\}$، $B = \{b\}$، $C = \{c\}$، $D = \{a, b\}$، $E = \{a, c\}$ و $F = \{b, c\}$، و رابطه $\leq$، رابطه زیر مجموعه بودن باشد. آنگاه نمودار زیر

نشان دهنده‌ی مجموعه مرتّب جزئی $(U,\leq)$ است.



مثال ۱۷.۱ فرض کنید U مجموعه اعداد زوج کوچکتر یا مساوی ۱۲ باشد و رابطه $a \leq b$ به این معنی باشد که a، b را عاد می‌کند. نمودار این مجموعه مرتب جزئی به صورت زیر است



تعریف ۱۶.۱ فرض کنید a و b دو عضو از مجموعه مرتب جزئی $(U,\leq)$ باشند. اگر $S \in U$ وجود داشته باشد به قسمی که $a \leq S$ و $b \leq S$ و به علاوه برای هر t که $a \leq t$ و $b \leq t$، داشته باشیم $S \leq t$؛ آن‌گاه S را کوچکترین کران بالای a و b گوئیم و می‌نویسیم $S = a \vee b = \sup\{a,b\}$. به طور مشابه بزرگترین کران پائین $\{a,b\}$ نیز تعریف می‌شود و برای آن از نماد $a \wedge b = \inf\{a,b\}$ استفاده می‌گردد.

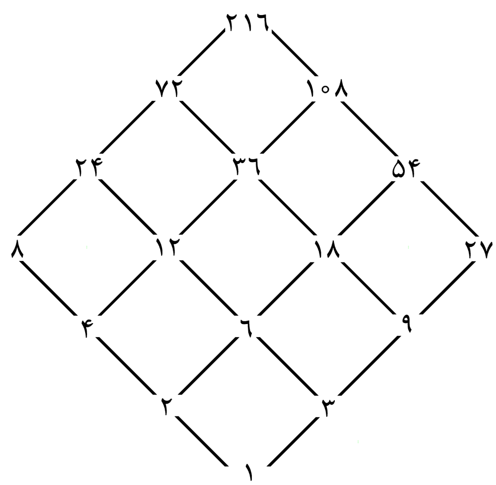
تعریف ۱۷.۱ مجموعه مرتب جزئی L را یک شبکه گوئیم اگر هر دو عنصر a و b از L، دارای sup و inf در L باشند. در این صورت گوییم $(L,\vee,\wedge,\leq)$، یا مختصراً $(L,\leq)$، یک شبکه است.

مثال ۱۸.۱ فرض کنید L شانزده عامل (مقسوم علیه) عدد ۲۱۶ باشد، یعنی

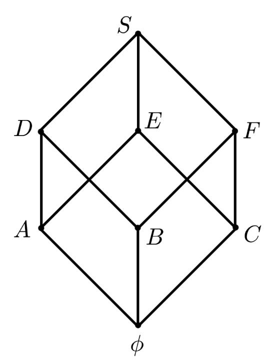
$$L = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۸, ۹, ۱۲, ۱۸, ۲۴, ۲۷, ۳۶, ۵۴, ۷۲, ۱۰۸, ۲۱۶\}$$

اگر رابطه $a \leq b$ به این معنی باشد که a, b را عاد می‌کند، آنگاه $(L,\leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی است. افزون بر آن اگر $a \vee b$ به معنی کوچکترین مضرب مشترک و $a \wedge b$ به

معنی بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b اختیار شوند، $(L, \leq)$ یک شبکه است. به نمودار زیر توجه کنید.



مثال ۱۹.۱ مجموعه مرتب جزئی U مثال ۱٦.۱ شبکه نیست. زیرا مثلاً برای $A = \{a\}$ و $B = \{b\}$، $a \wedge b$ وجود ندارد. دقت کنید که اگر در این مثال به جای زیر مجموعه‌های ناتهی سره U، کلیه‌ی زیر مجموعه‌های U را در نظر بگیریم، آنگاه $(U, \subseteq)$ یک شبکه خواهد بود. در این حالت نمودار شبکه حاصل به صورت زیر است.



قضیه ۱.۱ اگر $(L, \leq)$ یک شبکه باشد، آنگاه برای هر $a, b, c \in L$

۱) $a \wedge a = a$ و $a \vee a = a$ (ویژگی خود توانی)

۲) $a \wedge b = b \wedge a$ و $a \vee b = b \vee a$ (ویژگی جابجاپذیری)

۳) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ و $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (ویژگی شرکت‌پذیری)

۴) $a \wedge (a \vee b) = a$ و $a \vee (a \wedge b) = a$ (ویژگی جذب)

تعریف ۱.۱۸ شبکه $(L, \leq)$ را کامل گوییم اگر هر زیر مجموعه ناتهی A از آن دارای سوپریمم، $\vee A$، و اینفیموم، $\wedge A$، باشد.

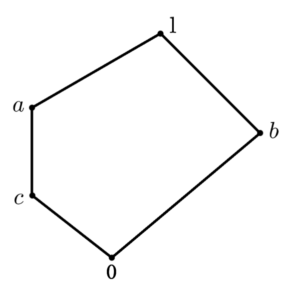
بدیهی است که هر شبکه متناهی، کامل است. امّا بسیاری از شبکه‌های نامتناهی مثلاً شبکه اعداد گویا کامل نیستند. اگر در تعریف فوق فرض کنیم که $A = L$، به سادگی نتیجه می‌شود که هر شبکه کامل دارای عضو اقل $\mathbf{0}$ و عضو اکثر $\mathbf{1}$ است. یعنی $\mathbf{0}$ و $\mathbf{1}$ در L وجود دارند که برای هر $a \in L$ داریم $a \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}$ و $a \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

مثال ۱.۲۰ در مثال ۱.۱۸، L یک شبکه کامل است، که برای آن $\mathbf{0} = ۱$ و $\mathbf{1} = ۲۱۶$.

تعریف ۱.۱۹ فرض کنید a عنصری از یک شبکه کامل باشد. عنصر $\bar{a}$ از شبکه را متمم a گوییم اگر $a \wedge \bar{a} = \mathbf{0}$ و $a \vee \bar{a} = \mathbf{1}$.

تعریف ۱.۲۰ شبکه L متمّم‌دار نامیده می‌شود اگر هر عنصر آن دارای متّمم باشد.

مثال ۱.۲۱ در شبکه زیر عنصر b دارای دو متمم a و c است، و عناصر a و c هر کدام دارای یک متمم b هستند.



تعریف ۱.۲۱ شبکه L را توزیع‌پذیر گوییم اگر برای هر a و b و c از L

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

گزاره ۱.۱ یک شرط لازم و کافی برای آنکه شبکه L، توزیع‌پذیر باشد آن است که برای هر a و b و c از L

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

گزاره ۲.۱ در یک شبکه توزیع‌پذیر، متمم هر عنصر، در صورت وجود، یکتاست.

مثال ۲۲.۱ فرض کنید $L = I = [\circ, ۱]$. در این صورت L با رابطه معمولی $\leq$ روی اعداد حقیقی و $a \wedge b = \min\{a,b\}$ و $a \vee b = \max\{a,b\}$ یک شبکه توزیع‌پذیر است. دقت کنید که این شبکه متممدار نیست.

از لحاظ تاریخی شبکه‌های متممدار توزیع‌پذیر، اولین شبکه‌هایی بودند که مطالعه شدند. این شبکه‌ها ابتدا توسط جورج بول ($G.Boole$) معرّفی و به نام وی نیز نامگذاری شدند.

تعریف ۲۳.۱ یک شبکه متممدار توزیع‌پذیر، یک شبکه بولی نامیده می‌شود.

تذکر. این گونه نیست که هر شبکه بولی، یک شبکه کامل باشد (ر.ک. تمرین ۱۶.۱).

مثال ۲۳.۱ فرض کنید X یک مجموعه دلخواه و $\mathcal{P}(X)$ مجموعه‌ی توانی آن باشد. دراین صورت $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ یک شبکه است. در همین شبکه اگر متمم عنصر A از $\mathcal{P}(X)$ به صورت A^C در نظر گرفته شود، آنگاه $(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cup, \cap)$ یک شبکه بولی است.

هنگامی که شبکه بولی به عنوان یک دستگاه جبری که تحت اعمال متمم و $\vee$ و $\wedge$ بسته است مورد نظر واقع شود، یک جبر بولی نام می‌گیرد. به طور سر راست تعریف معادل برای جبر بولی به صورت زیر است.

تعریف ۲۴.۱ یک مجموعه که نسبت به یک یا چند عمل (متناهی) بسته باشد، یک جبر نام دارد.

تعریف ۲۵.۱ یک جبر بولی عبارت است از یک دستگاه جبری به صورت $(B,+,.,-,\mathbf{0},\mathbf{1})$ (گاهی به طور خلاصه $(B,+,.,-)$) که در آن B یک مجموعه و $+$ و $.$ دو عمل دوتایی و $-$ یک عمل یکتایی است که همراه با دو عنصر $\mathbf{0}$ و $\mathbf{1}$ از B در اصول زیر صدق می‌کنند

۱)	$a+a=a$	$a.a=a$
۲)	$a+b=b+a$	$a.b=b.a$
۳)	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a.(b.c)=(a.b).c$
۴)	$a+(a.b)=a$	$a.(a+b)=a$
۵)	$a+(b.c)=(a+b).(a+c)$	$a.(b+c)=(a.b)+(a.c)$

۶) برای هر $b\in B$، عنصر $\bar{b}\in B$ وجود داشته باشد که $b+\bar{b}=\mathbf{1}, b.\bar{b}=\mathbf{0}$

مثال ۲۴.۱ اگر $B=\{۰,۱\}$ و عمل‌های $+$ و $.$ و $-$ به صورت زیر در نظر گرفته شوند

$$\begin{array}{c|cc} + & ۰ & ۱ \\ \hline ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{array}\qquad \begin{array}{c|cc} . & ۰ & ۱ \\ \hline ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{array}\qquad \begin{array}{c|c} & - \\ \hline ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{array}$$

آنگاه دستگاه $(B,+,.,-,۰,۱)$ یک جبر بولی است.

مثال ۲۵.۱ دستگاه $(\mathcal{P}(X),\cup,\cap,-)$ که در مثال ۲۳.۱ بحث شد، یک جبر بولی است.

مثال ۲۶.۱ دستگاه $(Ch(X),\vee,\wedge,-)$ که در آن $Ch(x)$ مجموعه همه‌ی توابع نشانگر زیر مجموعه‌های مجموعه مرجع X است، و $\vee$ و $\wedge$ و $-$ اعمالی است که در روابط (۳.۱) تعریف شدند، یک جبر بولی است.

تعریف ۲۶.۱ فرض کنید S و T دو مجموعه مرتب جزئی باشند به طوری که $S\sim T$، یعنی یک تناظر یک به یک بین اعضای S و اعضای T وجود داشته باشد. فرض کنید اگر $s_۱$ و $s_۲$ از S به ترتیب با $t_۱$ و $t_۲$ از T متناظر شوند، آنگاه

$$s_۱\leq s_۲ \Leftrightarrow t_۱\leq t_۲ \quad (\text{که می‌نویسیم:} s_۱\sim s_۲, t_۱\sim t_۲)$$

در این صورت گوییم S و T یکریخت هستند، و می‌نویسیم $S\sim T$. واضح است که مجموعه‌های مرتب جزئی یکریخت، دارای یک نمودار هستند.

مثال ۲۷.۱ فرض کنید $T = \{۲, ۳, ۵, ٦, ۱۰, ۱۵\}$، و $t_۱ \leq t_۲$ به این معنی باشد که $t_۱|t_۲$، یعنی $t_۱$، $t_۲$ را عاد می‌کند. هم‌چنین S مجموعه ذکر شده در مثال ۱٦.۱ باشد. اکنون تناظر یک به یک زیر را بین اعضای T و S در نظر بگیرید

$$A \sim ۲ \quad B \sim ۳ \quad C \sim ۵ \quad D \sim ٦ \quad E \sim ۱۰ \quad F \sim ۱۵$$

آنگاه $S \sim T$، یعنی S و T یکریخت‌اند.

ساختار مجموعه‌ی زیر مجموعه‌های یک مجموعه

فرض کنید X یک مجموعه مرجع و $\mathcal{P}(X)$ مجموعه‌ی توانی آن و $Ch(X)$ مجموعه‌ی تمامی توابع نشانگر زیر مجموعه‌های X باشند. با توجه به مطالب بخش‌های گذشته، قضایای زیر به سادگی ثابت می‌شوند.

قضیه ۲.۱ $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \subseteq)$ یک شبکه توزیع پذیر کامل است.

قضیه ۳.۱ $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, -)$ یک جبر بولی است. یعنی برای هر A و B و C دلخواه از $\mathcal{P}(X)$ داریم

۱)	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
۲)	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
۳)	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
۴)	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
۵)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
٦)	$A \cup A^C = X$	$A \cap A^C = \phi$

قضیه ۴.۱ $(Ch(X), \vee, \wedge, \leq)$ یک شبکه توزیع پذیر کامل است و به علاوه با شبکه $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \subseteq)$ یکریخت است.

قضیه ۵.۱ $(Ch(X), \vee, \wedge, -)$ یک جبر بولی است و به علاوه با جبر بولی $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, -)$ یکریخت است.

برای مطالعه‌ی بیشتر

بخش ۱.۱

درباره‌ی مجموعه‌ها، عملگرهای مجموعه‌ای و ویژگی‌های آنها، کتاب‌های [ ] مراجع مناسبی هستند. ساختار زیرمجموعه‌های یک مجموعه در مراجعی مانند [ ] مورد بحث قرار گرفته است.

بخش ۲.۱

شبکه‌ها و جبرهای بولی در کتاب‌های [ ] به طور گسترده مطالعه شده‌اند. مرور این مفاهیم، به عنوان مقدمه‌ای بر مباحث مربوطه در نظریه مجموعه‌های فازی، در مرجع [ ] به طور خلاصه انجام شده است. این کار در کتاب کافمن [ ] (که از نخستین کتاب‌ها درباره‌ی مجموعه‌های فازی بوده است) به طور گسترده‌تر و با تشریح بیشتر انجام پذیرفته است.

تمرین‌ها

۱.۱ کدامیک از گردآیه‌های زیر یک مجموعه است؟

الف) اعداد حقیقی کوچکتر از ۴/۵۲

ب) اعداد حقیقی نزدیک به صفر

پ) مردان آسیایی

ت) روزهای گرم تابستان سال ۱۳۶۵ در اهواز

ث) کودکان با ضریب هوشی بالای ۱۰۰

ج) افراد علاقمند به ریاضی

۲.۱ فرض کنید مجموعه مرجع $X = \{\dots,-۱,۰,۱,\dots\}$ باشد، و $A = \{۲,۴,۶,\dots\}$ و $B = \{\dots,-۳,-۱,۱,۳,\dots\}$ و $C = \{۰,۱,۲,۳\}$. مطلوب است

الف) C^C, B^C, A^C

ب) $B \cap C, A \cap B, B \cup C, A \cup B$

پ) $B\Delta C, B - A, A - B$

۳.۱ مجموعه‌ی توانی مجموعه C مسأله ۲.۱ را بیابید.

۴.۱ فرض کنید $X = R$ و $A = \{۲,۴,۶,\dots\}$ و $B = [-۲,۴]$ و $C = [۰,۵]$. موارد خواسته شده در مسأله ۲.۱ را بیابید.

۵.۱ درستی قوانین دمورگان را برای دو مجموعه B و C مسئلهٔ ۴.۱ بررسی کنید.

۶.۱ تابع نشانگر مجموعه‌های A و B و C مسأله ۴.۱ را بنویسید.

۷.۱ درستی رابطه‌های ۳.۱.الف و ۳.۱.ب و ۳.۱.پ را برای مجموعه‌های B و C مسأله ۴.۱ بررسی کنید.

۸.۱ عملگرهای تفاضل دو مجموعه $(A - B)$ و تفاضل متقارن $(A\Delta B)$ را بر حسب توابع نشانگر مجموعه‌های A و B تعریف کنید.

۹.۱ بررسی کنید که تعریف اشتراک و اجتماع بر حسب توابع نشانگر به صورت

$$\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x).\chi_B(x)$$
$$\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$$

معادل با تعریف اشتراک و اجتماع در روابط ۳.۱. ب و ۳.۱. پ هستند.

۱۰.۱ پنج افراز برای مجموعه $A = \{۷, \sqrt{۷}, \text{سعدی}, \text{شیراز}, \text{کرمان}\}$ بنویسید.

۱۱.۱ کدامیک از مجموعه‌های زیر محدّب‌اند؟

الف) $\{x \in R | x \leq ۳\}$

ب) $\{x \in R | x \leq ۳ \text{ یا } x \geq ۷\}$

پ) $\{(x,y) \in R^۲ | x^۲ + y^۲ \leq ۱\}$

ت) $\{(x,y) \in R^۲ | x^۲ + y^۲ < ۱\}$

ث) $\{(x,y) \in R^۲ | x^۲ + y^۲ = ۱\}$

ج) $\{(x,y) \in R^۲ | x + y < ۲ \text{ و } x - y > ۲\}$

۱۲.۱ مجموعه محدب تولید شده به وسیله نقاط (۲ و ۰) و (۲− و ۰) و (۰ و ۲−) چیست؟

۱۳.۱ پوسته محدب مجموعه‌های پ و ت و ث مسأله ۱۱.۱ را بیابید.

۱۴.۱ فرض کنید $B = \{۰, a, b, ۱\}$، و عمل‌های + و . و − به صورت زیر تعریف شوند.

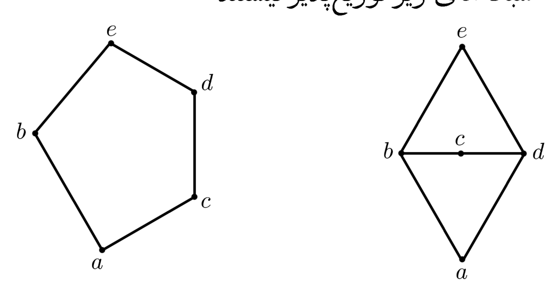
+	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

.	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

	-
0	1
a	b
b	a
1	0

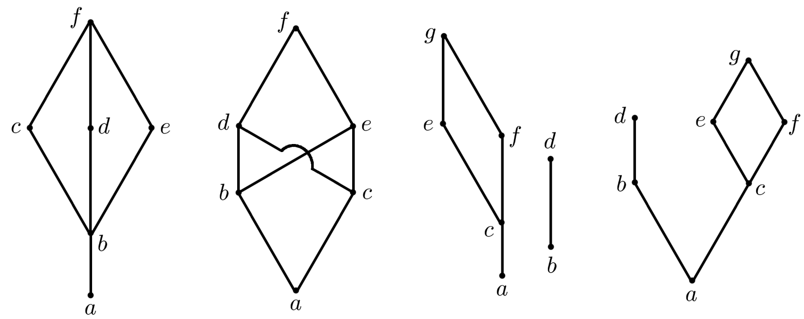
بررسی کنید که دستگاه $(B, +, ., -, 0, 1)$ یک جبر بولی است.

۱۵.۱ بررسی کنید که شبکه‌های زیر توزیع‌پذیر نیستند

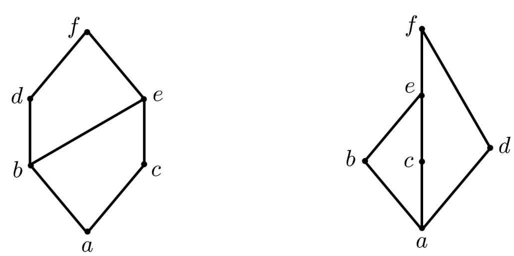


۱۶.۱ فرض کنید X یک مجموعه نامتناهی باشد. فرض کنید $\mathcal{F}$ مجموعه‌ی زیرمجموعه‌هایی از X باشد که متناهی هستند یا متمم آن‌ها متناهی است. نشان دهید که $(\mathcal{F}, \subseteq)$ یک شبکه بولی است ولی یک شبکه کامل نیست.

۱۷.۱ کدامیک از نمودارهای زیر نشان دهنده‌ی یک شبکه است؟



۱۸.۱ بررسی کنید که هر یک از نمودارهای زیر نشان دهنده‌ی یک شبکه است. در هر مورد بررسی کنید که شبکه، توزیع‌پذیر است؟ متممدار است؟



۱۹.۱ الف) یک مجموعه مرتب جزئی مثال بزنید که شبکه نباشد.

ب) یک شبکه مرتب جزئی مثال بزنید که متممدار نباشد.

پ) یک شبکه مرتب جزئی مثال بزنید که توزیع‌پذیر نباشد.

فصل ۲

مجموعه‌های فازی: تعاریف و مفاهیم

ناتانائیل، ای کاش عظمت در نگاه تو باشد، نه در آنچه بدان می‌نگری.
آندره ژید [۱]

مقدمه

در فصل اوّل با نظریه مجموعه‌ها، که زیر بنای ریاضیات مدرن است، آشنا شدیم. در این نظریه، مجموعه‌ها به صورت گردآیه‌ای معیّن از اشیاء تعریف می‌شوند. به عبارت دیگر هر مجموعه با یک ویژگی خوش‌تعریف مشخص می‌شود. اگر یک شئ مفروض، دارای آن ویژگی باشد، عضو مجموعه‌ی متناظر است و اگر نباشد، عضو آن نیست. مثلاً اگر مجموعه مرجع X، مجموعه اعداد حقیقی فرض شود و P ویژگی «بزرگ‌تر از ده بودن» آنگاه P یک ویژگی خوش‌تعریف است که یک مجموعه مثلاً A با آن متناظر می‌شود. زیرا برای هر عدد از مجموعه اعداد حقیقی می‌توان با قاطعیّت گفت که آیا آن عدد بزرگ‌تر از ده است یا خیر و بنابر این عضو A است یا خیر.

حال فرض کنید بخواهیم درباره‌ی آن دسته از اعداد صحبت کنیم که «بزرگ» هستند. در اینجا با ویژگی بزرگ که یک ویژگی ناخوش‌تعریف و مبهم است، سر و کار

[۱] داریوش، پرویز؛ آل احمد، جلال (۱۳۵۵)، مائده‌های زمینی (ترجمه)، انتشارات زر.

داریم. اینکه چه اعدادی بزرگ هستند و چه اعدادی بزرگ نیستند، بسته به نظر افراد مختلف، فرق می‌کند. به عبارت دیگر عضویت و یا عدم عضویت اعداد مختلف در گردآیه‌ای با ویژگی «بزرگ بودن» قطعی نیست. مثلاً آیا ۱۰۰ عددی «بزرگ» است و عضو گردآیه‌ی اعداد حقیقی بزرگ است یا خیر؟ ۱۰۰۰ چطور؟ ۱۰۰۰۰۰۰ چطور؟ می‌بینیم که ویژگی «بزرگ بودن» برای اعداد حقیقی یک ویژگی دقیق و معّین نیست و بنابر این جامه‌ی نظریه معمولی مجموعه‌ها بر تن این مفهوم و مفاهیمی ازین نوع راست نمی‌آید و این نظریه از صورت‌بندی این مفاهیم و ویژگی‌ها ناتوان است. از سوی دیگر بیشتر مفاهیم و ویژگی‌هایی که در زندگی روزمرّه و واقعی، و نیز در شاخه‌های مختلف علوم، با آن سر و کار داریم این‌گونه‌اند. یعنی مفاهیمی هستند نادقیق و مجموعه‌هایی هستند با کران‌های تقریبی. برای مثال ما در زندگی واقعی کمتر از کودکان بلند قدتر از (cm) ۱۱۸، زمین‌های بزرگتر از ۲۷ هکتار، مسافت‌های طولانی‌تر از (km) ۲۳۴ و اجناس گران‌تر از ۹۲۳۴۰ تومان ... صحبت می‌کنیم، بلکه فهم و زبان طبیعی ما بیشتر با مفاهیمی مانند کودکان بلند قد (یا کوتاه قد، خیلی کوتاه و ...)، زمین‌های وسیع (کوچک، خیلی وسیع و ...)، اجناس گران (ارزان، خیلی ارزان، تقریباً گران، ...)، مسافت‌های طولانی (کوتاه، بسیار کوتاه، بسیار طولانی و ...) سروکار دارد. هم‌چنین در علوم به‌ویژه علوم انسانی و اجتماعی به جای صحبت از کشورهای دارای ۱۰۰۰ کارخانه به بالا، شهرهای با جمعّیت بیشتر از یک میلیون نفر و ...، با مفاهیم و عباراتی مانند جوامع پیشرفته‌ی صنعتی، فرهنگ‌های بومی، تراکم جمعیت زیاد، کودکان کند ذهن و ... سر و کار داریم. هیچ کدام از این مفاهیم و تعاریف، تعاریف دقیقی نیستند که بتوان برای هر کدام مجموعه‌هایی دقیق را تصوّر کرد. در قلمرو ریاضیات و نظریه مجموعه‌های کلاسیک جایی برای این مفاهیم نیست و قالبی برای صورت‌بندی این مفاهیم و ابزاری برای تجزیه و تحلیل آنها وجود ندارد.

نظریه مجموعه‌های فازی یک قالب جدید ریاضی برای صورت‌بندی و تجزیه و تحلیل این مفاهیم و ویژگی‌هاست. این نظریه، یک تعمیم و گسترش طبیعی نظریه مجموعه‌های معمولی است، که موافق با زبان و فهم طبیعی انسان‌ها نیز می‌باشد.

اجازه بدهید قبل از ورود به بحث اصلی و معرّفی ساختار ریاضی این نظریه، اساس کار پروفسور عسگرزاده، مبدع ایرانی تبار این نظریه، را شرح دهیم. این کار را با پیگیری مثال فوق درباره‌ی اعداد حقیقی بزرگ انجام می‌دهیم. همانطور که در بالا بیان شد، آنچه در مجموعه بودن «اعداد بزرگ» اشکال ایجاد می‌کند، معلوم نبودن عضویت یا عدم عضویت اعداد مختلف در گردآیه «اعداد بزرگ» است. مثلاً اینکه آیا ۱۰۰ عددی بزرگ است؟ ۱۰۰۰ چطور؟ ۱۰۰۰۰۰۰ چطور؟ و همین طور برای سایر اعداد. بنا به پیشنهاد زاده مناسب است که به هر عدد از مجموعه اعداد، عددی از بازه $[0,1]$ به

عنوان درجه‌ی بزرگی آن عدد نسبت دهیم. هرچه یک عدد، بزرگتر بود عدد متناظر برای عضویت آن در A: «مجموعه اعداد بزرگ» به یک نزدیک‌تر باشد و برعکس هرچه عدد مورد نظر کوچک بود، عدد مربوط به عضویت آن در A، به صفر نزدیکتر باشد. به این ترتیب به جای آنکه بگوییم عدد ۱۰۰۰ بزرگ است یا بزرگ نیست، و یا آنکه در این باره ساکت باشیم، می‌گوییم درجه‌ی بزرگی آن، مثلاً، ۰/۷ است. به عبارت دیگر به جای آنکه بگوییم عدد ۱۰۰۰ عضو A هست یا عضو A نیست، می‌گوییم: با درجه ۰/۷ عضو A است.

پس باید برای هر عدد از مجموعه اعداد، عددی از $I = [۰, ۱]$ را به عنوان درجه و میزان عضویّت و تعّلق در A نسبت دهیم. یعنی یک تابع در نظر بگیریم که قلمرو آن مجموعه اعداد و برد آن I باشد. مشاهده می‌کنید که توانستیم به یک چارچوب ریاضی برسیم، یعنی یک تابع از R (مجموعه اعداد حقیقی) به بازه $[۰, ۱]$ برای توصیف و تجزیه و تحلیل اعداد حقیقی بزرگ.

شاید متوجه شده باشید که اساس کار تشریح شده در بالا چیزی نیست جز گسترش مفهوم تابع نشانگر یک مجموعه که یک تابع با برد $\{۰, ۱\}$ است، به یک تابع با برد $[۰, ۱]$. به این ترتیب، می‌توان بسیاری از مفاهیم بیگانه با ریاضیات فعلی را وارد دنیای ریاضیات کرد؛ و تفکرات و مفاهیم و زبان و منطق بشری را در یک ساختار ریاضی نظم و ترتیب داد.

در فصل حاضر، تعاریف و مفاهیم مقدماتی نظریه مجموعه‌های فازی مطرح و بررسی می‌شوند. در فصل های آینده، مباحثی دیگر دنبال خواهند شد.

۲.۱ مفاهیم مقدماتی

فرض کنید X، یک مجموعه مرجع دلخواه باشد. همان طور که در بخش قبل گفته شد، تابع نشانگر هر زیر مجموعه معمولی A از X، یک تابع از X به $\{۰, ۱\}$ است که این‌گونه تعریف می‌شود

$$\chi_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases}$$

حال اگر برد تابع نشانگر را از مجموعه دو عضوی $\{۰, ۱\}$ به بازه $[۰, ۱]$ توسعه دهیم، یک تابع خواهیم داشت که به هر x از X، عددی را از بازه $[۰, ۱]$ نسبت می‌دهد. این تابع را تابع عضویت A می‌نامیم. اکنون A دیگر یک مجموعه معمولی نیست بلکه چیزی است که آن را یک مجموعه فازی می‌نامیم (به طور دقیق‌تر، یک زیر مجموعه فازی از X).

بنا بر این یک مجموعه فازی A، مجموعه‌ای است که درجات عضویت اعضای آن

می‌تواند به طور پیوسته از $I = [\text{۰}, \text{۱}]$ اختیار شود. این مجموعه به طور کامل و یکتا توسط یک تابع عضویت که آن را با $\mu_A(x)$ نشان می‌دهیم مشخص می‌شود؛ تابعی که به هر عنصر از X، یک عدد را از بازه $[\text{۰}, \text{۱}]$ به عنوان درجه عضویت آن عنصر در مجموعه فازی A نسبت می‌دهد. نزدیکی مقدار $\mu_A(x)$ به عدد یک نشان دهنده‌ی تعلّقِ بیشتر x به مجموعه فازی A است و بالعکس نزدیکی آن به صفر نشان دهنده‌ی تعلّق کمتر x به A است. به لحاظ شهودی $\mu_A(x)$ را می‌توان درجهِ پذیرش ما در قبول x به عنوان عضوی از A در نظر گرفت. در حالت حدّی اگر x کاملاً در A عضو باشد داریم $\mu_A(x) = \text{۱}$ و چنان‌چه اصلاً در A عضو نباشد داریم $\mu_A(x) = \text{۰}$. پس مجموعه‌های معمولی و توابع نشانگر، حالت‌های خاصّی از مجموعه‌های فازی و توابع عضویت هستند.

مثال ۱.۲ فرض کنید مجموعه مرجع $X = \{\text{۱}, \text{۲}, \text{۳}, \text{۴}, \text{۵}\}$ باشد. زیر مجموعه معمولی از X شامل اعداد کوچک‌تر از چهار به صورت زیر است

$$A = \{\text{۱}, \text{۲}, \text{۳}\}$$

که تابع نشانگر آن عبارت است از

$$\chi_A(x) = \begin{cases} \text{۱} & x = \text{۱}, \text{۲}, \text{۳} \\ \text{۰} & x = \text{۴}, \text{۵} \end{cases}$$

در اینجا مثلاً $\chi_A(\text{۲}) = \text{۱}$ یعنی عدد دو عضو A است، و $\chi_A(\text{۴}) = \text{۰}$ یعنی عدد چهار عضو A نیست. به عبارت دیگر عدد دو ویژگی کوچک‌تر از چهار را دارد و عدد چهار ندارد. اکنون یک زیر مجموعه فازی از X تعریف می‌کنیم که «کوچک بودن» را نشان دهد. این مجموعه می‌تواند به وسیله‌ی تابع عضویت زیر تعریف شود

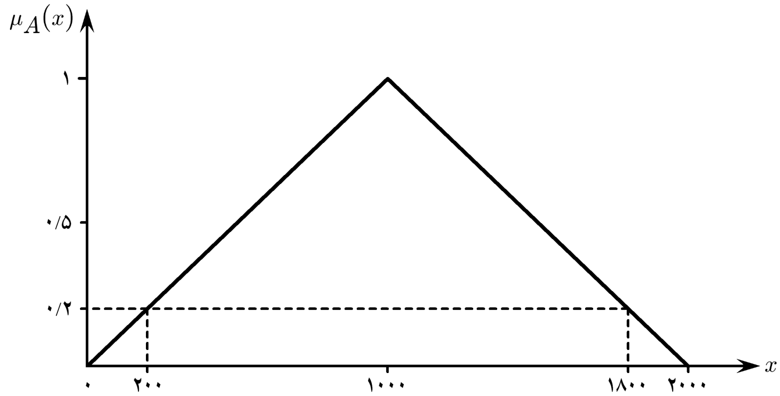
$$\mu_B(X) = \begin{cases} \text{۱} & x = \text{۱} \\ \text{۰/٦} & x = \text{۲} \\ \text{۰/۳} & x = \text{۳} \\ \text{۰/۱} & x = \text{۴} \\ \text{۰} & x = \text{۵} \end{cases}$$

در اینجا مثلاً $\mu_B(\text{۲}) = \text{۰/٦}$ یعنی عدد دو با درجه ۰/٦ عضو مجموعه فازی B است و $\mu_B(\text{۵}) = \text{۰}$ یعنی عدد پنج اصلاً عضو مجموعه فازی B نیست و $\mu_B(\text{۱}) = \text{۱}$ یعنی عدد یک کاملاً عضو مجموعه فازی B است. به عبارت دیگر عدد دو ویژگی «کوچک بودن» (به بیان فوق) را با درجه ۰/٦ داراست و عدد پنج اصلاً دارا نیست و عدد یک کاملاً واجد این ویژگی است.

مثال ۲.۲ فرض کنید مجموعه مرجع $X = [۰, ۲۰۰۰]$ باشد. یک زیر مجموعه فازی از X که نشان دهنده‌ی ویژگی «نزدیک ۱۰۰۰» باشد، می‌تواند توسط تابع عضویت زیر تعریف شود

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x}{۱۰۰۰} & x \leq ۱۰۰۰ \\ \frac{۲۰۰۰-x}{۱۰۰۰} & ۱۰۰۰ < x \end{cases}$$

در اینجا مثلاً $\mu_A(۲۰۰) = \mu_A(۱۸۰۰) = ۰/۲$ یعنی اعداد ۲۰۰ و ۱۸۰۰ هر دو با درجه ۰/۲ عضو مجموعه فازی A هستند و به عبارت دیگر با درجه ۰/۲ ویژگی «نزدیک به ۱۰۰۰» (به بیان فوق) را دارا می‌باشند. نمودار تابع عضویت مجموعه فازی A، که اصطلاحاً یک تابع عضویت مثلثی است، در شکل ۱.۲ رسم شده است.



شکل ۱.۲ نمودار تابع عضویت مجموعه فازی A: اعداد نزدیک به ۱۰۰۰.

نکته ۱.۲ قبل از ادامه‌ی بحث همین جا متذکر می‌شویم که افراد مختلف ممکن است نظرات متفاوتی درباره‌ی ویژگی‌هایی مانند «کوچک بودن» یا «نزدیک به هزار بودن» و مانند اینها داشته باشند، و در نتیجه توابع عضویت مختلفی برای زیر مجموعه‌های فازی که بیانگر این ویژگی‌ها باشد، در نظر بگیرند. خود شما می‌توانید یک تابع عضویت دیگر برای ویژگی «کوچک بودن» در مثال ۱.۲ ارائه دهید که، مثلاً، درجه کوچک بودن برای عدد سه چیزی غیر از ۰/۳ باشد.

بنابراین در تعیین تابع عضویت یک زیر مجموعه فازی، جنبه‌های ذهنی و شخصی بسیار مؤثر هستند. اینکه یک تابع عضویت چه ویژگی‌هایی دارد و یا باید داشته باشد و نیز چگونگی ساختن آن در موارد مختلف، از بحثهای اساسی نظریه مجموعه‌های فازی است. در آینده در این باره بیشتر صحبت می‌کنیم (ر.ک. ص ۱۳۹).

تذکر از این پس، برای سادگی از اصطلاح مجموعه فازی به جای زیر مجموعه فازی استفاده می‌کنیم. گاهی نیز، برای تأکید، اصطلاح «مجموعه فازی A از X» را به کار می‌بریم که منظور «زیر مجموعه فازی A از مجموعه مرجع X» است.

تعریف ۱.۲ فرض کنید X یک مجموعه مرجع و A یک مجموعه فازی از آن باشد. مجموعه نقاطی از X که برای آن نقاط $\mu_A(x) > 0$، تکیه گاه A نامیده شده و با $\operatorname{supp} A$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۲.۲ مقدار $M = \sup_x \mu_A(x)$ ارتفاع مجموعه A نامیده می‌شود. اگر ارتفاع مجموعه فازی A برابر یک باشد، A نرمال نامیده می‌شود. در غیر این صورت A را زیر نرمال گوییم. بدیهی است که هر مجموعه فازی زیر نرمال A را می‌توان با تقسیم $\mu_A(x)$ها بر ارتفاع A، نرمال کرد.

تعریف ۳.۲ اگر x عنصری باشد که برای آن $\mu_A(x) = \frac{1}{2}$، x را یک نقطه‌ی گذر (معبر) A گوییم.

مثال ۳.۲ برای مجموعه فازی B در مثال ۱، $\operatorname{supp} B = \{1, 2, 3, 4\}$. هم‌چنین $M = \sup_x \mu_B(x) = 1$ یعنی ارتفاع B برابر یک است و بنابراین B یک مجموعه فازی نرمال است. به علاوه B، هیچ نقطه‌ی گذر ندارد.

مثال ۴.۲ برای مجموعه فازی A در مثال ۲ داریم $\operatorname{supp} A = (0, 2000)$. هم‌چنین $M = \sup_x \mu_A(x) = 1$ یعنی ارتفاع A برابر یک است و بنابر این A، نرمال است. به علاوه چون $\mu_A(500) = \mu_A(1500) = 0/5$، نقاط $x = 500$ و $x = 1500$ دو نقطه‌ی گذر A هستند.

نمادگذاری

برای نشان دادن یک مجموعه فازی روش‌های مختلفی رایج است. یک روش همان است که در مثال‌های فوق از آن استفاده شد، یعنی به کار بردن مستقیم تابع عضویت مجموعه فازی. روش متداول دیگر توصیف یک مجموعه فازی به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های

مرتب به گونه‌ی زیر است

$$A = \{(x, \mu_A(x)); x \in X\}$$

اصولاً برخی از مؤلفین، یک مجموعه فازی را مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به صورت فوق تعریف کرده‌اند [۱۴۶]. هنگامی که مجموعه مرجع X یک مجموعه متناهی (یا نامتناهی شمارا) به صورت $\{x_۱, \ldots, x_n\}$ باشد، یک مجموعه فازی مانند A از X به صورت‌های زیر نیز نشان داده می‌شود

$$A = \left\{\frac{\mu_A(x_۱)}{x_۱}, \frac{\mu_A(x_۲)}{x_۲}, \ldots, \frac{\mu_A(x_n)}{x_n}\right\}$$

$$A = \mu_A(x_۱)/x_۱ + \ldots + \mu_A(x_n)/x_n = \sum_{i=۱}^{n} \mu_A(x_i)/x_i$$

که در عبارت اخیر، منظور از علامت $+$، اجتماع است نه جمع حسابی. هم چنین هنگامی که X یک مجموعه پیوسته باشد، گاهی از نماد زیر استفاده می‌شود

$$A = \int_X \mu_A(x)/x$$

که در آن منظور از علامت $\int$، اجتماع است.

مثال ۵.۲ فرض کنید $X = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰\}$. یک مجموعه فازی A از X را که نشان دهنده‌ی ویژگی «نه خیلی کوچک و نه خیلی بزرگ» باشد، می‌توان توسط تابع عضویت زیر تعریف کرد

$$\mu_A(X) = \begin{cases} ۰/۱ & x = ۲ \\ ۰/۳ & x = ۳ \\ ۰/۵ & x = ۴ \\ ۰/۸ & x = ۵ \\ ۰/۸ & x = ۶ \\ ۰/۵ & x = ۷ \\ ۰/۳ & x = ۸ \\ ۰/۱ & x = ۹ \\ ۰ & x = ۱, ۱۰ \end{cases}$$

با استفاده از نمادهایی که در بالا اشاره شد، A را می‌توان به صورت‌های زیر نیز نوشت

$$A = \{(۱, ۰), (۲, ۰/۱), (۳, ۰/۳), ..., (۹, ۰/۱), (۱۰, ۰)\}$$

$$A = \tfrac{۰}{۱} + \tfrac{۰/۱}{۲} + \tfrac{۰/۳}{۳} + \ldots + \tfrac{۰/۱}{۹} + \tfrac{۰}{۱۰}$$

توجه کنید که در این مثال $\operatorname{supp} A = \{۲, ۳, \ldots, ۹\}$. هم‌چنین $\sup_x \mu_A(x) = \mu_A(۵) = \mu_A(٦) = ۰/۸$ یعنی ارتفاع A برابر ۰/۸ است. پس A یک مجموعه فازی زیر نرمال است. به علاوه چون $\mu_A(۴) = \mu_A(۷) = ۰/۵$، اعداد چهار و هفت برای مجموعه فازی فوق دو نقطه‌ی گذر هستند.

مثال ٦.۲ فرض کنید $X = [۰, ۱۰۰]$ و $x \in X$ به عنوان سنّ تلقی شود. مجموعه فازی A از X که «پیری» را نشان دهد می‌تواند این گونه تعریف شود

$$\mu_A(X) = \begin{cases} ۰ & x \le ۵۰ \\ \frac{۱}{۱+(\frac{x-۵۰}{۵})^{-۲}} & ۵۰ < x \le ۱۰۰ \end{cases}$$

که با نماد اشاره شده در بالا به صورت زیر نیز بیان می‌شود

$$A = \int_{۵۰}^{۱۰۰} \frac{۱}{۱ + (\frac{x-۵۰}{۵})^{-۲}} / x$$

در این مثال $\operatorname{supp} A = (۵۰, ۱۰۰]$. هم‌چنین $\sup \mu_A(x) = ۰/۹۹$، پس A زیر نرمال است. چون $\mu_A(۵۵) = ۰/۵$، پس ۵۵ سالگی نقطه گذر (معبر) پیری است.

مثال ۷.۲ فرض کنید مجموعه مرجع مجموعه نقاط فضای دوبعدی $R^۲ = \{(x,y); x,y \in R\}$ باشد. یک مجموعه فازی را که بیان کننده رابطه $x + y \simeq ۵$ (مجموع طول و عرض نقطه تقریباً ۵) باشد، می‌توان با تابع عضویت زیر تعریف کرد

$$\mu_A(x,y) = \frac{۱}{۱ + |x + y - ۵|}$$

۲.۲ عملگرهای مجموعه‌ای

در این بخش عملگرهای مجموعه‌ای برای مجموعه‌های فازی تعریف می‌شوند. این عملگرها یک تعمیم طبیعی عملگرهای مجموعه‌ای برای مجموعه‌های معمولی است که در فصل اوّل مرور شدند. در تمامی موارد زیر، X یک مجموعه مرجع، و A و B و ... مجموعه‌های فازی آن هستند.

تذکر از این پس، برای اختصار، به جای $\mu_A(x)$ می‌نویسیم $A(x)$. هم‌چنین در حالت گسسته، x هایی را که برای آنها $\mu_A(x) = ۰$، نخواهیم نوشت.

تعریف ۴.۲ مجموعه فازی A را تهی گوییم اگر برای هر $x \in X$، $A(x) = 0$.

تعریف ۵.۲ گوییم مجموعه فازی A، زیر مجموعه‌ی مجموعه فازی B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$، اگر برای هر $x \in X$، $A(x) \leq B(x)$.

تعریف ۶.۲ مجموعه‌های فازی A و B را مساوی گوییم و می‌نویسیم $A = B$، اگر برای هر $A(x) = B(x), x \in X$.

تعریف ۷.۲ مجموعه فازی A^C، متمم مجموعه فازی A، توسط تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$A^C(x) = 1 - A(x), \quad \forall x \in X$$

تعریف ۸.۲ اگر $A \subseteq B$، آنگاه متمم نسبی A نسبت به B که با $B - A$ نشان داده می‌شود، به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$(B - A)(x) = B(x) - A(x), \quad \forall x \in X$$

مثال ۸.۲ فرض کنید $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$ و مجموعه فازی A از X نشان دهنده‌ی «نه خیلی کوچک و نه خیلی بزرگ»، و مجموعه فازی B از X نشان دهنده‌ی ویژگی «نزدیک به ۵» با توابع عضویت زیر تعریف شوند.

$$A = \left\{\frac{0/1}{2}, \frac{0/3}{3}, \frac{0/5}{4}, \frac{0/8}{5}, \frac{0/8}{6}, \frac{0/5}{7}, \frac{0/3}{8}, \frac{0/1}{9}\right\}$$
$$B = \left\{\frac{0/1}{1}, \frac{0/4}{2}, \frac{0/6}{3}, \frac{0/8}{4}, \frac{1}{5}, \frac{0/8}{6}, \frac{0/6}{7}, \frac{0/4}{8}, \frac{0/1}{9}\right\}$$

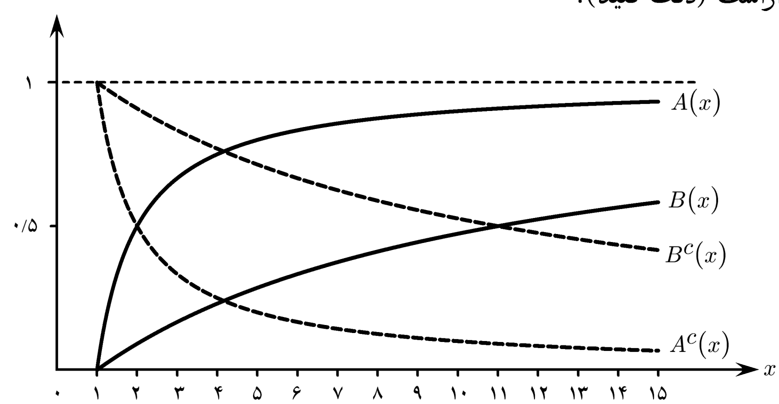
در این صورت چون برای هر x از X، $A(x) \leq B(x)$ پس $A \subseteq B$. هم‌چنین A^C و B^C و متمم نسبی A نسبت به B مجموعه‌های فازی زیر هستند

$$A^C = \left\{\frac{1}{1}, \frac{0/9}{2}, \frac{0/7}{3}, \frac{0/5}{4}, \frac{0/2}{5}, \frac{0/2}{6}, \frac{0/5}{7}, \frac{0/7}{8}, \frac{0/9}{9} \frac{1}{10}\right\}$$
$$B^C = \left\{\frac{0/9}{1}, \frac{0/6}{2}, \frac{0/4}{3}, \frac{0/2}{4}, \frac{0}{5}, \frac{0/2}{6}, \frac{0/4}{7}, \frac{0/6}{8}, \frac{0/9}{9} \frac{1}{10}\right\}$$
$$B - A = \left\{\frac{0/1}{1}, \frac{0/3}{2}, \frac{0/3}{3}, \frac{0/3}{4}, \frac{0/2}{5}, \frac{0}{6}, \frac{0/1}{7}, \frac{0/1}{8}\right\}$$

مثال ۹.۲ فرض کنید مجموعه مرجع، مجموعه اعداد حقیقی باشد یعنی $X = R$. مجموعه فازی A از X نشان دهنده‌ی ویژگی «نسبت به یک، بزرگ» و مجموعه فازی B از X نشان دهنده‌ی ویژگی «خیلی بزرگتر از یک» را با توابع عضویت زیر در نظر بگیرید

$$A(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{1}{1+(x-1)^{-1}} & 1 < x \end{cases} \qquad B(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{1}{1+10(x-1)^{-1}} & 1 < x \end{cases}$$

در این صورت $B \subseteq A$ زیرا برای هر x از X، $B(x) \leq A(x)$. یعنی هر عدد بزرگتر از یک را که در نظر بگیریم، ویژگی «نسبت به یک، بزرگ» را بیشتر از ویژگی «خیلی بزرگتر از یک» داراست (دقت کنید).



شکل ۲.۲ نمودار تابع عضویت مجموعه‌های فازی A و B و A^C و B^C مثال ۹.۲

تعریف ۹.۲ اجتماع دو مجموعه فازی A و B به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$(A \cup B)(x) = \max[A(x), B(x)], \quad \forall x \in X$$

تعریف ۱۰.۲ اشتراک دو مجموعه فازی A و B به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$(A \cap B)(x) = \min[A(x), B(x)], \quad \forall x \in X$$

مانند حالت معمولی، A و B را جدا از هم گوییم اگر $A \cap B = \phi$، یعنی اشتراک تکیه گاه‌های A و B تهی باشد.

نکته ۲.۲ یادآور می‌شویم عملگرهای max و min را، که نقش مهمّی در نظریه مجموعه‌های فازی ایفا می‌کنند، می‌توان بر حسب عملگرهای جبری معمولی به صورت زیر نوشت

$$\max(a,b)=\frac{a+b+|a-b|}{۲},\ \min(a,b)=\frac{a+b-|a-b|}{۲}$$

تعریف ۱۱.۲ فرض کنید k یک مجموعه اندیس گذار باشد و A_αها، $\alpha\in k$، زیر مجموعه‌های فازی از X باشند، آنگاه $\bigcup_{\alpha\in k} A_\alpha$ و $\bigcap_{\alpha\in k} A_\alpha$ به صورت مجموعه‌های فازی با توابع عضویت زیر تعریف می‌شوند

$$(\bigcup_{\alpha\in k} A_\alpha)(x)=\sup\{A_\alpha(x),\alpha\in k\}$$
$$(\bigcap_{\alpha\in k} A_\alpha)(x)=\inf\{A_\alpha(x),\alpha\in k\}$$

مثال ۱۰.۲ یک مجتمع مسکونی را در نظر بگیرید که دارای آپارتمان هایی با تعداد اطاق‌های از یک تا هفت است. بنابراین $X=\{۱,۲,\ldots,۷\}$ مجموعه انواع آپارتمان‌های موجود است که در آن $x\in X$، تعداد اطاق‌های یک آپارتمان فرض می‌شود. فرض کنید مجموعه فازی A: «آپارتمان‌های مناسب یک خانواده ۴ نفره» و مجموعه فازی B: «آپارتمان‌های بزرگ»، این گونه تعریف شوند

$$A=\left\{\frac{۰/۲}{۱},\frac{۰/۵}{۲},\frac{۰/۸}{۳},\frac{۱}{۴},\frac{۰/۷}{۵},\frac{۰/۳}{۶},\frac{۰/۱}{۷}\right\}$$
$$B=\left\{\frac{۰/۱}{۲},\frac{۰/۳}{۳},\frac{۰/۶}{۴},\frac{۰/۷}{۵},\frac{۰/۸}{۶},\frac{۱}{۷}\right\}$$

آنگاه $A\cup B$ که مجموعه فازی «آپارتمان‌های بزرگ یا مناسب یک خانواده ۴ نفره» است عبارت است از

$$A\cup B=\left\{\frac{۰/۲}{۱},\frac{۰/۵}{۲},\frac{۰/۸}{۳},\frac{۱}{۴},\frac{۰/۷}{۵},\frac{۰/۸}{۶},\frac{۱}{۷}\right\}$$

و $A\cap B$ که مجموعه فازی «آپارتمان‌های بزرگ و مناسب یک خانواده ۴ نفره» است عبارت است از

$$A\cap B=\left\{\frac{۰/۱}{۲},\frac{۰/۳}{۳},\frac{۰/۶}{۴},\frac{۰/۷}{۵},\frac{۰/۳}{۶},\frac{۰/۱}{۷}\right\}$$

در همین مثال، A^C یعنی مجموعه «آپارتمانهای نامناسب برای یک خانواده ۴ نفره» و B^C یعنی مجموعه «آپارتمان‌های غیر بزرگ» عبارتند از

$$A^C = \left\{ \frac{۰/۸}{۱}, \frac{۰/۵}{۲}, \frac{۰/۲}{۳}, \frac{۰}{۴}, \frac{۰/۳}{۵}, \frac{۰/۷}{۶}, \frac{۰/۹}{۷} \right\}$$
$$B^C = \left\{ \frac{۱}{۱}, \frac{۰/۹}{۲}, \frac{۰/۷}{۳}, \frac{۰/۴}{۴}, \frac{۰/۳}{۵}, \frac{۰/۲}{۶}, \frac{۰}{۷} \right\}$$

مثال ۱۱.۲ فرض کنید $X = R$، و A مجموعه فازی «اعداد نزدیک به یک» و B مجموعه فازی «اعداد نزدیک به دو» با توابع عضویت زیر باشند

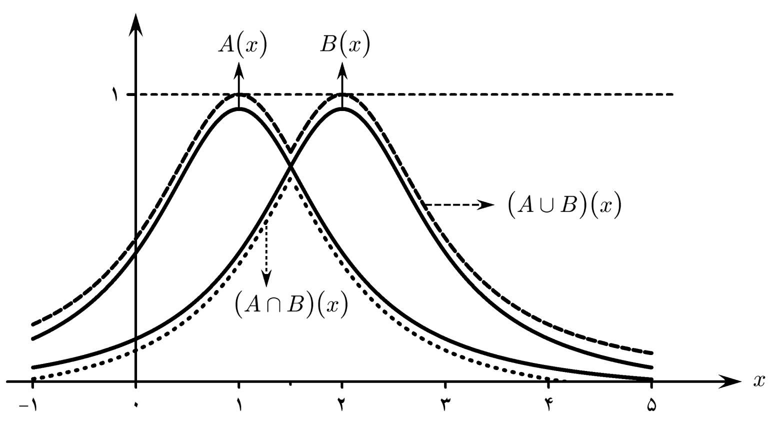
$$A(x) = \frac{۱}{۱ + (x - ۱)^۲},\ B(x) = \frac{۱}{۱ + (x - ۲)^۲}$$

آنگاه

$$(A \cup B)(x) = \max[A(x), B(x)] = \begin{cases} \frac{۱}{۱+(x-۱)^۲} & x \leq ۱/۵ \\ \frac{۱}{۱+(x-۲)^۲} & ۱/۵ < x \end{cases}$$

$$(A \cap B)(x) = \min[A(x), B(x)] = \begin{cases} \frac{۱}{۱+(x-۲)^۲} & x \leq ۱/۵ \\ \frac{۱}{۱+(x-۱)^۲} & ۱/۵ < x \end{cases}$$

در اینجا اجتماع A و B، یعنی مجموعه فازی «اعدادی که یا به یک نزدیک‌اند و یا به دو»، و اشتراک آنها یعنی مجموعه فازی «اعدادی که هم به یک نزدیک‌اند و هم به دو».



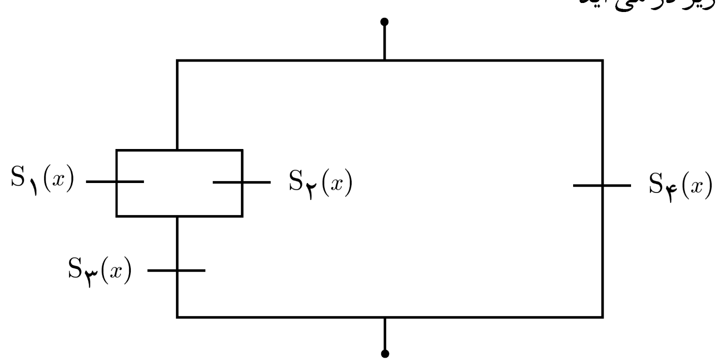
شکل ۳.۲ نمودار تابع عضویت مجموعه‌های فازی A و B و $A \cup B$ و $A \cap B$ مثال ۱۱.۲.

یک تعبیر برای اجتماع و اشتراک مجموعه‌های فازی

در حالت معمولی، هر مجموعه‌ی دلخواه C را که بر حسب مجموعه‌های $A_۱, \dots, A_n$ و با اعمال $\cup$ و $\cap$ بیان شده باشد می توان به صورت دسته‌ای از کلیدهای $a_۱, \dots, a_n$ (هر کدام با دو حالت ممکن روشن و خاموش) در نظر گرفت که $A_۱ \cap A_j$ و $A_i \cup A_j$ به ترتیب با حالت‌های ترکیب سری و موازی a_i و a_j متناظر باشند. در حالت مجموعه‌های فازی نیز می‌توان تعبیر مشابهی را بر حسب غربال‌ها در نظر گرفت. فرض کنید $A_i(x)$ مقدار تابع عضویت مجموعه فازی A_i در نقطه x باشد. متناظر با هر $A_i(x), i = ۱, \dots, n$، یک غربال $S_i(x)$ در نظر بگیرید که قطر سوراخ‌های آن به اندازه $A_i(x)$ باشد. حال ترکیب‌های $A_i(x) \vee A_j(x)$ و $A_i(x) \wedge A_j(x)$ به ترتیب با ترکیب‌های موازی و سری $S_i(x)$ و $S_j(x)$ متناظر می‌شوند. برای ترکیب‌های پیچیده‌تر که شامل تعداد بیشتری از $\cap$ و $\cup$ باشند نیز این روش را می‌توان به کار برد. مثلاً شبکه‌ی متناظر با مجموعه C که به شکل زیر تعریف می‌شود

$$C = [(A_۱ \cup A_۲) \cap A_۳] \cup A_۴$$

به صورت زیر در می آید



توجه کنید که اندازه‌ی قطر سوراخ های هر غربال، تنها وابسته به x است (درجه عضویت x در مجموعه‌ی متناظر باآن غربال). در نهایت برای هر x خاص، کلّ یک شبکه‌ی شامل چندین غربال، معادل با یک غربال است که قطر سوراخ‌های آن به اندازه $C(x)$ است. توضیح زیر، تعبیری را که برحسب غربال‌ها بیان کردیم، روشن‌تر می‌کند.

شبکه‌ای از غربال‌ها را در نظر بگیرید. می‌خواهیم ببینیم که این شبکه از غربال‌ها که هر کدام نماینده‌ی تابع عضویت یک مجموعه فازی است، مجموعاً به عنوان یک مجموعه فازی، چه تابع عضویتی دارد. برای این، لازم است یک تابع عضویت را به جای کلّ توابع عضویت موجود قرار دهیم. یعنی یک غربال را به جای کلّ غربال‌های موجود در

شبکه قرار دهیم. پس باید برای هر x، یک مقدار برای $C(x)$ متناظر کنیم که بیانگر درجه عضویت x در مجموعه فازی جانشین شده به جای کلّ این شبکه از مجموعه‌های فازی باشد. حال برای یک x داده شده، این‌گونه عمل می‌کنیم که ابتدا سوراخ‌های هر غربال شبکه را به اندازه‌ی درجه عضویت x در مجموعه فازی آن غربال تنظیم می‌کنیم. سپس به ترتیب گوی‌هایی را که قطر آنها از صفر شروع شده و مرتباً (به صورت پیوسته) افزایش یابد، از یک طرف وارد شبکه می‌کنیم. در این صورت قطر بزرگترین گوی که بتواند از یک طرف وارد شبکه شده و از طرف دیگر خارج شود، برابر خواهد بود با $C(x)$ ، یعنی درجه عضویت آن x در مجموعه فازی که می‌توانیم به جای کلّ این شبکه از مجموعه‌های فازی جایگزین کنیم. چنانچه برای تمام $x \in X$ این عمل را انجام دهیم، $C(x)$ به طور کامل به دست می‌آید.

۲.۳ ویژگی‌های مربوط به عملگرهای متمم و اجتماع و اشتراک

در این بخش چند قضیه ثابت می‌کنیم که نشان می‌دهند، تعاریف ارائه شده برای متمم و اجتماع و اشتراک مجموعه‌های فازی، دارای همان ویژگی‌های متمم، اجتماع و اشتراک مجموعه‌های معمولی می‌باشند. البته یک مورد تفاوت نیز وجود دارد که خاطر نشان خواهیم کرد.

قضیه ۱.۲ عملگرهای اجتماع و اشتراک بین دو مجموعه فازی، دارای ویژگی‌های خود توانی، جابجایی و شرکت‌پذیری هستند. یعنی برای هر A و B و C، مجموعه‌های فازی دلخواه،

$$\begin{array}{ll} A \cup A = A & A \cap A = A \\ A \cup B = B \cup A & A \cap B = B \cap A \\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C & A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{array}$$

اثبات. فرض کنید $A(x)$ و $B(x)$ و $C(x)$ به ترتیب توابع عضویت مجموعه‌های فازی A و B و C باشند. چون برای هر $x \in X$،

$$A(x) = \max[A(x), A(x)]$$

و

$$\max[A(x), B(x)] = \max[B(x), A(x)]$$

لذا $A \cup A = A$ و $A \cup B = B \cup A$. برای ویژگی شرکت‌پذیری اجتماع نیز مشاهده می‌کنیم که

$$\max[A(x), \max[B(x), C(x)]] = \max[\max[A(x), B(x)], C(x)]$$

اثبات روابط مربوط به اشتراک نیز به طور مشابه انجام می‌شود.

قضیه ۲.۲ عمل اجتماع نسبت به اشتراک و عمل اشتراک نسبت به اجتماع ویژگی توزیع‌پذیری دارند. یعنی

الف) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ب) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

اثبات. برای اثبات رابطه (الف) کافی است ثابت کنیم که برای هر $x \in X$،

$$\max[A(x), \min[B(x), C(x)]] = \min[\max[A(x), B(x)], \max[A(x), C(x)]]$$

برای بررسی رابطه فوق، کافی است شش حالت مختلف زیر را بررسی کنیم

۱− $A(x) \geq B(x) \geq C(x)$ ۲− $A(x) \geq C(x) \geq B(x)$

۳− $B(x) \geq A(x) \geq C(x)$ ۴− $B(x) \geq C(x) \geq A(x)$

۵− $C(x) \geq A(x) \geq B(x)$ ٦− $C(x) \geq B(x) \geq A(x)$

برای حالت اوّل، طرف چپ رابطه (الف) به صورت زیر است

$$\max[A(x), \min[B(x), C(x)]] = \max[A(x), B(x)] = A(x)$$

و طرف راست آن عبارت است از $\min[A(x), A(x)] = A(x)$. خواننده، خود می‌تواند درستی تساوی رابطه (الف) را برای پنج حالت دیگر بررسی کند. بدین ترتیب رابطه (الف) اثبات می‌شود. رابطه (ب) نیز به روشی مشابه اثبات می‌شود.

قضیه ۳.۲ (قوانین دمورگان) برای هر دو مجموعه فازی A و B داریم

الف) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

ب) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

اثبات. برای اثبات (الف) کافی است نشان دهیم که برای هر x از X،

$$۱ - \max[A(x), B(x)] = \min[۱ - A(x), ۱ - B(x)]$$

اگر برای $x \in X$، $A(x) \geq B(x)$ آنگاه هر دو طرف تساوی فوق برابر $۱ - A(x)$ خواهد شد. و اگر داشته باشیم $A(x) \leq B(x)$، آنگاه هر دو طرف تساوی فوق برابر $۱ - B(x)$ است. بنابراین رابطه فوق در هر حالتی برقرار است. اثبات رابطه (ب) نیز به طور مشابه انجام می‌شود.

نکته ۳.۲ تنها قوانین مربوط به مجموعه‌های معمولی که در زمینه‌ی مجموعه‌های فازی برقرار نیستند، قوانین مربوط به متمم (قوانین شمول و طرد) است (ر.ک. ص ۱۱). یعنی برای مجموعه فازی A، در حالت کلی

$$A \cap A^C \neq \phi, \ A \cup A^C \neq X$$

این از آنجا ناشی می‌شود که مجموعه‌های فازی A و A^C هیچ‌کدام کران‌های دقیقی ندارند. در نتیجه A و A^C تا اندازه‌ای همدیگر را در بردارند و اصطلاحاً همپوش هستند. البته این همپوشی محدود است، یعنی

$$\min[A(x), A^C(x)] \leq \frac{۱}{۲}\ , \ \forall x$$

به علاوه هرچند A و A^C با هم کلّ X را نمی پوشانند، ولی

$$\max[A(x), A^C(x)] \geq \frac{۱}{۲}\ , \ \forall x$$

مثال ۱۲.۲ فرض کنید X، مجموعه تمام گل‌ها و A زیر مجموعه فازی گل‌های قرمز باشد. در این صورت $A(x)$ بیانگر درجه‌ی قرمز بودن یگ گل خاص است. حال یک گل صورتی رنگ با درجه‌ای حدود ۰/۵ در A عضو است. به بیان ساده‌تر، یک گلِ صورتی رنگ تا اندازه‌ای یک گل قرمز است و در عین حال تا اندازه‌ای یک گل غیر قرمز است.

۲.۴ ساختار مجموعه‌ی زیر مجموعه‌های فازی یک مجموعه

فرض کنید X یک مجموعه مرجع و A و B و C زیر مجموعه‌های فازی دلخواه آن باشند. از تعاریف و قضایای بخش‌های ۲ و ۳ این فصل می‌توانیم ویژگی‌های مربوط به

عملگرهای اجتماع و اشتراک و متّمم مجموعه‌های فازی را به صورت زیر جمع‌بندی کنیم

$$\begin{array}{ll}
A\cap A=A & A\cup A=A\\
A\cup B=B\cup A & A\cap B=B\cap A\\
A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C & A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C\\
A\cup(A\cap B)=(A\cup B)\cap(A\cup C) & A\cap(A\cup B)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\\
(A\cup B)^C=A^C\cap B^C & (A\cap B)^C=A^C\cup B^C\\
A\cup\phi=A, A\cup X=X & A\cap\phi=\phi, A\cap X=A
\end{array}$$
$$\phi^C=X, X^C=\phi, (A^C)^C=A$$

اکنون اگر مجموعه‌ی تمام زیر مجموعه‌های فازی X را با $F(X)$ و مجموعه‌ی تمام توابع عضویت زیر مجموعه‌های فازی X را با $ME(X)$ نشان دهیم، متناظر با قضایای ۱.۲ و ۳.۲ فصل اول دو قضیه زیر به سادگی ثابت می‌شوند [۹].

قضیه ۴.۲ $(F(X),\cup,\cap,\subseteq)$ یک شبکه توزیع‌پذیر کامل است.

قضیه ۵.۲ $(ME(X),\vee,\wedge,\leq)$ یک شبکه توزیع‌پذیر کامل است و به علاوه با شبکه $(F(X),\cup,\cap,\subseteq)$ یکریخت است.

نکته ۴.۲ شبکه $(F(X),\cup,\cap,-)$ و نیز شبکه $(ME(X),\vee,\wedge,-)$، که با اولّی یکریخت است، جبر بولی نیستند. زیرا قوانین شمول و طرد یعنی رابطه‌های $A\cup A^C=X$ و $A\cap A^C=\phi$ (یا به طور متناظر، $A\vee A^C=1$ و $A\wedge A^C=0$) در مورد مجموعه‌های فازی برقرار نمی‌باشند. توجه کنید که سایر ویژگی‌های مربوط به یک جبر بولی که در بخش ۲.۱ بیان شد، برای ساختار شبکه‌ای $F(X)$ برقرار است. تنها تفاوت، در ویژگی مربوط به متمم است که البته این یک تفاوت مهم است [۶۵]. دراین باره، به بحث تکمیلی صفحه... نیز رجوع کنید.

۲.۵ بعضی عملگرهای دیگر

علاوه بر عملگرهای تعریف شده در بخش دوم تعدادی عملگر دیگر نیز برای مجموعه‌های فازی تعریف شده‌اند. در زیر به مهم‌ترین آنها اشاره می‌کنیم.

تعریف ۱۲.۲ جمع احتمالی دو مجموعه فازی A و B، که با $A+B$ نشان داده می‌شود، به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$(A+B)(x) = A(x) + B(x) - A(x).B(x)$$

تعریف ۱۳.۲ جمع کراندار دو مجموعه فازی A و B، که با $A \oplus B$ نشان داده می‌شود، به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$(A \oplus B)(x) = \min\{1, A(x) + B(x)\}$$

تعریف ۱۴.۲ تفاضل کراندار دو مجموعه فازی A و B، که با $A \ominus B$ نشان داده می‌شود، به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$(A \ominus B)(x) = \max\{0, A(x) + B(x) - 1\}$$

تعریف ۱۵.۲ ضرب جبری دو مجموعه فازی A و B، که با $A.B$ نشان داده می‌شود، به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می شود

$$(A.B)(x) = A(x).B(x)$$

قضیه زیر، که رابطه بین عملگرهای مختلف را نشان می‌دهد، به آسانی ثابت می‌شود.

قضیه ۶.۲ برای هر دو مجموعه فازی A و B،

$$A \ominus B \subseteq A.B \subseteq A \cap B \subseteq A \cup B \subseteq A + B \subseteq A \oplus B$$

یادآور می‌شویم که در نظریه مجموعه‌های فازی گاهی به جای استفاده از عملگر $\max$، از عملگرهای $A+B$ یا $A \oplus B$ و به جای استفاده از عملگر $\min$ از عملگرهای $A.B$ یا $A \ominus B$ استفاده می‌شود. در این باره، در بخش ۱.۳ به طور گسترده بحث خواهیم کرد.

تعریف ۱۶.۲ اگر A یک مجموعه فازی باشد، آنگاه αA که در آن $\alpha \in [0, 1]$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$(\alpha A)(x) = \alpha A(x)$$

تعریف ۱۷.۲ توان mام ($m > \circ$) مجموعه فازی A، که با A^m نشان داده می‌شود به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$A^m(x) = [A(x)]^m$$

به عنوان دو حالت خاص از تعریف فوق، عملگرهای تمرکز و گسترش (اتساع) بر مجموعه فازی A این گونه تعریف می‌شوند

$$CON(A) = A^{۲},\ DIL(A) = A^{\circ/۵}$$

در مسائل کاربردی، از عملگرهای تمرکز و گسترش، به ترتیب، برای مدل‌سازی قیدهای «بسیار» («خیلی») و «نسبتاً» استفاده می‌شود.

مثال ۱۳.۲ فرض کنید $X = \{۱, ۲, \ldots, ۱\circ\}$ مجموعه مرجع باشد. مجموعه فازی A از X، نشان دهنده‌ی ویژگی «کوچک بودن» به صورت

$$A = \left\{\frac{۱}{۱}, \frac{\circ/۸}{۲}, \frac{\circ/۶}{۳}, \frac{\circ/۳}{۴}, \frac{\circ/۱}{۵}\right\}$$

و مجموعه فازی B از X، نشان دهنده‌ی ویژگی «نزدیک به پنج» به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$B = \left\{\frac{\circ/۴}{۳}, \frac{\circ/۸}{۴}, \frac{۱}{۵}, \frac{\circ/۸}{۶}, \frac{\circ/۴}{۷}\right\}$$

در این صورت

$$A + B = \left\{\frac{۱}{۱}, \frac{\circ/۸}{۲}, \frac{\circ/۷۶}{۳}, \frac{\circ/۸۶}{۴}, \frac{۱}{۵}, \frac{\circ/۸}{۶}, \frac{\circ/۴}{۷}\right\}$$
$$A \oplus B = \left\{\frac{۱}{۱}, \frac{\circ/۸}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۵}, \frac{\circ/۸}{۶}, \frac{\circ/۴}{۷}\right\}$$
$$A \ominus B = \{\frac{\circ/۱}{۴}, \frac{\circ/۱}{۵}\}$$
$$A.B = \{\frac{\circ/۲۴}{۳}, \frac{\circ/۲۴}{۴}, \frac{\circ/۱}{۵}\}$$
$$\circ/۴A = \left\{\frac{\circ/۴}{۱}, \frac{\circ/۳۲}{۲}, \frac{\circ/۲۴}{۳}, \frac{\circ/۱۲}{۴}, \frac{\circ/\circ۴}{۵}\right\}$$
$$CON(A) = \left\{\frac{۱}{۱}, \frac{\circ/۶۴}{۲}, \frac{\circ/۳۶}{۳}, \frac{\circ/\circ۹}{۴}, \frac{\circ/\circ۱}{۵}\right\}$$
$$DIL(A) = \left\{\frac{۱}{۱}, \frac{\circ/۸۹}{۲}, \frac{\circ/۷۷}{۳}, \frac{\circ/۵۵}{۴}, \frac{\circ/۳۲}{۵}\right\}$$

در این مثال، $CON(A)$ توصیف کننده «بسیار کوچک» و $DIL(A)$ توصیف کننده «نسبتاً کوچک» است.

تعریف ۱۸.۲ فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$، n مجموعه مرجع، و $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ حاصلضرب دکارتی آنها باشد. هم‌چنین $A_1, \ldots, A_n$، n مجموعه فازی به ترتیب از $X_1, \ldots, X_n$ باشند. در این صورت حاصلضرب دکارتی $A_1, \ldots, A_n$ به صورت یک مجموعه فازی از X با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$(A_1 \times \ldots \times A_n)(x_1, \ldots, x_n) = \min\{A_1(x_1), \ldots, A_n(x_n)\}$$

مثال ۱۴.۲ فرض کنید $X_1 = \{۱, ۲\}$، $X_2 = \{۱, ۲, ۳\}$ و

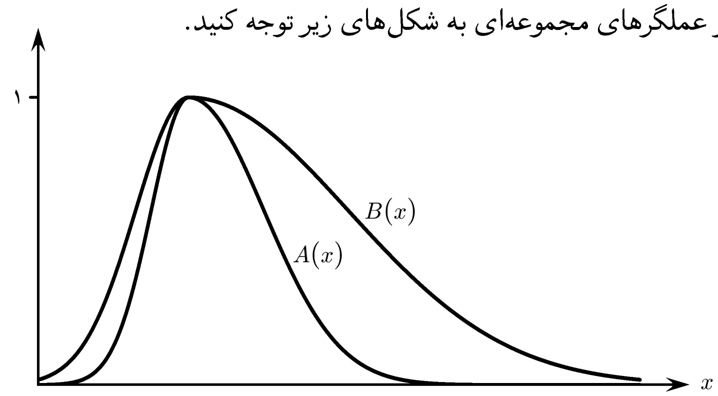
$$A_1 = \left\{\frac{۱}{۱}, \frac{۰/۲}{۲}\right\} \quad , \quad A_2 = \left\{\frac{۰}{۱}, \frac{۰/۴}{۲}, \frac{۰/۷}{۳}\right\}$$

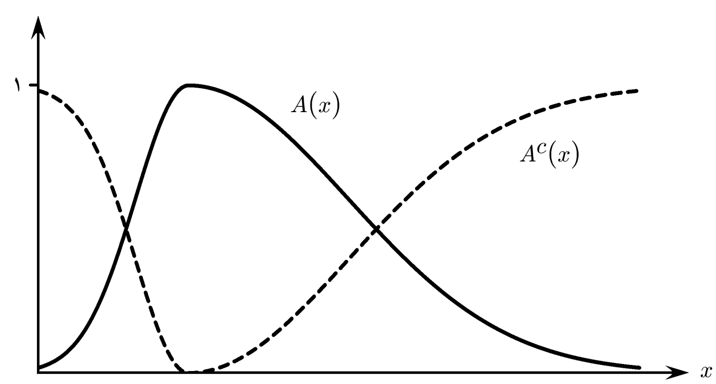
آنگاه

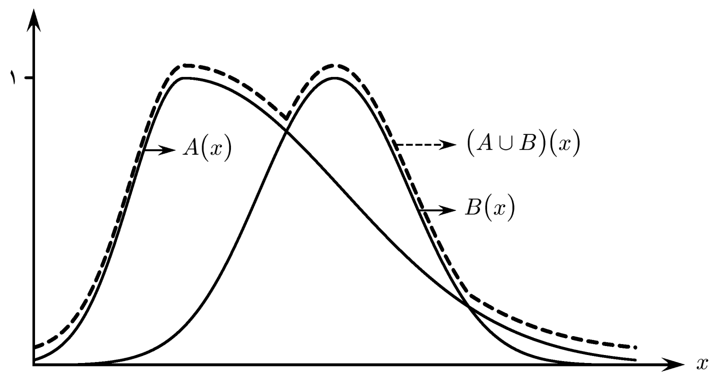
$$A_1 \times A_2 = \left\{\frac{۰}{(۱,۱)}, \frac{۰/۴}{(۱,۲)}, \frac{۰/۷}{(۱,۳)}, \frac{۰}{(۲,۱)}, \frac{۰/۲}{(۲,۲)}, \frac{۰/۲}{(۲,۳)}\right\}$$

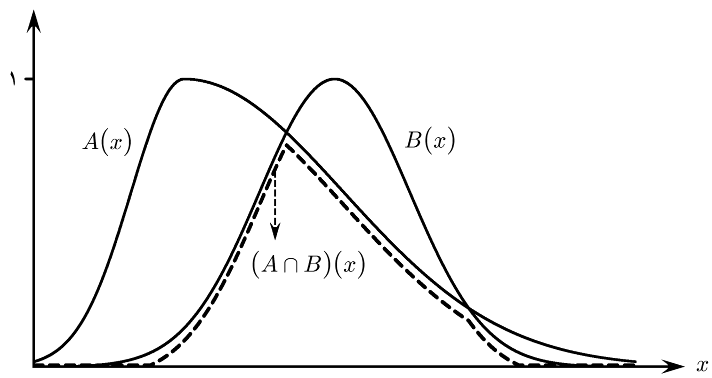
توصیف عملگرهای مجموعه‌ای با استفاده از نمودار

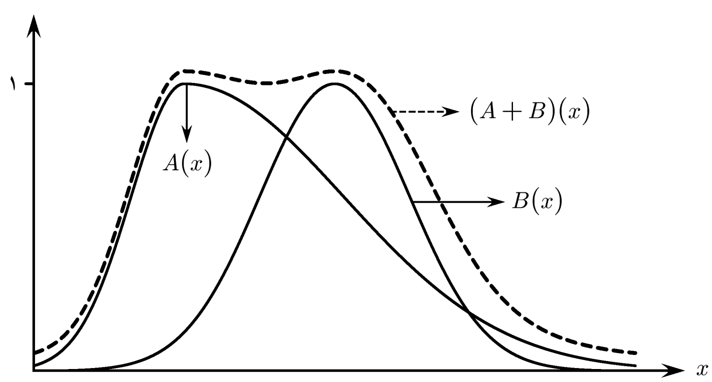
برای درک بهتر عملگرهای مجموعه‌ای به شکل‌های زیر توجه کنید.

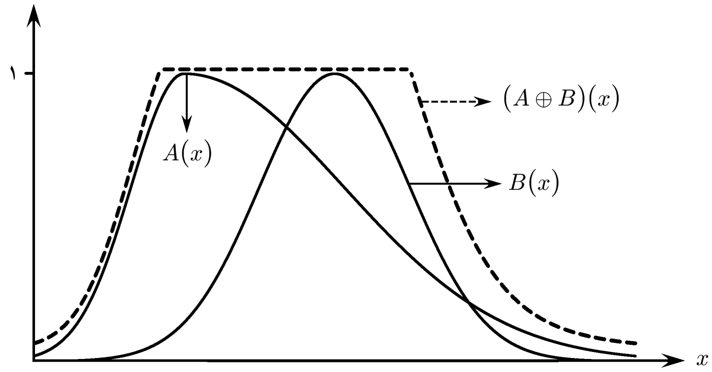


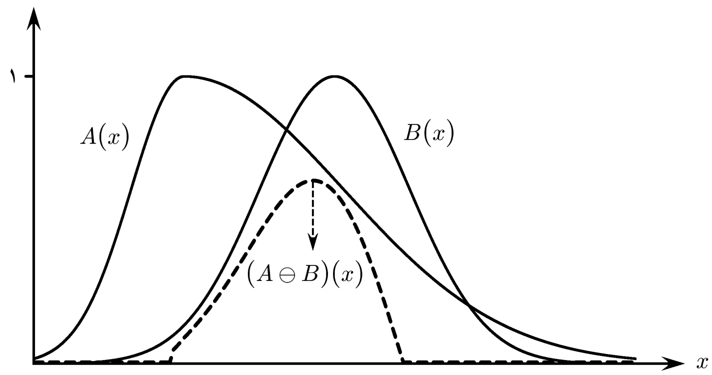


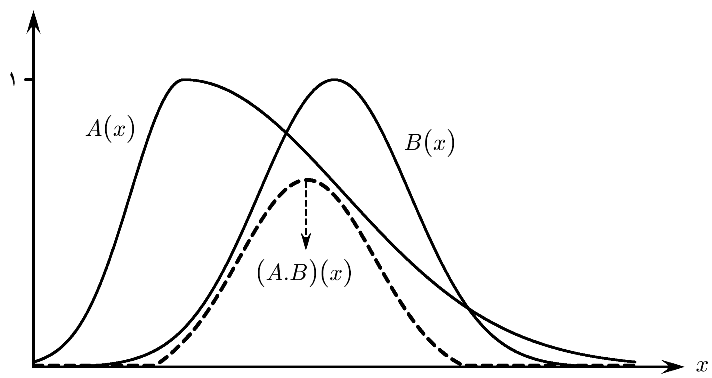

۱
$A(x)$
$(A \cup B)(x)$
$B(x)$
x


۱
$A(x)$
$B(x)$
$(A \cap B)(x)$
x


۱
$(A + B)(x)$
$A(x)$
$B(x)$
x

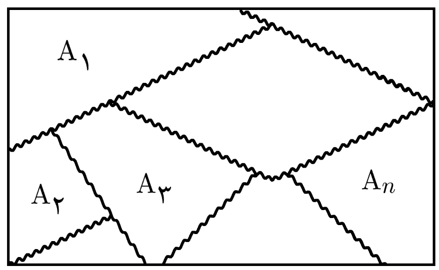

۱
$(A \oplus B)(x)$
$A(x)$
$B(x)$
x


۱
$A(x)$
$B(x)$
$(A \ominus B)(x)$
x


۱
$A(x)$
$B(x)$
$(A.B)(x)$
x

۲.۶ افراز فازی

تعریف ۱۹.۲ فرض کنید X یک مجموعه مرجع باشد و $A_1,\dots,A_n$ (برای هر A_i، $A_i \neq X$ و $A_i \neq \phi$) مجموعه‌های فازی از X باشند، به قسمی که برای هر x از X، $\sum_{i=1}^{n} A_i(x) = 1$، در این صورت گوییم مجموعه‌های فازی $A_1,\dots,A_n$ یک افراز فازی برای X تشکیل می‌دهند (شکل ۵.۲).



شکل ۵.۲ افراز فازی یک مجموعه، به چند مجموعه فازی.

تعریف افراز فازی از آنجا سرچشمه می‌گیرد که در عمل برای یک مجموعه‌ی خاص از اشیاء یا انسان‌ها یا اعداد یا... با ویژگی‌هایی سر و کار داریم که مجموعاً مکمل یکدیگرند امّا مرزهای دقیقی برای تمایز ندارند. مانند ویژگی‌های بلند قد بودن و متوسط قد بودن و کوتاه قد بودن برای انسانها. این ویژگی‌ها در عین حال که مکمل یکدیگرند، یعنی هر انسانی به هر حال از دایره‌ی افراد بلند قد و متوسط قد و کوتاه بیرون نیست، امّا مرز بین این ویژگی‌ها نیز دقیق نیست. یعنی بسیاری از انسان‌ها را هم می‌توان از زمره‌ی افراد بلند قد تلّقی کرد و هم متوسط قد، با این تفاوت که بعضی افراد بیشتر بلند قد تلقّی می‌شوند تا متوسط قد و بعضی دیگر بالعکس. این مشکل با تفکیک و افرازِ افراد به صورت یک افراز فازی (و نه افراز معمولی) حل می‌شود.

مثال ۱۵.۲ فرض کنید $X = \{1, 2, \dots, 10\}$ مجموعه مرجع باشد. دو مجموعه فازی A_1 و A_2 به ترتیب نمایانگر ویژگی‌های «کوچک بودن» و «بزرگ بودن» را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$A_1 = \left\{\frac{1}{1}, \frac{0/9}{2}, \frac{0/8}{3}, \frac{0/7}{4}, \frac{0/6}{5}, \frac{0/5}{6}, \frac{0/4}{7}, \frac{0/3}{8}, \frac{0/2}{9}, \frac{0}{10}\right\}$$
$$A_2 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{0/1}{2}, \frac{0/2}{3}, \frac{0/3}{4}, \frac{0/4}{5}, \frac{0/5}{6}, \frac{0/6}{7}, \frac{0/7}{8}, \frac{0/8}{9}, \frac{1}{10}\right\}$$

در اینجا A_1 و A_2 یک افراز فازی برای X تشکیل می‌دهند.

مثال ۱۶.۲ یک افراز فازی دیگر برای مجموعه مرجع X مثال فوق، با سه مجموعه فازی $B_۱$: «اعداد خیلی کوچک»، $B_۲$: «اعداد متوسط» (نه خیلی کوچک و نه خیلی بزرگ) و $B_۳$: «اعداد خیلی بزرگ» که به صورت زیر تعریف می‌شوند، حاصل می‌شود

$$B_۱ = \left\{ \frac{۱}{۱}, \frac{۰/۸}{۲}, \frac{۰/۵}{۳}, \frac{۰/۳}{۴}, \frac{۰}{۵}, \frac{۰}{۶}, \frac{۰}{۷}, \frac{۰}{۸}, \frac{۰}{۹}, \frac{۰}{۱۰} \right\}$$

$$B_۲ = \left\{ \frac{۰}{۱}, \frac{۰/۲}{۲}, \frac{۰/۵}{۳}, \frac{۰/۷}{۴}, \frac{۱}{۵}, \frac{۱}{۶}, \frac{۰/۷}{۷}, \frac{۰/۵}{۸}, \frac{۰/۲}{۹}, \frac{۰}{۱۰} \right\}$$

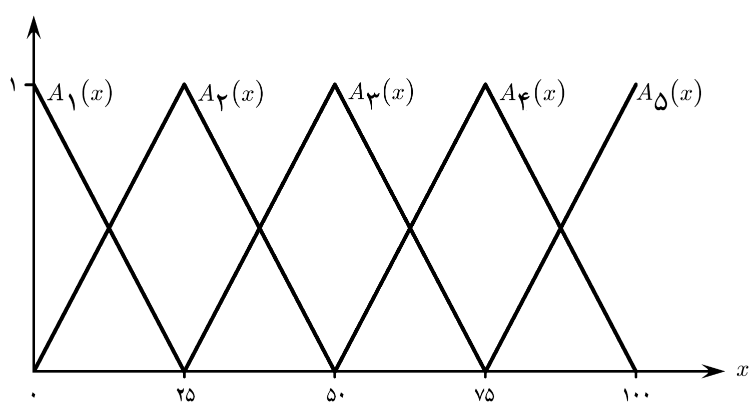
$$B_۳ = \left\{ \frac{۰}{۱}, \frac{۰}{۲}, \frac{۰}{۳}, \frac{۰}{۴}, \frac{۰}{۵}, \frac{۰}{۶}, \frac{۰/۳}{۷}, \frac{۰/۵}{۸}, \frac{۰/۸}{۹}, \frac{۱}{۱۰} \right\}$$

مثال ۱۷.۲ فرض کنید $X = [۰, ۱۰۰]$ مجموعه مرجع مربوط به درجه حرارت آب در یک ماشین لباس‌شویی باشد. این مجموعه را می‌توان با پنج مجموعه فازی زیر افراز کرد (شکل ۶.۲)

$$A_۱(x) = \begin{cases} \frac{۲۵-x}{۲۵} & x \leq ۲۵ \\ ۰ & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

$$A_۲(x) = \begin{cases} \frac{x}{۲۵} & ۰ \leq x \leq ۲۵ \\ \frac{۵۰-x}{۲۵} & ۲۵ \leq x < ۵۰ \\ ۰ & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \qquad A_۳(x) = \begin{cases} \frac{x-۲۵}{۲۵} & ۲۵ \leq x < ۵۰ \\ \frac{۷۵-x}{۲۵} & ۵۰ \leq x < ۷۵ \\ ۰ & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

$$A_۴(x) = \begin{cases} \frac{x-۵۰}{۲۵} & ۵۰ \leq x < ۷۵ \\ \frac{۱۰۰-x}{۲۵} & ۷۵ \leq x < ۱۰۰ \\ ۰ & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \qquad A_۵(x) = \begin{cases} \frac{x-۷۵}{۲۵} & x \geq ۷۵ \\ ۰ & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$



شکل ۶.۲ یک افراز فازی برای مجموعه $[۰, ۱۰۰]$.

۲.۷ α− برش‌ها

در این بخش به معرفی یکی از مفاهیم مفید و مهم که بیانگر نوعی رابطه بین یک مجموعه فازی و مجموعه‌های معمولی است می‌پردازیم.

تعریف ۲۰.۲ مجموعه (معمولی) عناصری را از X که درجه عضویت آنها در مجموعه فازی A حداقل به بزرگی $\alpha(\circ < \alpha)$ باشد، α− برش A (یا مجموعه تراز α وابسته به A) گوییم و با $A_{\bar{\alpha}}$ نشان می‌دهیم، یعنی

$$A_\alpha = \{x \in X | A(x) \geq \alpha\}$$

هم‌چنین α− برش قوی A، $A_{\bar{\alpha}}$، به صورت $A_{\bar{\alpha}} = \{x \in X | A(x) > \alpha\}$ تعریف می‌شود.

مثال ۱۸.۲ فرض کنید $X = \{۱, ۲, \ldots . ۱۰\}$ و زیر مجموعه فازی A از X که نشان دهنده‌ی ویژگی «حدوداً سه» است، این گونه تعریف شود

$$A = \left\{ \frac{\circ/۳}{۱}, \frac{\circ/۷}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{\circ/۷}{۴}, \frac{\circ/۳}{۵} \right\}$$

در این صورت چند α− برش A عبارت اند از

$$A_{\circ/۱} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} \qquad A_{\circ/\circ۳} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$$

$$A_{\circ/۷} = \{۲, , ۳, ۴\} \qquad A_{\circ/۸} = \{۳\} \qquad A_۱ = \{۳\}$$

و چند α− برش قوی A نیز این گونه است

$$A_{\overline{\circ/۱}} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} \qquad A_{\overline{\circ/\circ۳}} = \{۲, ۳, ۴\}$$

$$A_{\overline{\circ/۷}} = \{۳\} \qquad A_{\overline{\circ/۸}} = \{۳\} \qquad A_{\overline{۱}} = \phi$$

به طور خلاصه می‌توان نوشت

$$A_\alpha = \begin{cases} \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} & \circ < \alpha \leq \circ/۳ \\ \{۲, ۳, ۴\} & \circ/۳ < \alpha \leq \circ/۷ \\ \{۳\} & \circ/۷ < \alpha \leq ۱ \end{cases}$$

$$A_{\overline{\alpha}} = \begin{cases} \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} & \circ < \alpha < \circ/۳ \\ \{۲, ۳, ۴\} & \circ/۳ \leq \alpha < \circ/۷ \\ \{۳\} & \circ/۷ \leq \alpha < ۱ \\ \phi & \alpha = ۱ \end{cases}$$

نکته ۵.۲ بر پایه‌ی مفهوم $\alpha-$ برش، می‌توان توصیفی برای یک مجموعه فازی A به وسیله‌ی مجموعه‌های معمولی ارائه کرد:

$$A(x) = \sup_{0<\alpha}\{\alpha | x \in A_\alpha\},\ \forall x \in X$$

ویژگی‌های اساسی مربوط به $\alpha-$ برش‌ها در قضیه زیر بیان شده است.

قضیه ۷.۲

۱) خانواده $\{A_\alpha | \alpha \in [0,1]\}$ یکنواست، یعنی $0 < \alpha \leq \beta \leq 1 \Rightarrow A_\beta \subseteq A_\alpha$.

۲) برای هر $\alpha \in [0,1]$، $A \subseteq B \Leftrightarrow A_\alpha \subseteq B_\alpha$.

۳) الف) $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$، ب) $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$.

اثبات. اثبات قسمت‌های یک و دو بسیار ساده است. رابطه (۳.الف) را ثابت می‌کنیم. رابطه (۳.ب) به طور مشابه ثابت می‌شود. داریم

$$\begin{aligned}&(A \cup B)_\alpha = \{x \in X | (A \cup B)(x) \geq \alpha\} = \{x | \max[A(x), B(x)] \geq \alpha\}\\ &= \{x | A(x) \geq \alpha \quad \text{یا} \quad B(x) \geq \alpha\} = \{x | A(x) \geq \alpha\} \cup \{x | B(x) \geq \alpha\}\\ &= A_\alpha \cup B_\alpha\end{aligned}$$

شایان یادآوری است که روابط قضیه فوق برای $\alpha-$ برش‌های قوی نیز برقرارند. اکنون به بیان و تشریح یک رابطه‌ی اساسی، موسوم به اتحاد تجزیه، می‌پردازیم.

قضیه ۸.۲ **(اتحاد تجزیه)** هر مجموعه فازی مانند A را می‌توان به صورت زیر برحسب مجموعه‌های تراز آن تجزیه کرد

$$A = \bigcup_\alpha \alpha A_\alpha$$

که αA_α در تعریف ۱۷.۲ تعریف شده است. در بعضی موارد بسته به اینکه تابع عضویت A گسسته یا پیوسته باشد رابطه‌ی فوق به صورت‌های زیر نیز نوشته می‌شود

$$A = \int_0^1 \alpha A_\alpha \quad \text{یا} \quad A = \sum_\alpha \alpha A_\alpha$$

که البته در آنها $\int_0^1$ و $\sum_\alpha$، اجتماع A_αها را نشان می‌دهد.

مثال ۱۹.۲ برای مجموعه مثال ۱۸.۲ داریم

$$A_{۰/۳} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\},\ A_{۰/۷} = \{۲, ۳, ۴\},\ A_۱ = \{۳\}$$

پس می‌توانیم بنویسیم

$$A = ۰/۳\{\frac{۱}{۱}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۵}\} \cup ۰/۷\{\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}\} \cup ۱\{\frac{۱}{۳}\}$$

یا به طور خلاصه‌تر

$$A = ۰/۳\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} \cup ۰/۷\{۲, ۳, ۴\} \cup ۱\{۳\}$$

با استفاده از نماد $\sum$ نیز تجزیه فوق این گونه نوشته می‌شود

$$A = ۰/۳\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} + ۰/۷\{۲, ۳, ۴\} + ۱\{۳\}$$

مثال ۲۰.۲ فرض کنید مجموعه مرجع، مجموعه اعداد حقیقی باشد یعنی $X = R$. مجموعه فازی B را، بیانگر ویژگی «تقریباً صفر»، با تابع عضویت زیر در نظر بگیرید

$$B(x) = e^{-\frac{x^۲}{۲}}$$

دراین صورت برای هر $\alpha \in [۰, ۱]$ داریم

$$\begin{aligned} B_\alpha &= \{x \in R | B(x) \geq \alpha\} \\ &= \{x \in R | e^{-\frac{x^۲}{۲}} \geq \alpha\} \\ &= \{x \in R |\ |x| \leq \sqrt{-۲ln\alpha}\} \end{aligned}$$

پس مجموعه فازی B را می‌توان این گونه برحسب α− برش‌های آن تجزیه کرد

$$B = \bigcup_\alpha \alpha B_\alpha = \bigcup_\alpha \alpha\{x \in R \mid |x| \leq \sqrt{-۲ln\alpha}\}$$

در پایان این بخش خاطر نشان می‌کنیم که از اتحاد تجزیه نه تنها برای تجزیه یک مجموعه فازی به دنباله‌ای از مجموعه‌های معمولی می‌توان استفاده کرد، بلکه به عکس برای ترکیب دنباله‌ای از مجموعه‌های معمولی و به دست آوردن یک مجموعه فازی نیز می‌توان استفاده نمود.

قضیه ۹.۲ **(قضیه نمایش)** اگر $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n$ دنباله‌ای از مجموعه‌های معمولی باشند و $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ را به ترتیب به $A_1, A_2, \ldots, A_n$ نسبت دهیم به طوری که $\alpha_n > \ldots > \alpha_2 > \alpha_1$ $(0 < \alpha_i \leq 1)$، آنگاه می‌توان یک مجموعه فازی را با استفاده از اتحاد تجزیه به دست آورد.

مثال ۲۱.۲ فرض کنید مجموعه‌های معمولی A_1 تا A_4 و اعداد α_1 تا α_4 متناظر با آنها به صورت زیر داده شده باشند

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = 1 & A_1 = \{x_1\} \\ \alpha_2 = 0/7 & A_2 = \{x_1, x_2\} \\ \alpha_3 = 0/5 & A_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\} \\ \alpha_4 = 0/3 & A_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \end{array}$$

براساس قضیه نمایش داریم

$$\begin{aligned} \bigcup_\alpha \alpha A_\alpha &= \alpha_1 A_1 \cup \alpha_2 A_2 \cup \alpha_3 A_3 \cup \alpha_4 A_4 \\ &= \{\frac{1}{x_1}, \frac{0/7}{x_2}, \frac{0/5}{x_3}, \frac{0/3}{x_4}, \frac{0/5}{x_5}\} \end{aligned}$$

بدین ترتیب با دنباله‌ای از مجموعه‌های معمولی و با تلقی کردن آنها به عنوان مجموعه‌های تراز، یک مجموعه فازی ساخته می‌شود.

۲.۸ تحدّب

در نظریه مجموعه‌های فازی مفهوم تحدب نقش مهمی دارد و در زمینه‌های نظری و کاربردی استفاده‌ی بسیاری از آن می‌شود.

تعریف ۲۲.۲ مجموعه فازی A (از R) را محدب گوییم، اگر هر $\alpha-$ برش A (برای تمام $0 < \alpha \leq 1$) محدب باشد.

یک تعریف معادل برای تحدّب در گزاره زیر داده شده است.

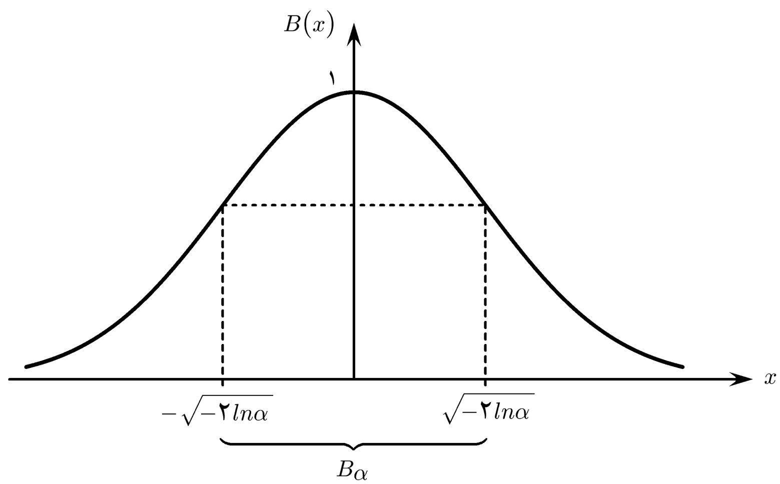
گزاره ۱.۲ مجموعه فازی A (از R) محدب است اگر و فقط اگر برای هر $x_2 \in X$ و x_1 و هر $\lambda \in [0, 1]$

$$A[\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2] \geq \min[A(x_1), A(x_2)]$$

مثال ۲۲.۲ مجموعه‌فازی B را در مثال ۲۱.۲ در نظر بگیرید. B یک مجموعه فازی محدب است، زیرا برای هر $\alpha > 0$ داریم

$$\begin{aligned} B_\alpha &= \{x \in R | B(x) \geq \alpha\} = \{x \in R | e^{\frac{x^2}{2}} \geq \alpha\} \\ &= \{x \in R | -\sqrt{-2ln\alpha} \leq x \leq \sqrt{-2ln\alpha}\} \end{aligned}$$

که به روشنی یک مجموعه محدب است. این نکته با توجه به نمودار تابع عضویت B نیز آشکار می‌شود.

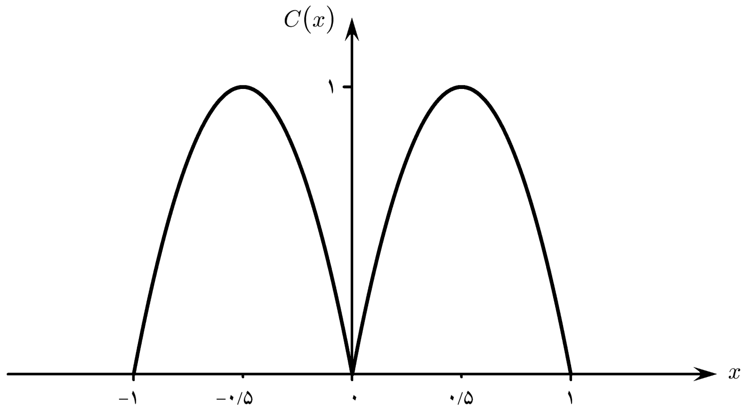


شکل ۷.۲ نمودار تابع عضویت یک مجموعه فازی محدب.

مثال ۲۳.۲ فرض کنید مجموعه فازی C، نشان دهنده‌ی ویژگی «قدر مطلق عدد، نزدیک به $\frac{1}{2}$»، با تابع عضویت زیر تعریف شود

$$C(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ 1 - 4(x + \frac{1}{2})^2 & -1 < x \leq 0 \\ 1 - 4(x - \frac{1}{2})^2 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & 1 < x \end{cases}$$

در اینجا C یک مجموعه فازی محدّب نیست. زیرا $\alpha > 0$ وجود دارد که C_α یک مجموعه معمولی محدب نیست. (بلکه در اینجا برای تمام $C_\alpha, \alpha > 0$ ها غیر محدب اند.) به نمودار تابع عضویت C در شکل ۸.۲ توجه کنید.



شکل ۸.۲ نمودار تابع عضویت یک مجموعه فازی غیر محدب.

مانند حالت معمولی، اگر A و B دو مجموعه فازی محدب باشند، اشتراک آنها نیز یک مجموعه فازی محدب است. درباره‌ی اجتماع این نتیجه برقرار نیست.

۹.۲ عدد اصلی و عدد اصلی فازی یک مجموعه فازی

تعریف ۲۳.۲ فرض کنید X یک مجموعه متناهی و A یک مجموعه فازی از آن باشد. عدد اصلی A و عدد اصلی نسبی A به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$|A| = \sum_{x\in X} A(x), \quad ||A|| = \frac{|A|}{|X|}$$

هم‌چنین در حالت X نامتناهی، عدد اصلی مجموعه فازی A از X به صورت زیر تعریف می‌شود (در صورت وجود)

$$|A| = \int_x A(x)dx$$

واضح است که تعریف فوق یک تعمیم طبیعی برای تعداد عناصر یک مجموعه معمولی است. می‌توان از عدد اصلی نسبی دو مجموعه فازی برای مقایسه آن‌ها استفاده کرد. در این موارد لازم است که مجموعه مرجع آنها یکسان باشد. هم‌چنین عدد اصلی نسبی A را می‌توان به عنوان نسبتی از اعضای X تلقی کرد که در A هستند. در بعضی از مراجع از اصطلاح توان به جای عدد اصلی یک مجموعه فازی استفاده شده است.

مثال ۲۴.۲ فرض کنید X مجموعه‌ی ساکنان یک شهر و A مجموعه فازی انسان‌های بیکار آن شهر باشد. اگر $A(x_i)$ بیانگر درجه عضویت شخص x_i در رده‌ی بیکارها باشد

(مثلاً $A(x_i) = ۰/۵$، اگر x_i نیمه وقت کار کند) آنگاه $|A|$ را می‌توان تعداد بیکاران تمام وقت آن شهر تعبیر کرد. هم‌چنین $||A||$ را می‌توان نسبتی از افراد شهر تلقّی کرد که به کلّی بیکار هستند.

مثال ۲۵.۲ خانواده‌ای شش نفره را در نظر بگیرید. فرض کنید مجموعه فازی افراد بیکار این خانواده اینگونه باشد

$$A = \left\{ \frac{۰}{\text{پدر}}, \frac{۰/۵}{\text{مادر}}, \frac{۰/۳}{\text{پسر بزرگ}}, \frac{۰/۷}{\text{پسر کوچک}}, \frac{۰/۵}{\text{دختر بزرگ}}, \frac{۱}{\text{دختر کوچک}} \right\}$$

در این صورت

$$|A| = \sum_{x \in X} A(x) = ۰ + ۰/۵ + \cdots + ۱ = ۳$$

به بیان دیگر، گویی سه نفر از افراد این خانواده تمام وقت کار می‌کنند و سه نفر تمام وقت بیکارند.

در تعریف ۲۳.۲ عدد اصلی یک مجموعه فازی به صورت یک عدد معمولی (غیر فازی) تعریف شد. می‌توان این مفهوم را به صورت یک مجموعه فازی نیز تعریف کرد. چیزی که به عدد اصلی فازی یک مجموعه موسوم است و بر اساس اتحاد تجزیه تعریف می‌شود.

تعریف ۲۴.۲ عدد اصلی فازی مجموعه فازی A از مجموعه مرجع گسسته X به صورت مجموعه فازی زیر تعریف می‌شود

$$|A|_f = \{(n, \alpha) | n \in N, \alpha = \sup\{\lambda, |A_\lambda| = n\}\}$$

مثال ۲۶.۲ عدد اصلی فازی مجموعه A مثال ۲۵.۲ را به دست می‌آوریم. داریم

$$\begin{array}{ll}
A_۱ = \{\text{دختر کوچک}\} & \Rightarrow |A_۱| = ۱ \\
A_{۰/۷} = \{\text{پسر کوچک و دختر کوچک}\} & \Rightarrow |A_{۰/۷}| = ۲ \\
A_{۰/۵} = \{\text{مادر و دختر بزرگ و پسر کوچک و دختر کوچک}\} & \Rightarrow |A_{۰/۵}| = ۴ \\
A_{۰/۳} = \{\text{پسر بزرگ و مادر و دختر بزرگ و پسر کوچک و دختر کوچک}\} & \Rightarrow |A_{۰/۳}| = ۵
\end{array}$$

پس

$$|A|_f = \{\frac{۱}{۱}, \frac{۰/۷}{۲}, \frac{۰/۵}{۴}, \frac{۰/۳}{۵}\}$$

تعبیری از $|A|_f$ به عنوان یک مجموعه فازی این می‌شود که: چون چهار نفر هستند که درجه عضویت آنها در A حداقل ۰/۵ است پس عدد اصلی مجموعه A با درجه ۰/۵

برابر چهار است. که یعنی، میزان بیکاری چهار نفر از اعضای خانواده‌ی فوق حداقل ۰/۵ است، و همین طور برای بقیه‌ی موارد.

۲.۱۰ اندازه ابهام یک مجموعه فازی

برای یک مجموعه فازی مانند A از مجموعه مرجع X، مقدار $A(x)$ نشان دهنده‌ی میزان عضویت x در A است. آشکار است که هر چه $A(x)$ به صفر یا یک نزدیک‌تر باشد ابهام کمتری در مورد عضویت x در A داریم، و هر چه $A(x)$ به $\frac{۱}{۲}$ نزدیک‌تر باشد ابهام در مورد x در A بیشتر است. پس با داشتن $A(x)$ ابهام در مورد عضویت تک تک عناصر x در A معلوم است. اکنون می‌خواهیم معیاری بیابیم تا ابهام کلی یک مجموعه فازی را اندازه‌گیری نماید.

در این باره شاخصی موسوم به شاخص ییگر را معرفی می‌کنیم.

شاخص ییگر مبتنی بر این ایده است که برای یک مجموعه دقیق (غیر فازی) A داریم: $A \cap A^c = \phi$. اکنون یک مجموعه فازی مانند A را در نظر بگیرید. واضح است که هر چه $A \cap A^c$ تفاوت بیشتری با مجموعه تهی داشته باشد، ابهام A بیشتر است. زیرا تفاوت بیشتر $A \cap A^c$ با مجموعه تهی بدین معنی است که درجه عضویت بیشتر عناصر X در مجموعه فازی A حول و حوش $\frac{۱}{۲}$ است (بیشترین ابهام هنگامی است که $A(x) = \frac{۱}{۲}, \forall x \in X$).

از سوی دیگر

$$(A \cap A^c)(x) = min\{A(x), ۱ - A(x)\} = \frac{۱}{۲}(۱ - |۲A(x) - ۱|)$$

لذا، در حالتی که X متناهی باشد، عدد اصلی A عبارت است از

$$|A| = \frac{۱}{۲}\Sigma_x(۱ - |۲A(x) - ۱|)$$

اکنون با تقسیم این عبارت بر $\frac{۱}{۲}|X|$ (که منجر به این ویژگی می‌شود که اندازه ابهام همواره بین ۰ و ۱ قرار داشته باشد) به یک تعریف مناسب برای اندازه ابهام می‌رسیم. این ایده را می‌توان به حالتی که X پیوسته است (با شرط وجود $|X|$) نیز تعمیم داد.

تعریف ۲۵.۲ اندازه ابهام مجموعه فازی A از مجموعه مرجع X به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Fuzz_Y(A) = \begin{cases} ۱ - \frac{\Sigma|۲A(x)-۱|}{|X|} & \text{حالت گسسته} \\ ۱ - \frac{\int|۲A(x)-۱|dx}{|X|} & \text{حالت پیوسته} \end{cases}$$

مثال ۲۷.۲ در تصمیم گیری در باره ی تزئین یک مکان، مجموعه گل‌های تزئینی عبارت است از

$$X = \left\{ \text{اقاقیا، مریم، ارکیده، لیلیوم، زنبق} \right\}$$

از دو نفر خواسته می‌شود تا مجموعه فازی گل‌های زیبا (در اینجا: مناسب برای تزئین) را معرفی کنند. مجموعه‌های فازی زیر ارائه می‌شوند

$$A_۱ = \left\{ \frac{۰/۵}{\text{زنبق}}, \frac{۰/۷}{\text{لیلیوم}}, \frac{۰/۶}{\text{ارکیده}}, \frac{۰/۷}{\text{مریم}}, \frac{۰/۵}{\text{اقاقیا}} \right\}$$

$$A_۲ = \left\{ \frac{۰/۸}{\text{زنبق}}, \frac{۰/۳}{\text{لیلیوم}}, \frac{۰/۲}{\text{ارکیده}}, \frac{۰/۸}{\text{مریم}}, \frac{۱}{\text{اقاقیا}} \right\}$$

در اینجا، ابهام مجموعه‌های فازی $A_۱$ و $A_۲$ (ابهام دیدگاه‌های دو نظر دهنده)، بر اساس شاخص ییگر، عبارت است از

$$Fuzz_Y(A_۱) = ۱ - \frac{\Sigma|۲A_۱(x) - ۱|}{|X|} = ۱ - \frac{۴}{۵} = ۰/۸۰,$$

$$Fuzz_Y(A_۲) = ۱ - \frac{\Sigma|۲A_۲(x) - ۱|}{|X|} = ۱ - \frac{۶/۴}{۵} = ۰/۳۶.$$

برای مطالعه‌ی بیشتر

بخش ۱.۲

مفهوم مجموعه فازی، نخستین بار به وسیله‌ی پروفسور زاده [] در سال ۱۹۶۵ م. (۱۳۴۴ ه.ش.) معرفی شد. البته پیش از آن، نیاز به چنین مفهومی توسط تنی چند از فیلسوفان و

برخی از ریاضیدانان و دانشمندان علوم تجربی مطرح شده بود. در جدیدترین بررسی‌ها، [] تاریخچه‌ای از پیدایش این مفهوم را همراه با فهرستی از منابع، ارائه داده است. درباره‌ی مبانی و نتایج فکری و فلسفی نظریه مجموعه‌های فازی، کتاب کاسکو [] (ترجمه شده: []) و مقالات [] شایان توجه‌اند. به فارسی نیز تاکنون چندین مقاله (تالیف یا ترجمه) در معرفی این نظریه چاپ شده است که از جمله می‌توان به [] اشاره کرد.

تاریخچه‌ای از پیدایش و شکوفایی نظریه مجموعه‌های فازی، با تکیه بر زندگی پروفسور زاده، توسط دختر وی، فِی زاده، در کتابی با عنوان «زندگی پدر منطق فازی» [] ارائه شده است.

بخش‌های ۲.۲ و ۳.۲

مفاهیم اولیه‌ی مربوط به عملگرهای مجموعه‌ای توسط زاده [] ارائه شد. در همه‌ی کتاب‌هایی که درباره‌ی نظریه مجموعه‌های فازی نگاشته شده است می‌توان مطالبی را درباره‌ی این عملگرها و ویژگی‌های آنها و مقایسه با حالت معمولی (غیر فازی) به دست آورد. از جمله می‌توان به [] اشاره کرد.

بخش ۴.۲

ساختار زیرمجموعه‌های فازی یک مجموعه، از دیدگاه نظری حائز اهمیت است. این که چنین ساختاری چه شباهت‌ها و چه تفاوت‌هایی با ساختار زیرمجموعه‌های معمولی یک مجموعه دارد، و موضوعاتی ازین دست، مورد توجه فازی ریاضی‌دانان، به ویژه محققان جبر فازی، است. علاقمندان به این موضوع را به منابعی هم‌چون [] (برای مرور کوتاه) و [] (برای مطالعه‌ی ژرف‌تر) ارجاع می‌دهیم.

بخش ۵.۲

عملگرهای گوناگونی که بر مجموعه‌های فازی تعریف شده‌اند، عمدتاً بر دو نوع هستند: عملگرهایی که بر یک مجموعه عمل می‌کنند (مانند متمم، تمرکز، ...) و عملگرهایی که یک نوع انبوهش (الحاق / Aggregation) بین دو مجموعه را انجام می‌دهند (مانند ضرب، جمع احتمالی، مینیمم، ماکزیمم، ...). برای مطالعه‌ی بیشتر در مورد عملگرهای مجموعه‌ای، منابع [] مناسب هستند.

بخش ۶.۲

افراز فازی در مباحث مختلفی مانند طراحی متغیرهای ورودی یک سیستم فازی []، برخی مباحث آمار و احتمال فازی [] و خوشه‌بندی فازی [] مورد توجه است. از دیدگاه نظری نیز این موضوع بررسی شده است که علاقمندان را برای نمونه به [] ارجاع می‌دهیم.

بخش ۷.۲

اتحاد تجزیه، و متعاقب آن قضیه نمایش، که مبتنی بر مفهوم α—برش‌ها هستند، نقش کلیدی در بسیاری از مباحث نظری و کاربردی مجموعه‌های فازی دارند. برای مطالعه بیشتر در این باره می‌توانید به [] مراجعه کنید.

بخش‌های ۸.۲ و ۹.۲

آنچه در این بخش مطرح شد، مروری مختصر بر مفاهیم $\alpha-$ برش‌ها، تحدب بود. برای بحث‌های تکمیلی دیگر، مانند تحدب اکید و درجه جدایی دو مجموعه فازی، و هم چنین در باره‌ی عدد اصلی یک مجموعه فازی، می‌توانید به مراجعی که در مورد بخش‌های ۲.۲ و ۳.۲ اشاره شد مراجعه کنید.

بخش ۱۰.۲

در زمینه‌ی اندازه ابهام یک مجموعه فازی، شیوه‌های مختلف و شاخص‌های متعددی پیشنهاد شده است. در این زمینه مراجع [] مفید هستند.

درباره‌ی مطالب این فصل و مطالعه‌ی بیشتر جزئیات آن می‌توانید به کتاب‌هایی که تاکنون درباره‌ی نظریه مجموعه‌های فازی نوشته شده‌اند، مراجعه کنید. برای نمونه می‌توان به [۱۷] و [۴۴] و [۷۰] و [۷۱] و [۷۲] و [۹۴] و [۱۴۶] اشاره کرد. درباره‌ی مفاهیم کلّی مجموعه‌های فازی چند مقاله به زبان فارسی تألیف یا ترجمه شده‌اند. برای نمونه می‌توان به [۲] و [۳] و [۹] اشاره کرد.

تمرین‌ها

۱.۲ به نظر شما در بین اعداد صفر تا صد، عدد ۲۲ هر یک از ویژگی‌های زیر را تا چه اندازه‌ای دارد؟ جواب‌های خود را به صورت اعدادی از بازه [۰, ۱] بیان کنید.

بزرگ، بسیار بزرگ، تقریباً ۲۵، بسیار کوچک، تقریباً ۲۲، دور از ۱۵، مجذور تقریباً ۵.

۲.۲ در یک روز تابستانی درجه حرارت $۳۰^{\circ C}$ است. به نظر شما هر یک از عبارات زیر در توصیف شدّت گرمای این روز تا چه اندازه «درست» است؟

هوا بسیار گرم است. هوا گرم است. درجه حرارت تقریباً °۳۰ است. درجه حرارت °۳۵ است. هوا سرد است. درجه حرارت خیلی بیشتر از °۲۵ است. درجه حرارت کمی بیشتر از °۲۵ است.

۳.۲ فرض کنید مجموع مرجع $X = \{۱, ۲, ۳, \dots, ۱۰\}$ باشد. هر یک از ویژگی‌های زیر را با یک مجموعه فازی مدل‌سازی کنید.

تقریبا ۵، بسیار بزرگ‌تر از ۵، کوچک و دور از ۴، بزرگ ولی نه بزرگ‌تر از هفت، بسیار کوچک، بزرگ ولی نه بسیار بزرگ‌تر از ۷.

۴.۲ برای مجموعه‌هایی که در مسأله ۳.۲ تعریف کردید، تکیه‌گاه و ارتفاع و معبر (در صورت وجود) را بیابید. تعیین کنید هر یک نرمال است یا زیر نرمال. هم‌چنین عدد اصلی و عدد اصلی نسبی هر مجموعه را بیابید.

۵.۲ مجموعه‌های فازی را که در مسأله ۳.۲ تعریف کردید، به وسیله‌ی هر سه نوع نمادگذاری بیان شده در صفحه ۲۹ بنویسید.

۶.۲ فرض کنید مجموعه مرجع $X = R^+ \cup \{۰\}$ باشد. هر یک از ویژگی‌های زیر را با یک مجموعه فازی مدل‌سازی کنید.

بزرگ، خیلی بزرگ، تقریباً صفر، دور از ۱۰۰، کوچک ولی نه کوچک‌تر از ۵، بسیار بسیار کوچک.

۷.۲ برای مجموعه‌هایی که در مسأله ۶.۲ تعریف کردید، تکیه‌گاه و ارتفاع و معبر (در صورت وجود) را بیابید. تعیین کنید هر یک نرمال است یا زیر نرمال.

۸.۲ یک مجموعه فازی زیر نرمال مثال بزنید (با تعبیر واقعی و عینی).

۹.۲ فرض کنید مجموعه مرجع مجموعه نقاط فضای سه بعدی $R^{۳}$ باشد. یک مجموعه فازی برای مجموعه نقاطی که «تقریباً روی کره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع r» هستند، تعریف کنید.

۱۰.۲ در یک سیستم پردازش تصویر، برای تشخیص اشیاء یک منطقه، دو مجموعه فازی زیر برای تصویرهای یک اتومبیل و یک کامیون ارائه شده‌اند

$$\text{اتومبیل} = \left\{ \frac{۰/۵}{\text{کامیون}}, \frac{۱}{\text{اتومبیل}}, \frac{۰/۶}{\text{قایق}}, \frac{۰/۱}{\text{خانه}}, \frac{۰/۳}{\text{موتورسیکلت}} \right\}$$

$$\text{کامیون} = \left\{ \frac{۱}{\text{کامیون}}, \frac{۰/۴}{\text{اتومبیل}}, \frac{۰/۳}{\text{قایق}}, \frac{۰/۲۵}{\text{خانه}}, \frac{۰/۱}{\text{موتورسیکلت}} \right\}$$

مجموعه‌های فازی زیر را بیابید و توصیف هر کدام را بیان کنید

الف) کامیون $\cup$ اتومبیل　　　　ب) ^{C}کامیون $\cap$ اتومبیل

پ) کامیون $\cap$ اتومبیل　　　　ت) ^{C}اتومبیل $\cap$ اتومبیل

۱۱.۲ فرض کنید $X = \{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$، و مجموعه‌های فازی A و B و C از X این گونه تعریف شوند

$$A = \{\frac{۱}{۱}, \frac{۰/۸}{۲}, \frac{۰/۶}{۳}, \frac{۰/۴}{۴}, \frac{۰/۲}{۵}\}$$
$$B = \{\frac{۰/۲}{۶}, \frac{۰/۴}{۷}, \frac{۰/۶}{۸}, \frac{۰/۸}{۹}, \frac{۱}{۱۰}\}$$
$$C = \{\frac{۰/۲}{۱}, \frac{۰/۴}{۲}, \frac{۰/۶}{۳}, \frac{۰/۸}{۴}, \frac{۱}{۵}, \frac{۰/۸}{۶}, \frac{۰/۶}{۷}, \frac{۰/۴}{۸}, \frac{۰/۲}{۹}\}$$

الف) برای هر یک از مجموعه‌های فازی بالا، توصیف مناسبی ارائه دهید.

ب) A^{C} و B^{C} و $A \cup B$ و $B \cap C$ را بیابید.

پ) درستی قوانین توزیع پذیری را برای مجموعه‌های فوق بررسی کنید.

ت) درستی قوانین دمورگان را برای مجموعه‌های B و C بررسی کنید.

ث) برقرار نبودن قوانین شمولیت و طرد را برای مجموعه B بررسی کنید.

۱۲.۲ فرض کنید $X = \{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$، و مجموعه فازی A از X برای توصیف ویژگی «کوچک» این گونه تعریف شده باشد

$$A = \{\frac{۱}{۱}, \frac{۰/۸}{۲}, \frac{۰/۶}{۳}, \frac{۰/۴}{۴}, \frac{۰/۲}{۵}\}$$

براساس A، مجموعه‌های فازی «اعداد خیلی کوچک» و مجموعه فازی «اعداد نسبتاً کوچک» چه توابع عضویتی می‌توانند داشته باشند؟

۱۳.۲ در نظر است در یک فضای عمومی تعدادی از یک نوع درخت کاشته شود. مجموعه درختان مورد توجه عبارت است از

$$X = \{\text{افرا}, \text{کاج}, \text{صنوبر}, \text{سرو}\}$$

مجموعه‌های فازی زیر، با توجه به نظر کارشناسان و/یا مردم ساکن در منطقه، تعریف شده‌اند

$$\text{درختان با رشد سریع} = \left\{\frac{۰/۸}{\text{افرا}}, \frac{۰/٦}{\text{کاج}}, \frac{۰/۵}{\text{صنوبر}}, \frac{۰/۵}{\text{سرو}}\right\}$$

$$\text{درختان با جلوه‌ی زیبا} = \left\{\frac{۰/٦}{\text{افرا}}, \frac{۰/۲}{\text{کاج}}, \frac{۰/۸}{\text{صنوبر}}, \frac{۰/۹}{\text{سرو}}\right\}$$

$$\text{درختان با نیاز به آب کم} = \left\{\frac{۰/۴}{\text{افرا}}, \frac{۱}{\text{کاج}}, \frac{۰/٦}{\text{صنوبر}}, \frac{۰/۷}{\text{سرو}}\right\}$$

مجموعه‌های فازی زیر را به دست آورید

الف) درختان با جلوه‌ی زیبا و نیاز به آب کم،

ب) درختان با رشد سریع و نیاز به آب کم،

پ) درختان با جلوه‌ی بسیار زیبا یا رشد سریع،

ت) درختان با رشد نسبتاً سریع و نیاز به آب کم.

۱۴.۲ موارد تمرین ۱۳.۲ را با استفاده از عملگر ضرب برای اشتراک و عملگر جمع احتمالی برای اجتماع به دست آورید.

۱۵.۲ مجموعه‌های فازی A و B زیر را در نظر بگیرید

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x}{۱۵} & ۰ \le x < ۱۵ \\ \frac{۲۵-x}{۱۰} & ۱۵ \le x < ۲۵ \\ ۰ & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \qquad B(x) = \begin{cases} ۰ & x \le ۰ \\ \frac{۱}{۱+۱۰x^{-۱}} & ۰ < x \end{cases}$$

الف) نمودار توابع عضویت مجموعه‌های A و B را رسم کنید و یک توصیف مناسب برای هر مجموعه ارائه دهید.

ب) تکیه‌گاه، ارتفاع و معبر (در صورت وجود) A و B را بیابید. تعیین کنید هر کدام از این مجموعه‌ها نرمال است یا زیر نرمال.

پ) A^C و B^C و $A \cup B$ و $A \cap B$ را بیابید و نمودار توابع عضویت آنها را رسم کنید.

ت) اگر A مجموعه فازی اعداد تقریباً ۱۵، و B مجموعه فازی اعداد بزرگ تعبیر شوند، مجموعه‌های فازی زیر چه تابع عضویتی خواهند داشت؟
اعداد تقریباً ۱۵ و نه بزرگ، اعداد دور از ۱۵ یا بزرگ.

۱۶.۲ در ارزیابی کیفیت یک تلویزیون عوامل گوناگونی اهمیت دارند. تعدادی از مهم‌ترین آن‌ها عبارتند از: وضوح تصویر، کیفیت صدا، قدرت گیرندگی کانال‌های مختلف، قیمت مناسب و امکانات جانبی. ۵ نوع تلویزیون صاایران، پارس، صنام، JVC، و دوو مورد بررسی قرار گرفته‌اند. بنا به نظر افراد خبره، و/یا اظهار نظر مشتریان، مجموعه‌های فازی زیر در مورد میزان تطابق هر نوع تلویزیون با ویژگی‌های بالا ارائه شده است

$$\text{کیفیت خوب تصویر} = \left\{ \frac{\text{۰/۷۵}}{\text{صاایران}}, \frac{\text{۰/۷۵}}{\text{پارس}}, \frac{\text{۰/۸}}{\text{صنام}}, \frac{\text{۰/۹}}{JVC}, \frac{\text{۰/۸}}{\text{دوو}} \right\}$$

$$\text{کیفیت خوب صدا} = \left\{ \frac{\text{۰/۸}}{\text{صاایران}}, \frac{\text{۰/۷}}{\text{پارس}}, \frac{\text{۰/۶۵}}{\text{صنام}}, \frac{\text{۰/۷۵}}{JVC}, \frac{\text{۰/۷۵}}{\text{دوو}} \right\}$$

$$\text{قدرت گیرندگی قوی} = \left\{ \frac{\text{۰/۹}}{\text{صاایران}}, \frac{\text{۰/۷}}{\text{پارس}}, \frac{\text{۰/۸}}{\text{صنام}}, \frac{\text{۰/۷}}{JVC}, \frac{\text{۱}}{\text{دوو}} \right\}$$

$$\text{قیمت مناسب} = \left\{ \frac{\text{۰/۸}}{\text{صاایران}}, \frac{\text{۰/۷}}{\text{پارس}}, \frac{\text{۰/۸}}{\text{صنام}}, \frac{\text{۰/۶}}{JVC}, \frac{\text{۰/۷۵}}{\text{دوو}} \right\}$$

$$\text{امکانات جانبی مناسب} = \left\{ \frac{\text{۰/۸}}{\text{صاایران}}, \frac{\text{۱}}{\text{پارس}}, \frac{\text{۰/۸}}{\text{صنام}}, \frac{\text{۰/۷}}{JVC}, \frac{\text{۰/۷}}{\text{دوو}} \right\}$$

مجموعه‌های فازی زیر را بیابید و هر یک از آن‌ها را توصیف کنید
الف) تلویزیون‌های با کیفیت خوب تصویر و قدرت گیرندگی قوی،
ب) تلویزیون‌های با کیفیت خوب تصویر و قدرت گیرندگی قوی و امکانات جانبی مناسب،
پ) تلویزیون‌های با قیمت مناسب و امکانات جانبی مناسب،
ت) تلویزیون‌های با (کیفیت خوب تصویر و کیفیت خوب صدا) یا قیمت مناسب،
ث) تلویزیون‌های با کیفیت بسیار خوب تصویر یا قدرت گیرندگی نسبتاً قوی،
ج) تلویزیون‌های با کیفیت بسیار خوب صدا یا قیمت نسبتاً مناسب.

۱۷.۲ موارد تمرین ۱۶.۲ را با استفاده از عملگر ضرب برای اشتراک و عملگر جمع احتمالی برای اجتماع به دست اورید.

۱۸.۲ در مسأله ۱۵.۲، $A \cup A^C$ و $A \cap A^C$ را بیابید و آنها را در قالب کلمات توصیف کنید.

۱۹.۲ با مفروضات مسأله ۱۱.۲، مجموعه‌های $A + C$ و $A \oplus C$ و $A \ominus C$ و $A.C$ را بیابید. $A \cup C$ و $A + C$ و $A \oplus C$ را با یکدیگر و هم‌چنین $A \cap C$ و $A \ominus C$ و $A.C$ را با یکدیگر مقاسیه کنید.

۲۰.۲ با استفاده از نتایج مسأله ۱۹.۲، درستی رابطه قضیه ۶.۲ را بررسی کنید.

۲۱.۲ دو ملاک اصلی در کیفیت تلویزیون‌ها عبارت است از: کیفیت صدا و تصویر، و امکانات جانبی. فرض کنید مجموعه حالت‌های ممکن برای کیفیت صدا و تصویر (بر حسب شاخص‌های صوتی ـتصویری) $P = \{x_۱, x_۲, x_۳\}$ و مجموعه مرجع مربوط به امکانات جانبی (بر حسب شاخص‌های مربوطه) $F = \{y_۱, y_۲, y_۳, y_۴\}$ باشد. مجموعه فازی A : «کیفیت بالای صدا و تصویر» و مجموعه فازی B : «امکانات جانبی مناسب» به صورت زیر تعریف شده‌اند

$$A = \left\{ \frac{۰/۳}{x_۱}, \frac{۰/۷}{x_۲}, \frac{۱}{x_۳} \right\}, B = \left\{ \frac{۰/۲}{y_۱}, \frac{۰/۵}{y_۲}, \frac{۰/۸}{y_۳}, \frac{۱}{y_۴} \right\}$$

حاصل‌ضرب دکارتی $A \times B$ را بیابید و تعبیر آن را بیان کنید.

۲۲.۲ مجموعه $X = \{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ را به وسیله‌ی دو مجموعه فازی که یکی بیانگر اعداد نزدیک ۵ و دیگری بیانگر اعداد دور از ۵ باشد، افراز کنید.

۲۳.۲ مجموعه $X = [۰, ۱۰۰]$ را به وسیله‌ی سه مجموعه فازی که بیانگر کوچک، متوسط و بزرگ باشند، افراز کنید.

۲۴.۲ مجموعه فازی A بیانگر اعداد «نزدیک صفر» این گونه تعریف شده است

$$A(x) = \begin{cases} \frac{۱۰+x}{۱۰} & x < ۰ \\ \frac{۱۰-x}{۱۰} & x \geq ۰ \end{cases}$$

$CON(A)$ و $DIL(A)$ را بیابید و نمودار تابع عضویت آنها را به همراه نمودار $A(x)$ رسم کنید. مقادیر $A(x)$ و $CON(A)(x)$ و $DIL(A)(x)$ را برای چند x دلخواه بیابید و مقایسه کنید.

۲۵.۲ ثابت کنید که برای هر دو مجموعه فازی A وB : $A \subseteq B$ اگر و تنها اگر $A_\alpha \subseteq B_\alpha$ (برای هر $۰ < \alpha \leq ۱$).

۲۶.۲ برای مجموعه فازی A مسأله ۱۲.۲، $A_{۰/۲}$ و $A_{۰/۲۵}$ و $A_{۰/۷۵}$ را بیابید.

۲۷.۲ در مسأله ۱۲.۲، $A_{۰/۳}$ و $(DIL(A))_{۰/۳}$ و $(CON(A))_{۰/۳}$ را بیابید و مقایسه کنید.

۲۸.۲ مجموعه فازی A مسأله ۱۲.۲ و مجموعه فازی A مسأله ۲۳.۲ را بر حسب مجموعه‌های تراز آنها تجزیه کنید.

۲۹.۲ عدد اصلی فازی مجموعه A در مسأله ۱۲.۲ را بیابید و آن را تعبیر کنید.

۳۰.۲ فرض کنید مجموعه مرجع مجموعه اعداد حقیقی باشد، یعنی $X = R$. کدام یک از مجموعه‌های فازی که تابع عضویت آنها داده شده است، محدب‌اند؟ نمودار تابع عضویت هر کدام را رسم کنید.

الف) $A(x) = \frac{۱}{۱+x^{۲}}$

ب) $B(x) = ۱ - e^{-x^{۲}}$

پ) $C(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ \frac{۱}{۱+x^{-۱}} & x \geq ۰ \end{cases}$ ت) $D(x) = \begin{cases} x^{۲} & -۱ \leq x \leq ۱ \\ ۰ & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$

۳۱.۲ گزاره ۱.۲ را ثابت کنید.

۳۲.۲ ثابت کنید

الف) $A.(B \cup C) = (A.B) \cup (A.C)$

ب) $A.(B \cap C) = (A.B) \cap (A.C)$

۳۳.۲ بررسی کنید که آیا رابطه‌های زیر در مورد تعویض‌پذیری عمل متمم و عمل $\alpha-$برش برقرار است یا خیر

الف) $(A^{C})_{\alpha} = (A_{\alpha})^{C}$

ب) $(A^{C})_{\alpha} = (A_{\overline{۱-\alpha}})^{C}$

۳۴.۲ فرض کنید A و B دو مجموعه فازی از مجموعه مرجع دلخواه X باشند. ثابت کنید

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

فصل ۳

درباره‌ی عملگرهای مربوط به اشتراک، اجتماع و متمم

نیست موجودی که نبود غرقه‌ی گرداب وهم
بحر هم عمری است دست موج بالا می‌کند
بیدل دهلوی [1]

مقدمه

در فصلی که پیش رو دارید، درباره‌ی عملگرهای مجموعه‌ای که در نظریه و کاربرد مجموعه‌های فازی استفاده می‌شوند، بیشتر بحث می‌کنیم. سعی خواهیم کرد به این گونه پرسش‌ها پاسخ دهیم: چرا در تعمیم مفاهیم اجتماع و اشتراک از عملگرهای max و min استفاده می‌شود واین کار چه توجیه مستدلّی دارد؟ برای تعریف اجتماع و اشتراک از چه عملگرهای دیگری به جای max و min می‌توان استفاده کرد؟ قالب کلّی این عملگرهای جانشین چیست؟ چرا عملگر متمّم به صورتی که در فصل دوم آمد تعریف شده است و نه

[1] بیدل دهلوی (از سخن سرایان شیوه‌ی هندی در قرن ۱۱)، نقل از: دیوان بیدل دهلوی، به کوشش خلیلا... خلیلی، تهران، ۱۳۸۴.

به صورتی دیگر؟ هم‌چنین برای تعریف متمم یک مجموعه فازی چه روش‌های دیگری وجود دارد؟

۳.۱ ویژگی‌های عملگرهای min و max

در این بخش نشان می‌دهیم که تعمیم مفاهیم اشتراک و اجتماع، و تعریف آن‌ها با استفاده از عملگرهای min و max، نه تنها تعمیم‌ها و تعریف‌های طبیعی هستند، بلکه، تحت شرائط و فرض‌های کاملاً معقول، تنها تعاریف ممکن می‌باشند. فرض کنید X یک مجموعه مرجع و A و B دو مجموعه فازی از X باشند. برای هر $x \in X$، عدد $A(x)$ درجه عضویت x در مجموعه A و به عبارت دیگر درجه پذیرش ما در قبول x به عنوان یک عضو از A است. و همین‌طور برای $B(x)$. حال می‌خواهیم بدانیم که درجه عضویت x در اجتماع و اشتراک این دو مجموعه چقدر است؟ یعنی درجه پذیرش ما در قبل x به عنوان یک عضو در هر دو مجموعه A و B، هم‌چنین درجه پذیرش x به عنوان عضوی از A یا عضوی از B. مسلماً ما خواهان آن هستیم که به محض دانستن درجات عضویت x در A و در B، درجه عضویت آن در $A \cap B$ و در $A \cup B$ به طریقی کاملاً معّین و دقیق معلوم شود. به عبارت دیگر می‌خواهیم دو تابع دو متغیره مانند $T(x,y)$ و $S(x,y)$ ($0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq 1$) داشته باشیم که درجات عضویت x در $A \cap B$ ودر $A \cup B$ را برحسب درجات عضویت x در A و در B (و نه چیز دیگر) بیان کنند. یعنی توابعی به صورت زیر

$$\begin{aligned}(A \cap B)(x) &= T[A(x), B(x)]\\(A \cup B)(x) &= S[A(x), B(x)]\end{aligned}$$

اکنون به این مسأله‌ی مهم می‌پردازیم که توابع T و S به طور طبیعی و شهودی چه ویژگی‌هایی باید داشته باشند.

۱) T و S باید متقارن، جابه‌جاپذیر، شرکت‌پذیر و نسبت به هم توزیع‌پذیر باشند. اینها ویژگی‌هایی است که به طور شهودی، اعمال اشتراک و اجتماع باید آن‌ها را دارا باشند. به علاوه می خواهیم T و S تعمیمی طبیعی برای اشتراک و اجتماع معمولی باشند، و می‌دانیم که در حالت معمولی این ویژگی‌ها برقرارند.

۲) $T(x,x)$ و $S(x,x)$ باید برحسب x اکیداً صعودی باشند. زیرا اگر $A(x_1) = B(x_1) > A(x_2) = B(x_2)$، مسلماً درجه پذیرش ما نسبت به عضویت x_1 در مجموعه $A \cap B$ (و در $A \cup B$) بیشتر است از درجه پذیرش ما نسبت به عضویت x_2 در مجموعه $A \cap B$ (و در $A \cup B$).

۳) توابع T و S برحسب هریک از دو متغیر x و y باید غیر نزولی و پیوسته باشند. زیرا وقتی درجه عضویت x در A یا در B افزایش یابد، مسلماً درجه عضویت آن در $A \cap B$ و نیز در $A \cup B$ کاهش نخواهد یافت. به علاوه مایل نیستیم که افزایشی کوچک در اندازه عضویت x در A یا در B، به افزایش بزرگی در عضویت x در $A \cap B$ یا در $A \cup B$ منجر شود.

۴) باید داشته باشیم $T(x,y) \leq \min\{x,y\}$ و $S(x,y) \geq \max\{x,y\}$. زیرا درجه پذیرش ما به عضویت x در $A \cup B$ حداقل به بزرگی درجه پذیرش ما به عضویت x در هر یک از دو مجموعه A و B است. هم‌چنین درجه پذیرش ما به عضویت x در $A \cap B$ کمتر است از درجه پذیرش عضویت x در هر کدام از دو مجموعه A و B.

۵) مسلماً عضویت کامل در A و در B، عضویت کامل در $A \cap B$ را لازم می‌آورد، و عدم عضویت کامل در A و در B عدم عضویت کامل در $A \cup B$ را. یعنی $T(۱,۱) = ۱$ و $S(\circ,\circ) = \circ$.

بلمن و گیرتز [۲۳] ثابت کرده‌اند توابعی که در شرایط معقول فوق صدق می‌کنند، منحصراً عبارتند از

$$T(x,y) = \min\{x,y\},\ S(x,y) = \max\{x,y\}$$

قضیه ۱.۳ (بلمن – گیرتز) فرض کنید $I = [\circ,۱]$، $T : I \times I \to I$، $S : I \times I \to I$ توابع پیوسته‌ای باشند که در شرایط زیر صدق کنند

۱) $S(x,y) = S(y,x)$ $\qquad T(x,y) = T(y,x)$

۲) $S[S(x,y),z] = S[x,S(y,z)]$ $\qquad T[T(x,y),z] = T[x,T(y,z)]$

۳) $S[x,T(y,x)] = T[S(x,y),S(x,z)]$ $\qquad T[x,S(y,z)] = S[T(x,y),T(x,z)]$

۴) T و S به عنوان توابعی یک متغیره اکیداً صعودی باشند، یعنی اگر $x_۱ < x_۲$، آن‌گاه

$$T(x_۱,x_۱) < T(x_۲,x_۲), \quad S(x_۱,x_۱) < S(x_۲,x_۲)$$

۵) T و S برحسب هر یک از دو مؤلفه، غیر نزولی و پیوسته باشند.

٦) $S(x,y) \geq \max\{x,y\}$ و $T(x,y) \leq \min\{x,y\}$

۷) $S(\circ,\circ) = \circ$ و $T(۱,۱) = ۱$

آن‌گاه منحصراً

$$T(x,y) = \min\{x,y\}, \quad S(x,y) = \max\{x,y\}$$

اثبات. ابتدا نتایجی از فرض‌های یک تا هفت فراهم می‌آوریم. تابع $h(x) = T(x,x)$ را در نظر بگیرید. طبق فرض شش، $h(0) = 0$ و طبق فرض هفت $h(1) = 1$. چون تابع h پیوسته و اکیداً صعودی است، پس تابعی یک به یک از I به I است. اگر $h(x) = a$، آن‌گاه با استفاده از شرایط ۳ و ۶ داریم

$$T(x,x) = a \leq S[a, T(a,a)] = T[S(a,a)]$$

بنابراین با استفاده از شرط ۴ خواهیم داشت $x \leq S(a,a)$. از طرف دیگر

$$x \geq T[x, S(x.x)] = S[T(x,x), T(x,x)] = S(a,a)$$

پس باید داشته باشیم $x = S(a,a)$. لذا برای هر $a \in [0,1]$ داریم

$$T(x,x) = a \Leftrightarrow x = S(a,a) \qquad (۱.۳)$$

از آنچه آمد معلوم می‌شود که

$$T[x, S(x,x)] = S[x, T(x,x)] = x \qquad (۲.۳)$$

حال اگر در رابطه $x = S[x, T(x,x)]$ قرار دهیم $x = S(a,a)$، به دست می آوریم

$$\begin{aligned} S(a,a) &= S\{S(a,a), T[S(a,a), S(a,a)]\} \\ &= S[S(a,a), a] \end{aligned}$$

و با در نظر گرفتن شرط ۲

$$S(a,a) = S\{S[S(a,a), a], a\} = S[S(a,a), S(a,a)]$$

و از شرط ۴ نتیجه می‌شود که

$$S(a,a) = a$$

هم‌چنین به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که $T(a,a) = a$. بنابراین برای هر $a \in I$،

$$S(a,a) = T(a,a) = a \qquad (۳.۳)$$

و بر پایه‌ی شرط ۶ و رابطه ۳.۳ خواهیم داشت

$$S[a, T(a,b)] = T[a, S(a,b)] = a \qquad (۴.۳)$$

زیرا

$$\begin{aligned} a \leq S[a, T(a,b)] &= T[S(a,a), S(a,a)] \\ &= T[a, S(a,b)] \leq a \end{aligned}$$

اکنون بر اساس نتایج فوق و برای اثبات قضیه، فرض می‌کنیم دو عدد a و b $a \geq b$ از I داده شده باشند. چون طبق شرط ۵، تابع $T(a,x)$ برحسب x غیر نزولی و پیوسته است و به علاوه از شرط ٦، $T(a,0) = 0$ و از رابطه ۳.۳، $T(a,a) = a$؛ پس باید یک c وجود داشته باشد که $T(a,c) = b$ و آن‌گاه با استفاده از رابطه ۴.۳ نتیجه می‌گیریم که

$$S(a,b) = S[a, T(a,c)] = a = \max\{a,b\}$$

سرانجام، با استفاده از رابطه ۳.۳ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} T(a,b) &= T[a, T(a.c)] = T[T(a,a), c] \\ &= T(a,c) = b = \min\{a,b\} \end{aligned}$$

نکته ۱.۳ خاطر نشان می‌کنیم که شرایط ۱ تا ۷ در مفروضات قضیه بالا، با شرایط زیر در زمینه‌ی مجموعه‌های معمولی متناظر است

'۱) $A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$

'۲) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $\qquad$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

'۳) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\qquad$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

'۴) اگر $A \subset B$ آن‌گاه

$$A \cap A \subset B \cap B \qquad A \cup A \subset B \cup B$$

'۵) اگر $A_1 \subset A_2$ آن‌گاه

$$A_1 \cap B \subseteq A_2 \cap B \qquad A_1 \cup B \subseteq A_2 \cup B$$

'٦) $A \cup B \supseteq A, B$ $\qquad$ $A \cap B \subseteq A, B$

'۷) $\phi \cup \phi = \phi$ $\qquad$ $X \cap X = X$

توسط وکسمن و گاتشل [۱۱۸] خصوصیات و توصیف‌های ساده‌تری برای عملگرهای max و min، هرکدام به طور مجزا، ارائه شده است، که خود دلیل دیگری برای مناسب بودن انتخاب این عملگرها در تعمیم مفاهیم اجتماع و اشتراک می‌تواند باشد. دو قضیه زیر در این باره است.

قضیه ۲.۳ **(وکسمن – گاتشل)** فرض کنید تابع $S : I \times I \to I$ در شرایط زیر صدق کند (برای هر $x, y, z \in I$)

۱) $(x,x) = x$

۲) $S[x, S(y,z)] = S[S(x,y), z]$

۳) $S(x,y) \geq \max\{x,y\}$

۴) S پیوسته است.

آن‌گاه

$$S(x,y) = \max\{x,y\}$$

نکته ۲.۳ توجه کنید که سه شرط اوّل قضیه ۲.۳، متناظر با سه شرط زیر در زمینه‌ی مجموعه‌های معمولی است

۱') $A \cup A = A$

۲') $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

۳') $A \subset A \cup B$ و $B \subset A \cup B$

مثال‌های زیر نشان می‌دهند که شرایط چهارگانه در قضیه فوق، مستقل از هم‌اند.

مثال ۱.۳ اگر

$$S(x,y) = \begin{cases} ۱ & x \neq y \\ x & x = y \end{cases}$$

آن‌گاه شرایط ۱ و ۲ و ۳ برقرارند ولی شرط ۴ برقرار نیست.

مثال ۲.۳ اگر $S(x.y) = \min\{x,y\}$ آن‌گاه شرایط ۱ و ۲ و ۴ برقرارند ولی شرط ۳ برقرار نیست.

مثال ۳.۳ اگر

$$S(x,y) = \begin{cases} \min[۲x - y, ۱] & x \geq y \\ y & x < y \end{cases}$$

آن‌گاه شرایط ۱ و ۳ و ۴ برقرارند ولی شرط ۲ برقرار نیست. مثلاً فرض کنید $x = ۰/۵$ و $y = ۰/۴$ و $z = ۰/۱$.

مثال ۴.۳ اگر

$$S(x,y) = x + y$$

آن‌گاه شرایط ۲ و ۳ و ۴ برقرارند ولی شرط ۱ برقرار نیست.

قضیه ۳.۳ (قضیه وکسمن — گاتشل) فرض کنید تابع $T : I \times I \to I$ در شرایط زیر صدق کند (برای هر $x, y, z \in I$)

۱) $T(x,x) = x$

۲) $T[x, T(y,z) = T[T(x,y), z]$

۳) $T(x,y) \leq \min\{x,y\}$

۴) T پیوسته است.

آن‌گاه

$$T(x,y) = \min\{x,y\}$$

دراینجا نیز سه شرط اول، متناظر با سه شرط زیر در زمینه‌ی مجموعه‌های معمولی است

۱') $A \cap A = A$

۲') $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

۳') $A \cap B \subset B, A \cap B \subset A$

می‌توان نشان داد که شرایط چهارگانه در قضیه بالا، مستقل از هم هستند (تمرین ۱.۳).

یک بحث تکمیلی

از مطالبی که در این بخش ارائه شد، نتیجه می‌شود که استفاده از عملگرهای max و min در تعریف اجتماع و اشتراک دو مجموعه فازی، معقول و منطقی بوده و منطبق بر شهود است. این البته به آن معنا نیست که این تعاریف، تنها تعاریفِ ممکن هستند.

در بخش‌های بعد خواهیم دید که عملگرهای دیگری نیز برای تعریف اجتماع و اشتراک (و هم‌چنین متمم) پیشنهاد شده‌اند که البته هر کدام در بعضی زمینه‌های کاربردی سودمند هستند. امّا خاطر نشان می‌سازیم که تعاریفِ ارائه شده برای اجتماع و اشتراک و متمم به صورتی که در فصل دوم آمد، با در نظر گرفتن توانمندی ساختاری آن‌ها حائز اهمیت است. در فصل دوم نشان داده شد که مجموعه‌ی تمام زیر مجموعه‌های فازیِ یک مجموعه، همراه با عملگرهای max و min برای اجتماع و اشتراک، یک شبکه توزیعپذیر کامل را تشکیل می‌دهند. نکته‌ی جالب اینجاست که تعریف اجتماع و اشتراک براساس

عملگرهای max و min تنها تعاریف ممکنی هستند که این نوع ساختار را می‌سازد. البته، برپایه‌ی مطالب فصل دوم، ساختار فوق یک جبر بولی نیست یعنی قوانین زیر در زمینه‌ی مجموعه‌های فازی برقرار نیستند

$$A \cup A^C = X \quad \text{شمول}$$
$$A \cap A^C = \phi \quad \text{طرد}$$

از سوی دیگر، اگر بخواهیم با تعاریف دیگری برای اجتماع و اشتراک، قوانین فوق را حفظ کنیم، آن‌گاه قوانین خودتوانی اجتماع و اشتراک را از دست می‌دهیم. یعنی در این حالت قوانین

$$A \cup A = A \quad , \quad A \cap A = A$$

برقرار نیستند، که در این صورت قوانین توزیع‌پذیری نیز برقرار نخواهند بود.

به عبارت دیگر ثابت می‌شود که قوانین شمول و طرد با قوانین خودتوانی و در نتیجه توزیع‌پذیری ناسازگارند [۷۸]. بنابراین در زمینه‌ی مجموعه‌های فازی نمی‌توان یک ساختار شبکه بولی کامل را (با هر تعریفی برای اجتماع و اشتراک و متمم) برقرارکرد. پس برای داشتن یک ساختار جبری مناسب، یا باید از روابط شمول و طرد و یا از روابط خود توانی چشم‌پوشی کنیم. از طرف دیگر تأکید بر حفظ روابط شمول و طرد چندان معقول به نظر نمی‌رسد. زیرا این روابط با طبیعت مجموعه‌های فازی هم‌خوانی ندارد (ر.ک. به مثال ۱۴.۲). به این دلیل است که ما روابط خودتوانی را حفظ می‌کنیم و از روابط شمول و طرد (به ناچار) چشم‌پوشی می‌کنیم. می‌توان گفت که ساختار شبکه کاملی که به این صورت حاصل می‌شود (ر.ک. بخش ۴.۲) یک ساختار بهینه است.

۳.۲ T–نرم‌ها و S–نرم‌ها

در فصل قبل با تعاریف اشتراک و اجتماع بر اساس عملگرهای min و max آشنا شدیم. همان‌طور که قبلاً گفته شد، تعاریف یاد شده، تنها تعاریف ممکن نیستند. به علاوه ثابت شده است که در بعضی موارد عملگرهای min و max عملگرهای کارا و مناسبی نیستند [۱۲] و [۶۱] و [۸۲]. تعریف‌های دیگری نیز برای اجتماع و اشتراک دو مجموعه‌ی فازی ارائه شده است که هر کدام با توجه به ویژگی‌هایی که دارند، زمینه‌های کاربردی ویژه‌ای یافته‌اند. در این بخش تعدادی از مهمترین آن‌ها را ارائه می‌کنیم.

نُرم‌های مثلثی

قبل از معرفی تعریف‌های مختلف برای اشتراک و اجتماع، دو تعریف اساسی را یادآوری می‌کنیم که نرم‌های مثلثی و همنرم‌های مثلثی نامیده شده‌اند. این کار به دلیل آن است که هم عملگرهای max و min و هم اغلب عملگرهای دیگری که در تعریفهای مختلف اجتماع و اشتراک به کار برده شده‌اند، به دو رده‌ی اندازه‌های نامبرده متعلق‌اند.

نرم‌های مثلثی و همنرم‌های مثلثی را T– نُرم‌ها و T– همنرم‌ها (یا S– نرم‌ها) نیز می‌گویند. این دو رده از اندازه‌ها که نخستین بار توسط منجر [۸۶] ارائه شد، و به خاطر نقشی که در نامساوی‌های مثلثی دارند به این نام خوانده می‌شوند، به دلیل ویژگی‌های بسیار جالب اخیراً بیشتر مورد توجه واقع شده‌اند.

تعریف ۱.۳ تابع دو متغیره $T(x,y) : I \times I \to I$ را یک T– نرم گوییم، اگر در شرایط زیر صدق کند

۱) $T(x,\text{۱}) = x$

۲) یکنوایی $x_\text{۱} \leq x_\text{۲}, y_\text{۱} \leq y_\text{۲} \Rightarrow T(x_\text{۱}, y_\text{۱}) \leq T(x_\text{۲}, y_\text{۲})$

۳) جابه‌جایی $T(x,y) = T(y,x)$

۴) شرکت‌پذیری $S[x, S(y,z)] = S[S(x,y), z]$

تعریف ۲.۳ تابع دو متغیره $S(x,y) : I \times I \to I$ را یک T—همنرم (یا S—نرم) گوییم، اگر در شرایط زیر صدق کند

۱) $S(x,\circ) = x$

۲) یکنوایی $x_\text{۱} \leq x_\text{۲}, y_\text{۱} \leq y_\text{۲} \Rightarrow S(x_\text{۱}, y_\text{۱}) \leq S(x_\text{۲}, y_\text{۲})$

۳) جابه‌جایی $S(x,y) = S(y,x)$

۴) شرکت‌پذیری $S[x, S(y,z)] = S[S(x,y), z]$

همان‌طور که تعاریف فوق برمی‌آید، T– نرم‌ها و S– نرم‌ها دوگان یکدیگرند. به این بیان که برای هر T– نرم می‌توان یک و فقط یک S– نرم تعریف کرد به قسمی که

$$T(x,y) = \text{۱} - S(\text{۱} - x, \text{۱} - y)$$

گزاره ۱.۳ برای عملگر نفی $N(x) = 1 - x$، زوج‌های $T-$ نرم و $S-$ نرمِ دوگان، در قوانین دمورگان تعمیم یافته صدق می‌کنند، یعنی

$$\begin{aligned} N[T(x,y)] &= S[N(x), N(y)] \\ N[S(x,y)] &= T[N(x), N(y)] \end{aligned}$$

اکنون می‌پردازیم به معرّفی متداول‌ترین تعاریف اجتماع و اشتراک برای مجموعه‌های فازی که همگی بر حسب زوج‌های دوگان $T-$ نرم و $S-$ نرم ارائه شده‌اند.

۱) min و max

$$T_m(x,y) = \min(x,y) \quad , \quad S_m(x,y) = \max(x,y)$$

براساس نرم‌های فوق، اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی A و B به صورت مجموعه‌های فازی با توابع عضویت زیر تعریف می شوند

$$\begin{aligned} (A \cap B)(x) &= \min\{A(x), B(x)\} \\ (A \cup B)(x) &= \max\{A(x), B(x)\} \end{aligned}$$

این تعاریف همان‌هایی هستند که قبلاً درباره‌ی آن‌ها، در بخش ۲.۲، توضیحاتی ارائه کردیم. در برخی منابع، از عملگرهای فوق با نام عملگرهای استاندارد نام برده می‌شود. به اختصار یادآوری می‌کنیم که اجتماع و اشتراک به صورت فوق در قوانین دمورگان برای عملگر نفی $N(x) = 1 - x$ صدق می‌کنند. هم‌چنین نسبت به یکدیگر توزیع‌پذیر بوده و خود توان نیز هستند، ولی در قوانین شمول و طرد صدق نمی‌کنند. یک نکته‌ی مهم آن است که اندازه‌های min و max حالت‌های حدّی $T-$ نرم‌ها و $S-$ نرم‌ها هستنند. یعنی برای هر $T-$ نرم و هر $S-$ نرم

$$\begin{aligned} T(x,y) &\leq \min(x,y) \\ S(x,y) &\geq \max(x,y) \end{aligned}$$

۲) ضرب جبری و جمع احتمالی

$$T_p(x,y) = x.y \quad , \quad S_p(x,y) = x + y - x.y$$

بر اساس نرم‌های فوق، اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} (A \cap B)(x) &= A(x).B(x) \\ (A \cup B)(x) &= A(x) + B(x) - A(x).B(x) \end{aligned}$$

عملگرهای فوق، که ضرب جبری و جمع احتمالی نامیده می‌شوند، در هیچ‌یک از قوانین توزیع‌پذیری، خود توانی، شمول و طرد صدق نمی‌کنند. این عملگرها در رده‌ای موسوم به عملگرهای اکیداً یکنوا قرار دارند یعنی عملگرهایی که شرط صعودی بودن را (به جای غیر نزولی بودن) در بند ۵ قضیه ۱.۳ دارند. برای توضیح بیشتر به [۵۰] مراجعه کنید.

۳) تفاضل کراندار و جمع کراندار

$$T_b(x,y) = \max(0, x+y-1) \quad , \quad S_b(x,y) = \min(1, x+y)$$

براساس نرم‌های فوق، اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{array}{l} (A \cap B)(x) = \max(0, A(x)+B(x)-1) \\ (A \cup B)(x) = \min(1, A(x)+B(x)) \end{array}$$

عملگرهای فوق که تفاضل و جمع کراندار نامیده می‌شوند در قوانین شمول و طرد صدق کرده امّا نسبت به هم توزیع‌پذیر نبوده و خود توان نیز نسیتند. این عملگرها در رده‌ای موسوم به عملگرهای پوچ‌توان قرار دارند. توضیح بیشتر در این باره را می‌توانید در [۵۰] ببینید.

چهار زوج عملگر بعد که معرّفی می‌کنیم بر پایه‌ی T– نرم‌ها و S– نرم‌های پارامتری تعریف شده‌اند. پارامتری کردن عملگرها توانایی آن‌ها را در تطبیق با شرائط مختلف بیشتر می‌کند.

۴) عملگرهای دراستیک

$$T_d(x,y) = \begin{cases} x & y=1 \\ y & x=1 \\ 0 & x,y \neq 1 \end{cases} \qquad S_d(x,y) = \begin{cases} x & y=0 \\ y & x=0 \\ 1 & x,y \neq 0 \end{cases}$$

بر پایه‌ی نرم‌های فوق، اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$(A \cap B)(x) = \begin{cases} \min(A(x), B(X)) & A(x)=1 \text{ یا } B(x)=1 \\ 0 & A(x) \text{ و } B(x) \neq 1 \end{cases}$$

$$(A \cup B)(x) = \begin{cases} \max(A(x), B(X)) & A(x)=0 \text{ یا } B(x)=0 \\ 1 & A(x) \text{ و } B(x) \neq 0 \end{cases}$$

عملگرهای فوق در قوانین شمول و طرد صدق نمی‌کنند، نسبت به هم توزیع‌پذیر نبوده و خودتوان نیستند. عملگرهای دراستیک حالت حدی عملگرهای T–نرم و S–نرم هستند،

یعنی برای هر T—نرم و هر S—نرم

$$T_d(x,y) \leq T(x,y)$$
$$S_d(x,y) \geq S(x,y)$$

خاطر نشان می‌شود که در برخی متون، از نرم‌های دراستیک به عنوان ضعیف‌ت‌ترین T—نرم‌ها نام برده شده است. به‌ویژه T—نرم دراستیک را ضعیف‌ترین T—نرم (Weakest T-Norm) نیز نامیده‌اند. T—نرم دراستیک را، ضرب دراستیک و Sـنرم دراستیک را جمع دراستیک نیز می‌گویند [...].

۵) عملگرهای هاماخر

$$T_\gamma(x,y) = \frac{x.y}{\gamma + ۱(۱-\gamma)(x+y-x.y)},\ S_\gamma(x,y) = \frac{x+y-(۲-\gamma)x.y}{۱-(۱-\gamma)x.y}$$

در هر دو مورد $\gamma \geq ۰$ فرض می‌شود.

بر اساس نرم‌های فوق، اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی به صورت زیر تعریف می‌شوند $(\gamma \geq ۰)$

$$(A \cap B)(x) = \frac{A(x).B(x)}{\gamma + (۱-\gamma)(A(x)+B(x)-A(x).B(x))}$$

$$(A \cup B)(x) = \frac{A(x)+B(x)-(۲-\gamma)A(x).B(x)}{۱-(۱-\gamma)A(x).B(x)}$$

تعاریف فوق برای اشتراک و اجتماع، توسط هاماخر و در زمینه‌ای متفاوت با شرایط قضیه ۱.۳ به دست آمده است (ر.ک تمرین ۱٦.۳). دقت کنید که در حالت خاص $\gamma = ۱$، $_\gamma T(x,y)$ و $S_\gamma(x,y)$ به ضرب و جمع جبری تبدیل می‌شوند. عملگرهای هاماخر اکیداً یکنوا هستند. به علاوه این عملگرها دارای ویژگی جبران پذیری هستند، در حالی که مثلاً عملگرهای max وmin فاقد این ویژگی‌اند. توضیح آنکه عملگر $*$ را جبران پذیر گوییم اگر چنانچه داشته باشیم $C = a * b$ آن‌گاه یک تغییر در a را بتوان با یک تغییر در b جبران کرد طوری که مقدار C تغییر نکند. این ویژگی بویژه در بعضی موارد عملی مهم و مفید است. برای ملاحظه بحث کلّی به [۱۴۵] مراجعه کنید.

٦) عملگرهای ییگر

$$T_\omega(x,y) = ۱ - \min\{۱, [(۱-x)^\omega + (۱-y)^\omega]^{۱/\omega}\} \quad \omega \geq ۱$$
$$S_\omega(x,y) = \min\{۱, (x^\omega + y^\omega)^{۱/\omega}\} \quad \omega \geq ۱$$

براساس نرم‌های فوق، اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی به صورت زیر تعریف می‌شوند $(w \geq ۱)$

$$(A \cap B)(x) = ۱ - \min\{۱, [(۱ - A(x))^w + (۱ - B(x))^w]^{۱/w}\}$$
$$(A \cup B)(x) = \min\{۱, [(A(x))^w + (B(x))^w]^{۱/w}\}$$

نرم‌های فوق در قوانین شمول و طرد صدق نکرده و هم‌چنین نسبت به هم توزیع‌پذیر نیستند و خودتوان هم نمی‌باشند. در حالت خاص وقتی $\omega \to \infty$، عملگرهای فوق به عملگرهای min و max میل می‌کنند. به عبارت دیگر

$$\lim_{\omega\to\infty} T_\omega(x,y) = \min(x,y)$$

$$\lim_{\omega\to\infty} S_\omega(x,y) = \max(x,y)$$

هم‌چنین اگر $\omega = ۱$، تعاریف فوق بر تعاریف تفاضل کراندار و جمع کراندار منطبق می‌شوند. برای مطالعه‌ی بیشتر نرم‌های فوق که توسط ییگر پیشنهاد شده‌است به [۱۲۲] و [۱۴۶] مراجعه کنید.

۷) عملگرهای دوبوا و پراد

$$T_\alpha(x,y) = \frac{x.y}{\max\{x,y,\alpha\}} \qquad \alpha \in [۰, ۱]$$

$$S_\alpha(x,y) = \frac{x + y - x.y - \min\{x, y, (۱-\alpha)\}}{\max\{(۱-x), (۱-y), \alpha\}} \qquad \alpha \in [۰, ۱]$$

براساس نرم‌های فوق که توسط دوبوا و پراد [۴۷] پیشنهاد شده‌اند، اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی به صورت زیرتعریف می‌شوند ($\alpha \in I = [۰, ۱]$)

$$(A \cap B)(x) = \frac{A(x).B(x)}{\max\{A(x), B(x), \alpha\}}$$

$$(A \cup B)(x) = \frac{A(x) + B(x) - A(x).B(x) - \min\{A(x), B(x), ۱-\alpha\}}{\max\{(۱-A(x)), (۱-B(x)), \alpha\}}$$

تعاریف فوق برای اشتراک و اجتماع، نسبت به هم توزیع‌پذیر نبوده و خودتوان نیز نیستند. این تعاریف در قوانین شمولیت و طرد نیز صدق نمی‌کنند.

T– نرم فوق نسبت به پارامتر α نزولی است و مقدار آن همواره بین $\min(x,y)$ (وقتی $\alpha = ۰$) و ضرب جبری x و y یعنی $x.y$ (وقتی $\alpha = ۱$) قرار دارد. همچنین S– نرم فوق نسبت به پارامتر α صعودی است و مقدار آن همواره بین $\max(x,y)$ (وقتی $\alpha = ۰$) و جمع احتمالی x و y یعنی $x + y - x.y$ (وقتی $\alpha = ۱$) قرار دارد.

دقت کنید که وقتی $y < \alpha < x$ یا $x < \alpha < y$، داریم $S_\alpha(x,y) = \max(x,y), T_\alpha(x,y) = \min(x,y)$.

۸) عملگرهای دومبی

$$T_\lambda(x,y) = \frac{۱}{۱ + [(\frac{۱}{x} - ۱)^\lambda + (\frac{۱}{y} - ۱)^\lambda]^{۱/\lambda}} \qquad \lambda \in (۰,\infty)$$

$$S_\lambda(x,y) = \frac{۱}{۱ + [(\frac{۱}{x} - ۱)^{-\lambda} + (\frac{۱}{y} - ۱)^{-\lambda}]^{-۱/\lambda}} \quad \lambda \in (۰,\infty)$$

بر پایه‌ی نرم‌های بالا که توسط دومبی [] پیشنهاد شده‌اند، اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی به صورت زیر تعریف می‌شوند ($\lambda \in (۰,\infty)$)

$$(A \cap B)(x) = \frac{۱}{۱ + [(\frac{۱}{A(x)} - ۱)^\lambda + (\frac{۱}{B(x)} - ۱)^\lambda]^{۱/\lambda}}$$

$$(A \cup B)(x) = \frac{۱}{۱ + [(\frac{۱}{A(x)} - ۱)^{-\lambda} + (\frac{۱}{B(x)} - ۱)^{-\lambda}]^{-۱/\lambda}}$$

مثال ۴.۳ به مثال ۹.۲ باز می‌گردیم. یک مجتمع مسکونی را در نظر بگیرید که دارای آپارتمان‌هایی با تعداد اطاق از یک تا هفت است. بنابراین $X = \{۱,۲,\ldots,۷\}$ مجموعه‌ی انواع آپارتمان‌هاست که در آن x تعداد اطاق‌های یک آپارتمان است. اگر مجموعه‌های فازی A: «آپارتمان‌های مناسب یک خانواده ۴ نفره» و B: «آپارتمان‌های بزرگ» به صورت‌های زیر تعریف شوند

$$A = \{\frac{۰/۲}{۱}, \frac{۰/۵}{۲}, \frac{۰/۸}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۰/۷}{۵}, \frac{۰/۳}{۶}, \frac{۰/۱}{۷}\}$$

$$B = \{\frac{۰/۱}{۲}, \frac{۰/۳}{۳}, \frac{۰/۶}{۴}, \frac{۰/۷}{۵}, \frac{۰/۸}{۶}, \frac{۱}{۷}\}$$

آن‌گاه $A \cap B$ که بیانگر مجموعه‌ی فازی «آپارتمان‌های مناسب یک خانواده ۴ نفره و در عین حال بزرگ»است و $A \cup B$ که بیانگر مجموعه‌ی فازی «آپارتمان‌های مناسب یک خانواده ۴ نفره یا بزرگ» است، برحسب تعاریف مختلف برای اشتراک و اجتماع، این گونه خواهند بود.

۱) بر اساس عملگرهای min و max

$$A \cap B = \{\frac{۰/۱}{۲}, \frac{۰/۳}{۳}, \frac{۰/۶}{۴}, \frac{۰/۷}{۵}, \frac{۰/۳}{۶}, \frac{۱}{۷}\}$$

$$A \cup B = \{\frac{۰/۲}{۱}, \frac{۰/۵}{۲}, \frac{۰/۸}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۰/۷}{۵}, \frac{۰/۸}{۶}, \frac{۱}{۷}\}$$

۲) بر اساس عملگرهای ضرب جبری و جمع احتمالی

$$A\cap B=\{\frac{۰/۰۵}{۲},\frac{۰/۲۴}{۳},\frac{۰/۶}{۴},\frac{۰/۴۹}{۵},\frac{۰/۲۴}{۶},\frac{۰/۱}{۷}\}$$

$$A\cup B=\{\frac{۰/۲}{۱},\frac{۰/۵۵}{۲},\frac{۰/۸۶}{۳},\frac{۱}{۴},\frac{۰/۹۱}{۵},\frac{۰/۸۶}{۶},\frac{۱}{۷}\}$$

۳) براساس عملگرهای تفاضل کراندار و جمع کراندار

$$A\cap B=\{\frac{۰}{۲},\frac{۰/۱}{۳},\frac{۰/۶}{۴},\frac{۰/۴}{۵},\frac{۰/۱}{۶},\frac{۰/۱}{۷}\}$$

$$A\cup B=\{\frac{۰/۲}{۱},\frac{۰/۶}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۷}\}$$

۴) بر اساس عملگرهای دراستیک

$$A\cap B=\{\frac{۰/۶}{۴},\frac{۰/۱}{۷}\}$$
$$A\cup B=\{\frac{۰/۲}{۱},\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۷}\}$$

۵) بر اساس عملگرهای هاماخر (با $\gamma=\frac{۱}{۲}$)

$$A\cap B=\{\frac{۰/۰۶۵}{۲},\frac{۰/۲۶}{۳},\frac{۰/۶}{۴},\frac{۰/۵۱}{۵},\frac{۰/۲۶}{۶},\frac{۰/۱}{۷}\}$$

$$A\cup B=\{\frac{۰/۲}{۱},\frac{۰/۵۴}{۲},\frac{۰/۸۴}{۳},\frac{۰/۸۴}{۳},\frac{۱}{۵},\frac{۰/۸۸}{۵},\frac{۰/۸۴}{۶},\frac{۱}{۷}\}$$

۶) بر اساس عملگرهای ییگر (با $\omega=۲$)

$$A\cap B=\{\frac{۰}{۲},\frac{۰/۲۷}{۳},\frac{۰/۶}{۴},\frac{۰/۵۸}{۵},\frac{۰/۲۷}{۶},\frac{۰/۱}{۷}\}$$

$$A\cup B=\{\frac{۰/۲}{۱},\frac{۰/۵۱}{۲},\frac{۰/۸۵}{۳},\frac{۱}{۴},\frac{۰/۹۹}{۵},\frac{۰/۸۵}{۶},\frac{۱}{۷}\}$$

۷) بر اساس عملگرهای دوبوا و پراد (با $\alpha=۰/۸$)

$$A\cap B=\{\frac{۰/۰۶}{۲},\frac{۰/۳}{۳},\frac{۰/۶}{۴},\frac{۰/۶۱}{۵},\frac{۰/۳}{۶},\frac{۰/۱}{۷}\}$$

$$A\cup B=\{\frac{۰/۲}{۱},\frac{۰/۵}{۲},\frac{۰/۸۲}{۳},\frac{۱}{۴},\frac{۰/۸۹}{۵},\frac{۰/۸۲}{۶},\frac{۱}{۷}\}$$

۸) بر اساس عملگرهای دومبی (با $\lambda=۱$)

$$A\cap B=\{\frac{۰/۰۹}{۲},\frac{۰/۲۸}{۳},\frac{۰/۶}{۴},\frac{۰/۵۴}{۵},\frac{۰/۲۸}{۶},\frac{۰/۱}{۷}\}$$

$$A\cup B=\{\frac{۰/۲}{۱},\frac{۰/۵۹}{۲},\frac{۰/۸۲}{۳},\frac{۱}{۴},\frac{۰/۸۲}{۵},\frac{۰/۸۲}{۶},\frac{۱}{۷}\}$$

انتخاب عملگر مناسب

این موضوع که مناسب‌ترین عملگرها برای اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی کدام عملگرها هستند، یکی از مسائل مورد توجه در تحقیقات نظری و کاربردی است. مسلماً انتخاب مناسب‌ترین عملگر به ملاک‌ها و معیارهای کاربر باز می‌گردد. از لحاظ ریاضی و منطقی، داشتن یک پایه‌ی اصل موضوعی (مانند قضیه‌های ۱.۳ تا ۳.۳) حائز اهمیت است. اما از لحاظ عملی نیز باید نکاتی را مانند سرعت محاسباتی، سازگاری با مقتضیات مسأله و برآورده شدن انتظارات کاربردی در نظر گرفت. برای مثال در طراحی یک سیستم کنترل فازی، یک نکته‌ی مهم موفقیت سیستم در آزمون‌های تجربی و عملی است. در این مورد مسلماً به کارگیری T–نرم‌ها و S–نرم‌هایی ترجیح دارد که منجر به عملکرد مورد انتظار برای سیستم شود.

۳.۳ نرم‌های مثلثی تعمیم یافته

باتوجه به ویژگی شرکتپذیری T–نرم‌ها، می‌توان تعریف T– نرم را به n مٌولفه تعمیم داد [۱۰۶]. این تعریف بر پایه‌ی یک رابطه‌ی بازگشتی و بر مبنای تعریف T– نرم است.

تعریف ۳.۳ هر تابع n متغیره $T_n(x_1,\dots,x_n) : I^n \to I$ را که به صورت زیر تعریف می‌شود، یک T– نرم با n مؤلفه گوییم

$$T_n(x_1,\dots,x_n) = T[T_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1}),x_n]$$

که $T(x_1,x_2)$، T– نرم معمولی با دو مؤلفه است که در تعریف ۱.۳ گفته شد.

دو قضیه زیر ویژگی‌های عملگر تعمیم یافته T– نرم را بیان می‌کند [۱۰۶]. ویژگی‌های ۱ تا ۴ در قضیه زیر متناظر با ویژگی‌های ۱ تا ۴ در تعریف ۱.۳ هستند.

قضیه ۴.۳ هر T– نرم تعمیم یافته، در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند
۱) بی اثر بودن عنصر ۱، یعنی
$$T_n(x_1,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n) = T_{n-1}(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$$
۲) یکنواختی، یعنی اگر برای هر $i' \in \{1,\dots,n\}$ و i، $x_i \le x'_i$ آن‌گاه

$$T_n(x_1,\dots,x_n) \le T_n(x'_i,\dots,x'_n)$$

۳) جابه‌جایی تعمیم یافته، یعنی با هر جایگشت دیگری از x_i ها در $(x_۱,\ldots,x_n)$، مقدار $T_n(x_۱,\ldots,x_n)$ تغییر نمی‌کند.

۴) شرکت‌پذیری تعمیم یافته، یعنی

$$\begin{aligned} T_n(x_۱,\ldots,x_n) &= T_{i+۱}[x_۱,\ldots,x_i,T_{n-i}(x_{i+۱},\ldots,x_n)] \\ &= T_{n-j+۱}[T_j(x_۱,\ldots,x_j),x_{j+۱},\ldots,x_n] \end{aligned}$$

قضیه ۵.۳ هر $T-$ نرم تعمیم یافته، در روابط زیر صدق می‌کند

۱) $T(x_۱,\ldots,x_n)\le \min(x_۱,\ldots,x_n)$

۲) $T(x_۱,\ldots,x_n)=۱ \Leftrightarrow \forall i\in\{۱,\ldots,n\}, x_i=۱$

۳) $\exists i\in\{۱,\ldots,n\}, x_i=۰ \Rightarrow T(x_۱,\ldots,x_n)=۰$

۴) $T(x_۱,\ldots,x_n)\le T(x_۱,\ldots,x_{n-k}), ۰\le k<n$

مثال ۵.۳ سه نمونه از $T-$ نرم‌های تعمیم یافته که هر یک تعمیمی از حالت دو بعدی متناظر می‌باشند، عبارتند از

الف) $T_n(x_۱,\ldots,x_n)=\min(x_۱,\ldots,x_n)$

ب) $T_n(x-۱\ldots,x_n)=x_۱x_۲\ldots x_n=\prod_{i=۱}^n x_i$

پ) $T_n(x_۱,\ldots,x_n)=\max(۰,x_۱+x_۲+\ldots+x_n-n+۱)$

واضح است که به طور مشابه با روند فوق، می‌توان $S-$ نرم تعمیم یافته را تعریف کرد و ویژگی‌های آن را به دست آورد. نرم‌های مثلثی تعمیم یافته در استدلال تقریبی کاربرد دارند (ر.ک. فصل ۱۰).

۳.۴ درباره‌ی عملگر متّمم، ویژگی‌ها و جانشین‌های آن

در بخش ۲.۲ تعریف متمم یک مجموعه فازی مانند A برپایه‌ی عملگر نفی $C(x)=۱-x$ و به صورت مجموعه فازی A^c با تابع عضویت زیر تعریف شد

$$A^c(x)=۱-A(x),\quad \forall x\in X$$

توجیه منطقی تعریف فوق، به عنوان متمم یک مجموعه‌ی فازی، دشوارتر از توجیه منطقی تعاریف اجتماع و اشتراک برپایه‌ی عملگرهای $\max$ و $\min$ است (کاری که در قضیه ۱.۳ انجام شد.)

طبیعی است که برای یافتن یک عملگر متمم مناسب، ابتدا شرایطی معقول و منطقی را صورتبندی کنیم که یک عملگر ایده‌آل برای متمم باید در آن‌ها صدق کند و سپس به دنبال راه‌هایی برای به دست آوردن آن عملگر باشیم [۲۳] و [۴۴].

در حالت کلّی یک عملگر متمم باید به صورت یک تابع مانند $C : I \to I$ باشد، طوری که متمم یک مجموعه فازی بر اساس آن تابع (و فقط بر اساس آن) به صورت زیر تعریف شود

$$A^c(x) = C[A(x)]$$

به طور شهودی و منطقی می‌توانیم سه شرط زیر را برای تابع C قائل شویم:

۱) $C(۱) = ۰$ و $C(۰) = ۱$.

۲) C باید پیوسته و اکیداً نزولی باشد.

۳) $C[C(x)] = x$.

شرط اول به این دلیل فرض می‌شود که عملگر C در حالت حدّی منطبق برعملگر متمم معمولی شود. شرط دوّم به این دلیل است که مسلماً وقتی درجه عضویت x در مجموعه فازی A افزایش یابد، درجه عضویت آن در متمم مجموعه فازی A کاهش می‌یابد. شرط سوّم به این دلیل است که، به بیان منطقی، دو بار نفیِ یک گزاره معادل تصدیق آن است. شرط سوّم، شرط برگشت پذیری نامیده می‌شود.

امّا شرایط بالا، تابع C را به طور یکتا معّین نمی‌کنند. حتی اگر شرط $C(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}$ را به سه شرط فوق اضافه کنیم باز هم C به طور یکتا معّین نمی‌شود. امّا می‌توان شرط دیگری را به مجموعه شرایط ۱ تا ۳ اضافه کنیم تا تابع C به صورت منحصر به فرد $C(x) = ۱ - x$ به دست آید. به قضیه زیر توجه کنید.

قضیه ۶.۳ فرض کنید تابع $C : I \to I$ در شرایط ۱ تا ۳ بالا، و هم‌چنین در شرط زیر صدق کند

۴) $$x_۱ - x_۲ = C(x_۲) - C(x_۱)$$

آن‌گاه منحصراً $C(x) = ۱ - x$.

دقت کنید که شرط ۴ بدین معنی است که

$$A(x_۱) - A(x_۲) = A^c(x_۲) - A^c(x_۱)$$

یعنی تغییری در مقدار عضویت در مجموعه فازی A، دقیقاً همان مقدار تغییر را در مقدار عضویت آن عنصر در متمم مجموعه فازی A ایجاد کند. همان‌طور که معلوم است شرط فوق یک شرط قوی بوده و چندان بدیهی به نظر نمی‌رسد. وضیعت‌هایی وجود دارند

که برای آن‌ها یک افزایش در درجه عضویت یک عنصر در یک مجموعه فازی، لزوماً همان مقدار کاهش را برای عضویت آن عنصر در متمم مجموعه فازی مورد بحث، نتیجه نمی‌دهد.

پیشنهاد دیگر، اضافه کردن شرط دیگری به جای شرط ۴ به مجموعه شرایط ۱ تا ۳ است، تا تابع C به صورت $C(x) = ۱ - x$ به دست آید. به قضیه زیر توجه کنید.

قضیه ۷.۳ فرض کنید تابع $C : I \to I$ در شرایط ۱ تا ۳ بالا و شرط زیر صدق کند

۵) $$x_۱ + x_۲ = ۱ \Rightarrow C(x_۱) + C(x_۲) = ۱$$

آن گاه منحصراً $C(x) = ۱ - x$.

دقت کنید که شرط ۵ بدین معنی است که

$$A(x_۱) + A(x_۲) = ۱ \Rightarrow A^c(x_۱) + A^c(x_۲) = ۱$$

هر چند شرط ۵، ضعیف‌تر از شرط ۴ است ولی باز هم وضیعت‌هایی وجود دارند که برقراری این شرط نیز برای آن‌ها ضروری نمی‌نماید.

بر پایه‌ی بحث بالا، می‌توان گفت که تعیین یک تابع برای تعریف متمم، تنها بر پایه‌ی شرایط ۱ تا ۳ غیر ممکن است و برای به دست آوردن عملگر متداول $C(x) = ۱ - x$ باید به شرایط فوق شرطی را بیفزاییم.

امّا گذشته از مباحث فوق، باید گفت که عملگر $C(x) = ۱ - x$ در بسیاری از زمینه‌های نظری و کاربردی یک عملگر مناسب بوده و کارایی خود را نشان داده است.

قضیه زیر، که اثبات آن را به خواننده واگذار می‌کنیم، نشان می‌دهد با به کارگیری عملگر $C(x) = ۱ - x$، قوانین دورگان، با استفاده از هر زوج $T-$ نرم و $S-$ نرم دوگان، برقرار هستند.

قضیه ۸.۳ فرض کنید برای متمم از عملگر $C(x) = ۱ - x$ استفاده شود. در این صورت هر زوج $T-$ نرم و $S-$ نرم دوگان در قوانین دمورگان صدق می‌کنند.

یک روش دیگر برای تعریف عملگر متمم، استفاده ازعملگرهای پارامتری است. در ادامه به دو رده‌ی مهم عملگرهای پارامتری برای متمم اشاره می‌کنیم.

تعریف ۳.۳ $\lambda-$متمم سوگینوی مجموعه فازی A، به صورت یک مجموعه فازی با

تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$A^C_\lambda(x) = \frac{1 - A(x)}{1 + \lambda A(x)}, \qquad \lambda \in (-1, \infty)$$

دقت کنید که تعریف فوق، در شرایط ۱ تا ۳ صدق می‌کند و به ازای $\lambda = 0$ منطبق بر تعریف معمولی متمم می‌شود.

تعریف ۴.۳ ω—متمم ییگر مجموعه فازی A، به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$A^C_\omega(x) = [1 - (A(x))^\omega]^{1/\omega}, \qquad \omega \in (0, \infty)$$

عملگر ییگر نیز در شرایط ۱ تا ۳ صدق می‌کند. تعریف فوق به ازای $\omega = 1$ منطبق بر تعریف معمولی متمم می‌شود.

نکته‌ی دیگر در مورد عملگر متمم ییگر آن است که اگر از این عملگر برای متمم استفاده شود، آن‌گاه عملگر اجتماع ییگر در قانون شمولیت صدق می‌کند (تمرین ۱۸.۳). یعنی، برای هر $\omega \in (0, \infty)$،

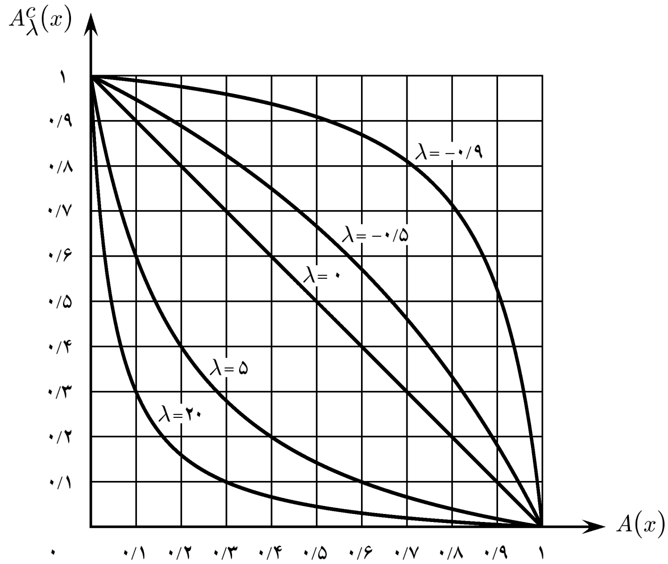
$$A \cup A^C_\omega = X$$

قضیه زیر، که اثبات آن را به خواننده واگذار می‌کنیم، برقرار بودن قوانین دورگان را برای عملگرهای متمم بالا بیان می‌کند.

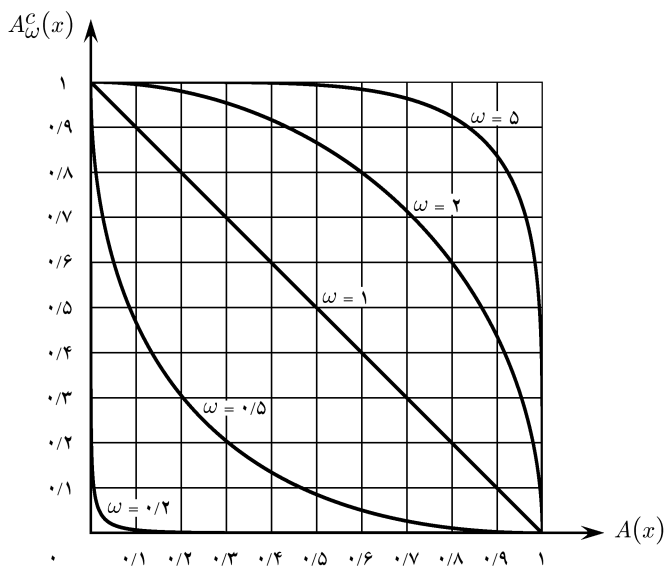
قضیه ۹.۳ فرض کنید برای اشتراک و اجتماع از عملگرهای استاندارد استفاده شود. در این صورت با به کارگیری الف) λ– متمم سوگینو، ب) ω– متمم ییگر؛ قوانین دمورگان برقرار هستند.

نکته۱.۳ قبلاً گفتیم که در زمینه‌ی مجموعه‌های فازی قوانین شمول و طرد یعنی $A \cup A^c = X$ و $A \cap A^c = \phi$ برقرار نیستند. این امر به تعریف اجتماع و اشتراک باز می‌گردد و نه به تعریف متمم. زیرا همچنان که در بخش پیشین دیدیم، می‌توان اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی را به گونه‌ای تعریف کرد که این قوانین برقرار باشند (البته با از دست دادن قوانین توزیع‌پذیری و خودتوانی.)

در شکل‌های ۱.۳ و ۲.۳ نمودار عملگرهای متمم سوگینو و ییگر برای چند مقدار λ و ω رسم شده‌اند.



شکل ۱.۳ رفتار عملگر متمم سوگینو برای چند مقدار λ.



شکل ۲.۳ رفتار عملگر متمم ییگر برای چند مقدار ω.

برای مطالعهی بیشتر

بخش ۱.۳

تعریف اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی بر پایهی عملگرهای min و max در واقع تعریف‌هایی هستند که زاده در نخستین مقالهی خود «مجموعه‌های فازی» [] برای اشتراک و اجتماع مطرح نمود. اما بلافاصله پس ار معرفی مجموعه‌های فازی، عملگرهای گوناگونی برای اشتراک و اجتماع معرفی شدند، که مهم‌ترین آن‌ها عملگرهایی است که در بخش ۱.۳ مرور کردیم.

باید خاطر نشان ساخت که اشتراک و اجتماع تنها روش‌های انبوهش دو مجموعه فازی نیستند. شیوه‌های دیگری نیز برای انبوهش دو مجموعه فازی پیشنهاد شده‌اند. یک شیوه، به‌کارگیری عملگرهای میانگین (مانند میانگین حسابی و میانگین هندسی) است، که به ویژه در مباحث مربوط به تصمیم‌گیری در محیط فازی کاربرد دارند []. شیوهی دیگر، تلفیق عملگرهای میانگین و عملگرهای مربوط به اشتراک و اجتماع است که منجر به تعریف عملگرهایی موسوم به «و فازی» و «یا فازی» شده است []. مطالعهی بیشتر در بارهی این عملگرها و انواع دیگر عملگرها را می توان در منابعی مانند [] پیگیری کرد.

بخش‌های ۲.۳ و ۳.۳

نرم‌های مثلثی نخستین بار توسط منجر [] در سال ۱۹۴۲، در رابطه با فضاهای متریک آماری، معرفی شد. شواتزر و اسکلار [] در دههی ۱۹۶۰ این موضوع را مجدداً مورد توجه قرار دادند. پس از معرفی مجموعه‌های فازی و بررسی دربارهی عملگرهای مجموعه‌ای، تحقیقات در زمینهی T–نرم‌ها و S–نرم‌ها، به عنوان یک موضوع محوری و پایه‌ای، مورد توجه بیشتر و جدی‌تر قرار گرفت.

دربارهی T–نرم‌ها و S–نرم‌ها و مباحثی مانند ویژگی‌های آن‌ها، کاربرد آن‌ها، و انواع مختلف پارامتری و ناپارامتری آن‌ها، کتاب‌های متعدد و مقالات بسیاری نگاشته شده است، که برای نمونه می‌توان به [] اشاره کرد. ساختارهای جبری مبتنی بر این عملگرها در کتاب گوین و واکر [] به گستردگی بحث شده است. روشی برای تحلیل حساسیت این عملگرها در [] مطرح شده است.

نوواک [] مفاهیم ضرب‌نما و همضرب‌نما را به ترتیب به‌جای مفاهیم T–نرم و S–نرم در نظر گرفته است. این مفاهیم، کلی‌تر از T–نرم و S–نرم هستند. در این باره به [] رجوع کنید.

بخش ۴.۳

مطالعه‌ی بیشتر در باره‌ی عملگر متمم (از دیدگاه منطقی: عملگر نفی) را می‌توان در کتاب‌های کلیر و فولگر [] و پدریچ [] دنبال کرد. کتاب کلیر و یوان [] حاوی برخی قضایای مشخصه‌سازی در مورد عملگر متمم است. در کتاب گوین و واکر [] نیز عملگر متمم در چارچوب مباحث جبری بررسی شده است.

تمرین‌ها

۱.۳ با چهار مثال نشان دهید که شرایط قضیه ۳.۳، مستقل از هم‌اند.

۲.۳ فرض کنید $X = \{۰,۱,۲,\ldots,۱۰\}$، و A مجموعه فازی «اعداد کوچک»، و B مجموعه فازی «اعداد تقریباً ۵» با توابع عضویت زیر باشند

$$A = \{\tfrac{۱}{۰}, \tfrac{۰/۹}{۱}, \tfrac{۰/۸}{۲}, \tfrac{۰/۷}{۳}, \tfrac{۰/۶}{۴}, \tfrac{۰/۵}{۵}, \tfrac{۰/۴}{۶}, \tfrac{۰/۳}{۷}, \tfrac{۰/۲}{۸}, \tfrac{۰/۱}{۹}\}$$

$$B = \{\tfrac{۰/۲}{۱}, \tfrac{۰/۴}{۲}, \tfrac{۰/۶}{۳}, \tfrac{۰/۸}{۴}, \tfrac{۱}{۵}, \tfrac{۰/۸}{۶}, \tfrac{۰/۶}{۷}, \tfrac{۰/۴}{۸}, \tfrac{۰/۲}{۹}\}$$

$A \cap B$ و $A \cup B$ را با استفاده از هشت تعریفی که برای اشتراک و اجتماع در این فصل به آن‌ها اشاره شد بیابید. در استفاده از عملگرهای هاماخر از $\gamma = ۰/۲$، برای عملگرهای ییگر از $\omega = ۳$، برای عملگرهای دوبوا و پراد از $\alpha = ۰/۵$ و برای عملگرهای دومبی از $\lambda = ۲$ استفاده کنید.

۳.۳ با مفروضات مسأله ۲، $A \cap B$ و $A \cup B$ را بر اساس عملگرهای هاماخر برای چند γ مختلف بیابید. نتایج را در دو جدول جداگانه خلاصه کرده و تأثیر تغییر γ را بررسی کنید.

۴.۳ مسأله ۳.۳ را بر اساس عملگرهای ییگر و برای چند ω مختلف انجام دهید.

۵.۳ مسأله ۳.۳ را بر اساس عملگرهای دوبوا و پراد و برای چند α مختلف انجام دهید.

۶.۳ مسأله ۳.۳ را بر پایه‌ی عملگرهای دومبی و برای چند λ مختلف انجام دهید.

۷.۳ بر اساس نتایج مسأله ۲.۳، بررسی کنید که عملگرهای پوچتوان (تفاضل کراندار و جمع کراندار) در قوانین شمول و طرد صدق می‌کنند، ولی در قوانین توزیع‌پذیری صدق نمی‌کنند و خودتوان هم نیستند.

۸.۳ دو مجموعه فازی A و B با توابع عضویت زیر را در نظر بگیرید

$$A(x) = \begin{cases} \frac{۱۰+x}{۱۰} & -۱۰ \le x < ۰ \\ \frac{۱۰-x}{۱۰} & ۰ \le x < ۱۰ \\ ۰ & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \qquad B(x) = \begin{cases} \frac{x}{۱۰} & ۰ \le x < ۱۰ \\ \frac{۲۰-x}{۱۰} & ۱۰ \le x < ۲۰ \\ ۰ & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

$A \cap B$ و $A \cup B$ را بر پایه‌ی عملگرهای پوچ‌توان بیابید، و نمودار توابع عضویت آن‌ها را رسم کنید.

۹.۳ با مفروضات مسأله ۲.۳، A^c_λ را برای $\lambda = -۰/۵$ و $\lambda = ۱۰$ بیابید و با هم مقایسه کنید.

۱۰.۳ فرض کنید $X = [۰, ۱۰]$ و $\forall x \in X$، $A(x) = \frac{۱}{۲}$. مجموعه فازی $A^c_\lambda(x)$ را به ازای $\lambda = ۱$ بیابید.

۱۱.۳ فرض کنید $X = [۰, ۱]$ و $\forall x \in X$، $A(x) = \frac{۱-x}{۱+x}$. مجموعه فازی $A^c_\lambda(x)$ را به ازای $\lambda = ۱$ بیابید. نمودار $A(x)$ و $A^c_{\lambda=۱}(x)$ را، در یک دستگاه، رسم کنید.

۱۲.۳ بررسی کنید که در تعریف A^c_λ، چنان‌چه $\lambda < ۰$ آن‌گاه همواره $A(x)+A^c\lambda(x) > ۱$، یعنی مجموع مقادیر عضویت هر x دلخواه در یک مجموعه و $\lambda-$ متمم آن مجموعه از یک بیشتر است. و اگر $\lambda > ۰$ آن‌گاه همواره $A(x) + A^c\lambda(x) < ۱$، یعنی مجموع مقادیر عضویت هر x دلخواه در یک مجموعه و $\lambda-$ متمم آن مجموعه از یک کمتر است.

۱۳.۳ فرض کنید $X = [۰, ۱]$ و $\forall x \in X$، $A(x) = x$ و $B(x) = \frac{۱}{۲}$. مجموعه‌های فازی $A \cap B$ و $A \cup B$ را بر پایه‌ی عملگرهای اکیداً یکنوا بیابید. نمودارهای توابع عضویت مجموعه‌های فازی A و B و $A \cap B$ و $A \cup B$ را در یک دستگاه رسم کنید.

۱۴.۳ با مفروضات مسأله ۱۲.۳، $A \cap B$ و $A \cup B$ را بر پایه‌ی عملگرهای دوبوا و پراد با $\alpha = \frac{۱}{۴}$ بیابید. نمودارهای توابع عضویت A و B و $A \cap B$ و $A \cup B$ را رسم کنید.

۱۵.۳ الف) بررسی کنید که آیا تابع $C(x) = \frac{۱}{۲}\{۱ + Sin((۲x + ۱)\frac{\pi}{۲})\}$ در شرایط مربوط به عملگر نفی صدق می‌کند؟

ب) دست کم دو تابع مناسب برای عملگر نفی، به جز مواردی که در این فصل اشاره شد، مثال بزنید.

۱۶.۳ ثابت کنید که نرم‌های $\min$ و $\max$ به ترتیب حالت‌های حدّی $T-$نرم‌ها و $S-$نرم‌ها هستند. یعنی برای هر $T-$ نرم و هر $S-$ نرم

$$\begin{array}{l} T(x,y) \leq T_m(x,y) \\ S(x,y) \geq S_m(x,y) \end{array}$$

۱۷.۳ ثابت کنید که عملگرهای اشتراک و اجتماع هاماخر، برحسب هر مؤلفه، یک به یک‌اند. یعنی

$$A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C \quad \text{و} \quad A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$$

(و در نتیجه)

$$A \cup B = C \cup B \Rightarrow A = C \quad \text{و} \quad A \cap B = C \cap B \Rightarrow A = C$$

این شرائط که می‌توان آن‌ها را جانشین شرط ۳ (توزیع‌پذیری) در قضیه ۱.۳ دانست، تفاوت رهیافت هاماخر را با رهیافت بلمن — گیرتز در تعریف اشتراک و اجتماع نشان می‌دهد.

۱۸.۳ بررسی کنید که با استفاده از $\omega-$ متمم ییگر، عملگر اجتماع ییگر در قانون شمول صدق می‌کند.

۱۹.۳ ثابت کنید که تنها $T-$ نرم ($S-$ نرم) که ویژگی خود توانی دارد، $T_m(x,y) = \min\{x,y\}$ $(S_m(x,y) = \max\{x,y\})$ است.

۲۰.۳ بررسی کنید که

الف) برای هر $T-$ نرم، $T(x, ۰) = ۰, \forall x \in I$،

ب) برای هر $S-$ نرم، $S(x, ۱) = ۱, \forall x \in I$.

۲۱.۳ ثابت کنید $T-$نرم دراستیک و $S-$نرم دراستیک، به ترتیب حالت حدی $T-$نرم‌ها و $S-$نرم‌ها هستند. یعنی برای هر $T-$نرم و هر $S-$نرم

$$\begin{array}{l} T_d(x,y) \leq T(x,y) \\ S_d(x,y) \geq S(x,y) \end{array}$$

۲۲.۳ فرض کنید T، یک $T-$نرم با ویژگی زیر باشد

$$T(x,y+z) = T(x,y) + T(x,z),\ x,y,z \in [۰,۱], y+z \leq ۱$$

ثابت کنید که T ضرب جبری است.

فصل ۴

اصل توسیع و اعداد فازی

نگو حقیقت را یافته‌ام، بگو حقیقتی را یافته‌ام.
جبران خلیل جبران[۱]

مقدمه

اصل توسیع یکی از مفاهیم اساسی و کلیدی در نظریه مجموعه‌های فازی است. این اصل ابزاری برای گسترش و تعمیم مفاهیم ریاضی است. از این اصل می‌توان برای تعمیم عملگرهای جبری و تعریف این عملگرها برای اعداد فازی استفاده کرد. در بخش اول این فصل به معرّفی اصل توسیع می‌پردازیم. در بخش دوم اعداد فازی را معرفی کرده و براساس اصل توسیع، عملگرهای جبری را برای آن‌ها تعریف می‌کنیم. در بخش سوّم حساب اعداد فازی را مطالعه می‌کنیم. در بخش چهارم اعداد فازی LR را مرور می‌کنیم. در بخش پنجم بازه‌های فازی را معرفی کرده و در بخش ششم و پایانی چند نکته‌ی تکمیلی درباره‌ی اعداد فازی از جمله ترتیب اعداد فازی را یادآور می‌شویم.

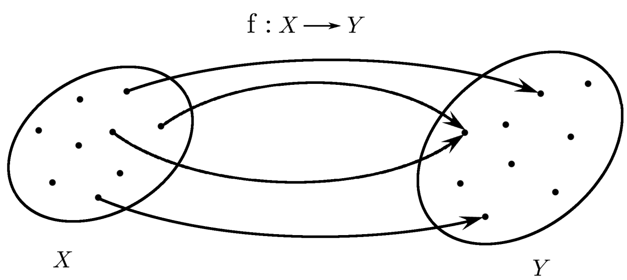
[۱] جبران خلیل جبران: شاعر و نقاش شهیر لبنانی (۱۹۳۱–۱۸۸۳ م). متن، نقل از: پیامبر، اثر جبران خلیل جبران، برگرداننده: جعفر مؤید شیرازی، انتشارات دانشگاه شیراز، ۱۳۷۴.

۴.۱ اصل توسیع (اصل گسترش)

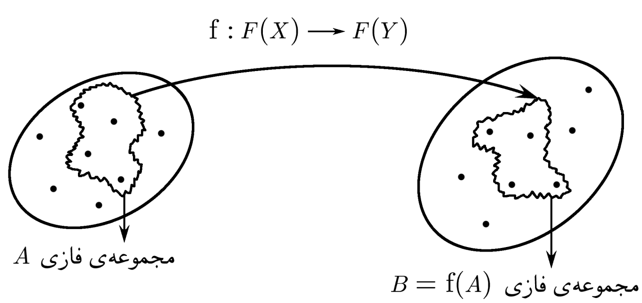
فرض کنید f یک تابع از X به Y باشد، یعنی

$$y = f(x), \qquad x \in X, y \in Y$$

این تابع به هر نقطه از X، نقطه‌ای از Y را می‌نگارد. به سخن دیگر تابع f بر هر نقطه از X عمل کرده و نقطه‌ای از Y را به آن نسبت می‌دهد. حال می‌خواهیم f را طوری گسترش دهیم که به جای اینکه بر یک نقطه از X عمل کند، بر یک زیر مجموعه فازی از X عمل کند. یعنی قلمرو f از X به $F(X)$ (مجموعه‌ی زیرمجموعه‌های فازی X) تعمیم داده شود. آنچه مهم است تعریف مقدار حاصل از عمل f بر یک مجموعه فازی از X مثلاً A است. مسلماً انتظار داریم که $f(A)$ یعنی حاصل عمل f بر A، دیگر یک نقطه از Y نباشد بلکه یک مجموعه فازی از Y مانند B باشد. سؤال این است که مجموعه فازی $B = f(A)$ چگونه تعریف شود؟ واضح است که اگر f یک تابع یک به یک باشد، یعنی اگر $y \in Y$ تصویر تنها یک نقطه مانند $x \in X$ باشد، آن‌گاه $B(y) = A(f^{-1}(y)) = A(x)$. اما در حالت کلی، ممکن است $y \in Y$ تصویر چندین نقطه از X باشد. در این حالت اصل توسیع روش تعریف $B = f(A)$ را ارایه می‌دهد.



شکل ۱.۴ روش عمل یک تابع معمولی.



شکل ۲.۴ روش عمل یک تابع بر اساس اصل توسیع.

برای درک بهتر اصل توسیع، ابتدا ساده‌ترین صورت آن را تعریف کرده، با ذکر مثال مفهوم آن را روشن می‌کنیم. سپس تعریف کلّی را ارایه می‌دهیم.

تعریف ۱.۴ فرض کنید X و Y دو مجموعه و f یک تابع به صورت $f: X \to Y$ و A یک زیر مجموعه فازی از X باشد. در این صورت $B = f(A)$ به صورت یک مجموعه فازی از Y با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$B(y) = \sup_{x; y=f(x)} A(x)$$

در حالتی که $f^{-۱}(y) = \phi$ یعنی حالتی که $\{x; y = f(x)\} = \phi$، تعریف می‌کنیم $B(y) = ۰$. به تابع f تابع تصویر یا تابع انتقال گفته می‌شود.

شکل ۳.۴ شیوه‌ی عمل اصل توسیع را هنگامی که تابع f یک به یک نیست نشان می‌دهد. مثال بعد در همین رابطه است.

شکل ۳.۴ شیوه‌ی عمل اصل توسیع هنگامی که f یک به یک نیست.

مثال ۱.۴ فرض کنید $X = Z$ و $y = f(x) = x^۲$ و مجموعه فازی A از X بیانگر «تقریباً ۲» به صورت زیر باشد

$$A = \left\{ \frac{۰/۲}{-۲}, \frac{۰/۴}{-۱}, \frac{۰/۶}{۰}, \frac{۰/۸}{۱}, \frac{۱}{۲}, \frac{۰/۸}{۳}, \frac{۰/۶}{۴}, \frac{۰/۴}{۵}, \frac{۰/۲}{۶} \right\}$$

در این صورت با توجه به اصل توسیع داریم

$$B = f(A) = \left\{ \frac{۰/۶}{۰}, \frac{۰/۸}{۱}, \frac{۱}{۴}, \frac{۰/۸}{۹}, \frac{۰/۶}{۱۶}, \frac{۰/۴}{۲۵}, \frac{۰/۲}{۳۶} \right\}$$

این مثال را اندکی توضیح می‌دهیم. در اینجا یک تابع داریم که به هر عدد، مجذور آن را نسبت می‌دهد. مثلاً به عدد (دقیقاً) دو، عدد (دقیقاً) چهار را نسبت می‌دهد. حال می‌خواهیم به جای عدد دو درباره‌ی «تقریباً دو» صحبت کنیم. در واقع می خواهیم از طریق تابع $y = f(x) = x^۲$، مقدار f رابرای «تقریباً دو» بیابیم، یعنی مقدار «مجذور تقریباً دو» را به صورت یک مجموعه فازی به دست آوریم.

مثال ۲.۴ فرض کنید $X = R$ و $y = f(x) = x^{۲}$ و مجموعه فازی A از R بیانگر «تقریباً دو» به صورت زیر باشد

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x}{۲} & ۰ \leq x < ۲ \\ \frac{۵-x}{۳} & ۲ \leq x < ۵ \end{cases}$$

می خواهیم حاصل عمل تابع f بر A را، یعنی مجموعه فازی $B = f(A)$ را، بیابیم. با توجه به این که تابع $f(x) = x^{۲}$ بر $[۰, ۵]$ یک به یک است، واضح است که (شکل ۳.۴)

$$B(y) = \sup_{x; y = x^{۲}} A(x) = \begin{cases} A(\sqrt{y}) & ۰ \leq \sqrt{y} < ۲ \\ A(\sqrt{y}) & ۲ \leq \sqrt{y} < ۵ \end{cases} = \begin{cases} \frac{\sqrt{y}}{۲} & ۰ \leq y < ۴ \\ \frac{۵-\sqrt{y}}{۳} & ۴ \leq y < ۲۵ \end{cases}$$

شکل ۳.۴ شیوه‌ی عمل اصل توسیع در مثال ۲.۴ (تابع تصویر یک به یک است.)

مثال ۳.۴ فرض کنید $X = R$ و مجموعه فازی A از R بیانگر «تقریباً یک» به صورت زیر باشد

$$A(x) = \begin{cases} x & ۰ \leq x < ۱ \\ \frac{۵-x}{۴} & ۱ \leq x < ۵ \end{cases}$$

هم‌چنین فرض کنید تابع تصویر $y = f(x) = (x-۲)^{۲}$ باشد. دقت دارید که در این حالت تابع تصویر بر $[۰, ۵]$ یک به یک نیست. طبق اصل توسیع مجموعه فازی $B = f(A)$ به صورت زیر به دست می‌آید (شکل ۴.۴)

$$\begin{aligned} B(y) &= \sup_{x; y=(x-۲)^{۲}} A(x) \\ &= \begin{cases} \max\{\frac{۵-(۲-\sqrt{y})}{۴}, \frac{۵-(۲+\sqrt{y})}{۴}\} & ۰ \leq y < ۱ \\ \max\{۲-\sqrt{y}, \frac{۵-(۲+\sqrt{y})}{۴}\} & ۱ \leq y < ۴ \\ \frac{۵-(۲+\sqrt{y})}{۴} & ۴ \leq y < ۹ \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{۳+\sqrt{y}}{۴} & ۰ \leq y < ۱ \\ ۲-\sqrt{y} & ۱ \leq y < \frac{۲۵}{۹} \\ \frac{۳-\sqrt{y}}{۴} & \frac{۲۵}{۴} \leq y < ۴ \\ \frac{۳-\sqrt{y}}{۴} & ۴ \leq y < ۹ \end{cases} \end{aligned}$$

شکل ۴.۴ شیوه‌ی عمل اصل توسیع در مثال ۳.۴ (تابع تصویر یک به یک نیست.)

اکنون تعریف کلّی اصل توسیع را بیان می‌کنیم.

تعریف ۲.۴ (اصل توسیع) فرض کنید $X_۱,\dots,X_n$، n مجموعه مرجع، و $X = X_۱ \times \dots \times X_n$ حاصل‌ضرب دکارتی آن‌ها باشد. هم‌چنین $A_۱,\dots,A_n$، n مجموعه فازی به ترتیب از $X_۱,\dots,X_n$ باشند. فرض کنید f یک نگاشت از X به Y باشد، یعنی $y = f(x_۱,\dots,x_n)$. در این صورت حاصل عمل f بر n مجموعه فازی $A_۱,\dots,A_n$ به عنوان یک مجموعه فازی B از Y و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} B &= f(A_۱,\dots,A_n) \\ &= \{(y,B(y)) | y = f(x_۱,\dots,x_n), (x_۱,\dots,x_n) \in X\} \end{aligned}$$

که در آن

$$B(y) = \begin{cases} \sup\limits_{\substack{x_۱,\dots,x_n \\ y = f(x_۱,\dots,x_n)}} \min\{A_۱(x),\dots,A_n(x_n)\} & f^{-۱}(y) \neq \phi \\ ۰ & f^{-۱}(y) = \phi \end{cases}$$

مثال ۴.۴ فرض کنید $X_۱ = X_۲ = Z$، و $A_۱$ و $A_۲$ دو زیر مجموعه فازی از Z به ترتیب نمایشگر «تقریباً صفر» و «تقریباً یک» به صورت زیر باشند

$$A_۱ = \left\{ \frac{۰/۲}{-۲}, \frac{۰/۵}{-۱}, \frac{۱}{۰}, \frac{۰/۵}{۱}, \frac{۰/۲}{۲} \right\}$$

$$A_۲ = \left\{ \frac{۰/۲}{-۱}, \frac{۰/۵}{۰}, \frac{۱}{۱}, \frac{۰/۵}{۲}, \frac{۰/۲}{۳} \right\}$$

فرض کنید تابع $f : X_1 \times X_2 \to Y$ به صورت $y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ تعریف شده باشد. در این صورت

$$A_1 \times A_2 = \left\{ \frac{0/2}{(-2,-1)}, \frac{0/2}{(-2,0)}, \ldots, \frac{1}{(0,1)}, \frac{0/5}{(0,2)}, \ldots, \frac{0/2}{(2,3)} \right\}$$

و بنا بر این طبق اصل توسیع

$$B = f(A_1, A_2) = \left\{ \frac{0/5}{0}, \frac{1}{1}, \frac{0/5}{2}, \frac{0/5}{4}, \frac{0/5}{5}, \frac{0/2}{8}, \frac{0/2}{9}, \frac{0/2}{10}, \frac{0/2}{13} \right\}$$

این مثال را اندکی توضیح می‌دهیم. در اینجا یک تابع دو متغیره داریم که به هر دو عدد، مجموع مجذورات آن‌ها را نسبت می‌دهد. یعنی مثلاً به دو عدد صفر و یک، مقدار $f(0, 1) = 0^2 + 1 = 2$ را نسبت می‌دهد. حال می‌خواهیم به جای اعداد صفر و یک، درباره‌ی «تقریباً صفر» و «تقریباً یک» و از طریق تابع $y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ مقدار مجموع «مجذور تقریباً صفر» و «مجذور تقریباً یک» را به صورت یک مجموعه فازی به دست آوریم.

۴.۲ اعداد فازی

از مهم‌ترین کاربردهای اصل گسترش، تعمیم عملگرهای حسابی مانند جمع و ضرب برای اعدادی است که اعداد فازی نام دارند و یک تعمیم طبیعی برای اعداد معمولی هستند. در این بخش ابتدا تعریف یک عدد فازی را ارائه می‌دهیم. سپس با استفاده از اصل گسترش، عملگرهای جبری را برای این اعداد تعمیم می‌دهیم. مطالب این بخش مبتنی بر مرجع [۴۴] است، که برای اثبات قضایا و توضیحات بیشتر می‌توانید به آن مراجعه کنید. پاره‌ای جرئیات و تذکرات نیز در نکات تکمیلی پایان فصل ارائه شده است.

تعریف ۳.۴ مجموعه فازی N از R (اعداد حقیقی) را یک عدد فازی (حقیقی) گوییم، اگر

۱) N نرمال و تک نمایی باشد. یعنی یک و دقیقاً یک $x_0 \in R$ وجود داشته باشد که $N(x_0) = 1$.

۲) α—برش‌های N، به ازای هر $\alpha \in (0, 1]$، به صورت بازه‌های بسته باشند.

مجموعه‌ی تمام اعداد فازی را با $F(R)$ نشان می‌دهیم. برخی ویژگی‌های اعداد فازی در گزاره زیر بیان شده است.

گزاره ۱.۴

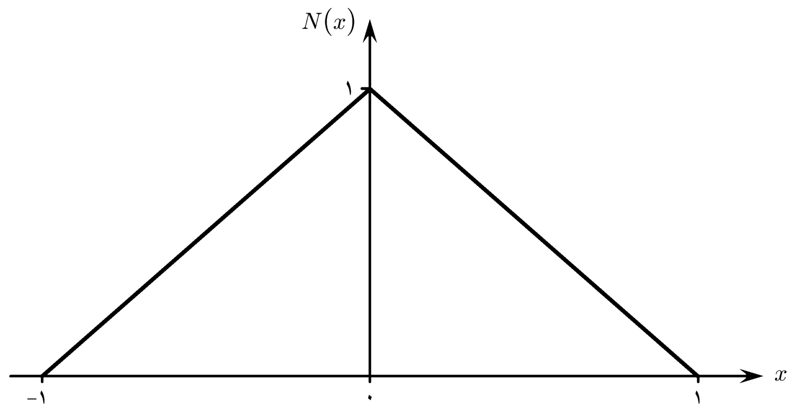
الف) هر عدد فازی یک مجموعه فازی محدب است.

ب) تابع عضویت هر عدد فازی، بالا نیمپیوسته است.

پ) اگر N یک عدد فازی با $N(x_\circ) = ۱$ باشد، آن‌گاه تابع عضویت N در بازه $(-\infty, x_\circ]$ غیر نزولی، و در بازه $[x_\circ, \infty)$ غیر صعودی است.

مثال ۵.۴ مجموعه فازی L با تابع عضویت زیر یک عدد فازی است. می‌توان L را عدد فازی «تقریباً صفر» تعبیر کرد.

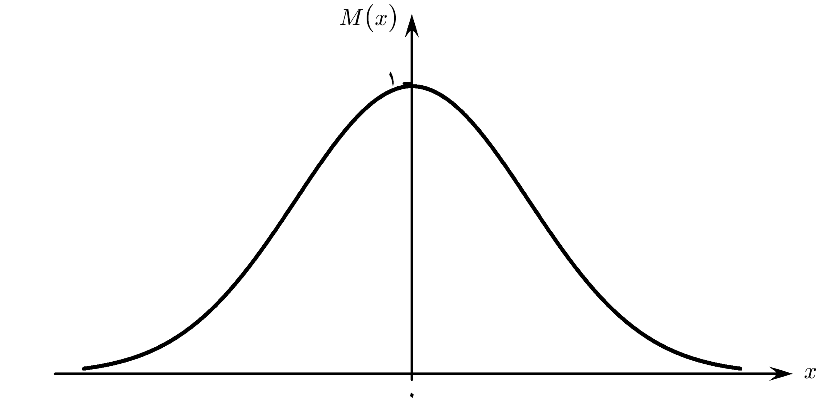
$$L(x) = \begin{cases} ۱ - |x| & x \in [-۱, ۱] \\ \circ & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$



شکل ۴.۴ نمودار تابع عضویت عدد فازی «تقریباً صفر» در مثال ۵.۴.

مثال ۶.۴ مجموعه فازی M با تابع عضویت زیر یک عدد فازی است. مجموعه فازی M تعبیر دیگری از عدد فازی «تقریباً صفر» است.

$$M(x) = e^{-\frac{x^۲}{۲}} \qquad -\infty < x < \infty$$

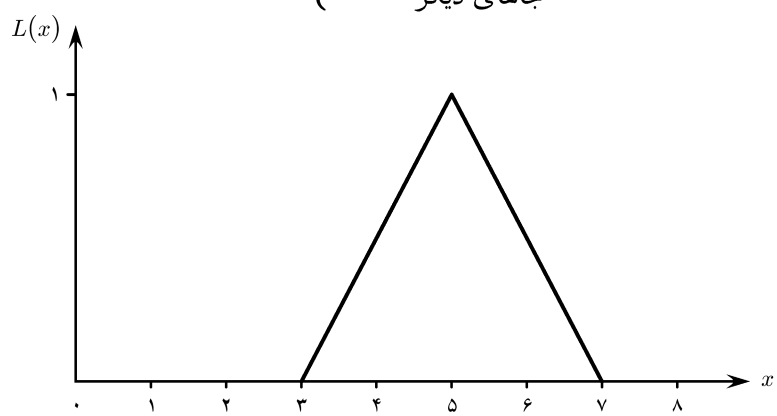


شکل ۵.۴ نمودار تابع عضویت عدد فازی «تقریباً صفر» در مثال ۶.۴.

تعریف ۴.۴ عدد فازی N را مثبت (منفی) گوییم اگر برای هر $x \leq ۰$ $(x \geq ۰)$، $N(x) = ۰$.

مثال ۷.۴ دو عدد فازی M و N در مثال‌های ۴.۴ و ۵.۴ هیچ کدام نه عدد فازی مثبت هستند و نه عدد فازی منفی. ولی عدد فازی N با تابع عضویت زیر یک عدد فازی مثبت است. N را می‌توان عدد فازی «تقریباً پنج» تعبیر کرد.

$$N(x) = \begin{cases} \frac{x-۳}{۲} & ۳ \leq x < ۵ \\ \frac{۷-x}{۲} & ۵ \leq x < ۷ \\ ۰ & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$



شکل ۶.۴ نمودار تابع عضویت عدد فازی «تقریباً پنج» در مثال ۶.۴.

تذکر: از این پس، برای کوتاهی، حدود متغیر و ضابطه‌ی یک عدد فازی را صرفاً برای نقاط تکیه‌گاه عدد فازی می‌نویسیم.

تعریف ۵.۴ فرض کنید M یک عدد فازی و $f : R \to R$ یک عملگر یک بعدی باشد. بر اساس اصل گسترش، $f(M)$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$f(M)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x, y=f(x)} M(x) & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & f^{-1}(y) = \phi \end{cases}$$

مثال ۸.۴ در تعریف فوق اگر $f(x) = -x$ فرض شود، آن‌گاه قرینه عدد فازی M، عدد فازی $-M$، به صورت مجموعه فازی زیر تعریف می‌شود

$$-M = \{(x, -M(x)) | x \in R\}$$

که در آن $-M(x) = M(-x)$.

توجه کنید که نمودار M و $-M$ نسبت به محور yها قرینه‌اند.

مثال ۹.۴ در تعریف ۶.۴ فرض کنید $f(x) = \frac{1}{x}$، آن‌گاه معکوس عدد فازی M، M^{-1}، به صورت مجموعه فازی زیر تعریف می‌شود

$$M^{-1} = \{(x, M^{-1}(x)) | x \in R\}$$

که در آن $M^{-1}(x) = M(\frac{1}{x})$.

توجه کنید که اگر M نه یک عدد فازی مثبت و نه یک عدد فازی منفی باشد، M^{-1} یک مجموعه فازی محدب (و بنا بر این یک عدد فازی) نخواهد بود.

مثال ۱۰.۴ در تعریف ۶.۴ فرض کنید $f(x) = \lambda x$ و $\lambda \in R - \{0\}$، آن‌گاه ضرب اسکالر عدد حقیقی λ در عدد فازی M به صورت یک عدد فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$\lambda M = \{(x, (\lambda M)(x)) | x \in R\}$$

که در آن $(\lambda M)(x) = M(\frac{x}{\lambda})$.

مثال ۱۱.۴ در تعریف ۶.۴، فرض کنید $f(x) = e^x$. در این صورت e^M به صورت مجموعه فازی زیر تعریف می‌شود

$$e^M = \{(x, e^M(x)) | x \in R\}$$

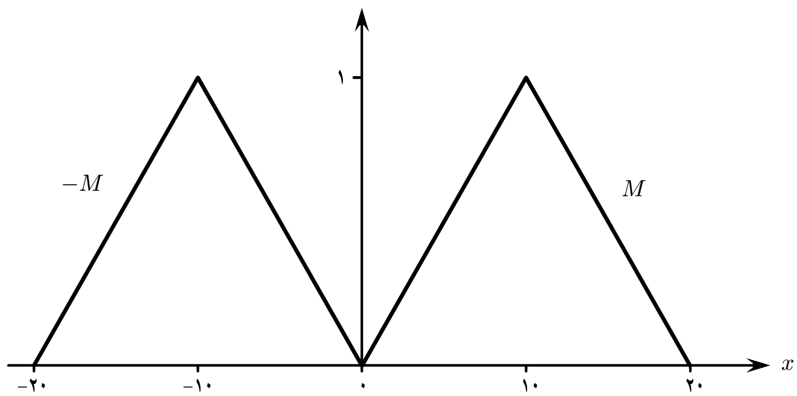
که در آن $e^M(x) = M(\ln(x)), x > 0$.

مثال ۱۲.۴ عدد فازی «تقریباً ۱۰» با تابع عضویت زیر را در نظر بگیرید

$$M(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} & 0 < x < 10 \\ \frac{20-x}{10} & 10 \leq x \leq 20 \end{cases}$$

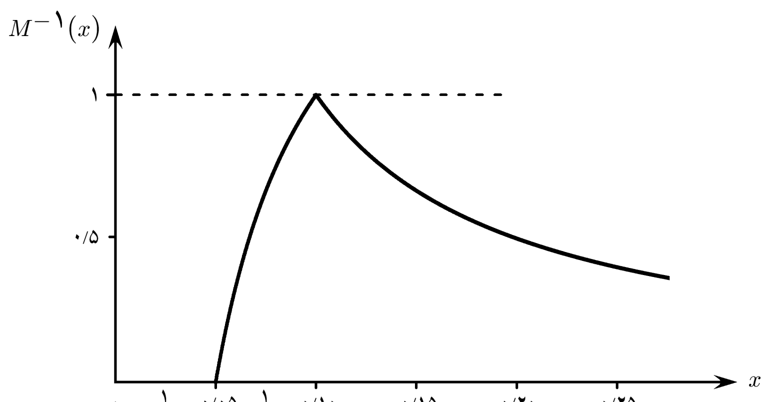
در این صورت قرینه M و معکوس M و $3M$ و e^M دارای توابع عضویت زیر خواهند بود

$$-M(x) = \begin{cases} \frac{20+x}{10} & -20 \leq x < -10 \\ \frac{-x}{10} & -10 \leq x < 0 \end{cases}$$



شکل ۷.۴ نمودار تابع عضویت اعداد فازی M و $-M$ در مثال ۱۲.۴.

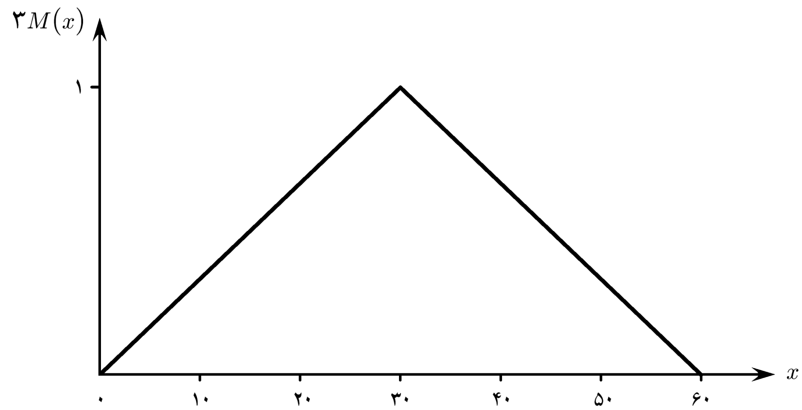
$$M^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{20x-1}{10x} & \frac{1}{20} \leq x < \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10x} & \frac{1}{10} \leq x < \infty \end{cases}$$



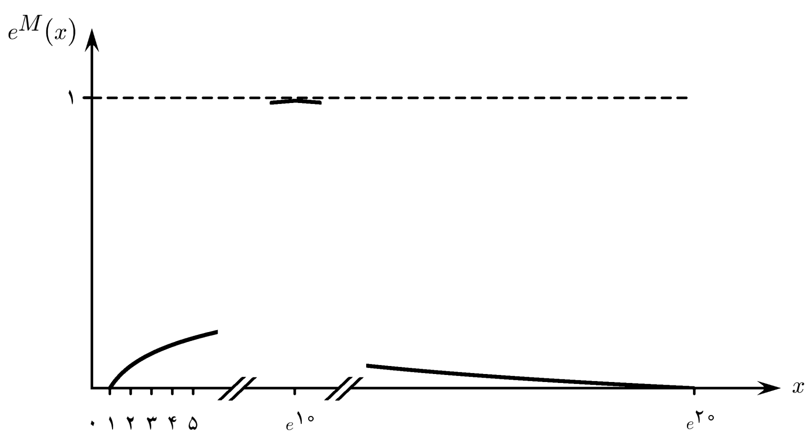
شکل ۸.۴ نمودار تابع عضویت عدد فازی M^{-1} در مثال ۱۲.۴.

$$3M(x) = \begin{cases} \frac{x}{30} & 0 \leq x < 30 \\ \frac{60-x}{30} & 30 \leq x < 60 \end{cases}$$

$$e^M(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{10} & 1 \leq x < e^{20} \\ \frac{20-\ln x}{10} & e^{10} \leq x \leq e^{20} \end{cases}$$



شکل ۹.۴ نمودار تابع عضویت $3M$ در مثال ۱۲.۴.



شکل ۱۰.۴ نمودار تابع عضویت عدد فازی e^M در مثال ۱۲.۴.

۴.۳ حساب اعداد فازی

تعریف ۶.۴ فرض کنید M و N دو عدد فازی با توابع عضویت پیوسته، و $R \times R \to R$: $*$ یک عملگر دو تایی بر اعداد حقیقی باشد. اگر تعمیم $*$ را برای اعداد فازی با $\circledast$ نشان دهیم، با استفاده از اصل گسترش، حاصل $M \circledast N$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$(M \circledast N)(z) = \sup_{z=x*y} \min[M(x), N(y)]$$

تعمیم چهار عمل اصلی برای اعداد فازی

در حالت خاص برای چهار عمل اصلی، تعریف فوق به صورت‌های زیر در می آید

$$\begin{aligned}
(M \oplus N)(z) &= \sup_{z=x+y} \min[M(x), N(y)] \\
(M \ominus N)(z) &= \sup_{z=x-y} \min[M(x), N(y)] \\
(M \otimes N)(z) &= \sup_{z=x\times y} \min[M(x), N(y)] \\
(M \oslash N)(z) &= \sup_{z=x/y} \min[M(x), N(y)]
\end{aligned}$$

اینکه نتیجه‌ی حاصل از عمل $\circledast$ به صورت فوق برای دو عدد فازی M و N تحت چه شرایطی خود، یک عدد فازی است، موضوعی است که در قسمت بعد به آن می‌پردازیم. ابتدا برای روشن شدن تعریف فوق به یک مثال توجه کنید.

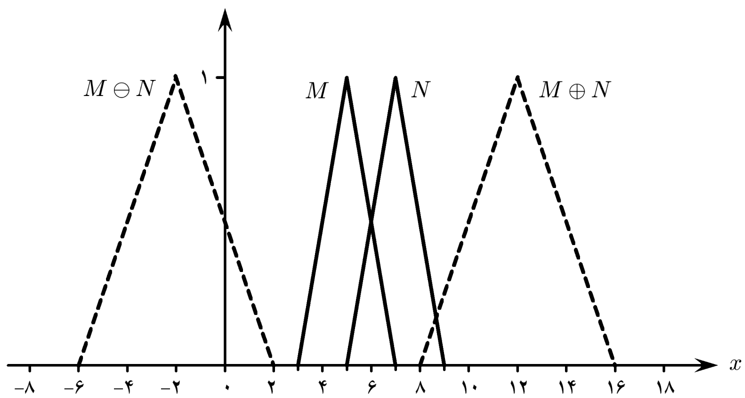
مثال ۱۳.۴ دو عدد فازی M «تقریباً پنج» و N «تقریباً هفت» را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$M(x) = \begin{cases} \frac{x-۳}{۲} & ۳ \leq x < ۵ \\ \frac{۷-x}{۲} & ۵ \leq x < ۷ \end{cases} , \quad N(x) = \begin{cases} \frac{x-۵}{۲} & ۵ \leq x < ۷ \\ \frac{۹-x}{۲} & ۷ \leq x < ۹ \end{cases}$$

جمع و تفاضل دو عدد فازی فوق، اعداد فازی با توابع عضویت زیر هستند

$$(M \oplus N)(x) = \begin{cases} \frac{x-۸}{۴} & ۸ \leq x < ۱۲ \\ \frac{۱٦-x}{۴} & ۱۲ \leq x < ۱٦ \end{cases}$$

$$(M \ominus N)(x) = \begin{cases} \frac{x+٦}{۴} & -٦ \leq x < -۲ \\ \frac{۲-x}{۴} & -۲ \leq x < ۲ \end{cases}$$



شکل ۱۱.۴ نمودار تابع عضویت اعداد فازی M و N و جمع و تفاضل آن‌ها در مثال ۱۳.۴.

ویژگی‌های عملگرهای تعمیم یافته

در ادامه ملاحظه خواهید کرد که بسیاری از ویژگی‌های عملگرهای معمولی جمع و ضرب و تفریق و تقسیم برای عملگرهای تعمیم یافته برقرار است. ما این ویژگی‌ها را بدون اثبات بیان می‌کنیم. علاقمندان به اثبات قضایا می‌توانند به [] مراجعه کنند. برای ورود به بحث، یک تعریف را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۷.۴ عملگر دو تایی $*$ را در R صعودی (نزولی) گوییم اگر برای هر $x_1 > y_1$ و $x_2 > y_2$،

$$x_1 * x_2 > y_1 * y_2 \ (x_1 * x_2 < y_1 * y_2)$$

مثال ۱۴.۴ $f(x,y) = x + y$ یک عملگر صعودی است. هم‌چنین $f(x,y) = xy$ بر R^+ یک عملگر صعودی است. هم‌چنین $f(x,y) = -(x+y)$ یک عملگر نزولی است.

قضیه ۱.۴ اگر M و N دو عدد فازی با توابع عضویت پیوسته و پوشا بر $I = [0,1]$ باشند و $*$ یک عملگر دوتایی به طور پیوسته صعودی (نزولی) باشد، آن‌گاه $M \circledast N$ یک عدد فازی است که تابع عضویت آن پیوسته و بر $I = [0,1]$ پوشاست.

قضیه ۲.۴ اگر عملگر دوتایی $*$ دارای ویژگی جابه‌جایی (شرکت‌پذیری) باشد، آن‌گاه عملگر $\circledast$ نیز دارای ویژگی جابه‌جایی (شرکت‌پذیری) است.

قضیه ۳.۴ برای هر L و M و N، مجموعه‌های فازی از R، داریم

$$L \circledast (M \cup N) = (L \circledast M) \cup (L \circledast N)$$

اثبات. کافی است ثابت کنیم که α—برش‌های دو مجموعه فازی در طرفین تساوی فوق، به ازای هر $0 < \alpha \leq 1$ باهم برابر هستند، یعنی ثابت کنیم که

$$[L \circledast (M \cup N)]_\alpha = [(L \circledast M) \cup (L \circledast N)]_\alpha$$

اما

$$\begin{aligned}
[L \circledast (M \cup N)]_\alpha &= \{z | (L \circledast (M \cup N))(z) \geq \alpha\} \\
&= \{z | \sup_{x*y=z} \min(L(x), (M \cup N)(y)) \geq \alpha\} \\
&= \{z | \sup_{x*y=z} \min(L(x), \max(M(y), N(y)) \geq \alpha\} \\
&= \{z | \sup_{x*y=z} \{\max(\min(L(x), M(y)), \min(L(x), N(y)))\} \geq \alpha\} \\
&= \{z | \max\{\sup_{x*y=z} \min(L(x), M(y)), \sup_{x*y=z} \min(L(x), N(y))\} \geq \alpha\}
\end{aligned}$$

قضیه فوق، یعنی توزیع‌پذیری هر عملگر تعمیم یافته بر اجتماع مجموعه‌های فازی، به آسانی تعبیر و تفسیر می‌شود. برای مثال، طبیعی به نظر می‌رسد که «(تقریباً هفت یا تقریباً چهار) $\oplus$ تقریباً یک»، برابر باشد با «تقریباً هشت یا تقریباً پنج». برای بررسی رابطه‌ی مشابه در مورد اشتراک به تمرین ۱۳.۴ مراجعه کنید.

قضیه ۴.۴ برای هر دو عدد فازی M و N،

$$\begin{aligned}
(M \oplus N)_a &= M_a \oplus N_a \\
(M \otimes N)_a &= M_a \otimes N_a
\end{aligned}$$

ویژگی‌های عملگر گسترش یافته جمع

چون عملگر معمولی جمع یک عملگر صعودی است، از قضیه ۱.۴ نتیجه می‌شود که $F(R)$ نسبت به عملگر $\oplus$ بسته است. یعنی اگر $N \in F(R)$ و M آن‌گاه $(M \oplus N) \in F(R)$. ویژگی‌های عملگر $\oplus$ را می‌توان به صورت زیر فهرست کرد:

۱) $\ominus(M \oplus N) = (\ominus M) \oplus (\ominus N)$

۲) $\oplus$ ویژگی‌های جابه‌جایی و شرکت‌پذیری دارد.

۳) $0 \in R \subseteq F(R)$ عضو خنثی عملگر $\oplus$ است، یعنی برای هر $M \in F(R)$، داریم $M \oplus 0 = M$.

۴) برای عملگر $\oplus$ عضو قرینه وجود ندارد، یعنی

$$\forall M \in [F(R) - R] : M \oplus (\ominus M) \neq 0 \in R$$

ویژگی‌های عملگر گسترش یافته ضرب

چون عملگر معمولی ضرب، یک عملگر صعودی بر R^+ و یک عملگر نزولی بر R^- است، بنا به قضیه ۱.۴، حاصلضرب گسترش یافته دو عدد فازیِ مثبت یا دو عدد فازی منفی، یک عدد فازی مثبت خواهد بود. هم‌چنین اگر M یک عدد فازی مثبت و N یک عدد فازی منفی باشد، آن‌گاه $\ominus M$ یک عدد فازی منفی خواهد بود و $M \otimes N = \ominus(\ominus M \otimes N)$ نیز یک عدد فازی منفی خواهد بود. ویژگی‌های عملگر $\otimes$ را می‌توانیم این گونه فهرست کنیم:

۱) $(\ominus M) \otimes N = \ominus(M \otimes N)$.

۲) $\otimes$ ویژگی‌های جابه‌جایی و شرکت‌پذیری دارد.

۳) $1 \in R \subseteq F(R)$ عضو خنثی عمل ضرب است، یعنی برای هر $M \in F(R)$ داریم $M \oplus 1 = M$.

۴) برای عملگر $\otimes$ عضو معکوس وجود ندارد. یعنی $\forall M \in [F(R) - R]; M \otimes M^{-1} \neq 1$.

قضیه ۵.۴ اگر L یک عدد فازی مثبت، (یا منفی) باشد و M و N دو عدد فازی (هر دو مثبت یا هر دو منفی)، آن‌گاه

$$L \otimes (M \oplus N) = (L \otimes M) \oplus (L \otimes N)$$

ویژگی‌های عملگر گسترش یافته تفریق

عملگر معمولی تفریق، نه صعودی است و نه نزولی و بنابراین نمی‌توان از قضیه ۱.۴ مستقیماً استفاده کرد. امّا برای هر دو عدد x و y داریم $x - y = x + (-y)$. از طرفی اگر

M و N دو عدد فازی باشند داریم $M \ominus N = M \oplus (\ominus N)$، زیرا

$$\begin{aligned}(M \ominus N)(z) &= \sup_{z=x-y} \min[M(x), N(y)] \\ &= \sup_{z=x+y} \min[M(x), N(y)] \\ &= \sup_{z=x+y} \min[M(x), N(y)]\end{aligned}$$

پس در هر حالت $M \ominus N$ یک عدد فازی است.

ویژگی‌های عملگر گسترش یافته تقسیم

عملگر معمولی تقسیم نه صعودی است و نه نزولی و بنابراین نمی‌توان از قضیه ۱.۴ مستقیماً استفاده کرد. امّا اگر M و N دو عدد فازی اکیداً مثبت باشند، یعنی برای هر $x \leq ۰$، $M(x) = N(x) = ۰$ (یا هر دو اکیداً منفی باشند)، داریم

$$\begin{aligned}(M \oslash N)(z) &= \sup_{z=x/y} \min[M(x), N(y)] \\ &= \sup_{z=x.y} \min[M(x), N(۱/y)] \\ &= \sup_{z=x.y} \min[M(x), N^{-۱}(y)]\end{aligned}$$

چون $N^{-۱}$ یک عدد فازی مثبت (منفی) است، بنا به قضیه ۱.۴، $M \oslash N$ یک عدد فازی خواهد بود.

۴.۴ اعداد فازی LR

همان گونه که از مطالب بخش پیشین آشکار است، اعمال جبری با اعداد فازی مستلزم محاسبات پیچیده و طولانی است. دوبوا و پراد [۴۴] با معرفی اعداد فازی LR تا اندازه‌ای کار را آسان کرده‌اند. این اعداد نوع خاصی از اعداد فازی هستند که ویژگی آن‌ها در نوع تابع عضویت آن‌هاست. همان طور که خواهیم دید محاسبات با این نوع اعداد فازی بسیار ساده و دارای یک الگوی مشخص است. این ویژگی باعث شده است که در بسیاری از کاربردهای نظریه مجموعه‌های فازی، از این نوع اعداد استفاده شود.

تعریف ۸.۴ اگر عدد فازی A دارای تابع عضویتی به صورت زیر باشد

$$A(x) = \begin{cases} L(\frac{m-x}{\alpha}) & x \leq m \\ R(\frac{x-m}{\beta}) & x > m \end{cases}$$

که در آن L و R توابعی غیر صعودی از R^+ به $[0,1]$ هستند و $L(0) = R(0) = 1$، آن‌گاه A را یک عدد فازی LR نامیده و با نماد $A = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ نشان می‌دهیم. عدد m را مقدار نمایی (میانه) و اعداد مثبت α و β را به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست A می‌نامیم. L و R توابع مرجع (شکل) نامیده می‌شوند.

از توابع مختلفی می‌توان برای $L(x)$، و به طور مشابه برای $R(x)$، استفاده کرد. رایج‌ترین آن‌ها عبارتند از (در همه‌ی موارد $p > 0$)

$L(x) = \max(0, 1 - |x|^p)$ (به کوتاهی $L(x) = 1 - |x|^p$)
$L(x) = e^{-|x|^p}$
$L(x) = \frac{1}{1+|x|^p}$
$L(x) = \frac{1}{1+p|x|}$

بدیهی است که در هر زمینه، باید توابع L و R مناسبی اختیار کرد.

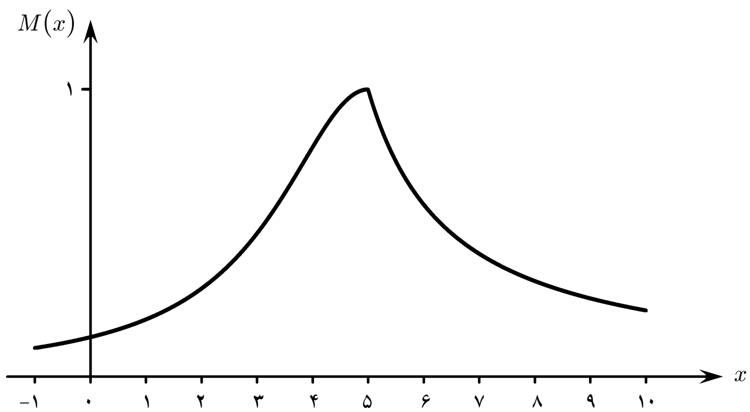
مثال ۱۵.۴ فرض کنید $M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و

$$L(x) = \frac{1}{1+|x|^p}, \qquad R(x) = \frac{1}{1+2|x|}$$

و $m = 5$، $\alpha = 2$ و $\beta = 3$. آن‌گاه

$$M(x) = \begin{cases} L(\frac{5-x}{2}) = \frac{1}{1+(\frac{5-x}{2})^2} & x \leq 5 \\ \\ R(\frac{x-5}{3}) = \frac{1}{1+\frac{2(x-5)}{3}} & x > 5 \end{cases}$$

M را می‌توانیم عدد فازی «تقریباً ۵» تعبیر کنیم. نمودار تابع عضویت M در شکل ۱۲.۴ رسم شده است.



شکل ۱۲.۴ نمودار تابع عضویت فازی «تقریباً پنج» در مثال ۱۵.۴.

تعریف ۹.۴ فرض کنید $A=(m,\alpha,\beta)_{LR}$، و $L=R$. دراین صورت

الف) A را یک عدد فازی مثلثی نامیده و با $A=(m,\alpha,\beta)_T$ نشان می‌دهیم اگر

$$L(x)=\max\{0,1-x\}=\begin{cases} 1-x & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{جاهای دیگر}\end{cases}$$

ب) A را یک عدد فازی نرمال نامیده و با $A=(m,\alpha,\beta)_N$ نشان می‌دهیم اگر $L(X)=e^{-x^2}$

پ) A را یک عدد فازی سهموی نامیده وبا $A=(m,\alpha,\beta)_P$ نشان می‌دهیم اگر

$$L(x)=\max\{0,1-x^2\}=\begin{cases} 1-x^2 & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{جاهای دیگر}\end{cases}$$

تعریف ۱۰.۴ عدد فازی $A=(m,\alpha,\alpha)_L$ را یک عدد فازی متقارن نامیده و با نماد $A=(m,\alpha)_L$ نشان می‌دهیم . اگر عدد فازی متقارن A مثلثی، نرمال و یا سهموی باشد، به ترتیب از نمادهای $A=(m,\alpha)_T$ و $A=(m,\alpha)_N$ و $A=(m,\alpha)_P$ استفاده می‌کنیم.

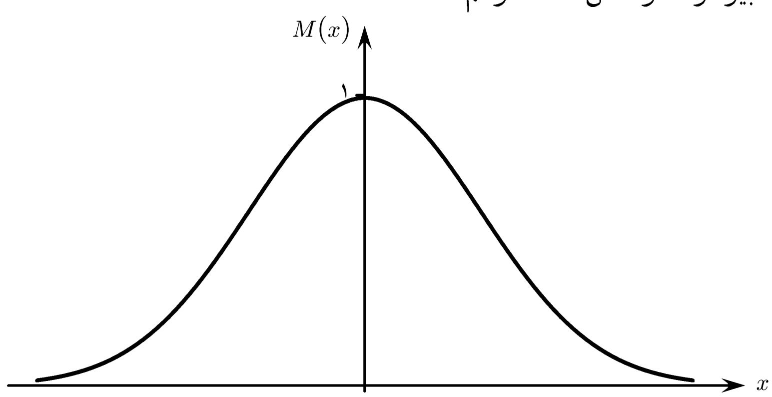
مثال ۱۶.۴ فرض کنید برای عدد فازی متقارن M، $L(x)=R(x)=e^{-x^2}$ و $m=0$ و $\alpha=\beta=1$. در این صورت

$$M(x)=\begin{cases} L(\frac{0-x}{1})=e^{-x^2} & x\le 0 \\ \\ R(\frac{x-0}{1})=e^{-x^2} & x>0\end{cases}$$

پس

$$M(x)=e^{-x^2} \qquad -\infty<x<\infty$$

نمودار تابع عضویت عدد فازی نرمال متقارن M که می‌توان آن را یک عدد فازی «تقریباً صفر» تعبیر کرد، در شکل ۱۳.۴ رسم شده است.

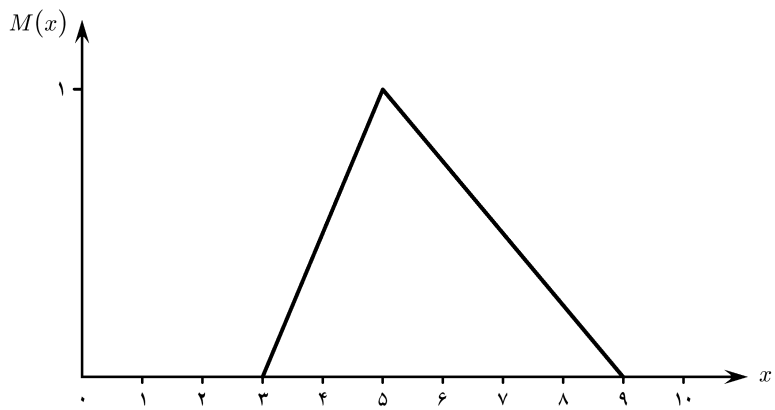


شکل ۱۳.۴ نمودار تابع عضویت عدد فازی «تقریباً صفر» در مثال ۱۶.۴.

مثال ۱۷.۴ فرض کنید برای عدد فازی متقارن M، $L(x) = R(x) = \max\{۰, ۱ - x\}$ و $m = ۵$ و $\alpha = ۲$ و $\beta = ۴$. در این صورت

$$M(x) = \begin{cases} L(\frac{۵-x}{۲}) & x \leq ۵ \\ R(\frac{x-۵}{۴}) & x > ۵ \end{cases} = \begin{cases} \frac{x-۳}{۲} & ۳ \leq x < ۵ \\ \frac{۹-x}{۴} & ۵ \leq x < ۹ \\ ۰ & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

نمودار تابع عضویت عدد فازی مثلثی M که می‌توان آن را تعبیری برای «تقریباً ۵» در نظر گرفت، در شکل ۱۴.۴ رسم شده است.



شکل ۱۴.۴ نمودار تابع عضویت عدد فازی «تقریباً ۵» در مثال ۱۷.۴.

عملگرهای حسابی برای اعداد فازی LR

اعداد فازی LR دارای این ویژگی هستند که برای آن‌ها اعمال جبری دارای فرمول های محاسباتی ساده است. از سوی دیگر، شکل تابع عضویت آن ها نیز معقول و پذیرفتنی است. قضایای زیر که اثبات آن‌ها را می‌توانید در [۴۴] بیابید، ویژگی‌های اعداد فازی LR را بیان می‌کنند.

قضیه ۵.۴ اگر $M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $\lambda \in R$، آن‌گاه

$$\begin{array}{ll} \lambda \otimes (m, \alpha, \beta)_{LR} = (\lambda m, \lambda\alpha, \lambda\beta)_{LR} & \lambda > ۰ \\ \lambda \otimes (m, \alpha, \beta)_{LR} = (\lambda m, -\lambda\beta, -\lambda\alpha)_{RL} & \lambda < ۰ \end{array}$$

نتیجه. در حالت خاص اگر $M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ آن‌گاه $-M = (-m, \beta, \alpha)_{RL}$.

مثال ۱۸.۴ فرض کنید $M = (۵, ۳, ۳)_{LR}$ و $L(x) = ۱ - x$ و $R(x) = ۱ - x^۲$. در این صورت

$$۲ \otimes M = (۱۰, ٦, ٦)_{LR}, \quad -۳ \otimes M = (-۱۵, ۹, ۹)_{RL}$$

یعنی اگر

$$M(x) = \begin{cases} L(\frac{۵-x}{۳}) & x \leq ۵ \\ \\ R(\frac{x-۵}{۳}) & x > ۵ \end{cases} = \begin{cases} ۰ & x < ۲ \\ ۱ - \frac{۵-x}{۳} & ۲ \leq x < ۵ \\ ۱ - (\frac{x-۵}{۳})^۲ & ۵ \leq x < ۸ \\ ۰ & ۸ \leq x \end{cases}$$

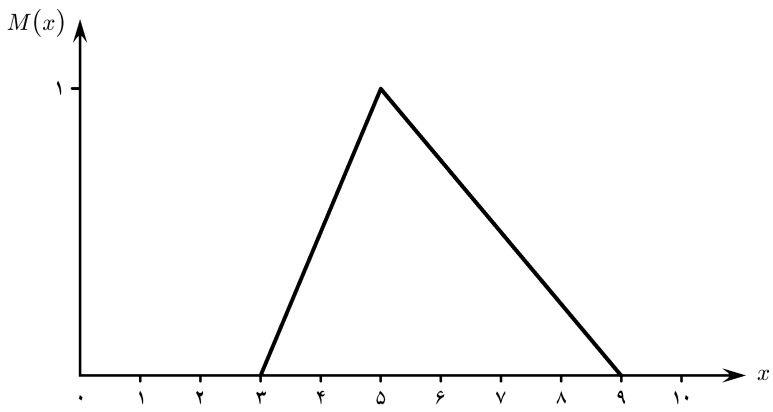
آن‌گاه

$$(۲ \otimes M)(x) = \begin{cases} L(\frac{۱۰-x}{٦}) & x \leq ۱۰ \\ \\ R(\frac{x-۱۰}{٦}) & x > ۱۰ \end{cases} = \begin{cases} ۰ & x < ۴ \\ ۱ - \frac{۱۰-x}{٦} & ۴ \leq x < ۱۰ \\ ۱ - (\frac{x-۱۰}{٦})^۲ & ۱۰ \leq x < ۱٦ \\ ۰ & ۱٦ \leq x \end{cases}$$

و

$$(-۳ \otimes M)(x) = \begin{cases} R(\frac{-۱۵-x}{۹}) & x \leq -۱۵ \\ \\ L(\frac{x+۱۵}{۹}) & x > ۱۵ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ۰ & x < -۲۴ \\ ۱ - (\frac{x+۱۵}{۹})^۲ & -۲۴ \leq x < -۱۵ \\ ۱ - (\frac{x+۱۵}{۹})^۲ & -۱۵ \leq x < -٦ \\ ۰ & -٦ \leq x \end{cases}$$



شکل ۱۵.۴ نمودار تابع عضویت اعداد M و $۲M$ و $-۳M$ در مثال ۱۸.۴.

قضیه ۶.۴ اگر $M=(m,\alpha,\beta)_{LR}$ و $N=(n,\delta,\gamma)_{LR}$، آن‌گاه $M\oplus N$ یک عدد فازی LR به صورت زیر است

$$M\oplus N=(m+n,\alpha+\delta,\beta+\gamma)_{LR}$$

قضیه ۷.۴ اگر $M=(m,\alpha,\beta)_{LR}$ و $N=(n,\gamma,\delta)_{RL}$، آن‌گاه $M\ominus N$ یک عدد فازی LR به صورت زیر است

$$M\ominus N=(m-n,\alpha+\delta,\beta+\gamma)_{LR}$$

نکته ۱.۴ برای حالت‌هایی که توابع L و R برای دو عدد فازی M و N مشابه نباشند نیز جمع و تفاضل M و N مجدداً یک عدد فازی LR است، که برای تابع عضویت آن‌ها نیز روابطی وجود دارد. علاقمندان را به [۴۴] ارجاع می‌دهیم.

مثال ۱۹.۴ فرض کنید $M=(۵,۳,۳)_T$ و $N=(۳,۲,۲)_T$، یعنی

$$M(x)=\begin{cases}\frac{x-۲}{۳} & ۲\le x<۵\\ \frac{۸-x}{۳} & ۵\le x<۸\end{cases},\quad N(x)=\begin{cases}\frac{x-۱}{۲} & ۱\le x<۳\\ \frac{۵-x}{۲} & ۳\le x<۵\end{cases}$$

در این صورت

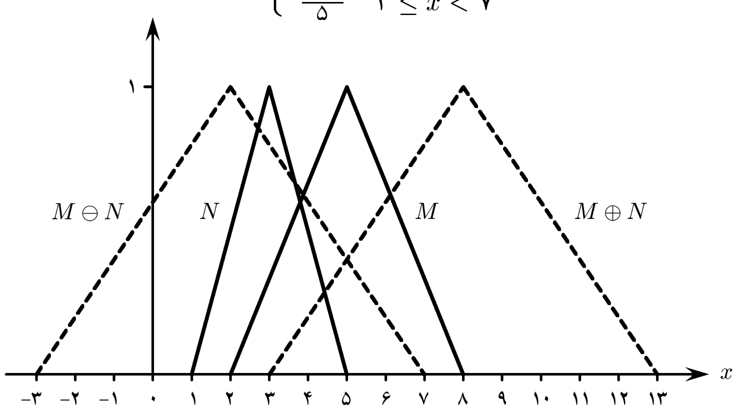
$$M\oplus N=(۸,۵,۵)_T,\ M\ominus N=(۲,۵,۵)_T$$

یعنی

$$(M\oplus N)(x)=\begin{cases}\frac{x-۳}{۵} & ۳\le x<۸\\ \frac{۱۳-۸}{۵} & ۸\le x<۱۳\end{cases}$$

و

$$(M\ominus N)(x)=\begin{cases}\frac{x+۳}{۵} & -۳\le x<۲\\ \frac{۷-x}{۵} & ۲\le x<۷\end{cases}$$



شکل ۱۶.۴ نمودار توابع عضویت اعداد فازی M و N و جمع و تفاضل آن‌ها در مثال ۱۹.۴.

مثال ۲۰.۴ فرض کنید $M = (۵,۳,۸)_{LR}$ و $N_۱ = (۳,۲,۳)_{LR}$ و $N_۲ = (۳,۲,۳)_{RL}$ که در آن‌ها $L(x) = e^{-x^۲}$ و $R(x) = \max\{۰, ۱ - x^۲\}$. یعنی

$$M(x) = \begin{cases} L(\frac{۵-x}{۳}) & x \leq ۵ \\ R(\frac{x-۵}{۸}) & x > ۵ \end{cases} = \begin{cases} e^{-(\frac{۵-x}{۳})^۲} & x \leq ۵ \\ ۱ - (\frac{x-۵}{۸})^۲ & ۵ < x \leq ۱۳ \\ ۰ & ۱۳ < x \end{cases}$$

$$N_۱(x) = \begin{cases} L(\frac{۳-x}{۲}) & x \leq ۳ \\ R(\frac{x-۳}{۳}) & x > ۳ \end{cases} = \begin{cases} e^{-(\frac{۳-x}{۲})^۲} & x \leq ۳ \\ ۱ - (\frac{x-۳}{۳})^۲ & ۳ < x \leq ٦ \\ ۰ & ٦ < x \end{cases}$$

$$N_۲(x) = \begin{cases} L(\frac{۳-x}{۲}) & x \leq ۳ \\ R(\frac{x-۳}{۳}) & x > ۳ \end{cases} = \begin{cases} ۰ & x < ۱ \\ ۱ - (\frac{x-۳}{۳})^۲ & ۱ \leq x < ۳ \\ e^{-(\frac{x-۳}{۳})^۲} & ۳ < x \end{cases}$$

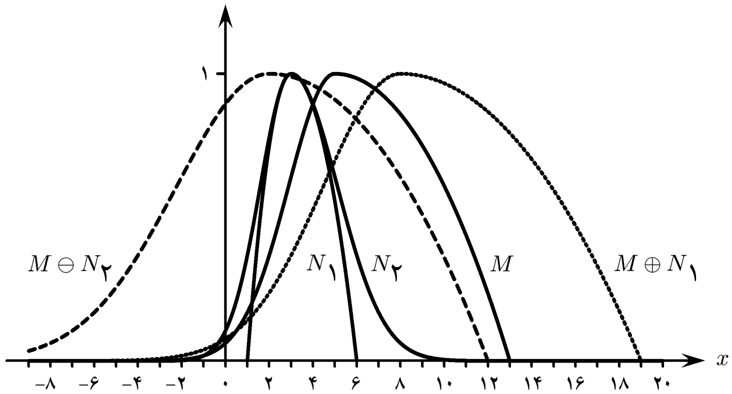
در این صورت

$$M \oplus N_۱ = (۸, ۵, ۱۱)_{LR}, \; M \ominus N_۲ = (۲, ٦, ۱۰)_{LR}$$

یعنی

$$(M \oplus N_۱)(x) = \begin{cases} L(\frac{۸-x}{۵}) & x \leq ۸ \\ R(\frac{x-۸}{۱۱}) & x > ۸ \end{cases} = \begin{cases} e^{-(\frac{۸-x}{۵})^۲} & x \leq ۸ \\ ۱ - (\frac{x-۸}{۱۱})^۲ & ۸ < x \leq ۱۹ \\ ۰ & ۱۹ \leq x \end{cases}$$

$$(M \ominus N_۲)(x) = \begin{cases} L(\frac{۲-x}{٦}) & x \leq ۲ \\ R(\frac{x-۲}{۱۰}) & x > ۲ \end{cases} = \begin{cases} e^{-(\frac{۲-x}{٦})^۲} & x < ۲ \\ ۱ - (\frac{x-۲}{۱۰})^۲ & ۲ \leq x < ۱۲ \\ ۰ & ۱۲ \leq x \end{cases}$$



شکل ۱۷.۴ نمودار توابع عضویت اعداد فازی M و N_1 و N_2 و جمع و تفاضل آن‌ها در مثال ۲۰.۴.

نکته ۲.۴ می دانیم که مجموع دو متغیر تصادفی نرمال مستقل با میانگین‌های m و n و انحراف استانداردهای σ_m و σ_n، یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین $m+n$ و انحراف استاندارد $\sqrt{\sigma_m^2+\sigma_n^2}$ است. از سوی دیگر، با توجه به مطالب مربوط به اعداد فازی LR، نتیجه می‌شود که مجموع دو عدد فازی نرمال (یعنی حالتی که $L(x) = R(x) = e^{-x^2}$) با مقادیر نمایی m و n و پهناهای $\alpha = \beta = \sigma_m$ و $\gamma = \delta = \sigma_n$، یک عدد فازی نرمال با مقدار نمایی $m+n$ و پهناهای چپ و راست $\sigma_m+\sigma_n$ ($< \sqrt{\sigma_m^2+\sigma_n^2}$) است [۵۲].

درباره‌ی ضرب و تقسیم، کار به آسانی جمع و تفریق نیست. در حالاتی که M و N دو عدد فازی به صورت LR باشند نتیجه‌ی ضرب و تقسیم آن ها یک عدد فازی LR نخواهد بود. امّا می‌توان تقریبهایی را در نظر گرفت. این کار برای ضرب بهتر انجام می‌شود. درباره‌ی تقسیم ابتدا لازم است فرمولی برای معکوس یک عدد فازی LR، و سپس فرمولی برای تقسیم بیابیم. در اینجا باید در هر مورد تقریب‌هایی را بپذیریم تا بتوانیم حاصل تقسیم دو عدد فازی LR را به صورت یک عدد فازی LR در آوریم. برای پرهیز از طولانی شدن بحث، تقریب‌های پیشنهادی برای عمل ضرب را مطرح کرده و تشریح می‌کنیم و مطالب مربوط به تقسیم را به [۴۴] ارجاع می‌دهیم.

قضیه ۸.۴ اگر $M = (m,\alpha,\beta)_{LR}$ و $N = (n,\gamma,\delta)_{LR}$، آن‌گاه

$$(M \otimes N) \simeq \begin{cases} (mn, m\gamma+n\alpha, m\delta+n\beta)_{LR} & \text{هر دو مثبت } N \text{ و } M \\ (mn, n\alpha-m\delta, n\beta-m\gamma)_{LR} & \text{ منفی } N \text{ مثبت و } M \\ (m, n-n\beta-m\delta, -n\alpha-m\gamma)_{LR} & \text{هر دو منفی } N \text{ و } M \end{cases}$$

که $\simeq$ به معنی تقریباً مساوی است.

هر چه پهناهای M و N نسبت به مقادیر نمای آن‌ها کوچک‌تر باشد تقریب‌های فوق دقیقتر است. هنگامی که پهناهای M و N نسبت به مقادیر نمای آن‌ها کوچک نیستند، فرمول‌های تقریب فوق را می‌توان اصلاح کرد [۴۴].

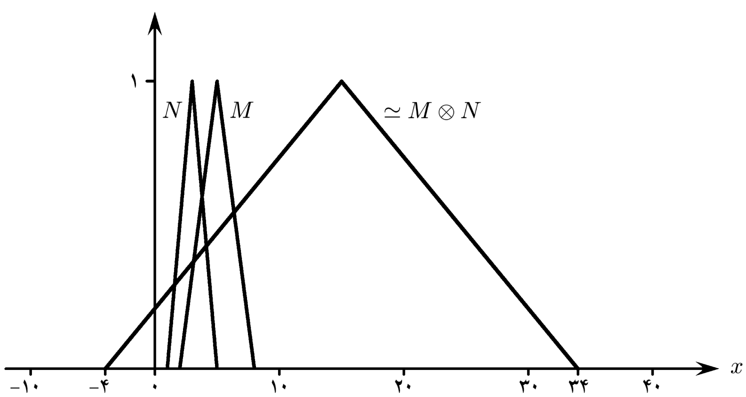
مثال ۲۱.۴ دو عدد فازی M و N مثال ۱۸.۴ هر دو مثبت‌اند. بنابراین

$$M \otimes M \simeq (۱۵, ۱۰ + ۹, ۱۰ + ۹)_{LR} = (۱۵, ۱۹, ۱۹)_{LR}$$

یعنی

$$(M \otimes N)(x) \simeq \begin{cases} L(\frac{۱۵-x}{۱۹}) & x \leq ۱۵ \\ R(\frac{x-۱۵}{۱۹}) & x > ۱۵ \end{cases} = \begin{cases} \frac{x+۴}{۱۹} & -۴ \leq x < ۱۵ \\ \frac{۳۴-x}{۱۹} & ۱۵ \leq x < ۳۴ \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنید که در اینجا $M \otimes N$ به دست آمده از روابط تقریبی، تفاوت‌های نسبتاً زیادی با مقدار واقعی $M \otimes N$ دارد. مثلاً به آسانی می‌توان تحقیق کرد که تابع عضویت واقعی $M \otimes N$ دارای تکیه گاه (۴۰ و ۲) است امّا تکیه‌گاه تابع عضویت فوق بازه (۳۴ و ۴−) است. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، این تفاوت ناشی از بزرگ بودن نسبی پهناهای M و N است.



شکل ۱۸.۴ نمودار توابع عضویت اعداد فازی M و N و تابع عضویت تقریبی $M \otimes N$ در مثال ۲۱.۴.

مثال ۲۲.۴ فرض کنید $M = (۵, ۰/۶, ۰/۳)_L$ و $N = (۳, ۰/۳, ۰/۲)_L$ و $L(x) = R(x) = ۱ - x$. چون M و N هر دو مثبت‌اند، طبق روابط تقریبی قضیه ۸.۴،

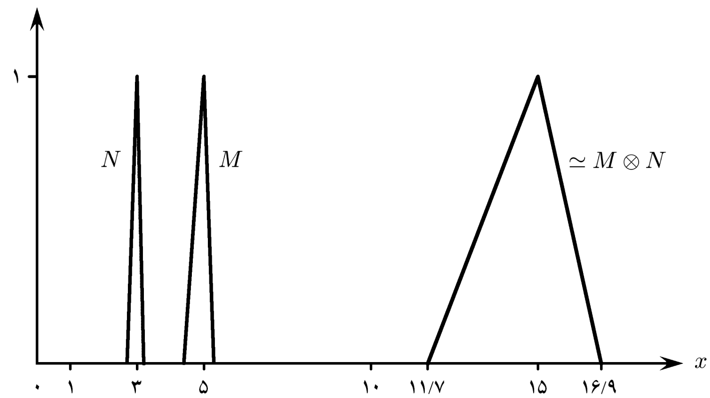
$$M \otimes N \simeq (۱۵, ۳/۳, ۱/۹)_L$$

در اینجا توابع عضویت M و N و $M \otimes N$ به صورت زیر هستند

$$M(x) = \begin{cases} \frac{x-۴/۴}{۰/۶} & ۴/۴ \leq x < ۵ \\ \frac{۵/۳-x}{۰/۳} & ۵ \leq x < ۵/۳ \end{cases}, \quad N(x) = \begin{cases} \frac{x-۲/۷}{۰/۳} & ۲/۷ \leq x < ۳ \\ \frac{۳/۲-x}{۰/۲} & ۳ \leq x < ۳/۲ \end{cases}$$

$$(M \otimes N)(x) \simeq \begin{cases} \frac{x-۱۲/۷}{۳/۳} & ۱۲/۷ \leq x < ۱۵ \\ \frac{۱۷/۹-x}{۱/۹} & ۱۵ \leq x < ۱۷/۹ \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنید که تابع عضویت تقریبی $M \otimes N$، بسیار نزدیک به تابع عضویت دقیق $M \otimes N$ است. مثلاً تکیه گاه تابع واقعی بازه (۱۱/۸۸, ۱۶/۹۶) است و تکیه گاه بازه تقریبی (۱۲/۷۰, ۱۷/۹) است. خوبیِ این تقریب به علت کوچکی پهناهای M و N است.



شکل ۱۹.۴ نمودار توابع عضویت اعداد فازی M و N و تابع عضویت تقریبی $M \otimes N$ در مثال ۲۲.۴.

۴.۵ بازه‌های فازی

رده‌ی دیگری از مجموعه‌های فازی از R، که به ویژه به تازگی بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند، بازه‌های فازی هستند. بازه فازی شباهت زیادی با مفهوم عدد فازی دارد. اگر در تعریف عدد فازی (تعریف ۴.۴) شرط تک نمایی بودن N حذف شود، آن‌گاه N یک بازه فازی نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۴ یک مجموعه فازی از R، مانند N را یک بازه فازی گوییم، اگر

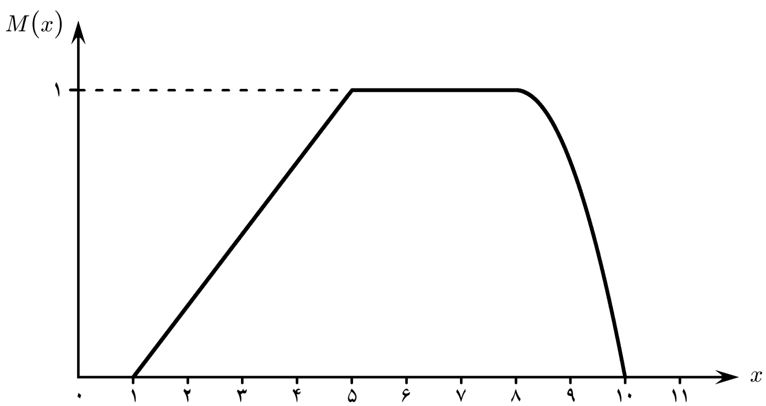
۱) N نرمال باشد،

۲) $\alpha-$ برش‌های N، به ازای هر $\alpha \in [۰, ۱]$، به صورت بازه‌های بسته باشند.

واضح است که برای هر بازه فازی N، دو عدد $n_۱ \leq n_۲$ وجود دارند که برای x های عضو بازه $[n_۱, n_۲]$ داریم $N(x) = ۱$. هم‌چنین با توجه به تعریف فوق، یک عدد فازی حالت خاصی از یک بازه فازی است. ملاحظه می‌کنید که یک بازه فازی چیزی نیست جز یک بازه معمولی با کران‌های نادقیق. بازه فازی را عدد فازی پَهن شده و عدد فازی ذوزنقه‌ای نیز می‌نامند.

مثال ۲۳.۴ مجموعه فازی M با تابع عضویت زیر یک بازه فازی است (شکل ۲۰.۴)

$$M(x) = \begin{cases} \frac{x-۱}{۴} & ۱ \leq x < ۵ \\ ۱ & ۵ \leq x < ۸ \\ ۱ - (\frac{x-۸}{۲})^۲ & ۸ \leq x < ۱۰ \end{cases}$$



شکل ۲۰.۴ نمودار تابع عضویت بازه فازی در مثال ۲۳.۴.

تعریف ۱۲.۴ یک بازه فازی که تابع عضویت آن به صورت زیر باشد، یک بازه فازی LR نامیده می‌شود

$$M(x) = \begin{cases} L(\frac{m_۱-x}{\alpha}) & x < m_۱ \\ ۱ & m_۱ \leq x \leq m_۲ \\ R(\frac{x-m_۲}{\beta}) & m_۲ < x \end{cases}$$

که در آن L و R توابعی هستند که در تعریف عدد فازی LR صدق می‌کنند. در این حالت بازه فازی M، با نماد $M = (m_۱, m_۲, \alpha, \beta)_{LR}$ نشان داده می‌شود.

مثال ۲۴.۴ بازه فازی مثال فوق یک بازه فازی LR است که برای آن

$$L(x) = \max\{۰, ۱ - x\}, \quad R(x) = \max\{۰, ۱ - x^۲\}$$

و $m_۱ = ۵,\ m_۲ = ۸,\ \alpha = ۴,\ \beta = ۳$.

نکته ۳.۴ با استفاده از اصل توسیع، می‌توانیم عملگرهای حسابی را برای بازه‌های فازی تعریف کنیم. بازه‌های فازی LR این ویژگی را دارند که محاسبات با آن‌ها، از روابطی معّین پیروی می‌کند [۴۴] (تقریباً مشابه آنچه درباره‌ی اعداد فازی LR بیان شد.) این ویژگی، کار با بازه‌های فازی را آسان می‌کند.

۴.۶ نکات تکمیلی

۴.۶.۱ ترتیب اعداد فازی

از موضوع هایی که بلافاصله بعد از بحث اعداد فازی مطرح می‌شود، موضوع ترتیب این اعداد است. تاکنون روش‌های مختلفی در این باره پیشنهاد شده است، که بعضی از آن‌ها شامل مرتب کردن بازه های فازی نیز می‌شوند. این روش‌ها را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد [۶۷]:

الف) روش‌های مشتمل بر مرتب کردن اعداد فازی با استفاده از روابط معمولی (غیر فازی). در این روش‌ها، یک تابع حقیقی مقدار از هر عدد فازی تعریف می‌شود که ترتیب اعداد فازی بر اساس مقادیر آن تابع صورت می‌گیرد [۱۵] و [۶۷] و [۱۲۳].

ب) روش‌هایی که با ارائه یک شاخص مقایسه، برای هر زوج عدد فازی، به مقایسه‌ی آن‌ها می‌پردازد. [۳۸] و [۴۹]. در [۴۶] روش‌های مختلف مرور شده‌اند. در [۷۳] نیز روش‌هایی برای ترتیب اعداد فازی پیشنهاد شده است.

۴.۶.۲ تعریف‌های دیگر برای اعداد فازی و عملگرهای حسابی بر آن‌ها

تعریف‌های دیگری نیز برای یک عدد فازی پیشنهاد شده است که هیچ‌کدام تفاوت اساسی با تعریف ۴.۴ ندارند. بعضی شرط تک نمایی بودن را در تعریف نگنجانده‌اند. در این

حالت تعریف عدد فازی منطبق با تعریف بازه فازی می‌شود و بنا بر این عدد فازی و بازه فازی را یک‌جا تعریف کرده‌اند [٦٧] و [٧٣]. برخی نیز شرط کراندار بودن تکیه‌گاه را اضافه کرده‌اند [٦٧]. این تعریف‌های متفاوت به دلیل ویژگی‌ها و کاربردهای مختلفی است که از آن‌ها نتیجه می‌شود.

هم‌چنین برای عملگرهای حسابی بر اعداد فازی، تعریف‌های دیگری نیز ارائه شده است. برای مثال کاوفمن [٧١] یک روش، با استفاده از تعریف پیچش، برای جمع اعداد فازی به صورت زیر پیشنهاد کرده است

$$(M \oplus N)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} M(x)N(z-x)dx$$

توجه دارید که رابطه جمع دو عدد فازی (طبق تعریف ۴.۴) مشابه تعریف پیچش دو تابع است، با این تفاوت که عملگر مینیمم جایگزین ضرب، و عملگر سوپریمم جایگزین جمع شده است.

دوبوا و پراد [۵۲] ابتدا کمّیت فازی را به عنوان یک مجموعه فازی از R تعریف نموده، آن‌گاه با گذاشتن شرط‌هایی بر آن، بازه فازی و عدد فازی را تعریف کرده‌اند.

۴.٦.۳ جمع مینکوسکی تعمیم یافته

تعریف جمع دو عدد فازی M و N را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}(M \oplus N)(y) &= \sup_{x_۱, x_۲; x_۱+x_۲=y} \min[M(x_۱), N(x_۲)] \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \min[M(x), N(y-x)]\end{aligned}$$

این نکته شایان یادآوری است که در حالت خاص که M و N دو مجموعه معمولی باشند، تعریف بالا منطبق با تعریف جمع مینکوسکی دو مجموعه خواهد شد، یعنی

$$M \oplus N = \{x+y; x\in M, y\in N\}$$

از این رو، جمع دو عدد فازی گاهی جمع مینکوسکی تعمیم یافته نامیده می‌شود. این تعبیر را برای دیگر عملگرها نیز می‌توان به کار برد.

برای مطالعه‌ی بیشتر

بخش ۴.۱

اصل توسیع توسط زاده در سال ۱۹۷۵، به عنوان یک اصل اساسی برای تعمیم ساختارهای ریاضیات کلاسیک به مجموعه‌های فازی، معرّفی شد (نیز ر.ک. به []). یاگر [] بحث

گسترده‌ای در باره‌ی این اصل و مشخصه‌سازی آن مطرح نموده است. برای مروری به چند رویکرد به اصل توسیع به [] مراجعه کنید. در [] نیز رویکردی متمایز به این اصل مطرح شده است. طاهری [] دوگان اصل توسیع را معرفی و بررسی نموده است.

گفتنی است که در اصل توسیع می‌توان به جای عملگر Sup از دیگر عملگرهای اجتماع استفاده نمود []. هرچند استفاده از عملگر Sup در این اصل، توسط محققان و کاربران پذیرفته شده و رایج شده است. از سوی دیگر، در حالت چند متغیره، به جای به کارگیری عملگر min می‌توان از $T-$نرم‌های دیگر استفاده نمود.

روابط و قضایای مربوط به مجموعه‌های تصویر شده و $\alpha-$برش‌های آن‌ها به طور گسترده، برای نمونه توسط ماشین‌چی []، نولا و همکاران []، و کلیر و یوان []، بررسی شده است.

همان گونه که گفته شد، اصل توسیع روشی برای تعمیم ساختارها و نظریه‌های ریاضیات کلاسیک در محیط فازی فراهم می‌آورد. ورود به موضوع‌های مختلف ریاضیات فازی بیرون از قلمرو این کتاب است. برای خوانندگان علاقمند مراجعی را در چند موضوع کلیدی ذکر می‌کنیم: فضاهای متریک فازی []، توپولوژی فازی []، جبر فازی []، برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی فازی []، معادلات با اعداد فازی []، حساب دیفرانسیل فازی [].

بخش ۲.۴

معرفی و بررسی اعداد فازی و عملگرهای جبری بر آن‌ها به مقالات میزوموتو و تاناکا [] و دوبوا و پراد [] در سال ۱۹۷۶ باز می‌گردد. پس از آن بررسی‌های بسیاری در این باره انجام شده است، که از جمله می‌توان به [] اشاره کرد. شماره ویژه مجله مجموعه‌ها و سیستم‌های فازی [] نیز شایان توجه است.

اعداد فازی هم‌شکل در [] بررسی شده است. نوعی مجموعه‌های فازی از R موسوم به $C-$اعداد فازی (برای مدل‌سازی مفاهیمی مانند دور از ۱۰، بسیار دور از ۱۸۰، ...) توسط طاهری [] پیشنهاد و عملگرهای جبری بر این نوع اعداد بررسی شده است. اعداد مختلط فازی نیز در [۲۹] تعریف و بررسی شده‌اند.

بخش ۳.۴

از بین کتاب‌هایی که به حساب اعداد فازی پرداخته‌اند، کتاب دوبوا و پراد [] و کتاب کافمن و گوپتا [] حاوی مطالب جامعی هستند. حساب اعداد فازی با رویکرد آنالیز بازه‌ای

(مور []) در اثر مفصل دوبوا و همکاران [] مطالعه شده است. مقالات شماره ویژه مجله مجموعه‌ها و سیستم‌های فازی [] نیز به حساب اعداد فازی اختصاص یافته است.

برای تعریف عملگرهای جبری بر اعداد فازی نیز رویکردهای گوناگونی پیشنهاد شده است. برای نمونه، فولر [۵۲] جمع تعمیم یافته را بر اعداد فازی، بر اساس عملگرهای $T-$ نرم (به جای عملگر min) مطرح و برای این جمع ویژگی‌هایی را ثابت کرده است. وی این کار را برای جمع بازه‌های فازی نیز انجام داده است [۵۵]. می دانیم که عملگر min یکی از انواع $T-$ نرم‌هاست و بنابراین نتایج بدست آمده، حالت کلی‌تری نسبت به نتایج مربوط به جمع گسترش یافته بر اساس عملگر min است. ما و همکاران [] با معرفی نوع خاصی از اعداد فازی پارامتری، عملگرهای جبری بر این نوع اعداد را مطالعه نموده‌اند. گوئرا و استفانینی [] یک شیوه‌ی درونیابی برای تقریب اعداد فازی و محاسبات جبری با این اعداد ارائه نموده‌اند.

بخش ۴.۴

اعداد فازی LR توسط دوبوا و پراد [] در سال **۱۹۷۹** معّرفی شد. پس از آن در بیشتر مباحث، به ویژه مباحث کاربردی، از این نوع اعداد فازی استفاده شده است. منابع اصلی در این باره همان‌هایی است که در قسمت قبل به آن‌ها اشاره شد.

یکی از موضوع‌های مورد توجه درباره‌ی اعداد فازی LR، یافتن $T-$ نرم‌های حافظ شکل است. یعنی $T-$ نرم هایی که با به کارگیری آن‌ها، شکل توابع L و R عدد فازی حاصل از جمع (ضرب) دو عدد فازی LR، مشابه شکل اعداد جمع شونده (ضرب شونده) باشد. پیرامون $T-$ نرم‌های حافظ شکل در مورد عمل جمع به [hong] و در مورد عمل ضرب به [ ] مراجعه کنید.

چندین رابطه تقریبی برای ضرب و تقسیم اعداد فازی LR ارائه شده است که علاقمندان را به [] ارجاع می‌دهیم.

بخش ۵.۴

در برخی منابع، عدد فازی مطابق آنچه ما عدد فازی ذوزنقه‌ای نامیدیم تعریف شده است [۴۴] و [۵۲]. برای مطالعه بیشتر بازه‌های فازی و کاربردهای آن‌ها و بازه‌های فازی LR به منابعی که در بالا برشمردیم، به ویژه [۴۴] و [۵۲] و [۷۳] مراجعه کنید.

تمرین‌ها

۱.۴ مجموعه مرجع $X = \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\}$، و مجموعه فازی A از X را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$A = \left\{ \frac{0/1}{0}, \frac{0/2}{\frac{\pi}{4}}, \frac{0/3}{\frac{\pi}{2}}, \frac{0/4}{\frac{3\pi}{4}}, \frac{0/5}{\pi}, \frac{0/6}{\frac{5\pi}{4}}, \frac{0/7}{\frac{3\pi}{2}}, \frac{0/8}{\frac{7\pi}{4}} \right\}$$

اگر $f(x) = \sin x + \cos x$، $f(A)$ را بیابید.

۲.۴ تابع $f(x)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 0/4 \\ 0/4 & 0/4 \leq x < 0/6 \\ 1 - x & 0/6 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

فرض کنید $A = (1/2, 1/6)_T$. بر پایه‌ی اصل توسیع، $f(A)$ را به دست آورید.

۳.۴ فرض کنید $f(x) = x^2$ و مجموعه فازی A: «تقریباً صفر» از مجموعه مرجع $X = [-1, 1]$ این گونه تعریف شده باشد

$$A(x) = \begin{cases} x + 1 & -1 \leq x < 0 \\ \sqrt{1 - x^2} & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

تابع عضویت مجموعه فازی $B = f(A)$ را بیابید.

۴.۴ فرض کنید $X_1 = X_2 = Z$، و A_1 و A_2 دو مجموعه فازی از Z، به ترتیب، بیانگر «تقریباً یک» و تقریباً دو» به صورت زیر باشند

$$A_1 = \left\{ \frac{0/3}{-1}, \frac{0/6}{0}, \frac{1}{1}, \frac{0/6}{2}, \frac{0/3}{3} \right\}$$

$$A_2 = \left\{ \frac{0/2}{0}, \frac{0/6}{1}, \frac{1}{2}, \frac{0/7}{3}, \frac{0/3}{4} \right\}$$

اگر $f : X_1 \times X_2 \to Y$ به صورت $y = f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_2^2$ تعریف شده باشد، $f(A_1, A_2)$ را بیابید.

۵.۴ فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد. بر پایه‌ی اصل توسیع روابط زیر را در مورد حاصل عمل تابع f از مجموعه‌های فازی A_i از X به مجموعه‌های فازی B_i از Y ثابت کنید

الف) $f(A)=\phi$ اگر و تنها اگر $A=\phi$،

ب) اگر $A_{۱} \subseteq A_{۲}$ آن‌گاه $f(A_{۱}) \subseteq f(A_{۲})$،

پ) $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$،

ت) $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

۶.۴ فرض کنید $f: X \to Y$ یک تابع باشد. بر پایه‌ی اصل توسیع ثابت کنید برای هر مجموعه فازی A از X و هر $\alpha \in [۰,۱]$ ویژگی‌های زیر برقرار است

الف) $f(A_{\overline{\alpha}}) = [f(A)]_{\overline{\alpha}}$

ب) $f(A_\alpha) \subseteq [f(A)]_\alpha$

که در آن $f(A)=\{f(a)\in Y; a\in A\}$.

۷.۴ فرض مجموعه مرجع $X=R$ باشد. در هر مورد تعیین کنید، مجموعه فازی که تابع عضویت آن داده شده است، یک عدد فازی است یا خیر؛ و اگر هست، مثبت است یا منفی یا هیچ‌کدام.

الف) $$A(x)=\begin{cases} ۰ & x<۰ \\ \frac{۱}{۱+x^{-۱}} & ۰\le x\end{cases}$$

ب) $$B(x)=\begin{cases} e^{-\frac{x^۲}{۲}} & -۱۰\le x\le ۱۰ \\ ۰ & \text{جاهای دیگر}\end{cases}$$

پ) $$C(x)=\begin{cases} \sqrt{۱-(x-۱)^۲} & ۰\le x\le ۲ \\ ۰ & \text{جاهای دیگر}\end{cases}$$

ت) $$D(x)=\begin{cases} \frac{x}{۵} & ۰\le x\le ۵ \\ ۱ & ۵\le x<۷ \\ \frac{۱۲-x}{۵} & ۷\le x<۱۲ \\ ۰ & \text{جاهای دیگر}\end{cases}$$

۸.۴ عدد فازی N: «تقریباً پنج»، با تابع عضویت زیر تعریف شده است

$$N(x)=\begin{cases} \frac{x-۱}{۴} & ۱\le x<۵ \\ \frac{۹-x}{۴} & ۵\le x<۹ \\ ۰ & \text{جاهای دیگر}\end{cases}$$

قرینه N و معکوس N و $۲N$ و e^N را بیابید.

۹.۴ نمودار تابع عضویت اعداد فازی LR زیر را رسم کنید. مقدار میانی و پهنای چپ و پهنای راست هر عدد را مشخص کنید.

الف) $A = (۲, ۱, ۰/۲۵)_L$ و $L(x) = \frac{۱}{۱+|x|}$

ب) $B = (۲, ۲, ۱)_{LR}$ و $L(x) = \frac{۱}{۱+|x|}$ و $R(x) = e^{-x^۲}$

پ) $$M(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۱+(۲-x)^۲} & x \leq ۲ \\ \frac{۱}{۱+۴(x-۲)^۲} & ۲ < x \end{cases}$$

ت) $$N(x) = \begin{cases} \frac{x}{۲} & ۰ \leq x < ۲ \\ \frac{۵-x}{۳} & ۲ \leq x < ۵ \\ ۰ & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

۱۰.۴ در هر مورد، $۳A + ۲$ و $A \oplus B$ را بیابید.

(الف) $A = (۲, ۱, ۰/۵)_L$ و $B = (۴, ۱, ۰/۵)_L$ و $L(x) = max\{۰, ۱ - x\}$

(ب) $A = (۲, ۱, ۰/۵)_L$ و $B = (۴, ۱, ۰/۵)_L$ و $L(x) = \frac{۱}{۱+|x|}$

(پ) $A = (۲, ۱, ۰/۵)_L$ و $B = (۴, ۱, ۰/۵)_L$ و $L(x) = e^{-x^۲}$

(ت) $A = (۱۰, ۲, ۳)_{LR}$ و $B = (۴, ۱, ۱)_{LR}$ و $L(x) = ۱ - x$ و $R(x) = e^{-x}$.

۱۱.۴ در تمرین ۱۰.۴، $A \ominus B$ را برای موارد الف و ب و پ به دست آورید.

۱۲.۴ با استفاده از فرمول‌های قضیه ۴.۴، در هر مورد $M \otimes N$ را به‌طور تقریبی بیابید و درباره‌ی دقت تقریب بحث کنید.

الف) $M = (۲, ۰/۵, ۰/۵)_T$ و $N = (۳, ۱, ۱)_T$.

ب) $M = (-۵, ۱, ۲)_T$ و $N = (۳, ۲, ۱)_T$.

پ) $M = (-۱۰, ۱, ۱)_T$ و $N = (-۲, ۰/۵, ۰/۲۵)_T$.

۱۳.۴ رابطه بین مسافت طی شده، سرعت متحرک و زمان به صورت $d = vt$ است.

الف) سرعت یک متحرک، ثابت و حدوداً $۳۰ (km/h)$ به صورت $v = (٦۰, ۵, ۵)_T$ است. متحرک چه مسافتی را در دو ساعت طی می‌کند؟

ب) در بند الف، متحرک چه مسافتی را در حدوداً دو ساعت، $t = (۲, ۰/۵, ۰/۵)_T$، طی می‌کند؟

۱۴.۴ یک سیگنال به صورت $X(t) = Sin(\Omega t + \Phi)$ توصیف شده است که در آن Ω و Φ اعداد فازی نرمال با توابع عضویت زیر هستند

$$\Omega(\omega) = e^{-\frac{(\omega-60)^2}{5}}\ ,\ \ \Phi(\phi) = e^{-\phi^2}$$

$X(t)$ را تعیین کنید و نمودار تابع عضویت آن را به ازای $t = 1, 2, 4$ رسم کنید.

۱۵.۴ نمودار تابع عضویت بازه‌های فازی زیر را رسم کنید.

الف) $M = (2, 4, 1, 2)_T$.

ب) $N = (2, 4, 1, 2)_{LR}$ و $L(x) = e^{-x}$ و $R(x) = e^{-x^2}$.

۱۶.۴ فرض کنید $M = (4, 1, 2)_T$ و $N = (2, 2, 3)_T$. تکیه‌گاه مجموعه‌ی فازی $M \oplus N$ و $M \ominus N$ و $M \otimes N$ و $M \oslash N$ را به دست آورید.

۱۷.۴ در تمرین بالا،

الف) اگر از T_p استفاده شود، نتیجه چه خواهد بود؟

ب) اگر از T_b استفاده شود، نتیجه جه خواهد بود؟

پ) اگر از T_d استفاده شود، نتیجه چه خواهد بود؟

۱۸.۴ همراه با ارائه دو مثال و بررسی آن‌ها توضیح دهید چرا روابط زیر در مورد اعداد فازی برقرار نیستند

الف) $M \ominus M = 0$،

ب) $M \oslash M = 1$.

۱۹.۴ فرض کنید L و M و N سه عدد فازی باشند. درستی رابطه زیر را ثابت کنید یا این که نادرست بودن آن را با مثال نقض نشان دهید

$$L \oplus (M \cap N) = (L \oplus M) \cap (L \oplus N)$$

۲۰.۴ در مدل‌سازی یک سیستم با دو متغیر ورودی و یک متغیر خروجی، مدل خطی با ضرایب فازی زیر به مجموعه‌ای از داده‌ها برازش داده شده است

$$\begin{aligned} Y &= A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 \\ &= (-1, 0/21, 0/21)_T + (2/1, 0/20, 0/20)_T x_1 \\ &\qquad + (7, 0/75, 0/75)_T x_2 \end{aligned}$$

به ازای ورودی $x_1 = 5, x_2 = 2$، خروجی سیستم را براورد کنید.

۲۱.۴ در مدل‌سازی یک سیستم با یک متغیر ورودی و یک متغیر خروجی، مدل خطی با ضرایب فازی زیر به مجموعه‌ای از داده‌ها برازش شده است

$$\begin{aligned} y &= A_۰ + A_۱ x \\ &= (۳/۴, ۰/۵, ۰/۵)_T + (۱/۷, ۰/۳, ۰/۳)_T x \end{aligned}$$

خروجی سیستم را به ازای ورودی فازی $x^* = (۲, ۰/۲, ۰/۲)_T$، به طور تقریبی بیابید.

۲۲.۴ فاصله بین دو نقطه از R (خط اعداد حقیقی) به صورت $d(x_۱, x_۲) = |x_۱ - x_۲|$ تعریف می‌شود. توضیح دهید چگونه می‌توان تعریفی برای فاصله بین دو عدد فازی بر پایه‌ی اصل گسترش، و با استفاده از تابع d، ارائه نمود.

فصل ۵

رابطه‌های فازی

کار ما نیست شناسایی راز گل سرخ،
کار ما شاید این است که
در «افسون» گل سرخ شناور باشیم.
سهراب سپهری[1]

مقدمه

رابطه فازی تعمیم رابطه به بیان معمولی است. برای مثال روابط دو بعدی را در نظر بگیرید. در یک رابطه معمولی دو بعدی (مانند رابطه کوچکتری ($<$) بین اعداد) هر دو مقدار خاص از دو متغیر مورد بحث، یا رابطه مورد نظر را دارند یا ندارند. اما در یک رابطه فازی (مانند رابطه «تقریباً برابر بودن» بین اعداد) رابطه‌ی مورد نظر با درجه‌ای، از صفر تا یک، بین هر دو مقدار از متغیرها برقرار است.

بخش نخست این فصل مروری است بر رابطه‌های معمولی، هم برای یادآوری و هم برای امکان مقایسه بین تعاریف متناظر در دو حالت معمولی و فازی. در بخش دوم تعریف رابطه فازی در حالت کلّی n‌- بُعدی، تصویرهای یک رابطه فازی و مفهوم گسترش استوانه‌ای ارائه می‌شوند. در بخش سوم ترکیب رابطه‌های فازی، نخست برای

[1] سهراب سپهری، هشت کتاب (از شعر: صدای پای آب)، انتشارات طهوری، ۱۳۷۹.

حالت دو بعدی و سپس برای حالت $n-$ بُعدی، تعریف و تشریح می‌شود. در زمینه‌ی رابطه‌های فازی دو بعدی و بحث‌های مربوطه کارهای بیشتری صورت گرفته است. این رابطه‌ها که مورد توجه ویژه محققین کاربردی است، دربخش چهارم بیشتر مطالعه شده‌اند. در بخش‌های پنجم و ششم، به ترتیب، رابطه‌های فازی مشابهت و مطابقت معرفی و مطالعه شده‌اند. بخش هفتم اختصاص به معرفی و بررسی انواع رابطه‌های ترتیبی فازی دارد. در بخش هشتم مفهوم تحدید فازی که یک مفهوم کلیدی در نظریه مجموعه‌های فازی است، معرفی و توضیح داده می‌شود.

۵.۱ مروری بر رابطه‌های معمولی

در بخش ۱.۲ اندکی درباره‌ی رابطه‌های معمولی توضیح داده شد. امّا چون در بخش‌های آینده اهداف خاصّی مد نظر است، در این بخش معرفی کوتاهی از مفهوم رابطه در حالت معمولی با تکیه بر مفاهیم رابطه هم‌ارزی، رابطه سازگاری و رابطه ترتیب انجام می‌شود.

تعریف ۱.۵ فرض کنید $A \times B$ حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعه A و B باشد، یعنی

$$A \times B = \{(a,b); a \in A, b \in B\}$$

هر زیر مجموعه R از $A \times B$، یک رابطه بین A و B تعریف می‌کند، و اصطلاحاً گوییم رابطه دو بُعدی R بر $A \times B$ تعریف شده است.

در حالتی که زوج (a,b) در مجموعه‌ای که رابطه R را تعریف می‌کند عضو باشد، می‌نویسیم $R(a,b) = ۱$ و در غیر این صورت می‌نویسیم $R(a,b) = ۰$.

به روش مشابه می‌توانیم حاصل‌ضرب دکارتی $n > ۲$ مجموعه و همین طور رابطه‌های n بعدی را بر آن‌ها تعریف کنیم.

مثال ۱.۵ فرض کنید $A = B = \mathbb{N}$، و رابطه R بر $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ به صورت زیر تعریف شود

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ x + y = ۷\}$$

در این صورت تمام زوج مرتب‌های اعداد طبیعی (x,y) که جمع مؤلفه‌های آن‌ها هفت شود، و فقط این زوج‌های مرتب، در رابطه R قرار دارند. مثلاً $R \in (۵و۲)$ و می‌نویسیم $R(۲,۵) = ۱$ و اصطلاحاً گوییم دو با سه رابطه R را دارد، که در اینجا یعنی جمع این دو

عدد هفت می‌شود. هم‌چنین برای نمونه $(۴,۵) \notin R$ و می‌نویسیم $R(۴,۵) = ۰$ و یعنی چهار و پنج رابطه R را ندارند. واضح است که

$$R = \Big\{(۱,٦),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(٦,۱)\Big\}$$

مثال ۲.۵ عطف به مثال ۱.۵ اکنون فرض کنید رابطه $x + y = ۷$ بر $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ تعریف شود. دراین صورت تمام زوج مرتب‌های اعداد حقیقی (x, y) که جمع مؤلفه‌های آن‌ها هفت است، رابطه R را با هم دارند، مثلاً $(-۱/۵, ۸/۵) \in R$ و ... .

مثال ۳.۵ در یک مسئله‌ی حمل و نقل، بندرهای مبدأ (مجموعه X) و بندرهای مقصد (مجموعه Y) به صورت زیر هستند

$$X = \Big\{\text{بندرعباس ، چابهار ، بوشهر}\Big\}$$
$$Y = \Big\{\text{بیروت، جده، کلکته، بمبئی}\Big\}$$

یک رابطه بر $X \times Y$، که فی‌المثل امکانات یک شرکت حمل و نقل را توصیف می‌کند، عبارت است از

$$R = \Big\{\text{(جده و بوشهر) و (بیروت و بوشهر) و (بمبئی و چابهار) و}$$
$$\text{(بمبئی و بندر عباس) و (کلکته و بندر عباس)}\Big\}$$

با استفاده از نمادهای صفر و یک برای عدم عضویت و عضویت، رابطه R را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$R = \begin{array}{c} \\ \text{بوشهر} \\ \text{چابهار} \\ \text{بندرعباس} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{بمبئی} & \text{کلکته} & \text{جده} & \text{بیروت} \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \end{array}$$

نکته ۱.۵ دقت می‌کنید که مفهوم رابطه یک مفهوم کلی‌تر نسبت به مفهوم تابع است. در واقع، هر زیر مجموعه‌ای از $X \times Y$ که شامل هیچ دو زوج مرتبی با مؤلفه‌های اول یکسان و مؤلفه‌های دوم متفاوت نباشند، یک تابع از X به Y نامیده می‌شود. پس هر تابع یک رابطه است ولی هر رابطه لزوماً یک تابع نیست. رابطه R در مثال ۱.۵ یک تابع از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ است. رابطه R در مثال ۲.۵ هم یک تابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است. ولی رابطه R در مثال ۳.۵ یک تابع از X به Y نیست.

انواع روابط دو بعدی

روابط دو بعدی از اهمیت خاصی برخوردار هستند. در این قسمت انواع روابط دو بعدی را تعریف می‌کنیم. در قسمت‌های بعد، بر پایه‌ی این تعاریف، چند رابطه مهم را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف ۲.۵ گوییم رابطه R تعریف شده بر $A \times A$

الف) بازتابی است اگر $\forall a \in A,\ (a,a) \in R$،

ب) غیر بازتابی است اگر $\exists a \in A,\ (a,a) \notin R$،

پ) پاد بازتابی است اگر $\forall a \in A,\ (a,a) \notin R$.

تعریف ۳.۵ گوییم رابطه R تعریف شده بر $A \times A$

الف) متقارن است اگر $(a,d) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$،

ب) غیر متقارن است اگر متقارن نباشد،

پ) پاد متقارن است اگر $(a,b) \in R, (b,a) \in R \Rightarrow a = b$،

ت) کاملاً پاد متقارن است اگر برای هر $a \neq b$، $(a,b) \in R$ یا $(b,a) \in R$ (و نه هر دو).

تعریف ۴.۵ گوییم رابطه R تعریف شده بر $A \times A$

الف) انتقالی (ترایایی) است اگر $(a,b),(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$،

ب) غیر انتقالی است اگر انتقالی نباشد،

پ) کاملاً غیر انتقالی است اگر $(a,b),(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \notin R$.

مثال ۴.۵ رابطه R در مثال ۱.۵ یک رابطه پاد بازتابی و متقارن و کاملاً غیر انتقالی است. رابطه R در مثال ۲.۵ یک رابطه غیر بازتابی و متقارن و کاملاً غیر انتقالی است.

رابطه هم‌ارزی

مفهوم هم‌ارزی از اهمیت بسیاری در ریاضیات برخوردار است. حتی در زندگی روزمرّه از این مفهوم بسیار استفاده می‌کنیم. مثلاً وقتی دانشگاه‌های ایران با توجه به برخی ویژگی‌های کیفی به سه رده درجه ۱ تا درجه ۳ تقسیم می‌شوند، یک رابطه هم‌ارزی داریم که براساس آن تمام دانشگاه‌های، مثلاً، درجه دو کشور (صرف نظر از این که چه ویژگی‌های انحصاری دارند) معادل و هم‌ارز یکدیگرند. و همین طور تمام دانشگاه‌های درجه ۱ و یا درجه ۳. در این صورت هر دانشگاه درجه ۲ با هر دانشگاه درجه ۲ دیگر رابطه هم‌ارزی فوق را دارد، یعنی به لحاظ کیفیت هم‌ارز است.

تعریف ۵.۵ رابطه R تعریف شده بر $A \times A$ را یک رابطه هم‌ارزی گوییم اگر R بازتابی، متقارن و انتقالی باشد.

مثال ۵.۵ رابطه «برابری» یک رابطه هم‌ارزی در $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ است. اول آن که هر عدد از $\mathbb{R}$ با خودش برابر است. ثانیاً اگر x با y برابر باشد، بدیهی است که y با x برابر است، و سوم این که از برابری‌های $x = y$ و $y = z$، نتیجه می‌شود $x = z$.

مثال ۶.۵ فرض کنید رابطه R بر $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ این گونه تعریف شود ($\mathbb{Z}$: مجموعه اعداد صحیح)

$$R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ \text{در تقسیم بر ۴ دارای یک باقیمانده هستند}\quad b,a\}$$

در این‌صورت R یک رابطه هم‌ارزی بر $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ است. دراین مثال تمام اعدادی از $\mathbb{Z}$ که تقسیم آنها بر ۴ دارای یک باقیمانده است، اصطلاحاً تشکیل یک دسته هم‌ارزی می‌دهند. مثلاً مجموعه $A_۱ = \{\ldots, ۳, ۷, ۱۱, \ldots\}$ یک دسته هم‌ارزی است. در اینجا عدد ۷ و عدد ۱۱ هم‌ارزند، به این معنی که تقسیم هر دوی آن‌ها بر ۴ دارای یک باقیمانده (مساوی با ۳) است.

رابطه سازگاری

تعریف ۶.۵ رابطه R تعریف شده بر $A \times A$ را یک رابطه سازگاری (رابطه تطابق) گوییم اگر R بازتابی و متقارن باشد.

مثال ۷.۵ مجموعه شهرهای استان خراسان شمالی را در نظر بگیرید

$$A = \{x_۱, x_۲, x_۳, x_۴\} = \{\text{درگز و اسفراین و شیروان و بجنورد}\}$$

فرض کنید دو شهر را مجاور (یا نزدیک به هم) گوییم اگر فاصله بین آن‌ها کمتر از ۱۰۰ کیلومتر باشد. در این صورت رابطه مجاورت بین شهرهای استان به صورت زیر است

$$R = \begin{array}{c} \\ \text{درگز} \\ \text{اسفراین} \\ \text{شیروان} \\ \text{بجنورد} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{درگز} & \text{اسفراین} & \text{شیروان} & \text{بجنورد} \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} \end{array}$$

در این جا، رابطه S یک رابطه سازگاری است. دقت می‌کنید که S یک رابطه هم‌ارزی نیست زیرا ویژگی انتقالی را ندارد. اصولاً رابطه‌ای که بیانگر مفهوم نزدیک بودن است، لزوماً انتقالی نیست. برای مثال از نزدیک بودن شهرهای الف و ب و شهرهای ب و پ نمی‌توان نزدیک بودن شهرهای الف و پ را نتیجه گرفت.

نکته ۲.۵ بر پایه‌ی یک رابطه سازگاری می‌توان رده‌های سازگاری را تشکیل داد. یک رده سازگاری از رابطه سازگاری R (تعریف شده بر $A \times A$) عبارت است از یک زیرمجموعه C از A به قسمی که برای هر $a, b \in C$، $(a,b) \in R$.

رابطه ترتیب

تعریف ۷.۵ رابطه R را تعریف شده بر $A \times A$ یک رابطه ترتیب (گاهی: ترتیب کلّی یا ترتیب خطّی) گوییم اگر به ازای هر a و b و c از A:

۱) $(a,b) \in R$ یا $(b,a) \in R$ ویژگی کلّیت

۲) $(a,b) \in R, (b,a) \in R \Rightarrow a = b$ ویژگی پادتقارن

۳) $(a,b) \in R, (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$ ویژگی انتقالی

نکته ۳.۵ اگر در تعریف بالا، به جای ویژگی کلیت، ویژگی بازتابی را قرار دهیم، رابطه R را یک ترتیب جزئی می‌نامیم. دقت کنید که با ترتیب جزئی ممکن است نتوانیم بعضی از اعضای A را با هم مقایسه کنیم.

مثال ۸.۵ رابطه «کوچکتر یا مساوی» یک رابطه ترتیب بر $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ است و البته یک رابطه ترتیب جزئی هم می‌باشد.

مثال ۹.۵ فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳\}$. مجموعه توانی A عبارت است از

$$\mathcal{P}(A) = \Big\{\phi, \{۱\}, \{۲\}, \{۳\}, \{۱, ۲\}, \{۱, ۳\}, \{۲, ۳\}, \{۱, ۲, ۳\}\Big\}$$

اکنون رابطه «زیرمجموعه بودن» را در نظر بگیرید. این یک رابطه ترتیب جزئی بر $\mathcal{P}(A)$ است. دقت کنید که این رابطه یک رابطه ترتیب نیست، زیرا هر دو عضو از $\mathcal{P}(A)$ لزوماً رابطه زیرمجموعه بودن را نسبت به یکدیگر ندارند (و لذا ویژگی کلیت برقرار نیست).

۵.۲ رابطه‌های فازی

تعریف ۸.۵ فرض کنید X حاصل‌ضرب دکارتی n مجموعه مرجع $X_1, \dots, X_n$ باشد. یک رابطه فازی n بعدی R در X به صورت یک مجموعه فازی از X تعریف می‌شود. به بیان دیگر، هر تابع عضویت $R : X \longrightarrow [0, 1]$ یک رابطه فازی بر X تعریف می‌کند. در حالت خاص دو بعدی رابطه فازی R در $X \times Y$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت $R(x, y)$ تعریف می‌شود، یعنی

$$R = \Big\{((x, y), R(x, y)) \mid (x, y) \in X \times Y\Big\}$$

مثال ۱۰.۵ در یک مسئله‌ی حمل و نقل، مجموعه بندرهای مبدأ {بندر عباس و چابهار} $= X$ و مجموعه بندرهای مقصد {بمبئی و کلکته} $= Y$ است. یک رابطه فازی بر $X \times Y$ که نشان دهنده‌ی میزان نزدیک بودن بین بندرهای مبدأ و مقصد است، عبارت است از

$$R = \left\{ \frac{0/4}{(\text{کلکته و بندر عباس})}, \frac{0/7}{(\text{بمبئی و بندر عباس})}, \frac{0/5}{(\text{کلکته و چابهار})}, \frac{0/8}{(\text{بمبئی و چابهار})} \right\}$$

برای حالت‌هایی که مجموعه‌های مرجع گسسته هستند، رابطه‌های فازی را می‌توان با استفاده از ماتریس‌ها نیز نمایش داد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۱.۵ فرض کنید $X = \{1, 2, 3\}$ و $Y = \{3, 4, 5, 6\}$. رابطه فازی R: «تقریباً برابر» را می‌توان به صورت ماتریس رابطه زیر تعریف کرد

$$R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0/4 & 0/2 & 0/1 & 0 \\ 0/7 & 0/4 & 0/2 & 0/1 \\ 1 & 0/7 & 0/4 & 0/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

مثال ۱۲.۵ فرض کنید $X = Y = \mathbb{R}$. می‌توان رابطه فازی R : "$x + y \approx 7$"، یعنی «حاصل جمع x و y، تقریباً برابر هفت» را این‌گونه تعریف کرد

$$R(x, y) = \frac{1}{1 + (x + y - 7)^2} \quad x, y \in R$$

برای نمونه، $R(1, 6) = 1$ یعنی مجموع ۱ و ۶ دقیقاً ۷ می‌شود. و $R(2, 6) = \frac{1}{2}$ یعنی حاصل جمع ۲ و ۶ که برابر ۸ است با درجه ۰/۵ نزدیک به ۷ است.

تعریف ۹.۵ فرض کنید R، یک رابطه فازی $n-$ بعدی در $X = X_۱ \times \ldots \times X_n$ باشد. تصویر R بر $X_{i_۱} \times \ldots \times X_{i_k}$ به‌صورت یک رابطه فازی k بُعدی در $X_{i_۱} \times \ldots \times X_{i_k}$ با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$R_q(x_{i_۱}, \ldots, x_{i_k}) = \sup_{X_{(q')}} R(x_۱, \ldots, x_n)$$

که در آن q، دنباله اندیسی $(i_۱, \ldots, i_k)$ است و $X_{(q)} = (X_{i_۱}, \ldots, X_{i_k})$، و q' مکمّل q نسبت به $(۱, \ldots, n)$ است. تصویر R بر $X_{i_۱} \times \ldots \times X_{i_k}$ را با نماد $Proj[R; X_{i_۱}, \ldots, X_{i_k}]$ نیز نشان می‌دهند.

در حالت خاص اگر $R = \{((x,y), R(x,y)); (x,y) \in X \times Y\}$ یک رابطه فازی دو بعدی باشد، آنگاه تصویر R بر X و تصویر R بر Y، رابطه‌های فازی یک بعدی، یعنی مجموعه‌های فازی از X و از Y، به صورت زیر خواهند بود

$$R_۱ = Proj[R; X] = \{(x, \max_y R(x,y)); (x,y) \in (X \times Y)\}$$

$$R_۲ = Proj[R; Y] = \{(y, \max_x R(x,y)); (x,y) \in (X \times Y)\}$$

مثال ۱۳.۵ رابطه فازی R مثال ۱۱.۵ را در نظر بگیرید. تصویرهای R بر X و بر Y رابطه‌های فازی یک بعدی زیر هستند

$$R_۱ = Proj[R; X] = \{(۱, ۰/۴), (۲, ۰/۷), (۳, ۱)\}$$
$$R_۲ = Proj[R; Y] = \{(۳, ۱), (۴, ۰/۷), (۵, ۰/۴), (٦, ۰/۲)\}$$

تعریف ۱۰.۵ فرض کنید R_q یک رابطه فازی در $X_{(q)}$ باشد. گسترش استوانه‌ای R_q در X یک رابطه فازی R_{qL} در X با تابع عضویت زیر است

$$R_{qL}(x_۱, \ldots, x_n) = R_q(x_{i_۱}, \ldots, x_{i_k})$$

تذکر واضح است که رابطه‌های فازی متفاوت در X ممکن است تصویرهای یکسان بر $X_{(q)}$ داشته باشند. امّا برای یک رابطه فازی R_q در $X_{(q)}$ منحصراً یک بزرگ‌ترین رابطه فازی در X وجود دارد که تصویر آن بر $X_{(q)}$ برابر R_q است. گسترش استوانه‌ای بیان شده در تعریف فوق همین بزرگ‌ترین رابطه فازی در X است که متناظر با هر R_q از $X_{(q)}$ تعریف می‌شود.

مثال ۱۴.۵ گسترش‌های استوانه‌ای $R_۱$ و $R_۲$ مثال ۱۳.۵، رابطه‌های فازی دوبعدی زیر هستند

$$R_{۱L} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} ۳ & ۴ & ۵ & ٦ \end{array} \\ \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{array} & \begin{pmatrix} ۰/۴ & ۰/۴ & ۰/۴ & ۰/۴ \\ ۰/۷ & ۰/۷ & ۰/۷ & ۰/۷ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} \end{array} \quad R_{۲L} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} ۳ & ۴ & ۵ & ٦ \end{array} \\ \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{array} & \begin{pmatrix} ۱ & ۰/۷ & ۰/۴ & ۰/۲ \\ ۱ & ۰/۷ & ۰/۴ & ۰/۲ \\ ۱ & ۰/۷ & ۰/۴ & ۰/۲ \end{pmatrix} \end{array}$$

مثال ۱۵.۵ رابطه فازی زیر را در $\mathbb{R}^۳$ در نظر بگیرید

$$R(x_۱, x_۲, x_۳) = e^{-k^۲|x_۱^۲+x_۲^۲+x_۳^۲-r^۲|}$$

R را می‌توان یک کره فازی (یا سطح فازی شده‌ی یک کره) تعبیر کرد. زیرا هر نقطه روی کره دارای درجه عضویت یک است و هر نقطه خارج یا داخل آن، درجات عضویت کوچک‌تر از یک (به نسبت دوری یا نزدیکی از سطح کره) دارند. تصویر R بر $X_۱ \times X_۲$ (دراینجا صفحه $(X_۱, X_۲)$) یک رابطه فازی دو بُعدی با تابع عضویت زیر است

$$R(x_۱, x_۲) = \begin{cases} e^{-k^۲|x_۱^۲+x_۲^۲-r^۲|} & x_۱^۲ + x_۲^۲ \geq r^۲ \\ ۱ & x_۱^۲ + x_۲^۲ < r^۲ \end{cases}$$

که آن را می‌توان یک دیسک فازی نامید. حال گسترش استوانه‌ای این دیسک فازی، یک حجم استوانه‌ای فازی است. یعنی نقاطی از فضای $\mathbb{R}^۳$ که داخل یا روی استوانه‌ی مستدیر قائم، با منحنی مولّد $x_۱^۲ + x_۲^۲ = r^۲$، در صفحه $(X_۱, X_۲)$ هستند، دارای درجه عضویت یک در این حجم استوانه‌ای فازی می‌باشند و نقاط خارج از استوانه‌ی مستدیر فوق دارای درجه عضویت $e^{-k^۲|x_۱^۲+x_۲^۲-r^۲|}$ هستند [].

۵.۳ ترکیب روابط فازی

در این بخش ترکیب روابط فازی را تعریف نموده و شرح می‌دهیم. نخست این تعریف را برای روابط فازی دو بعدی بیان نموده و سپس تعریف حالت کلی را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱۱.۵ فرض کنید R یک رابطه در $X \times Y$ و S یک رابطه در $Y \times Z$ باشد. آن‌گاه $R \bigcirc S$ یک رابطه در $X \times Z$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(R \bigcirc S)(x, z) = \sup_y \{\min[R(x, y), S(y, z)]\}$$

رابطه فوق توصیف و تعبیری این‌گونه دارد: $(R \bigcirc S)(x,z)$ برابر است با حداکثر نیروی زنجیرهایی که x و z را به هم پیوند می‌دهند. برای هر (x,y) زنجیرهایی دو قسمتی به صورت $x-y-z$ در نظر بگیرید. (برای y های مختلف). نیروی هر زنجیر برابر است با ضعیف‌ترین نیروی $x-y$ و $y-z$ آن زنجیر. حال نیروی پیوند $x-z$ برابر است با نیروی قوی‌ترین این چنین زنجیرها.

نکته ۴.۵ در تعریف بالا می‌توان از هر T—نرم دیگری به جای عملگر min استفاده کرد. به ویژه، به کارگیری ضرب جبری در ترکیب دو رابطه فازی متداول است. بدین ترتیب ترکیب دو رابطه R و S برپایه‌ی عملگرهای $\sup -product$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(R \bigcirc S)(x,z) = \sup_y \{R(x,y)S(y,z)\}$$

مثال ۱۶.۵ فرض کنید

$$X = \{x_۱, x_۲, x_۳\}, Y = \{y_۱, y_۲, y_۳\}, Z = \{z_۱, z_۲, z_۳, z_۴\}$$

و رابطه‌های فازی دو بعدی R بر $X \times Y$ و S بر $Y \times Z$ به صورت ماتریس‌های رابطه زیر تعریف شده باشند

$$R = \begin{array}{c} \\ x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_۱ & y_۲ & y_۳ \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۱ & ۰/۸ & ۰/٦ \\ ۰/۹ & ۰/۴ & ۰/۵ \\ ۰ & ۰/۳ & ۰/۳ \end{pmatrix} \end{array} \quad S = \begin{array}{c} \\ y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_۱ & z_۲ & z_۳ & z_۴ \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۰/۵ & ۰/۳ & ۰/۱ & ۰ \\ ۰/۸ & ۰/٦ & ۰/۱ & ۰ \\ ۰/۹ & ۰/۷ & ۰/۵ & ۰/۲ \end{pmatrix} \end{array}$$

در این صورت $R \bigcirc S$ یک رابطه فازی دو بعدی بر $X \times Z$ با ماتریس رابطه زیر خواهد بود

$$R \bigcirc S = \begin{array}{c} \\ x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_۱ & z_۲ & z_۳ & z_۴ \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۰/۸ & ۰/٦ & ۰/۵ & ۰/۲ \\ ۰/۵ & ۰/۵ & ۰/۵ & ۰/۲ \\ ۰/۳ & ۰/۳ & ۰/۳ & ۰/۲ \end{pmatrix} \end{array}$$

هم‌چنین، $R \bigcirc S$ بر پایه‌ی عملگرهای $\max -product$ عبارت است از

$$R \bigcirc S = \begin{array}{c} \\ x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_۱ & z_۲ & z_۳ & z_۴ \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۰/٦۴ & ۰/۴۸ & ۰/۳۰ & ۰/۱۲ \\ ۰/۴۵ & ۰/۳۵ & ۰/۲۵ & ۰/۰۵ \\ ۰/۲۷ & ۰/۲۱ & ۰/۱۵ & ۰/۰٦ \end{pmatrix} \end{array}$$

مثال ۱۷.۵ فرض کنید

$$X=\{۱,۲,۳\}, Y=\{۱,۲,\dots,۱۲\}, Z=\{۲,۳,\dots,۱۵\}$$

رابطه‌های فازی دو بعدی R بر $X\times Y$ و S بر $Y\times Z$ را با ماتریس‌های زیر در نظر بگیرید. دقت کنید که R را می‌توانیم رابطه فازی «y تقریباً مجذور x است» و S را رابطه فازی «z نسبت به y بزرگ است» تعبیر کنیم.

$$R=\begin{array}{c|cccccccccccc} & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ & ۹ & ۱۰ & ۱۱ & ۱۲ \\ \hline ۱ & ۱ & ۰/۸ & ۰/۶ & ۰/۴ & ۰/۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۰/۴ & ۰/۶ & ۰/۸ & ۱ & ۰/۸ & ۰/۶ & ۰/۴ & ۰/۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۲ & ۰/۴ & ۰/۶ & ۰/۸ & ۱ & ۰/۸ & ۰/۶ & ۰/۴ \end{array}$$

$$S=\begin{array}{c|cccccccccccccc} & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ & ۹ & ۱۰ & ۱۱ & ۱۲ & ۱۳ & ۱۴ & ۱۵ \\ \hline ۱ & ۰/۱ & ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۴ & ۰/۵ & ۰/۶ & ۰/۷ & ۰/۸ & ۰/۹ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۰/۱ & ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۴ & ۰/۵ & ۰/۶ & ۰/۷ & ۰/۸ & ۰/۹ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۰ & ۰ & ۰/۱ & ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۴ & ۰/۵ & ۰/۶ & ۰/۷ & ۰/۸ & ۰/۹ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۴ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۱ & ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۴ & ۰/۵ & ۰/۶ & ۰/۷ & ۰/۸ & ۰/۹ & ۱ & ۱ \\ ۵ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۱ & ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۴ & ۰/۵ & ۰/۶ & ۰/۷ & ۰/۸ & ۰/۹ & ۱ \\ ۶ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۱ & ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۴ & ۰/۵ & ۰/۶ & ۰/۷ & ۰/۸ & ۰/۹ \\ ۷ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۱ & ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۴ & ۰/۵ & ۰/۶ & ۰/۷ & ۰/۸ \\ ۸ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۱ & ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۴ & ۰/۵ & ۰/۶ & ۰/۷ \\ ۹ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۱ & ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۴ & ۰/۵ & ۰/۶ \\ ۱۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۱ & ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۴ & ۰/۵ \\ ۱۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۱ & ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۴ \\ ۱۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۱ & ۰/۲ & ۰/۳ \end{array}$$

مثلاً $R(۲,۵)=۰/۸$ یعنی عدد ۵ با درجه ۰/۸ مجذور ۲ است، و $S(۲,۵)=۰/۳$ یعنی عدد ۵ با درجه ۰/۳ نسبت به ۲ بزرگ است. با توجه به دو رابطه R و S بالا، $R\bigcirc S$ یک رابطه فازی به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{array}{c|cccccccccccccc} & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ & ۹ & ۱۰ & ۱۱ & ۱۲ & ۱۳ & ۱۴ & ۱۵ \\ \hline ۱ & ۰/۱ & ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۴ & ۰/۵ & ۰/۶ & ۰/۷ & ۰/۸ & ۰/۹ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰/۱ & ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۳ & ۰/۴ & ۰/۵ & ۰/۶ & ۰/۶ & ۰/۷ & ۰/۸ & ۰/۹ & ۰/۹ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۱ & ۰/۲ & ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۴ & ۰/۴ & ۰/۵ & ۰/۶ & ۰/۶ & ۰/۷ \end{array}$$

رابطه فازی فوق را می‌توان این‌گونه تعبیر کرد: «z نسبت به تقریباً مجذور x بزرگ است». مثلاً $(R\bigcirc S)(۲,۶)=۰/۴$ یعنی عدد ۶ با درجه ۰/۴ نسبت به تقریباً مجذور ۲ بزرگ است.

در برخی از مسائل کاربردی، با ترکیب روابط فازی پیوسته روبرو هستیم. محاسبه‌ی ترکیب این روابط به آسانی حالت گسسته نیست. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۸.۵ فرض کنید $X = Y = Z = \mathbb{R}$. رابطه‌های فازی دو بعدی R بر $X \times Y$ و S بر $Y \times Z$ را با توابع عضویت زیر در نظر بگیرید. دقت کنید که R را می‌توانیم رابطه فازی «y تقریباً برابر x است» و S را رابطه فازی «z نسبت به y بزرگ است» تعبیر کنیم.

$$R(x,y) = e^{-|x-y|}, \qquad S(y,z) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{-(z-y)}} & z \geq y \\ 0 & z < y \end{cases}$$

می‌خواهیم $R \bigcirc S$ را برپایه‌ی عملگرهای $\max - product$ تعیین کنیم. داریم

$$(R \bigcirc S)(x,z) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \{ \frac{e^{-|x-y|}}{1 + e^{-(z-y)}} \}$$

برای محاسبه سمت راست رابطه بالا باید به ازای هر z, x ثابت، مقدار y را که در آن نقطه عبارت $\frac{e^{-|x-y|}}{1+e^{-(z-y)}}$ به سوپریمم مقدار خود می‌رسد معین کنیم. بدین ترتیب تعیین $R \bigcirc S$ نیاز به محاسبات عددی بسیار دارد. مقایسه‌ی این مثال و دو مثال پیشین نشان می‌دهد که‌محاسبه‌ی ترکیب روابط فازی در حالت‌های پیوسته بسیار دشوارتر از حالت‌های گسسته است.

اکنون تعریف ترکیب دو رابطه فازی را در حالت کلی بیان می‌کنیم. پیش از آن لازم است که مفاهیم اتصال و برخورد دو مجموعه فازی را تعریف کنیم.

تعریف ۱۲.۵ فرض کنید R یک رابطه فازی بر X باشد و R_1 و R_2 دو تصویر فازی به ترتیب بر $X_1 \times \ldots \times X_r$ و $X_n \times \ldots \times X_s$ $(s \leq r+1)$، و R_{1L} و R_{2L} گسترش‌های استوانه‌ای R_1 و R_2 بر X باشند. در این صورت $R_{1L} \cap R_{2L}$ را اتصال R_1 و R_2 نامیده و $R_{1L} \cup R_{2L}$ را برخورد آن‌ها می‌نامیم.

مثال ۱۹.۵ رابطه فازی دو بعدی R مثال ۱۱.۵ و دو تصویر آن (مثال ۱۳.۵) و گسترش‌های این تصاویر (مثال ۱۴.۵) را در نظر بگیرید. در این‌جا اتحاد R_{1L} و R_{2L} و برخورد آن‌ها، هر کدام یک رابطه فازی دوبعدی به صورت زیر هستند

$$R_{۱L}\cap R_{۲L}=\begin{array}{c|cccc} & ۳ & ۴ & ۵ & ٦ \\ \hline ۱ & ۰/۴ & ۰/۴ & ۰/۴ & ۰/۲ \\ ۲ & ۰/۷ & ۰/۷ & ۰/۴ & ۰/۲ \\ ۳ & ۱ & ۰/۷ & ۰/۴ & ۰/۲ \end{array} \qquad R_{۱L}\cup R_{۲L}=\begin{array}{c|cccc} & ۳ & ۴ & ۵ & ٦ \\ \hline ۱ & ۱ & ۰/۷ & ۰/۴ & ۰/۴ \\ ۲ & ۱ & ۰/۷ & ۰/۷ & ۰/۷ \\ ۳ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{array}$$

تعریف ۱۳.۵ با مفروضات تعریف فوق (درحالتی که $(s \leq r)$)، ترکیب دو رابطه فازی $R_۱$ و $R_۲$ به صورت رابطه فازی زیر تعریف می‌شود

$$R_۱ \bigcirc R_۲ = Proj[R_{۱l} \cap R_{۲l}; X_۱ \times \ldots \times X_{s-۱} \times X_{r+۱} \times \ldots \times X_n]$$

دقت کنید که $R_۱ \bigcirc R_۲$ یک رابطه فازی در مجموعه‌ی حاصل از تفاضل متقارن مجموعه‌هایی است که $R_۱$ و $R_۲$ در آن‌ها تعریف شده‌اند.

۵.۴ رابطه‌های فازی دو بعدی و بعضی انواع خاص آن‌ها

رابطه‌های فازی دو بعدی و ترکیب آن‌ها و ویژگی‌های آن‌ها، مورد توجه خاص محققین نظری و کاربردی است. دراین بخش، به طور ویژه، به بررسی این نوع رابطه‌های فازی می‌پردازیم.

تعریف ۱۴.۵ فرض کنید R یک رابطه فازی در $X \times Y$ باشد. قلمرو R و برد R را به ترتیب با $dom(R)$ و $ran(R)$ نشان داده و به صورت مجموعه‌های فازی زیر تعریف می‌کنیم

$$(domR)(x) = \sup_y R(x,y),\ x \in X$$
$$(ranR)(y) = \sup_x R(x,y),\ y \in Y$$

تعریف ۱۵.۵ فرض کنید R یک رابطه فازی در $X \times Y$ باشد. معکوس R، به صورت رابطه فازی $R^{-۱}$ بر $Y \times X$، با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$R^{-۱}(y,x) = R(x,y),\ \ x \in X, y \in Y$$

مثال ۲۰.۵ رابطه فازی R مثال ۱۱.۵ را در نظر بگیرید. داریم

$$(domR)(x) = \begin{cases} ۰/۴ & x = ۱ \\ ۰/۷ & x = ۲ \\ ۱ & x = ۳ \end{cases} \quad (ranR)(y) = \begin{cases} ۱ & y = ۳ \\ ۰/۷ & y = ۴ \\ ۰/۴ & y = ۵ \\ ۰/۲ & y = ٦ \end{cases}$$

مثلاً عدد ۲ با درجه ۰/۷ در قلمرو R قرار دارد، و عدد ۵ با درجه ۰/۴ در برد R قرار دارد. هم‌چنین $R^{-۱}$، معکوس R، یک رابطه فازی دو بعدی بر $Y \times X$ به صورت زیر است

$$R^{-۱} = \begin{array}{c} \\ ۳ \\ ۴ \\ ۵ \\ ۶ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} ۱ & ۲ & ۳ \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۰/۴ & ۰/۷ & ۱ \\ ۰/۲ & ۰/۴ & ۰/۷ \\ ۰/۱ & ۰/۲ & ۰/۲ \\ ۰ & ۰/۱ & ۰/۲ \end{pmatrix} \end{array}$$

مثلاً $R^{-۱}(۵, ۲) = R(۲, ۵) = ۰/۲$.

تعریف ۱۶.۵ فرض کنید R یک رابطه فازی در $X \times X$ باشد، آن‌گاه گوییم

الف) R بازتابی است، اگر برای هر $x \in X$، $R(x, x) = ۱$.

ب) R متقارن است، اگر برای هر $x, y \in X$، $R(x, y) = R(y, x)$. (یعنی معکوس R با خود R برابر باشد.)

پ) R انتقالی است، اگر $R \bigcirc R \subseteq R$.

دقت کنید که انتقالی بودن رابطه R به بیان روشن‌تر یعنی

$$R(x, z) \geq \min[R(x, y), R(y, z)], \quad \forall (x, y, z) \in X^۳$$

و تعبیر آن این است که هر زنجیره‌ی کوتاه‌تر، رابطه و پیوندی قوی‌تر بین دو عضو ایجاد کند تا زنجیره‌ای طولانی‌تر بین آن دو عضو.

مثال ۲۱.۵ فرض کنید $X = \{۱۲, ۱۴, ۱۷, ۲۰\}$، و $R_۳, R_۲, R_۱$ سه رابطه فازی بر $X \times X$ به صورت‌های زیر باشند

$$R_۱ = \begin{array}{c} \\ ۱۲ \\ ۱۴ \\ ۱۷ \\ ۲۰ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} ۱۲ & ۱۴ & ۱۷ & ۲۰ \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰/۸ & ۱ & ۰/۸ & ۰/۸ \\ ۰ & ۰/۷ & ۱ & ۰/۷ \\ ۰/۱ & ۰/۳ & ۰/۷ & ۱ \end{pmatrix} \end{array} \quad R_۳ = \begin{array}{c} \\ ۱۲ \\ ۱۴ \\ ۱۷ \\ ۲۰ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} ۱۲ & ۱۴ & ۱۷ & ۲۰ \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۱ & ۰/۸ & ۰/۴ & ۰/۱ \\ ۰/۸ & ۱ & ۰/۷ & ۰/۳ \\ ۰ & ۰/۷ & ۱ & ۰/۷ \\ ۰/۱ & ۰/۳ & ۰/۷ & ۱ \end{pmatrix} \end{array}$$

$$R_۳ = \begin{array}{c|cccc} & ۱۲ & ۱۴ & ۱۷ & ۲۰ \\ \hline ۱۲ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱۴ & ۰/۸ & ۱ & ۰/۸ & ۰/۸ \\ ۱۷ & ۰ & ۰/۷ & ۱ & ۰/۷ \\ ۲۰ & ۰/۳ & ۰/۳ & ۰/۳ & ۰/۳ \end{array}$$

در این صورت $R_۱$ بازتابی است و $R_۲$ متقارن است و $R_۳$ انتقالی است. دقت کنید که برای $R_۳$ رابطه تساوی در شرط $R \bigcirc R \subseteq R$ برقرار است. می‌توان $R_۱$ را رابطه فازی «x کوچک یا نزدیک به y» تعبیر کرد و $R_۲$ را «x و y نزدیک به هم» و $R_۳$ را به صورت «x و y متوسط یا x کوچک» تعبیر کرد.

برای رابطه‌های فازی دو بعدی که بازتابی یا متقارن یا انتقالی باشند، ویژگی‌های ثابت می‌شود که در دو قضیه زیر بیان شده‌اند [].

قضیه ۱.۵

۱. اگر $R_۱$ بازتابی و $R_۲$ یک رابطه فازی دلخواه باشد، آنگاه

$$R_۲ \subseteq R_۱ \bigcirc R_۲, \quad R_۲ \subseteq R_۲ \bigcirc R_۱$$

۲. اگر R بازتابی باشد، آن‌گاه $R \subseteq R \bigcirc R$.

۳. اگر $R_۱$ و $R_۲$ بازتابی باشند، آن‌گاه $R_۱ \bigcirc R_۲$ نیز بازتابی است.

۴. اگر $R_۱$ و $R_۲$ متقارن باشند، آن‌گاه $R_۱ \bigcirc R_۲$ نیز متقارن است به شرطی که $R_۱ \bigcirc R_۲ = R_۲ \bigcirc R_۱$.

قضیه ۲.۵

۱. اگر R متقارن و انتقالی باشد، آن‌گاه برای هر $x, y \in X$ ، $R(x,y) \leq R(x,x)$.

۲. اگر R بازتابی و انتقالی باشد،آن‌گاه $R \bigcirc R = R$.

۳. اگر$R_۱$ و $R_۲$ انتقالی باشند و $R_۱ \bigcirc R_۲ = R_۲ \bigcirc R_۱$،آن‌گاه $R_۱ \bigcirc R_۲$ نیز انتقالی است.

عکس قضیه فوق همواره برقرار نیست. مثلاً اگر $R \bigcirc R = R$، آنگاه R لزوماً بازتابی و انتقالی نیست. برای نمونه، رابطه $R_۳$ در مثال ۲۱.۵ به گونه‌ای است که $R_۳ \bigcirc R_۳ = R_۳$ ولی $R_۳$ بازتابی نیست.

در قضیه زیر ویژگی‌های ترکیب روابط فازی دوبعدی بیان شده است [].

قضیه ۳.۵ فرض کنید R و S و T رابطه‌های فازی دوبعدی به ترتیب در $X \times Y$ و $Y \times Z$ و $Z \times W$ باشند، آن‌گاه عمل ترکیب تعریف شده در تعریف ۹.۵ دارای ویژگی‌های زیر است

۱. $R \bigcirc (S \bigcirc T) = (R \bigcirc S) \bigcirc T$ ویژگی شرکت‌پذیری

۲. $R \bigcirc (S \cup T) = (R \bigcirc S) \cup (R \bigcirc T)$ ویژگی توزیع‌پذیری نسبت به اجتماع

۳. $R \bigcirc (S \cap T) \subseteq (R \bigcirc S) \cap (R \bigcirc T)$ ویژگی توزیع‌پذیری ضعیف نسبت به اشتراک

۴. $S \subseteq T \Rightarrow R \bigcirc S \subseteq R \bigcirc T$ ویژگی یکنوایی

نکته ۵.۵ با استفاده از ویژگی شرکت‌پذیری ترکیب، می‌توان n—اُمین توان یک رابطه فازی R را به صورت n بار ترکیب آن در خودش تعریف کرد، یعنی (n بار) $R^n = R \bigcirc R \bigcirc \ldots \bigcirc R$. ثابت می‌شود که اگر R متقارن باشد، هر توانی از آن نیز متقارن است.

تعریف ۱۷.۵ فرض کنید R یک رابطه فازی در $X \times X$ باشد. گوییم

الف) R پاد بازتابی است، اگر برای هر $x \in X$، $R(x, x) = ۰$.

ب) R پاد متقارن است، اگر برای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$،

$$R(x, y) \neq R(y, x) \text{ یا } R(x, y) = R(y, x) = ۰$$

پ) R کاملاً پاد متقارن است، اگر برای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$ و $R(x, y) > ۰$، داشته باشیم $R(y, x) = ۰$.

توجه می‌کنید، که اگر R کاملاً پاد متقارن باشد، آنگاه پاد متقارن است.

مثال ۲۲.۵ مجدداً فرض کنید $X = \{۱۲, ۱۴, ۱۷, ۲۰\}$. $R_۴$ و $R_۵$ را به صورت‌های زیر تعریف می‌کنیم

$$R_۴ = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} ۱۲ & ۱۴ & ۱۷ & ۲۰ \end{array} \\ \begin{array}{c} ۱۲ \\ ۱۴ \\ ۱۷ \\ ۲۰ \end{array} & \begin{pmatrix} ۰/۵ & ۰/۴ & ۰ & ۰/۸ \\ ۰/۳ & ۰/۷ & ۰/۳ & ۰ \\ ۰ & ۰/۴ & ۱ & ۰/۱ \\ ۰/۷ & ۰ & ۰/۶ & ۰ \end{pmatrix} \end{array} \quad R_۵ = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} ۱۲ & ۱۴ & ۱۷ & ۲۰ \end{array} \\ \begin{array}{c} ۱۲ \\ ۱۴ \\ ۱۷ \\ ۲۰ \end{array} & \begin{pmatrix} ۰/۵ & ۰ & ۰ & ۰/۸ \\ ۰/۳ & ۰/۷ & ۰/۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰/۲ \\ ۰ & ۰/۶ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \end{array}$$

با توجه به تعریف ۱۷.۵ $R_۴$ پاد متقارن است (و کاملاً پاد متقارن نیست)، و $R_۵$ کاملاً پاد متقارن است.

۵.۵ رابطه هم‌ارزی فازی

متناظر با تعریف رابطه هم‌ارزی در حالت معمولی، تعریف زیر را داریم:

تعریف ۱۸.۵ گوییم رابطه فازی S، تعریف شده بر $X \times X$، یک رابطه هم‌ارزی فازی است، اگر S بازتابی و متقارن و انتقالی باشد.

مثال ۲۳.۵ فرض کنید $X = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_۷\}$، آن‌گاه رابطه S تعریف شده بر $X \times X$ به صورت زیر یک رابطه هم‌ارزی فازی است

$$S = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_۱ & x_۲ & x_۳ & x_۴ & x_۵ & x_۶ & x_۷ \end{array} \\ \begin{array}{c} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \\ x_۵ \\ x_۶ \\ x_۷ \end{array} & \begin{pmatrix} ۱ & ۰/۷ & ۰/۷ & ۰/۷ & ۰/۷ & ۰/۵ & ۱ \\ ۰/۷ & ۱ & ۰/۸ & ۰/۸ & ۰/۸ & ۰/۵ & ۰/۷ \\ ۰/۷ & ۰/۸ & ۱ & ۰/۸ & ۰/۸ & ۰/۵ & ۰/۷ \\ ۰/۷ & ۰/۸ & ۰/۸ & ۱ & ۰/۸ & ۰/۵ & ۰/۷ \\ ۰/۷ & ۰/۸ & ۰/۸ & ۰/۸ & ۱ & ۰/۵ & ۰/۷ \\ ۰/۵ & ۰/۵ & ۰/۵ & ۰/۵ & ۰/۵ & ۱ & ۰/۵ \\ ۱ & ۰/۷ & ۰/۷ & ۰/۷ & ۰/۷ & ۰/۵ & ۱ \end{pmatrix} \end{array}$$

نکته ۶.۵ اگر S یک رابطه هم‌ارزی فازی باشد، آن‌گاه $D = S^C$ (متمم S) پاد بازتابی و متقارن و انتقالی است. شایان ذکر است که $D(x, y)$ را می‌توان به عنوان یک تابع فاصله

در نظر گرفت.

قضیه زیر دلیلی است برای ادعای ابتدای بحث: رابطه هم‌ارزی فازی، تعمیمی از رابطه هم‌ارزی معمولی است [].

قضیه ۴.۵ فرض کنید R یک رابطه فازی بر $X \times X$ باشد. آن‌گاه R یک رابطه هم‌ارزی فازی است اگر و فقط اگر هر α برش R، R_α، یک رابطه هم‌ارزی معمولی باشد.

مثال ۲۴.۵ برای رابطه فازی مثال فوق و مثلاً برای $\alpha = ۰/۷۵$ داریم

$$\begin{aligned} S_{۰/۷۵} = & \Big\{(x_۱, x_۲) \in X \times X; S(x_۱, x_۲) \geq ۰/۷۵\Big\} \\ = & \Big\{(x_۱, x_۱), (x_۱, x_۷), (x_۲, x_۲), (x_۲, x_۳), (x_۲, x_۴), \\ & (x_۲, x_۵), (x_۳, x_۲), (x_۳, x_۳), (x_۳, x_۴), (x_۳, x_۵), \\ & (x_۴, x_۲), (x_۴, x_۳), (x_۴, x_۴), (x_۴, x_۵), (x_۵, x_۲), (x_۵, x_۳), \\ & (x_۵, x_۴), (x_۵, x_۵), (x_۶, x_۶), (x_۷, x_۱), (x_۷, x_۷)\Big\} \end{aligned}$$

که به وضوح، یک رابطه هم‌ارزی است.

درخت افزار (رده‌های هم‌ارزی)

یک رابطه هم‌ارزی فازی S را تعریف شده بر $X \times X$ (X متناهی)، می‌توان توسط یک درخت افزار توصیف کرد. در این درخت، هر $\alpha-$ برش S، یک سطح را تشکیل می‌دهد. در این صورت مجموعه عناصری را که در هر $\alpha-$ برش (یعنی در هر سطح) قرار می‌گیرند، رده‌های هم‌ارزی در سطح α می‌نامیم. این مفهوم مشابه مفهوم رده‌های هم‌ارزی در مورد روابط هم‌ارزی معمولی است.

مثال ۲۵.۵ برای رابطه فازی S مثال بالا، درخت افزار این گونه است

۵.۶ رابطه سازگاری فازی

متناظر با تعریف رابطه سازگاری در حالت معمولی، تعریف زیر را داریم.

تعریف ۱۹.۵ گوییم رابطه فازی S، تعریف شده بر $X \times X$، یک رابطه سازگاری است، اگر S بازتابی و متقارن باشد.

مثال ۲۶.۵ فرض کنید $X = \{x_1, x_2, \dots, x_7\}$، آن‌گاه رابطه T زیر، تعریف شده بر $X \times X$، یک رابطه سازگاری است (در حالی که یک رابطه هم‌ارزی فازی نیست)

$$T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} ۱ & ۰/۸ & ۰ & ۰/۴ & ۰ & ۰ & ۰/۵ \\ ۰/۸ & ۱ & ۰ & ۰/۵ & ۰/۶ & ۰ & ۰/۷ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰/۹ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰/۴ & ۰/۵ & ۰/۹ & ۱ & ۰/۱ & ۰/۵ & ۰ \\ ۰ & ۰/۶ & ۰ & ۰/۱ & ۱ & ۰/۲ & ۰/۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۵ & ۰/۲ & ۱ & ۰ \\ ۰/۵ & ۰/۷ & ۰ & ۰ & ۰/۵ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \end{array}$$

درخت افزار (رده‌های سازگاری)

یک رابطه تطابق S را تعریف شده بر $X \times X$ (X متناهی)، می‌توان توسط یک درخت افزار توصیف کرد. در این درخت، هر $\alpha-$ برش S یک سطح را تشکیل می‌دهد. در این صورت مجموعه عناصری را که در هر $\alpha-$ برش (یعنی در هر سطح) قرار می‌گیرند، رده‌های سازگاری در سطح α می‌نامیم. این مفهوم مشابه مفهوم رده‌های سازگاری در مورد روابط سازگاری معمولی است.

نکته ۷.۵ هر رابطه سازگاری فازی با بعد n را می‌توان با ترکیب حداکثر $n - ۱$ بار در خودش، به یک رابطه هم‌ارزی فازی تبدیل کرد.

نکته ۸.۵ در برخی متون (مانند []) رابطه هم‌ارزی فازی تحت عنوان رابطه تشابهی فازی مطرح شده است. رابطه سازگاری فازی نیز با عناوین دیگری مانند رابطه تحمل فازی و رابطه نزدیکی (مجاورت) فازی تعریف شده است. در برخی متون (مانند []) نیز رابطه سازگاری فازی با عنوان رابطه تشابهی فازی مطرح شده است. ما در این کتاب از عناوینی استفاده کرده‌ایم که در حالت معمولی برای انواع رابطه‌ها استفاده می‌شود. افزون

این‌که، عنوان رابطه تشابهی فازی را برای هیچ‌یک از رابطه‌های هم‌ارزی و سازگاری به کار نبردیم تا خواننده خود در عمل از یک رابطه‌ی مناسب برای توصیف و تبیین مفهوم تشابه استفاده کند (رک تمرین‌های ۱۸.۵ و ۱۹.۵).

۵.۷ رابطه ترتیب فازی

در این بخش چند مفهوم را در مورد رابطه‌های ترتیبی فازی تعریف کرده و توضیح می‌دهیم.

تعریف ۲۰.۵ گوییم

الف) S یک رابطه فازی شبه ترتیبی است اگر S، بازتابی و انتقالی باشد.

ب) S یک رابطه فازی ترتیبی است اگر S، بازتابی و انتقالی و پاد متقارن باشد.

پ) S یک رابطه فازی ترتیب جزئی است اگر S، بازتابی و انتقالی و کاملاً پاد متقارن باشد.

ت) S یک ترتیب خطی فازی است اگر S یک رابطه ترتیب جزئی فازی بوده و به علاوه برای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$: $R(y,x) > ۰$ یا $R(x,y) > ۰$.

می‌توان ثابت کرد که هر $\alpha-$ برش یک رابطه ترتیب جزئی فازی، یک رابطه ترتیب جزئی معمولی است [۱۳۳].

مثال ۲۷.۵ مجدداً فرض کنید $X = \{۱۲, ۱۴, ۱۷, ۲۰\}$. رابطه‌های فازی $E_۶$ و $R_۷$ و $R_۸$ و $R_۹$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. در اینجا $R_۶$ یک رابطه شبه ترتیبی است اما ترتیبی نیست. $R_۷$ یک رابطه ترتیب است اما ترتیب جزئی نیست. $R_۸$ یک رابطه ترتیب جزئی است ولی ترتیب خطی نیست. و سرانجام $R_۹$ یک رابطه ترتیب خطی است.

$$R_۶ = \begin{array}{c} \\ ۱۲ \\ ۱۴ \\ ۱۷ \\ ۲۰ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} ۱۲ & ۱۴ & ۱۷ & ۲۰ \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰/۸ \\ ۰/۸ & ۱ & ۰/۸ & ۰/۸ \\ ۰/۷ & ۰/۷ & ۱ & ۰/۷ \\ ۰/۸ & ۰/۸ & ۰/۸ & ۱ \end{pmatrix} \end{array} \quad R_۷ = \begin{array}{c} \\ ۱۲ \\ ۱۴ \\ ۱۷ \\ ۲۰ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} ۱۲ & ۱۴ & ۱۷ & ۲۰ \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰/۸ & ۱ & ۰/۸ & ۰ \\ ۰/۷ & ۰/۷ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \end{array}$$

$$R_8 = \begin{array}{c|cccc} & 12 & 14 & 17 & 20 \\ \hline 12 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 0/8 & 1 & 0 & 0 \\ 17 & 0/7 & 0/7 & 1 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad R_9 = \begin{array}{c|cccc} & 12 & 14 & 17 & 20 \\ \hline 12 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 0/8 & 1 & 0 & 0 \\ 17 & 0/7 & 0/7 & 1 & 0 \\ 20 & 0/8 & 0/8 & 0/8 & 1 \end{array}$$

ملاحظه می‌کنید که هر $\alpha-$ برش R_8 که رابطه فازی ترتیب جزئی است، یک رابطه ترتیب جزئی معمولی است. مثلاً اگر $\alpha = 0/75$، آن‌گاه داریم

$$(R_8)_{0/75} = \{(12,12),(14,14),(17,17),(20,20)(14,12)\}$$

که یک رابطه ترتیب جزئی است.

تذکر دقت کنید بر خلاف آنچه در برخی منابع گفته شده است [۴۴]، هر $\alpha-$ برش یک رابطه فازی ترتیب خطی، یک رابطه معمولی ترتیب خطی نیست (رک تمرین ۱۴.۵).

۵.۸ تحدیدهای فازی

هنگامی که یک رابطه معمولی R بر $X \times Y$ تعریف می‌کنیم، مجموعه‌ای از ازواج مرتب را در نظر داریم که هر کدام عضوی از $X \times Y$ هستند و افزون بر آن رابطه‌ی مورد نظر R را دارند. به عبارت دیگر یک محدودیت و قید برای اعضای $X \times Y$ در عضویت در R قائل می‌شویم: آن‌هایی که ویژگی مورد نظر را دارند در R عضو هستند و آن‌هایی که ندارند در R عضو نیستند. در مثال ۱.۵ یک رابطه معمولی داریم. یعنی یک محدودیت و قید معمولی و اکید که می‌گوید: هر زوج (x,y) از $X \times Y$ که $x + y = 7$، در R عضو است، وگر نه عضو نیست. حتی اگر $x + y = 7/1$ آن‌گاه $(x,y) \notin R$. اما در مثال ۱۲.۵ یک رابطه فازی داریم، یعنی یک محدودیت و قید منعطف که می‌گوید: هر زوج (x,y) از $X \times Y$ که مجموع آن‌ها تقریباً هفت باشد، در R عضو است
(البته به میزانی که مجموع آن‌ها نزدیک به هفت است). پس در حالت اول یک محدودیت و قید اکید و دقیق داریم و در حالت دوم یک محدودیت و قید منعطف و فازی. این اساس چیزی است که تحدید فازی نام دارد. پس مفهوم تحدید فازی همان مفهوم رابطه فازی است که به صورتی دیگر بیان می‌شود. به طور دقیق تعریف زیر را داریم.

تعریف ۲۱.۵ فرض کنید $V = (v_{۱}, \ldots, v_n)$ متغیری $n-$ بُعدی تعریف شده بر $X = X_{۱} \times \ldots \times X_n$ باشد. یک تحدید فازی $R(V)$ بر X، یک رابطه فازی R بر X است که به صورت یک محدودیت منعطف بر مقادیری از X که می‌تواند به متغیر V نسبت داده شود، عمل می‌کند.

مشاهده می‌کنید که تفاوتی که بین مفاهیم رابطه فازی و تحدید فازی است، فقط در تعبیر آنهاست. به طور متناظر با تعریف ۹.۵، تصویرهای یک رابطه فازی را تحدیدهای فازی حاشیه‌ای می‌نامیم. در مثال ۱۱.۵، R را می‌توان یک تحدید فازی در نظر گرفت که تحدیدهای فازی حاشیه‌ای آن در مثال ۱۳.۵ به دست آمده‌اند.

تعریف ۲۲.۵ تحدید فازی n بُعدی $R(v_{۱}, \ldots, v_n)$ را تفکیک‌پذیر (جدا پذیر) گوییم اگر $R(v_{۱}, \ldots, v_n) = R(v_{۱}) \times \ldots \times R(v_n)$، که در آن $\times$ علامت ضرب‌دکارتی است و $R(v_i)$ بیانگر تصویر R بر X_i است. به عبارت دیگر R، تفکیک‌پذیر است اگر

$$R(x_{۱}, ..., x_{۲}) = \min_{i=۱,\ldots,n} \{Proj[R; X_i](x_i)\}$$

در حالتی که R یک تحدید دو بعدی است، شرط فوق به صورت زیر ساده می‌شود

$$R(x_{۱}, x_{۲}) = \min[R_{۱}(x_{۱}), R_{۲}(x_{۲})]$$

اگر R تفکیک‌پذیر باشد، تمام تحدیدهای فازی حاشیه‌ای آن نیز چنین است.

تعریف ۲۳.۵ گوییم متغیرهای $v_{۱}, \ldots, v_n$ تحت تحدید $R(v_{۱}, \ldots, v_n)$ غیرمؤثر بر هم هستند اگر تحدید R تفکیک‌پذیر باشد. مفهوم مؤثر برهم بودن و غیر مُوثر برهم بودن دنباله‌ای از متغیرها، مشابه مفاهیم وابستگی و استقلال در حالتی است که جنبه‌ی تصادفی و احتمالی متغیرها بررسی می‌شود.

شکل ۲.۵ تحدیدهای فازی موثر بر هم و غیرموثر بر هم در مثال ۲۷.۵.

قبل از این‌که مثال‌هایی از رابطه‌های فازی تفکیک‌پذیر و متغیرهای مؤثر برهم و غیر مؤثر برهم ارائه کنیم، با یک مثال این مفاهیم را برای حالت معمولی توضیح می‌دهیم.

مثال ۲۸.۵ فرض کنید $X = Y = \mathbb{R}$. حال دو رابطه (تحدید) معمولی $R_۱$ و $R_۲$ را بر $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$R_۱ = \{(x, y); ۱ \le x \le ۳, ۲ \le y \le ۴\}$$
$$R_۲ = \{(x, y); (x - ۲)^۲ + (y - ۳)^۲ \le ۱\}$$

در رابطه (تحدید) $R_۱$، تغییرات x بر تغییرات y مؤثر نیست (و بالعکس). اما در تحدید $R_۲$، تغییرات x و y مؤثر برهم اند. به عبارت دیگر داریم $R_۱ = R_۱(x) \times R_۲(y)$، در حالی که $R_۲ \neq R_۲(x) \times R_۲(y)$. به شکل ۲.۵ توجه کنید.

مثال ۲۹.۵ فرض کنید $X_۱ = \{۱, ۲, ۳\}$ و $X_۲ = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$. دو تحدید فازی $R_۱$ و $R_۲$ را بر $X_۱ \times X_۲$ به صورت زیر در نظر بگیرید

$$R_۱ = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{array} \\ \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{array} & \begin{pmatrix} ۰/۲ & ۰/۴ & ۰/۶ & ۰/۸ \\ ۰/۴ & ۰/۶ & ۰/۸ & ۱ \\ ۰/۶ & ۰/۸ & ۱ & ۰/۸ \end{pmatrix} \end{array}$$

$$R_۲ = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{array} \\ \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{array} & \begin{pmatrix} ۰/۶ & ۰/۸ & ۰/۸ & ۰/۸ \\ ۰/۶ & ۰/۸ & ۰/۹ & ۰/۹ \\ ۰/۶ & ۰/۸ & ۰/۹ & ۱ \end{pmatrix} \end{array}$$

توجه می‌کنید که $R_۱$ یک تحدید فازی تفکیک‌پذیر نیست، زیرا برای هر $(x_i, x_j) \in X_۱ \times X_۲$ رابطه زیر برقرار نیست

$$R_۱(x_i, x_j) = \min\{Proj[R_۱; X_۱](x_i), Porj[R_۱; X_۲](x_j)\}$$

مثلاً $R_۱(۲, ۱) = ۰/۴ \neq \min\{۱, ۰/۶\} = ۰/۶$. ولی $R_۲$ یک تحدید فازی تفکیک‌پذیر است.

مثال ۳۰.۵ فرض کنید $X = \{۱/۵, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $Y = \{۱, ۱/۵, ۲, ۳\}$، به ترتیب نشان دهنده‌ی مجموعه‌ی طول‌ها و عرض‌های تعدادی قالی و قالیچه (بر حسب متر) باشند. برای این قالی‌ها دو تحدید فازی در نظر می‌گیریم:

تحدید $R_۱$ بیانگر میزان بزرگی هر قالی یا قالیچه برحسب طول و عرض آن، و تحدید $R_۲$ بیانگر میزان مناسب بودن هر قالی یا قالیچه برای یک اطاق به ابعاد $۳/۵ \times ۲/۵$.

$$R_1 = \text{طول}\; \begin{array}{cc} & \text{عرض} \\ & \begin{array}{cccc} ۱ & ۱/۵ & ۲ & ۳ \end{array} \\ \begin{array}{c} ۱/۵ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \\ ۵ \end{array} & \begin{pmatrix} ۰/۱ & ۰/۲ & ۰/۲۵ & ۰/۳ \\ ۰/۲ & ۰/۲۵ & ۰/۳ & ۰/۴ \\ ۰/۳ & ۰/۳ & ۰/۴ & ۰/۵ \\ ۰/۳۵ & ۰/۴ & ۰/۵ & ۰/۷ \\ ۰/۵ & ۰/۷ & ۰/۸ & ۱ \end{pmatrix} \end{array}$$

$$R_2 = \text{طول}\; \begin{array}{cc} & \text{عرض} \\ & \begin{array}{cccc} ۱ & ۱/۵ & ۲ & ۳ \end{array} \\ \begin{array}{c} ۱/۵ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \\ ۵ \end{array} & \begin{pmatrix} ۰/۴ & ۰/۴ & ۰/۴ & ۰/۴ \\ ۰/۶ & ۰/۸ & ۰/۹ & ۰/۹ \\ ۰/۶ & ۰/۸ & ۰/۹ & ۰/۹ \\ ۰/۶ & ۰/۷ & ۰/۷ & ۰/۷ \\ ۰/۵ & ۰/۵ & ۰/۵ & ۰/۵ \end{pmatrix} \end{array}$$

دقت می‌کنید که طول و عرض به عنوان دو متغیر، تحت تحدید $R_۱$ مؤثر برهم اند، اما تحت تحدید $R_۲$ مؤثر برهم نیستند.

برای مطالعه‌ی بیشتر

بخش ۱.۵

در باره‌ی رابطه‌های معمولی و انواع آن‌ها و ویژگی‌های آن‌ها منابع بسیاری وجود دارند. به ویژه در کتاب‌های مربوط به مبانی ریاضیات، جبر و نیز ریاضیات گسسته، مانند []، می توان این موضوع را دنبال کرد.

بخش ۲.۵

ایده‌ی رابطه فازی و برخی از مفاهیم مرتبط با آن نخستین بار توسط زاده [] در سال ۱۹۷۱ معرفی شد. هم‌چنین مفهوم تصویر یک رابطه فازی و مفهوم گسترش استوانه‌ای، که در استدلال تقریبی کاربرد دارند، توسط وی در سال ۱۹۷۵ ارائه شد []. برای مطالعه‌ی بیشتر موضوع رابطه‌های فازی می‌توان به [] مراجعه کرد.

بخش ۳.۵

برای ترکیب دو رابطه فازی، تعاریف دیگری غیر از تعریف ۱۱.۵ نیز پیشنهاد شده است. از جمله عملگرهایی بر اساس $\inf - max$، یا به طور کلی بر اساس $\inf - S$ (با استفاده از یک S—نرم به جای max)، پیشنهاد شده‌اند.

هم‌چنین عملگرهایی بر اساس $\inf - \omega$ که در آن‌ها ω یک عملگر استلزام است، مطرح شده‌اند. شیوه‌ی ترکیب بر اساس $\inf - \omega$ به ویژه در حل معادلات فازی—رابطه‌ای (معادلات برحسب رابطه‌های فازی) کاربرد دارد. در باره‌ی این معادلات کمی توضیح می‌دهیم. معادله $Q \bigcirc R = S$ را در نظر بگیرید، که در آن Q و R و S سه رابطه فازی به ترتیب در $X \times Y$ و $Y \times Z$ و $X \times Z$ هستند. واضح است که با دانستن Q و R و بر اساس تعریف ترکیب دو رابطه فازی می‌توان رابطه فازی S را به دست آورد. اما محاسبه $R(Q)$ با دانستن $Q(R)$ و S مسأله‌ای پیچیده است. معادلاتی به صورت فوق، معادلات فازی—رابطه‌ای نامیده می‌شوند. این معادلات نخستین بار توسط سانچز [۱۰۸] در سال ۱۹۷۶ معرفی و بررسی شد. برای بحثی جامع دراین باره به کتاب دی‌نولا و همکاران [۴۴]، که مستقلاً در باره‌ی معادلات فازی—رابطه‌ای و کاربردهای آن نگاشته شده است، مراجعه کنید. روش‌های تقریبی برای حل معادلات فازی—رابطه‌ای توسط پدریچ در سال ۱۹۸۳ [] معرفی و گسترش یافت. افزون بر این وی در سال ۱۹۹۱ شیوه‌های مبتنی بر شبکه‌های عصبی مصنوعی را برای حل این معادلات پیشنهاد داد []. تحقیقات بسیاری در باره‌ی این موضوع صورت پذیرفته که بحث درباره‌ی آن‌ها خارج از حوصله‌ی این کتاب است. علاقمندان می‌توانند به [۴۴] و [۱۳۰] مراجعه کنند.

به هر حال، در هر شیوه‌ی ارائه شده برای ترکیب، آنچه مورد نظر است این است که نتایج حاصل با توقعاتی که به طور طبیعی در الگوهای واقعی داریم، یا انتظاراتی که در مسائل کاربردی داریم، تطابق بیشتری داشته باشد.

بخش ۴.۵

از نخستین اثرها در زمینه‌ی رابطه‌های فازی دو بعدی می توان به مقاله‌های [۴۴] و هم‌چنین کتاب کافمن [۴۴] اشاره کرد.

یکی از مباحث مهم در این باره موضوع گراف‌های فازی است که نخستین بار توسط روزنفلد [] مطرح شد. نحوه‌ی تعریف و بررسی گراف‌های فازی اساساً مشابه نحوه‌ی تعریف و بررسی رابطه‌های فازی است. البته با تفاوتی که در تعبیر و تفسیر گراف‌های فازی و روش نمایش آن‌ها و کاربردهای خاص آن‌ها وجود دارد، این موضوع به یکی از موضوع‌های مستقل و گسترده تبدیل شده است. برای خوانندگان علاقمند به این موضوع، مراجع [۱۰۴] و [۱۳۰] و [۱۴۶] را معرفی می‌کنیم.

بخش‌های ۵.۵، ٦.۵ و ۷.۵

مطالعات بیشتر پیرامون رابطه‌های هم‌ارزی، سازگاری و ترتیبی فازی را می‌توانید در مراجعی که در بالا اشاره شد دنبال کنید. در این باره [] و [] که شامل مروری بر این نوع رابطه‌هاست، و [] و [] که حاوی اثبات برخی نتایج مربوطه است، شایان توجه هستند.

بخش ۸.۵

ایده‌ی تحدید فازی و مفاهیم مرتبط با آن نخستین بار توسط زاده [] در سال ۱۹۷۱ معرفی شد. این ایده را در چارچوب نظریه امکان (که موضوع فصل آینده است) نیز می‌توان مطرح و بررسی نمود. ولی چون در فصل آینده مبحث نظریه امکان را با رویکرد اصل موضوعی ارائه می‌کنیم، موضوع تحدید فازی را در فصلی که گذشت مطرح نمودیم (افزون این‌که، عطف به مطالب بخش ۸.۵، تحدید فازی اساساً چیزی جز رابطه فازی نیست). برای مطالعه‌ی بیشتر در باره‌ی تحدیدهای فازی به [] و برای مطالعه‌ی این موضوع درچارچوب نظریه امکان به [] مراجعه کنید.

تمرین‌ها

۱.۵ فرض کنید مجموعه مرجع، مجموعه انسان‌ها باشد. تعیین کنید هر یک از رابطه‌های دو بعدی زیر دارای این ویژگی‌ها هستند یا خیر: کلیت؛ بازتایی، غیر بازتابی، کاملاً بازتابی؛ متقارن، نامتقارن، کاملاً نامتقارن؛ انتقالی، غیر انتقالی، کاملاً غیر انتقالی.

الف) x بلندتر از y است.

ب) x دست کم به بلندی y است.

پ) x و y هم قد هستند.

ت) x خواهر y است.

ث) x پدر y است.

ج) x همشهری y است.

۲.۵ کیفیت آب آشامیدنی یکی از موضوع‌های مهم مدیریت شبکه‌های آب رسانی است. دو ملاک اصلی در این باره، فشار مناسب آب و بهداشتی بودن آب است. فرض کنید مجموعه حالت‌های ممکن برای فشار آب (به واحد مربوطه) $P = \{x_۱, x_۲, x_۳, x_۴\}$ و مجموعه مرجع مربوط به میزان بهداشتی بودن آب (بر حسب شاخص‌های بهداشتی) $C = \{y_۱, y_۲, y_۳\}$ باشد. مجموعه فازی A : «فشار بالای آب» و مجموعه فازی B : «آب بهداشتی» به صورت زیر تعریف شده‌اند

$$A = \left\{ \frac{۰/۲}{x_۱}, \frac{۰/۵}{x_۲}, \frac{۰/۸}{x_۳}, \frac{۱}{x_۴} \right\}, B = \left\{ \frac{۰/۱}{y_۱}, \frac{۰/۶}{y_۲}, \frac{۱}{y_۳} \right\}$$

رابطه فازی $R = A \times B$ را، که بیانگر «کیفیت مطلوب آب» است، بیابید. تصویرهای R را بر P و بر C به دست آورید و تعبیر کنید.

۳.۵ فرض کنید $X = \{۱, ۲, ۳\}$ و $Y = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$. رابطه فازی R در $X \times Y$، که میزان دور بودن x و y را از یکدیگر نشان می‌دهد، به وسیله‌ی ماتریس رابطه زیر تعریف شده است

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{array} \\ \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{array} & \begin{pmatrix} ۰ & ۰/۳ & ۰/۷ & ۱ \\ ۰/۳ & ۰ & ۰/۳ & ۰/۷ \\ ۰/۷ & ۰/۳ & ۰ & ۰/۳ \end{pmatrix} \end{array}$$

تصویرهای R بر X و بر Y را یافته و گسترش‌های استوانه‌ای این تصویرها را بیابید. هم‌چنین اتحاد و برخورد گسترش‌های استوانه‌ای را به دست آورید.

۴.۵ فرض کنید $X=Y=\{۱,۲,۳,۴\}$. یک رابطه فازی R در $X\times Y$ تعریف کنید که در آن $R(x,y)$ درجه‌ی «خیلی بزرگتر بودن x از y» را نشان دهد. تصویرهای R را بر X و بر Y بیابید و سپس گسترش‌های استوانه‌ای این تصویرها را به دست آورید.

۵.۵ فرض کنید $X=\{۱,۲,۳\}$ و $Y=\{۴,۵\}$ و $Z=\{۶,۷\}$. یک رابطه فازی R در $X\times Y\times Z$ تعریف کنید که $R(x,y,z)$ بیانگر درجه‌ای باشد که «y تقریباً میانگین x و z» است. تصویرهای R را بر X و بر Y و بر Z بیابید. سپس گسترش‌های استوانه‌ای این تصویرها را به دست آورید.

۶.۵ اگر $X=Y=R$، یک رابطه فازی S در $X\times Y$ تعریف کنید که $R(x,y)$ بیانگر درجه‌ی «نزدیک بودن x و y به یکدیگر» باشد. تصویرهای S رابر X و بر Y بیابید. سپس گسترش‌های استوانه‌ای این تصویرها را به دست آورید.

۷.۵ اتحاد و برخورد گسترش‌های استوانه‌ای تمرین ۵.۵ بیابید.

۸.۵ فرض کنید $X=\{۰.۱.۲\}$ و $Y=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $Z=\{۴,۵,۶\}$. دو رابطه فازی R در $X\times Y$ و S در $Y\times Z$ به وسیله ماتریس‌های رابطه زیر تعریف شده‌اند

$$R=\begin{array}{c} \\ ۰ \\ ۱ \\ ۲ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۰/۱ & ۰/۴ & ۰/۷ & ۱ \\ ۰ & ۰/۱ & ۰/۴ & ۰/۷ \\ ۰ & ۰ & ۰/۱ & ۰/۴ \end{pmatrix} \end{array}$$

$$S=\begin{array}{c} \\ ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} ۴ & ۵ & ۶ \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۰/۴ & ۰/۲ & ۰ \\ ۰/۶ & ۰/۴ & ۰/۲ \\ ۰/۸ & ۰/۶ & ۰/۴ \\ ۱ & ۰/۸ & ۰/۶ \end{pmatrix} \end{array}$$

$R\bigcirc S$ را بیابید. توصیفی برای رابطه‌های R و S و $R\bigcirc S$ ارائه دهید.

۹.۵ قلمرو و برد رابطه‌های فازی R و S تمرین ۸.۵ را بیابید. هم‌چنین معکوس رابطه‌های فازی R و S را بیابید.

۱۰.۵ هر یک از دو رابطه فازی R و S را که ماتریس‌های رابطه آن‌ها داده شده است، از نظر داشتن ویژگی‌های بازتابی، تقارن، پاد بازتابی، پاد تقارن و کاملاً پاد تقارن

بررسی کنید.

$$R = \begin{array}{c} \\ x_{۱} \\ x_{۲} \\ x_{۳} \\ x_{۴} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_{۱} & x_{۲} & x_{۳} & x_{۴} \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰/۷ & ۰/۷ \\ ۰/۷ & ۱ & ۰/۴ & ۰/۷ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰/۷ \\ ۰ & ۰ & ۰/۹ & ۱ \end{pmatrix} \end{array} \quad S = \begin{array}{c} \\ x_{۱} \\ x_{۲} \\ x_{۳} \\ x_{۴} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_{۱} & x_{۲} & x_{۳} & x_{۴} \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۱ & ۰/۴ & ۰/۴ & ۰/۷ \\ ۰/۹ & ۱ & ۰/۵ & ۰/۷ \\ ۰/۲ & ۰/۳ & ۱ & ۰/۳ \\ ۰/۸ & ۰/۸ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \end{array}$$

۱۱.۵ بررسی کنید که رابطه S داده شده، یک رابطه هم‌ارزی فازی است. همچنین $S_{۰/۴}$ را بیابید و بررسی کنید که یک رابطه هم‌ارزی معمولی است. درخت افراز S را تشکیل دهید.

$$S = \begin{array}{c} \\ x_{۱} \\ x_{۲} \\ x_{۳} \\ x_{۴} \\ x_{۵} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_{۱} & x_{۲} & x_{۳} & x_{۴} & x_{۵} \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۱ & ۰/۹ & ۰/۹ & ۰/۷ & ۰/۹ \\ ۰/۹ & ۱ & ۰/۹ & ۰/۷ & ۰/۹ \\ ۰/۹ & ۰/۹ & ۱ & ۰/۷ & ۰/۹ \\ ۰/۷ & ۰/۷ & ۰/۷ & ۱ & ۰/۷ \\ ۰/۹ & ۰/۹ & ۰/۹ & ۰/۷ & ۱ \end{pmatrix} \end{array}$$

۱۲.۵ هر کدام از رابطه‌های R و S زیر را از نظر شبه ترتیبی، ترتیب جزئی و ترتیب خطی بودن بررسی کنید.

$$R = \begin{array}{c} \\ x_{۱} \\ x_{۲} \\ x_{۳} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_{۱} & x_{۲} & x_{۳} \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰/۷ \\ ۰/۷ & ۱ & ۰/۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \end{array} \quad S = \begin{array}{c} \\ x_{۱} \\ x_{۲} \\ x_{۳} \\ x_{۴} \\ x_{۵} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_{۱} & x_{۲} & x_{۳} & x_{۴} & x_{۵} \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۱ & ۰/۶ & ۰ & ۱ & ۰/۶ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰/۸ & ۰ \\ ۰/۲ & ۰/۶ & ۱ & ۱ & ۰/۷ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰/۱ & ۰ & ۰/۸ & ۱ \end{pmatrix} \end{array}$$

۱۳.۵ فرض کنید

$$X = \left\{ \text{تهران، رم، پراگ، پاریس، وین} \right\}$$

یک رابطه فازی بر $X \times X$ ارائه دهید که بیانگر میزان نزدیک بودن هر دو شهر با یکدیگر (از طریق هوایی و بر حسب کیلومتر) باشد. رابطه‌ای را که ارائه داده‌اید از لحاظ هم‌ارزی بودن و سازگاری بودن بررسی کنید.

۱۴.۵ تحقیق کنید که رابطه فازی زیر، ترتیب خطی است امّا این طور نیست که هر $\alpha-$برش آن یک رابطه معمولی ترتیب خطی باشد.

$$R_8 = \begin{array}{c|cccc} & 12 & 14 & 17 & 20 \\ \hline 12 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 0/8 & 1 & 0 & 0 \\ 17 & 0/7 & 0/7 & 1 & 0 \\ 20 & 0/8 & 0/8 & 0/8 & 1 \end{array}$$

۱۵.۵ فرض کنید $X_1 = X_2 = \{x_1, x_2, x_3\}$. کدام یک از دو تحدید فازی R_1 و R_2 تعریف شده بر $X_1 \times X_2$ تفکیک‌پذیر هستند؟

$$R_1 = \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 0/3 & 0/5 & 0/5 \\ x_2 & 0/3 & 0/4 & 0/4 \\ x_3 & 0/3 & 0/3 & 0/3 \end{array} \quad R_2 = \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 0/3 & 0/4 & 0/4 \\ x_2 & 0/3 & 0/6 & 0/5 \\ x_3 & 0/3 & 0/6 & 1 \end{array}$$

۱۶.۵ در مثال ۳.۵ یک رابطه فازی بر $X \times Y$ ارائه دهید که نشان دهنده‌ی میزان نزدیک بودن بنادر مبدأ و مقصد باشد.

۱۷.۵ یکی از مسائل مهم در مدیریت شرکت‌های مهندسی، توانایی اخذ وام برای اجرای پروژه‌هاست. از دید بانک‌ها، محدودیت‌های اعتباری برای پرداخت وام به هر شرکت به عوامل مختلفی به ویژه عملکرد گذشته‌ی شرکت و نهایتاً تراز مالی فعلی آن شرکت بستگی دارد. از سوی دیگر سودمندی اخذ وام بستگی به تراز مالی فعلی شرکت دارد. فرض کنید مجموعه‌های مرجع در هر مورد به صورت زیر باشند

$$\text{محدودیت اعتبار (به میلیون ریال)} = \left\{400, 1000, 1600, 2500\right\}$$
$$\text{تراز مالی فعلی} = \left\{30, 60, 100, 400, 1000, 1500\right\}$$
$$\text{سودمندی وام} = \left\{-50, 0, 50, 100, 500\right\}$$

فرض کنید رابطه فازی زیر بین محدودیت اعتبار و میزان تراز مالی شرکت‌ها ارائه شده است

$$R = \begin{array}{c} \\ ۴۰۰ \\ ۱۰۰۰ \\ ۱۶۰۰ \\ ۲۵۰۰ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} ۳۰ & ۶۰ & ۱۰۰ & ۴۰۰ & ۱۰۰۰ & ۱۵۰۰ \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۰/۷۰ & ۱ & ۰/۷۰ & ۰/۵۰ & ۰/۰۵ & ۰ \\ ۰/۲۵ & ۰/۳۰ & ۰/۵۰ & ۰/۷۵ & ۰/۱۰ & ۰ \\ ۰/۱۵ & ۰/۲۵ & ۰/۴۰ & ۰/۸۵ & ۰/۶۰ & ۰/۲۰ \\ ۰/۰۵ & ۰/۱۰ & ۰/۳۰ & ۰/۸۰ & ۰/۷۰ & ۰/۳۰ \end{pmatrix} \end{array}$$

هم‌چنین رابطه فازی زیر بین میزان تراز مالی و سودمندی وام برقرار است

$$S = \begin{array}{c} \\ ۳۰ \\ ۶۰ \\ ۱۰۰ \\ ۴۰۰ \\ ۱۰۰۰ \\ ۱۵۰۰ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} -۵۰ & ۰ & ۵۰ & ۱۰۰ & ۵۰۰ \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۰/۷۵ & ۱ & ۰/۶۰ & ۰/۱۰ & ۰ \\ ۰/۶۰ & ۰/۹۰ & ۰/۷۰ & ۰/۲۵ & ۰ \\ ۰/۴۰ & ۰/۷۵ & ۰/۹۰ & ۰/۵۰ & ۰/۱۰ \\ ۰/۲۵ & ۰/۵۰ & ۰/۷۰ & ۰/۷۵ & ۰/۸۰ \\ ۰/۰۵ & ۰/۵۰ & ۰/۴۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰/۳۰ & ۰/۴۰ & ۰/۸۰ & ۰/۷۰ \end{pmatrix} \end{array}$$

رابطه بین محدودیت اعتبار و سودمندی وام را به روش‌های زیر بیابید

الف) ترکیب بر پایه‌ی عملگرهای $\max - \min$،

ب) ترکیب بر پایه‌ی عملگرهای $\max - product$.

۱۸.۵ درباره‌ی کیفیت محصولات یک کارخانه، از پنج نفر کارشناس $(X = \{A, B, C, D, E\})$ نظر خواهی شده است. این نظرات، با استفاده از ملاک‌هایی خاص، مقایسه شده‌اند. رابطه فازی زیر میزان مشابهت نظرات هر دو کارشناس را نشان می‌دهد

$$R = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۱ & ۰/۷۵ & ۰/۶۰ & ۰/۵۵ & ۰/۸۰ \\ ۰/۷۵ & ۱ & ۰/۶۵ & ۰/۴۰ & ۰/۵ \\ ۰/۶۰ & ۰/۵۰ & ۱ & ۰/۵۰ & ۰/۲۰ \\ ۰/۵۰ & ۰/۴۰ & ۰/۵۰ & ۱ & ۰/۳۰ \\ ۰/۸۰ & ۰/۵۰ & ۰/۲۰ & ۰/۳۰ & ۱ \end{pmatrix} \end{array}$$

بررسی کنید که رابطه R یک رابطه هم‌ارزی فازی است. درخت افراز را رسم کنید. رابطه معمولی $R_{۰/۶۰}$ را بیابید و بررسی کنید که یک رابطه هم‌ارزی است.

۱۹.۵ در تمرین بالا، فرض کنید میزان مشابهت نظرات کارشناسان، توسط رابطه فازی زیر داده شده باشد

$$R^* = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۱ & ۰/۶۰ & ۰/۵۰ & ۰/۹۵ & ۰/۵۰ \\ ۰/۶۰ & ۱ & ۰/۸۰ & ۰/۸۰ & ۰/۷۵ \\ ۰/۵۰ & ۰/۸۰ & ۱ & ۰/۳۰ & ۰/۹۰ \\ ۰/۹۵ & ۰/۸۰ & ۰/۹۰ & ۱ & ۰/۵۰ \\ ۰/۵۰ & ۰/۷۵ & ۰/۸۰ & ۰/۷۰ & ۱ \end{pmatrix} \end{array}$$

الف) بررسی کنید که رابطه R^* یک رابطه سازگاری فازی است.

ب) درخت سازگاری (رده‌های سازگاری) R^* را رسم کنید.

پ) رابطه معمولی $R^*_{۰/۶۰}$ را بیابید و بررسی کنید که رابطه سازگاری است.

ت) آیا رابطه R^* یک رابطه هم‌ارزی فازی است؟ چرا؟

ث) بحث کنید که در بررسی شباهت نظرات تعدادی کارشناس، آیا استفاده از رابطه هم‌ارزی فازی مناسب‌تر است یا رابطه سازگاری فازی؟

۲۰.۵ رابطه‌های فازی R و S مثال ۱۸.۵ را در نظر بگیرید. به کمک یک برنامه‌ی مناسب، و بر پایه‌ی عملگرهای $max - product$،

الف) مقادیر $(R \bigcirc S)(۵, ۳)$ و $(R \bigcirc S)(۱۰, ۹)$ را بیابید و تعبیر کنید.

ب) نمودار رابطه $R \bigcirc S$ را رسم کنید.

پ) موارد بندهای الف و ب را بر پایه‌ی عملگرهای $max - min$ انجام دهید، و نتایج را با هم مقایسه کنید.

۲۱.۵ فرض کنید $X = [۰.۶۰]$ مجموعه مرجع درجه حرارت در یک ساختمان باشد. هم‌چنین $Y = [۰, ۵]$ مجموعه مرجع دور موتور (هزار دور در دقیقه) در یک دستگاه تهویه هوا باشد. مجموعه‌های فازی A و B را، به ترتیب توصیف کننده‌ی «هوای گرم» و «دور موتور زیاد»، با توابع عضویت زیر در نظر بگیرید

$$A(x) = \frac{x}{۶۰}, \quad ۰ \leq x \leq ۶۰$$
$$B(y) = \frac{y}{۵}, \quad ۰ \leq y \leq ۵$$

تابع عضویت حاصل‌ضرب دکارتی $A \times B$ را به دست آورید. نمودار $R(x,y) = (A \times B)(x,y)$ را، با به کارگیری یک نرم افزار مناسب، رسم کنید.

۲۲.۵ در تمرین بالا، فرض کنید مجموعه فازی A^*، توصیف کننده‌ی «حدوداً ۴۰°»، به صورت زیر تعریف شود

$$A^*(x) = \begin{cases} \frac{x-۲۰}{۲۰} & ۲۰ \le x < ۴۰ \\ \frac{۶۰-x}{۲۰} & ۴۰ \le x \le ۶۰ \end{cases}$$

مجموعه فازی $B^* = A^* \bigcirc R$ را، با به کارگیری $T-$ نرم min برای عمل ترکیب، به دست آورید. (سعی کنید با یک برنامه مناسب مقدار $B^*(y) = (A^* \bigcirc R)(y)$ را به ازای چند مقدار y به دست آورید. آن‌گاه نمودار تقریبی $B^*(y)$ را رسم کنید. به علاوه تلاش کنید تابع عضویت $B^*(y)$ را به طور تحلیلی نیز به دست آورید.)

فصل ۶

مبانی نظریه امکان

با ما دم از حقیقت واجب مزن که هست
ادراک کنه هستی ممکن، محال ما
صیدی تهرانی[۱]

مقدمه

تا چندی پیش، باور عمومی این بود که عدم اطمینان موجود در پیشامدها و سیستم‌ها صرفاً ماهیتی ناشی از تصادف دارند و در نتیجه می‌توان صرفاً با روش‌های احتمالی آن‌ها را مورد بررسی قرار داد. به علاوه از دیرباز تنها رهیافت ریاضی تکامل یافته برای اقدام در شرایط عدم اطمینان، نظریه احتمال بوده است. گرچه این نظریه در بسیاری موارد مفید و موفق عمل نموده است، اما در حقیقت تنها در یک نوع خاص از عدم اطمینان کارایی دارد. توضیح آنکه، در بسیاری از وضعیت‌ها، عدم اطلاع ما از یک فرایند یا سیستم، صرفاً به دلیل وجوهِ تصادفی حاکم بر آنها نیست، بلکه ممکن است اطلاعات ما به این دلیل کامل نباشد که با اطلاعاتی ناکافی، مبهم، نادقیق، متناقض و ... سرو کار داشته باشیم. انواع گوناگونِ اطلاعات ناقص، منجر به انواع گوناگون عدم اطمینان می‌شود که فقط

[۱] صیدی تهرانی (از سخن‌سرایان شیوه‌ی هندی در قرن ۱۱)، نقل از: دیوان صیدی تهرانی به کوشش محمد قهرمان، تهران، ۱۳۶۴.

یکی از آن نوع‌ها، در قالب نظریه احتمال بیان شدنی است: عدم اطمینانی که ناشی از جنبه‌های تصادفی است.

در دهه‌های اخیر، نظریه‌های ریاضیِ مختلفی برای اقدام در شرایط عدم اطمینان و عدم قطعیت معرفی شده و تعمیق یافته‌اند که برای مروری بر آن‌ها می‌توانید به [] مراجعه کنید. یک نظریه مناسب در بین آن‌ها نظریه امکان است. این نظریه در الگوبندی و توصیف فرآیندها و سیستم‌های متضمّن ابهام کارایی دارد. یک رویکرد در صورت‌بندی ریاضی نظریه امکان، رویکردی مبتنی بر نظریه مجموعه‌های فازی است.

در نظریه امکان، عدم اطمینانِ یک پیشامد (یا به طور معادل: اطلاع ما از هر پیشامد) توسط دو عدد مشخص می شود: یکی درجه امکان خودِ پیشامد و یکی درجه امکان پیشامد متناقض با آن پیشامد. متممِ (نسبت به یک) امکان پیشامد متناقض، درجه لزوم خود پیشامد تعریف می‌شود. این دو عدد در توصیف و تبیین اطمینان و عدم اطمینان (و کلاً درجه آگاهی) نسبت به هر پیشامد، اساس کار در نظریه امکان است. این توصیف، با نوع تفکر انسانی نیز سازگار است. زیرا ما در بررسی امکان وقوع یک پیشامد، هم زمینه‌ها و قراین وقوع آن پیشامد را در نظر می‌گیریم و هم زمینه‌ها و قرائن وقوع پیشامدهای جانشین را بررسی می‌کنیم.

در فصل حاضر مبانی نظریه امکان ارائه می‌شود. این فصل شامل چهار بخش است. در بخش اول اندازه‌های امکان و توزیع‌های امکان را مطالعه می‌کنیم (چیزی مشابه آنچه اندازه‌های احتمال و توزیع‌های احتمال نام دارد). مطالب بخش اول تلفیقی از دو رهیافت متفاوت به نظریه امکان است. رهیافت اول آن است که در کار بدیع پروفسور زاده [۱۳۷] و با معرفیِ نظریه امکان برای اولین بار، ارائه شد؛ و رهیافت دوم آن است که در برخی متون، مثلاً [۷۸]، هنگام بررسی اندازه‌های عدم اطمینان و از جمله اندازه‌های امکان استفاده شده است. در بخش دوم توزیع‌های امکان چند بعدی، حاشیه‌ای و شرطی معرفی می‌شوند. موضوع بخش سوم، امکان و احتمال است. موضوعی که ذهن هر خواننده را بلافاصله بعد از مطرح شده مفهوم امکان به خود مشغول می‌کند. در بخش چهارم و پایانی برخی نکات تکمیلی مطرح می‌شوند.

۶.۱ اندازه‌های امکان و توزیع‌های امکان

در بحث زیر فرض می کنیم که Ω یک مجموعه مرجع و $\mathcal{B}(\Omega)$ (به کوتاهی: $\mathcal{B}$) یک میدان سیگمایی از زیر مجموعه‌های Ω است.

تعریف ۱.٦ تابع مجموعه‌ای $\Pi : \mathcal{B} \to [\circ, ۱]$ را یک **اندازه امکان** بر $(\Omega, \mathcal{B})$ گوییم اگر

۱) $\Pi(\phi) = \circ$ و $\Pi(\Omega) = ۱$

۲) برای هر A و B از $\mathcal{B}$، $A \subseteq B \Rightarrow \Pi(A) \leq \Pi(B)$

۳) برای هر دنباله $A_i \in \mathcal{B}$ که $i \in N$ و $A_۱ \subseteq A_۲ \subseteq \ldots$ یا $A_۲ \supseteq A_۲ \supseteq \ldots$

$$\lim_{i\to\infty} \Pi(A_i) = \Pi(\lim_{i\to\infty} A_i)$$

۴) برای هر A و B از $\mathcal{B}$

$$\Pi(A \cap B) = \max[\Pi(A), \Pi(B)]$$

در تعریف فوق معمولاً Ω را فضای پیشامدها و هر زیرمجموعه A از آن را به عنوان یک پیشامد در نظر می‌گیریم.

نکته ۱.٦ دقت کنید که از شرط دوم نتیجه می‌شود که

$$\Pi(A \cap B) \geq \max[\Pi(A), \Pi(B)]$$

و بنابراین شرط چهار، یک شرط قوی‌تر از شرط ۲ است که از تحمیل تساوی در شرط دوم به دست می آید. پس می‌توان یک اندازه امکان را تنها توسط شرط‌های ۱ و ۳ و ۴ تعریف کرد. ولی برای مقایسه با تعاریف دیگر، بهتر است که اصل ممیّزه‌ی اندازه‌های امکان یعنی شرط چهارم را به طور مجزا، و سه شرط اول را نیز به طور جداگانه مطرح کنیم. خاطر نشان می‌کنیم که در شرط چهارم، قید نشده است که A و B جدا از هم باشند.

اگر A و A^c دو پیشامد متمم باشند (به تعبیری دیگر متناقض با هم باشند)، آنگاه از شرط چهارم نتیجه می‌شود که

$$\max[\Pi(A), \Pi(A^c)] = ۱ \tag{۱}$$

یعنی از دو پیشامد که متمم یکدیگرند دست‌کم یکی کاملاً ممکن است. البته این که پیشامد A کاملاً ممکن است، مانع نمی‌شود که پیشامد متمم آن نیز ممکن باشد و حتی از درجه‌ی امکان بالایی برخوردار باشد. این ویژگیِ اندازه‌های امکان با بسیاری از داوری‌های واقعی سازگار است. در مثال‌های آینده این نکته را بیشتر شرح می‌دهیم.

در نظریه امکان از اندازه‌ی دیگری هم به نام اندازه لزوم استفاده می‌شود.

تعریف ۲.٦ تابع مجموعه‌ای $N : \mathcal{B} \longrightarrow [\circ, ۱]$ را یک اندازه لزوم بر $(\Omega, \mathcal{B})$ گوییم اگر در شرایط ۱ تا ۳ تعریف ۱.٦ صدق کند و به علاوه برای هر A و B از $\mathcal{B}$،

$$N(A \cap B) = \min[N(A), N(B)] \tag{۲}$$

نکته ۲.۶ متناظر با هر اندازه امکان Π بر $(\Omega, \mathcal{B})$، یک اندازه لزوم N وجود دارد که با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$N(A) = ۱ - \Pi(A^c) \tag{۳}$$

پس اندازه لزومِ هر پیشامد مانند A برابر با تفاضل عدد یک و اندازه امکان پیشامد متمم (متناقض با) A است.

$N(A)$ به معنی میزان حتمیّت و ضرورت رخ دادنِ پیشامد A است. مثلاً $N(A) = ۱$، یعنی لزومِ رخ دادن A یک است و بنابراین A، لزوماً و قطعاً رخ می‌دهد. از سوی دیگر $N(A) = ۰$ یعنی هیچ لزومی ندارد که A رخ دهد، و البته این بدان معنی نیست که A ممکن نیست رخ دهد. به علاوه ۳.۶ بیان می‌کند که یک پیشامد وقتی ضرورتاً و لزوماً رخ خواهد داد که پیشامد متمم آن (متناقض با آن) هیچ امکانی برای وقوع نداشته باشد.

همچنین از ۳.۶ نتیجه می‌شود که

$$\Pi(A) = ۱ - N(A^c) \tag{۴}$$

این رابطه نیز تعبیری مشابه تعبیر رابطه ۳.۶ دارد. به ویژه اینکه پیشامد A وقتی کاملاً ممکن است که هیچ لزوم و حتمیّتی برای وقوع پیشامد متمم (متناقض با) آن نباشد. به علاوه از رابطه ۲.۶ نتیجه می‌شود که

$$\min[N(A), N(A^c)] = ۰ \tag{۵}$$

به این معنی که از دو پیشامد متمم (متناقض با هم) حداکثر یکی، دارای لزوم مثبت است.

بر اساس مطالب فوق و برای مقایسه، می‌توان روابط متناظر در اندازه‌های امکان و دوگانِ آن‌ها یعنی اندازه‌های لزوم را به صورت زیر جمع‌بندی کرد:

روابط مربوط به اندازه‌های لزوم	روابط مربوط به اندازه‌های امکان
$N(A \cap B) = \min[N(A), N(B)]$	$\Pi(A \cup B) = \max[\Pi(A), \Pi(B)]$
$N(A) = ۱ - \Pi(A^C)$	$\Pi(A) = ۱ - N(A^C)$
$\min[N(A), N(A^C)] = ۰$	$\max[\Pi(A), \Pi(A^C)] = ۱$
$N(A) + N(A^C) \leq ۱$	$\Pi(A) + \Pi(A^C) \geq ۱$
$N(A) > ۰ \Rightarrow \Pi(A) = ۱$	$\Pi(A) < ۱ \Rightarrow N(A) = ۰$

$$\Pi(A) \geq N(A)$$

روابط اخیر را نیز می‌توان مشابه بقیه‌ی روابط تعبیر کرد. به ویژه رابطه‌ی آخری، به این معنی است که یک پیشامد قبل از آنکه لازم و حتمی شود، باید ممکن باشد.

مثال ۱.٦ یک متخصص هواشناسی در روز ۱۲ آبان سال جاری، براساس آخرین گزارش‌ها و اطلاعات هواشناسی، مقدار متوسط درجه حرارت ٦ شهر ایران را برای روز ۱۳ آبان به صورت اندازه‌های امکان مندرج در جدول زیر پیش‌بینی می‌کند. استنباط این متخصص در تعیین اندازه‌های امکان به این صورت است که وی ملاحظه می‌کند که براساس اطلاعات و گزارش‌های موجود، می‌توان کاملاً انتظار داشت که متوسط درجه حرارت در ۱۳ آبان، مثلاً، در شهر تهران بین ۱٦ و ۱۸ باشد. و در عین حال می‌توان کاملاً انتظار داشت که این درجه حرارت بین ۱۸ تا ۲۰ باشد و نیز به میزان ۰/۷ می‌توان انتظار داشت که این درجه حرارت بین ۱۴ تا ۱٦ باشد و ... . زیرا پیش‌بینی هر درجه حرارت بین ۱٦ تا ۲۰ برای ۱۳ آبان در تهران، با اطلاعات موجود کاملاً سازگار است، اما اینکه درجه حرارت بین ۱۴ تا ۱٦ باشد تنها به میزان ۰/۷ با اطلاعات و شواهد موجود، سازگاری و تطابق و توافق دارد. به عبارت دیگر ۰/۷ از نشانه‌های هواشناسی حاکی از آن هستند که درجه حرارت می‌تواند بین ۱۴ تا ۱٦ باشد. این نوع استنباط، **استنباط امکانی** نام دارد.

		A	B	C	D	E
درجه حرارت به C°		۱۰—۱۲	۱۲—۱۴	۱۴—۱٦	۱٦—۱۸	۱۸—۲۰
شهر	اندازه امکان					
تهران	Π_1	۰	۰/۳	۰/۷	۱	۱
مشهد	Π_2	۰/۳	۰/۷۵	۱	۰/۷	۰/۴
اصفهان	Π_3	۰	۰/۳	۰/٦	۱	۱
کرمان	Π_4	۰/۸	۱	۰/۷	۰/۴	۰/۱
شیراز	Π_5	۰	۰/۲	۰/۷	۰/۸	۱
تبریز	Π_6	۱	۱	۰/۸	۰/۴	۰

اکنون براساس جدول فوق می‌توان درباره‌ی متوسطِ درجه حرارت روز ۱۳ آبان استنباط‌هایی کرد، و به پرسش‌هایی مانند پرسش‌های زیر پاسخ داد:

(الف) امکان اینکه درجه حرارت در شهر مشهد بین ۱٦ تا ۲۰ باشد، چقدر است؟ اندازه لزوم و حتمیت این پیشامد چیست؟

(ب) امکان اینکه درجه حرارت در شهر مشهد بین ۱۲ تا ۱٦ باشد، چقدر است؟ اندازه لزوم و حتمیت این پیشامد چیست؟

(پ) امکان اینکه درجه حرارت در شهر اصفهان یا شیراز بین ۱۲ تا ۱٦ باشد، چقدر است؟ اندازه لزوم و حتمیت این پیشامد چیست؟

و همین‌طور پرسش‌هایی دیگر. جواب به پرسش‌های فوق این‌گونه به دست می‌آید.

(الف) اینکه درجه حرارت در مشهد بین ۱۶ تا ۲۰ باشد، یعنی بین ۱۶ تا ۱۸ و یا بین ۱۸ تا ۲۰ باشد، معادل این است که پیشامد $D \cup E$ رخ دهد که امکان آن چنین است

$$\Pi_{۲}(D \cup E) = \max[\Pi_{۲}(D), \Pi_{۲}(E)] = \max[۰/۷, ۰/۳] = ۰/۷$$

به علاوه اندازه لزوم اینکه درجه حرارت در مشهد بین ۱۶ تا ۲۰ باشد، صفر است، زیرا امکان آن کوچک‌تر از یک است.

(ب) امکان اینکه درجه حرارت در مشهد بین ۱۲ تا ۱۸ باشد، یعنی امکان رخ دادن پیشامد $S \cup C \cup D$. داریم

$$\Pi_{۲}(B \cup C \cup D) = \max[\Pi_{۲}(B), \Pi_{۲}(C), \Pi_{۲}(D)] = \max[۰/۷, ۱, ۰/۷] = ۱$$

به علاوه اندازه لزوم پیشامد فوق برابر است با

$$\begin{aligned} N_{۲}(B \cup C \cup D) &= ۱ - \Pi_{۲}[(B \cup C \cup D)^C] \\ &= ۱ - \Pi_{۲}[(A \cup E)] = ۱ - ۰/۴ = ۰/۶ \end{aligned}$$

(پ) در این‌جا درجه‌های امکان مربوط به درجه حرارت هر دو شهر اصفهان و شیراز را به صورت درجه‌های امکان مربوط به پیشامدهای یک اندازه امکان فرض می‌کنیم. اگر F پیشامد درجه حرارت در اصفهان یا شیراز بین ۱۲ تا ۱۶ باشد، داریم

$$\Pi(F) = \max[۰/۳, ۰/۶, ۰/۲, ۰/۷] = ۰/۷$$

به علاوه، اندازه لزوم F برابر صفر است، زیرا امکان آن کوچک‌تر از یک است.

باید امیدوار بود که مثال فوق مفهوم امکان و به ویژه تفاوت آن را با احتمال روشن کرده باشد. در مثال فوق هیچ صحبتی از مفاهیم فراوانی و احتمال نشده است. متخصص هواشناسی، تنها براساس درجه‌ی تطابق و سازگاری و همخوانیِ اطلاعات موجود با هر پیشامد، عددی را به عنوان امکانِ رخ دادن آن پیشامد تعیین می کند. این نوع استنباط (استنباط امکانی) با استنباطی که برپایه‌ی درصد و نسبت فراوانیِ رخ دادن یک پیشامد در دنباله‌ای طولانی از آزمایش‌ها مبتنی است (استنباط احتمالی) تفاوت بنیادی دارد. البته در مثال فوق می‌توان یک نوع استنباط احتمالی نیز ارائه داد. مثلاً ملاحظه کرد که در طول سال‌های گذشته فراوانی روزهای ۱۳ آبان که متوسط درجه حرارت در مشهد بین ۱۶ تا ۲۰ بوده است

چقدر است و آنگاه برای رخ دادن پیشامد $D \cup B$ در ۱۳ آبان در مشهد، یک احتمال نسبت داد. ما این مثال را مجدداً و از جنبه‌ی مقایسه‌ی امکان و احتمال بررسی خواهیم کرد.

شاید تاکنون متوجه شده باشید که مفهوم اندازه امکان تعریف شده بر Ω، در اساس، چیزی نیست جز یک تابع عضویت برای یک مجموعه فازی از Ω. همین نکته، حلقه‌ی پیوند نظریه مجموعه‌های فازی و نظریه امکان است. این نکته را با بررسی دقیق‌تر مثال فوق شرح می‌دهیم. هنگامی که متخصص هواشناس، برای درجه حرارت هوا در ۱۳ آبان در یک شهر، درجات امکان مندرج در جدول ۱.٦ را ارائه می‌دهد، یک مجموعه فازی از $\Omega = [۱۰, ۲۰]$ در نظر می‌گیرد که این مجموعه فازی اندازه سازگاری و تطابق هر درجه حرارت از [۱۰.۲۰] را با اطلاعات موجود نشان می‌دهد. پس اندازه امکانِ وی را می‌توان با یک مجموعه فازی از Ω متناظر کرد. تابع عضویتِ این مجموعه فازی، تابع توزیع امکان نامیده می‌شود.

تعریف ۳.٦ فرض کنید Π یک اندازه امکان بر $(\Omega, \mathcal{B})$ باشد. در این صورت تابع عضویتِ $\pi(x)$ را که متناظر با یک مجموعه فازی از Ω است و به صورت زیر تعریف می‌شود، **تابع توزیع امکانِ** متناظر با اندازه امکان Π می‌نامیم

$$\Pi(A) = \sup\{\pi(x)|x \in A\} \quad \forall A \in \mathcal{B}$$

هم‌چنین خودِ مجموعه فازی را یک **توزیع امکان** می‌نامیم.

قضیه زیر وجود یک تابع توزیع امکان را برای هر اندازه امکان تضمین می‌کند.

قضیه ۱.٦ [۷۸] هر اندازه امکان Π بر $(\Omega, \mathcal{B})$ می تواند به طور یکتا به وسیله‌ی یک تابع توزیع امکان و به صورت فوق مشخص شود.

مثال ۲.٦ در مثال بالا، اندازه امکان مربوط به شهر مشهد را می توانیم به صورت تابع توزیع امکان زیر بیان کنیم

$$\pi(x) = \begin{cases} ۰/۳ & ۱۰ \leq x < ۱۲ \\ ۰/۷ & ۱۲ \leq x < ۱۴ \\ ۱ & ۱۴ \leq x < ۱٦ \\ ۰/۷ & ۱٦ \leq x < ۱۸ \\ ۰/۴ & ۱۸ \leq x < ۲۰ \end{cases}$$

مثلاً امکان اینکه متوسط درجه حرارت در ۱۳ آبان در مشهد ۱۱/۵ باشد، برابر با $\pi(۱۱/۵) = ۰/۳$ است، و همین‌طور امکان اینکه این درجه بین ۱۷ تا ۱۹ باشد عبارت است از $\sup\{\pi(x) | ۱۷ \leq x \leq ۱۹\} = ۰/۷$.

نکته ۳.٦ یک مجموعه مرجع Ω و یک متغیر X که مقادیرش را در Ω اختیار می کند، در نظر بگیرید. هنگامی که یک تابع توزیع امکان برای متغیر X در نظر می‌گیریم، گویی یک نوع تحدید فازی برمجموعه‌ی مقادیری که X می‌تواند اختیار کند، قائل شده‌ایم. مثلاً وقتی هواشناس با توجه به اطلاعات موجود، یک اندازه امکان (یا به‌طور معادل، یک تابع توزیع امکان) برای درجه حرارت در ۱۳ آبان در مشهد در نظر می‌گیرد، گویی یک نوع تحدید منعطف و فازی بر مجموعه‌ی مقادیری قائل می‌شود که متغیر درجه حرارت می‌تواند در ۱۳ آبان در مشهد اختیار کند. آنگاه وی این نوع تحدید را در قالب یک اندازه امکان (یا یک توزیع امکان) بیان می‌کند. که در این صورت، تابع عضویت متناظر با این تحدید، همان تابع توزیع امکان خواهد بود.

مثال ۳.٦ فرض کنید $\Omega = \mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, \ldots\}$، و X متغیری باشد که مقادیر خود را در Ω اختیار کند. هر تحدید فازی بر مجموعه‌ی مقادیری که X می‌تواند در Ω بگیرد، یک توزیع امکان مرتبط با X است. مثلاً اگر A مجموعه فازی اعداد کوچک از Ω به صورت زیر باشد

$$A = \{\frac{۱}{۱}, \frac{۱}{۲}, \frac{۰/۸}{۳}, \frac{۰/٦}{۴}, \frac{۰/۴}{۵}, \frac{۰/۲}{٦}\}$$

آنگاه مجموعه فازی فوق در مقام یک تحدید فازی بر X عمل می‌کند. در این صورت گزاره «X، یک عدد کوچک است» توزیع امکان زیر را با X مرتبط می‌سازد

$$\Pi_X = \{\frac{۱}{۱}, \frac{۱}{۲}, \frac{۰/۸}{۳}, \frac{۰/٦}{۴}, \frac{۰/۴}{۵}, \frac{۰/۲}{٦}\}$$

حال، $\frac{۰/۴}{۵}$ در A و در Π_X این گونه تعبیر می‌شوند:

$\frac{۰/۴}{۵}$ در A یعنی عدد ۵ به میزان ۰/۴ عدد کوچکی است. به عبارت دیگر میزان کوچک بودن عدد ۵، برابر ۰/۴ است.

و $\frac{۰/۴}{۵}$ در Π_X یعنی با فرض اینکه X یک عدد کوچک (به بیان مجموعه فازی A) باشد، آنگاه امکان اینکه X برابر ۳ باشد ۰/۸ است. به عبارت، دیگر با این اطلاع که X یک عدد کوچک است، به اندازه ۰/۸ می برازد که X برابر ۳ باشد.

مثال ۴.۶ [۱۳۷] فرض کنید $\Omega = [0, 100]$ و مجموعه فازی S از Ω که بیانگر اندازه‌ی جوان بودن (بر حسب سن) است، با تابع عضویت زیر تعریف شود

$$A(\omega) = 1 - S(\omega; 20, 30, 40)$$

که در آن ω یک سنّ عددی و S تابعی به صورت زیر است

$$S(\omega; \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} 0 & \omega \leq \alpha \\ 2(\frac{\omega-\alpha}{\gamma-\alpha})^2 & \alpha < \omega \leq \beta \\ 1 - 2(\frac{\omega-\gamma}{\gamma-\alpha})^2 & \beta < \omega \leq \gamma \\ 1 & \gamma \leq \omega \end{cases}$$

که پارامتر β برابر $\frac{\alpha+\gamma}{2}$ فرض می‌شود. توجه کنید که β نقطه‌گذر مجموعه فازی A است، یعنی $A(\beta) = \frac{1}{2}$. در اینجا $A(30) = \frac{1}{2}$، یعنی ۳۰ سالگی نقطه‌گذر جوانی است.

برای توضیح، یک سنِ عددی مثلاً $\omega = 28$ را در نظر بگیرید. درجه عضویت ۲۸ در مجموعه فازی جوان (به بیان بالا) ۰/۷ است. به سخن دیگر درجه سازگاری ۲۸ سالگی با آن تلقّی از جوان بودن که به صورت مجموعه فازی A بیان شده است، برابر ۰/۷ است. حال مجموعه فازی A را در مقامِ یک تحدید فازی، و به عبارت دیگر یک توزیع امکان، برای سن در نظر می‌گیریم. فرضَ کنید گزاره «سعید، جوان است» داده شده باشد. در این صورت امکانِ اینکه سعید ۲۸ ساله باشد ۰/۷ است. و در همین حال، امکان اینکه سعید ۳۰ ساله باشد ۰/۵ است و امکان اینکه وی ۱۵ ساله باشد یک است، و ... .

نکته ۴.۶ هنگامی که به کمک یک تحدید فازی، یک مقدار (مانند جوان) برای یک ویژگی (مانند سن) به سعید نسبت می‌دهیم، گویی یک معادله‌ی تخصیص به صورت زیر تشکیل داده‌ایم

$$R(Age(\text{سعید})) = \text{جوان}$$

واضح است که برای وزن سعید، هوش سعید، میزان علاقمندی وی به ورزش والیبال، توانایی مدیریت وی،... نیز می‌توان تحدیدهای مناسبی در نظر گرفت (یعنی مجموعه‌های فازی که توصیف کننده‌ی خصوصیات فوق برای سعید هستند) و بدین ترتیب ویژگی های سعید را مشخص کرد. در این صورت مجموعه معادلاتی خواهیم داشت که مشخص کننده‌ی سعید هستند. این معادلات که یک نوع مدل‌سازی دانش است، در منطق فازی و استدلال تقریبی کاربرد دارند.

همان طور که گفته شد، هنگامی که یک تابع توزیع امکان تعریف شده بر Ω داشته باشیم، می‌توانیم امکان هر پیشامد از Ω، یعنی هر زیر مجموعه معمولی از Ω، را بر اساس رابطه رابطه تعریف ۳.۶ محاسبه کنیم. این نکته را با مثال زیر توضیح می‌دهیم.

مثال ۵.٦ فرض کنید $\Omega = \mathbb{N} = \{۱, ۲, \ldots\}$. توزیع امکان متناظر با X، «عدد صحیح نزدیک ده» را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\Pi_X = \{\frac{۰/۲}{٦}, \frac{۰/۴}{۷}, \frac{۰/٦}{۸}, \frac{۰/۸}{۹}, \frac{۱}{۱۰}, \frac{۰/۸}{۱۱}, \frac{۰/۴}{۱۳}, \frac{۰/۲}{۱۴}\}$$

اگر $A = \{۷, ۸, ۹\}$ و $B = \{٦, ۷, ۱۳\}$ را به عنوان دو پیشامد از Ω در نظر بگیریم، آنگاه بنا به تعریف ۳.٦ داریم

$$\Pi(A) = \sup_{\omega \in A} \pi_X(\omega) = \sup\{۰/۴, ۰/٦, ۰/۸\} = ۰/۸$$
$$\Pi(B) = \sup_{\omega \in B} \pi_X(\omega) = \sup\{۰/۲, ۰/۴, ۰/۴\} = ۰/۴$$

به عبارت دیگر امکان اینکه X، که یک عدد صحیح نزدیک ده به بیان فوق است، عضو مجموعه A باشد، یعنی یکی از اعداد ۷ یا ۸ یا ۹ باشد، برابر ۰/۸ است. همین‌طور امکان اینکه X عضو مجموعه B باشد، ۰/۴ است. در این حالت‌ها از نماد زیر استفاده می‌کنیم

$$Poss(X \in A) = \Pi(A) = ۰/۸$$
$$Poss(X \in B) = \Pi(B) = ۰/۴$$

٦.۲ امکان پیشامدهای فازی

در مثال ۵.٦، A و B مجموعه‌های معمولی از Ω هستند. بنابراین عضویت هر مقدار از Ω در A یا در B، و لذا استفاده از تعریف ۳.٦، معنی دارد. اما اگر بخواهیم امکان یک پیشامد فازی، یعنی زیر مجموعه فازی از Ω، را محاسبه کنیم، تعریف ۳.٦ کفایت نمی‌کند. یک تعریف کلّی‌تر برای اندازه امکان که تعریف ۳.٦ را تعمیم می‌دهد، به صورت زیر است.

تعریف ۴.٦ فرض کنید A یک مجموعه فازی از Ω، و Π_X یک توزیع امکان تعریف شده بر Ω (مرتبط با متغیر X) باشد. اندازه امکان پیشامد A این گونه تعریف می‌شود

$$\Pi(A) = \sup_{\omega \in \Omega}[\min(A(\omega), \pi(\omega))]$$

$\Pi(A)$ را می توان به صورت $Poss$ (X، A باشد) تعبیر کرد.

نکته ۵.٦ رابطه بالا را می‌توان بر حسب مفهوم ارتفاع یک مجموعه فازی به صورت زیر نیز نوشت

$$\Pi(A) = \text{ارتفاع} \quad (A \cap \Pi_X)$$

مثال ۶.۶ توزیع امکان مثال ۶.۵ را در نظر بگیرید. فرض کنید C مجموعه فازی اعداد «نسبتاً کوچک» به صورت زیر باشد

$$C = \{\frac{0/6}{1}, \frac{0/8}{2}, \frac{1}{3}, \frac{0/8}{4}, \frac{0/6}{5}, \frac{0/4}{6}, \frac{0/2}{7}\}$$

آنگاه

$$\Pi(C) = Poss(\text{ارتفاع } X = \text{ نسبتا کوچک باشد}) = \{\frac{0/2}{6}, \frac{0/2}{7}\} = 0/2$$

به عبارت دیگر اگر X یک عدد صحیح نزدیک ده (به بیان مثال ۶.۵) باشد، آنگاه امکان اینکه X نسبتاً کوچک (به بیان مجموعه فازی فوق) باشد برابر ۰/۲ است.

نکته ۶.۶ تعریف ۶.۴ به طور ضمنی بیانگر یک **امکان شرطی** است. این تعریف را می‌توان این گونه نیز بیان کرد: اگر A و B دو مجموعه فازی از Ω، و X متغیری باشد که در Ω مقدار می گیرد، آنگاه پیشامد A به شرط پیشامد B، که با $\Pi_{A|B}$ نشان داده می‌شود، این گونه تعریف می‌شود

$$Poss\ (X \text{ است } B \text{ ،} X| \text{ باشد } A) = \sup_{\omega\in\Omega}[\min(A(\omega), B(\omega))]$$

توجه دارید که $\Pi_{A|B} = \Pi_{B|A}$. هم چنین اگر $\omega^* \in \Omega$ وجود داشته باشد که $A(\omega^*) = B(\omega^*) = 1$ آنگاه $\Pi_{A|B} = \Pi_{B|A} = 1$.

مثال ۷.۶ فرض کنید میزان سرعت در تایپ، توسط یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر ارزیابی شود

$$A(x) = \begin{cases} 0 & x < 50 \\ \frac{x-50}{100} & 50 \leq x < 150 \\ 1 & 150 \leq x \end{cases}$$

که در آن x تعداد حرف تایپ شده در دقیقه است. مثلاً اگر کسی در هر دقیقه ۱۲۰ حرف تایپ کند، میزان سرعت تایپ وی $A(120) = 0/7$ است. به عبارت دیگر به میزان ۰/۷ در مجموعه‌ی تایپیست‌های سریع، به بیان فوق، قرار دارد.

شکل ۱.٦ نمودار تابع عضویت مجموعه تایپیست‌های سریع.

اکنون با فرض این که گزاره‌ی «هادی سریع تایپ می‌کند» داده شده باشد، می‌توانیم نتیجه بگیریم که: امکان اینکه هادی در هر دقیقه ۱۲۰ حرف تایپ کند ۰/۷ است. به عبارت دیگر با اطلاعی که از میزان سرعت تایپ هادی داریم، به اندازه ۰/۷ امکان دارد (می‌برازد) که وی در هر دقیقه ۱۲۰ حرف تایپ کند.

مثال ۸.٦ یک شرکت بازرگانی می خواهد یک تایپیست استخدام کند. از دیدگاه مدیریت، میزان مطلوبیت یک متقاضی (یعنی امکان استخدام وی) بر حسب سرعت کار وی و با تابع توزیع امکان زیر ارزیابی می‌شود

$$B(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۴۰ \\ ۰/۰۲(x - ۴) & ۴۰ \leq x < ۹۰ \\ ۱ & ۹۰ \leq x < ۱۳۰ \\ ۰/۰۱٦(۱۸۰ - x) & ۱۳۰ \leq x < ۱۸۰ \\ ۰ & ۱۸۰ \leq x \end{cases}$$

معیار فوق این گونه توجیه می‌شود که یک متقاضی با سرعت تایپ بالا مسلماً خواهان دستمزد بالایی است، و این برای شرکت مطلوب نیست. از طرف دیگر یک متقاضی با سرعت تایپ بسیار کم، برای کار مناسب نیست. اکنون اگر با توجه به مثال قبل، هادی متقاضی استخدام در شرکت فوق باشد، امکان استخدام وی با توجه به تعریف ۴.٦ به‌صورت زیر به دست می آید

$$\begin{aligned} & Poss(\text{هادی سریع تایپ می‌کند} \ \text{هادی استخدام شود}) \\ & = Poss(B|A) = \Pi_{B|A} = \text{ارتفاع} \ [B \cap A] \\ & = \sup_{x \in X}[\min(B(x), A(x))] \\ & = ۰/۸ \end{aligned}$$

شکل ۲.۶ نمودار تابع توزیع امکان استخدام یک فرد به عنوان تایپیست.

شکل ۳.۶ نمودار تابع توزیع امکان استخدام یک فرد و نمودار تابع عضویت مجموعه فازی تایپیست‌های سریع.

۶.۳ توزیع‌های امکان چند متغیره

در تعریف ۳.۶ و نکته ۳.۶ فرض شده بود که تحدید فازی، برمجموعه‌ی مقادیری که متغیر X می‌تواند در Ω اختیار کند (یعنی توزیع امکان متناظر با X) یک تحدید یک بعدی است. در حالت کلی‌تر، می‌توانیم توزیع های امکان چند متغیره را بر اساس مفهوم تحدید (رابطه)های فازی $n-$ بعدی تعمیم دهیم.

تعریف ۵.۶ فرض کنید $X = (X_1, \ldots, X_n)$ متغیری $n-$ بعدی تعریف شده بر $U = U_1 \times \ldots \times U_n$ باشد. یک **توزیع امکان چند متغیره** ($n-$ بعدی) متناظر با X به صورت یک تحدید فازی $n-$ بعدی $R(X)$ بر U تعریف می‌شود. هم‌چنین تابع توزیع امکان مرتبط با X به‌صورت تابع عضویت مجموعه فازی متناظر با تحدید فوق تعریف می‌شود. یعنی

$$\Pi_X = R(X_1, \ldots, X_n),$$

$$\pi_X(u_1, \ldots, u_n) = R(u_1, \ldots, u_n)$$

مثال ۹.۶ توزیع امکان متناظر با بزرگی قالی بر حسب دو متغیر X_1: طول قالی، و X_2: عرض قالی به صورت زیر داده شده است (رک مثال ۳۰.۵)

$$\text{عرض قالی}: X_۲$$

$$X_۱: \text{طول قالی} \quad \begin{array}{c|cccc} & ۱ & ۱/۵ & ۲ & ۳ \\ \hline ۱/۵ & ۰/۱ & ۰/۲ & ۰/۲۵ & ۰/۳ \\ ۲ & ۰/۲ & ۰/۲۵ & ۰/۳ & ۰/۴ \\ ۳ & ۰/۳ & ۰/۳ & ۰/۴ & ۰/۵ \\ ۴ & ۰/۳۵ & ۰/۴ & ۰/۵ & ۰/۷ \\ ۵ & ۰/۵ & ۰/۷ & ۰/۸ & ۱ \end{array}$$

توزیع امکان دومتغیره فوق چیزی نیست جز یک تحدید فازی دوبعدی بر مجموعه‌ی مقادیری که $X_۱$ و $X_۲$ (متغیرهای طول و عرض) می‌توانند اختیار کنند. این تحدید با میزان بزرگی هر قالی بر حسب طول و عرض آن مرتبط است. طبق این توزیع امکان، با فرض اینکه یک قالی بزرگ ارزیابی شده باشد، آنگاه امکان اینکه طول و عرض آن به ترتیب ۳ و ۲ متر باشد، برابر ۰/۴ است.

مشابه حالت یک‌متغیره، در حالت چندمتغیره نیز می‌توان امکان هر پیشامد، یعنی هر مجموعه از فضای $U = U_۱ \times \ldots \times U_n$ را به دست آورد. به علاوه می‌توان امکان هر پیشامد فازی از U، یعنی یک مجموعه فازی از U، را نیز تعریف کرد.

تعریف ٦.٦ با مفروضات تعاریف بالا، اگر A یک پیشامد معمولی از U باشد، آنگاه اندازه امکان آن عبارتست از

$$\Pi(A) = \sup_{(u_۱,\ldots,u_n)\in A} \pi(u_۱,\ldots,u_n)$$

و اگر A یک مجموعه فازی از U (به عبارت دیگر یک رابطه فازی در U) باشد، آنگاه اندازه امکان آن عبارت است از

$$\Pi(A) = \sup_{(u_۱,\ldots,u_n)\in U} [\min[A(u_۱,\ldots,u_n), \pi(u_۱,\ldots,u_n)]]$$

که در این صورت $\Pi(A)$ را می‌توان به صورت $Poss$ (X، A باشد) تعبیر کرد.

رابطه بالا، بر حسب ارتفاع یک مجموعه فازی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\Pi(A) = \text{ارتفاع} \quad (A \cap \Pi)$$

مثال ۱۰.۶ در مثال بالا، فرض کنید A مجموعه‌ی قالی‌های به طول ۲ یا ۳ متر و عرض ۱/۵ یا ۲ متر باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}\Pi(A) &= \sup\{\pi(۲, ۱/۵), \ldots, \pi(۳, ۲)\}\\ &= \sup\{۰/۲۵, ۰/۳, ۰/۳, ۰/۴\} = ۰/۴\end{aligned}$$

یعنی امکان اینکه یک قالی بزرگ، به بیان مثال بالا، عضو مجموعه A باشد (یعنی طول آن ۲ یا ۳ متر و عرض آن ۱/۵ یا ۲ متر باشد) برابر ۰/۴ است. به عبارت دیگر، حداکثر درجه و میزان تطابقی که می توانیم بین قالی‌های فوق با مفهوم بزرگیِ بیان شده در قالب توزیع امکان مثال بالا بیابیم، ۰/۴ است.

مثال ۱۱.۶ فرض کنید B مجموعه فازی «قالی های مناسب برای یک اطاق به ابعاد ۳/۵ × ۲/۵»، با تابع عضویت زیر باشد (رک مثال ۳۰.۵)

$$\begin{array}{ccc} & & X_۲ : \text{عرض قالی} \\ & & \begin{array}{cccc} ۱ & ۱/۵ & ۲ & ۳ \end{array} \\ X_۱ : \text{طول قالی} & \begin{array}{c} ۱/۵ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \\ ۵ \end{array} & \begin{pmatrix} ۰/۴ & ۰/۴ & ۰/۴ & ۰/۴ \\ ۰/۶ & ۰/۸ & ۰/۹ & ۰/۹ \\ ۰/۶ & ۰/۸ & ۰/۹ & ۰/۹ \\ ۰/۶ & ۰/۷ & ۰/۷ & ۰/۷ \\ ۰/۵ & ۰/۵ & ۰/۵ & ۰/۵ \end{pmatrix} \end{array}$$

اکنون، امکان اینکه یک قالی بزرگ، به بیان مثال ۹.۶، مناسب یک اطاق به ابعاد ۳/۵ × ۲/۵ باشد، عبارت است از

$$\begin{aligned}\Pi(B) &= Poss(B, V \ \text{باشد})\\ &= \sup\{\min[۰/۱, ۰/۴], \ldots, \min[۱, ۰/۵]\}\\ &= \sup\{۰/۱, \ldots, ۰/۵\}\\ &= ۰/۷\end{aligned}$$

به عبارت دیگر (با توجه به نکته ۶.۶) می‌گوییم

$Poss$ (قالی، بزرگ است | قالی، مناسب یک اطاق ۳/۵ × ۲/۵ باشد) $= ۰/۷$

۶.۴ توزیع‌های امکان حاشیه‌ای و شرطی

تعریف ۷.۶ فرض کنید Π_X و π_X توزیع امکان و تابع توزیع امکان n متغیره $X = (X_۱, \ldots, X_n)$ تعریف شده بر $U = U_۱ \times \ldots \times U_n$ باشند. تصویر Π_X را بر $U_{(q)} = (U_{i_۱}, \ldots U_{i_K})$، **توزیع امکان حاشیه‌ای** $X_{(q)}$ می‌نامیم.

طبق تعریف ۹.۵ توزیع امکان و تابع توزیع امکان حاشیه‌ای $X(q)$ به صورت زیر خواهد بود

$$\Pi_{X_{(q')}} = Proj[\Pi_X; U_{i_1}, \dots, U_{i_k}]$$
$$\pi_{X_{(q)}}(u_{i_1}, \dots, u_{i_k}) = \max_{U_{(q')}} \pi_X(u_1, \dots, u_n)$$

که در آنها q، دنباله اندیسی $(i_1, \dots, i_k)$ و q' متمم q نسبت به $(1, \dots, n)$ است. مثلاً اگر $n = 5$ و $q = (i_1, i_2) = (2, 4)$ آنگاه $q' = (j_1, j_2, j_3) = (1, 3, 5)$.

در حالت خاص، اگر یک توزیع امکان دو بعدی Π بر $U \times V$ داشته باشیم، آنگاه دو توزیع امکان حاشیه‌ای داریم: یکی حاصل از تصویر Π بر U و یکی حاصل از تصویر Π بر V. هر کدام از این توزیع‌های حاشیه‌ای یک زیر مجموعه فازی، به ترتیب از مجموعه‌های مرجع U و V، خواهند بود (رک تعریف ۹.۵).

مثال ۱۲.٦ تابع توزیع امکان دوبعدی مثال ۹.٦ را در نظر بگیرید. در این مثال دو توزیع امکان حاشیه‌ای داریم

$$\Pi_{X_1} = \{\frac{0/3}{1/5}, \frac{0/4}{2}, \frac{0/5}{3}, \frac{0/7}{4}, \frac{1}{5}\}$$

$$\Pi_{X_2} = \{\frac{0/5}{1}, \frac{0/7}{1/5}, \frac{0/8}{2}, \frac{1}{3}\}$$

Π_{X_1} توزیع امکان حاشیه‌ای متناظر با بزرگی یک قالی بر حسب طول آن، و Π_{X_2} توزیع امکان حاشیه‌ای متناظر با بزرگی یک قالی بر حسب عرض آن است. مثلاً با فرض اینکه یک قالی بزرگ باشد، آنگاه امکان اینکه طول آن ۲ متر باشد، ۰/۴ است، و در عین حال امکان این که عرض آن ۲/۵ متر باشد (بدون توجه به طول) ۰/۷ است.

تعریف ۸.٦ با مفروضات تعریف ۷.٦ متغیرهای $X(q)$ و $X(q')$ را غیر متعامل گوییم اگر توزیع امکان Π_X برابر با حاصل‌ضرب دکارتی توزیع‌های امکان $\Pi_{X(q)}$ و $\Pi_{X(q')}$ باشد، یعنی

$$\Pi_X = \Pi_{X(q)} \times \Pi_{X(q')}$$

و یا به‌طور معادل

$$\pi_X(u_1, \dots, u_n) = \min[\pi_{X(q)}(u_{i_1}, \dots, u_{i_k}), \pi_{X(q')}(u_{i'_m}, \dots, u_{i'_k})]$$

در حالت خاص، متغیرهای $X_1, \dots, X_n$ را غیر متعامل گوییم اگر

$$\Pi_X = \Pi_{X_1} \times \dots \times \Pi_{X_n}$$

نکته ۷.۶ مفهوم متعامل بودن را برای متغیرهای فازی، می‌توان با مفهوم استقلال برای متغیرهای تصادفی مقایسه کرد. در نظریه احتمال، چند متغیر تصادفی را مستقل از هم گوییم اگر بتوان تابع چگالی احتمال مشترک آن‌ها را به صورت حاصل‌ضرب توابع چگالی حاشیه‌ای تک تک آن‌ها نوشت. در اینجا، یعنی در نظریه امکان، عملگر min جانشین عملگر ضرب شده است.

مثال ۱۳.۶ دو متغیر طول و عرض تحت توزیع امکان مثال ۹.۶، که بیانگر میزان بزرگی یک قالی است، متعامل هستند. زیرا، با توجه به توزیع‌های امکان حاشیه‌ای به دست آمده در مثال ۱۲.۶، برای نمونه داریم

$$\pi(۳,۲) = ۰/۴ \neq \min[\pi_{X_۱}(۳), \pi_{X_۲}(۴)] = \min[۰/۵, ۰/۸] = ۰/۵$$

ولی دو متغیر طول و عرض تحت توزیع امکان مثال ۱۱.۶، که بیانگر میزان مناسب بودن یک قالی برای اطاقی به ابعاد $۳/۵ \times ۲/۵$ است، غیر متعامل اند. زیرا با توجه به توزیع‌های امکان حاشیه‌ای، رابطه زیر برای تمام $x_۱ \in \{۱/۵, ۲, ۳, ۴/۵\}$ و $x_۲ \in \{۱, ۱/۵, ۲, ۳\}$ برقرار است

$$\pi(x_۱, x_۲) = \min[\pi_{X_۱}(x_۱), \pi_{X_۲}(x_۲)]$$

تعریف ۹.۶ عطف به مفروضات تعاریف فوق، **توزیع امکان شرطی** $X(q)$ به شرط $X(q')$ به صورت توزیع امکان زیر تعریف می‌شود

$$\Pi_{X(q)}[X_{j_۱} = a_{j_۱}, \ldots, X_{j_m} = a_{j_m}]$$

و تابع توزیع امکان آن عبارت است از

$$\begin{aligned}&\pi_{X(q)}(X_{i_۱}, \ldots, X_{i_k} | X_{j_۱} = a_{j_۱}, \ldots, X_{j_m} = a_{j_m})\\ &= \pi_X(u_۱, ..., u_n) | u_{j_۱} = a_{j_۱}, ..., u_{j_m} = a_{j_m}\end{aligned}$$

در تعریف بالا، توزیع امکان Π_X بر مقادیر بر مشخصی از متغیرهای $X(q)$ شرطی شده است. در حالت کلی ممکن است یک توزیع امکان G بر $X_{(q')}$ داده شده باشد و مورد نظر، به دست آوردن توزیع امکان شرطی $X_{(q)}$ به شرط G باشد. در این حالت فرض کنید $\bar{G}$ گسترش استوانه‌ای G نسبت به U باشد (رک تعریف ۱۰.۵) یعنی

$$\bar{G} = G \times U_{m+۱} \times \ldots \times U_n$$

و یا

$$\bar{G}(u_۱, \ldots, u_n) = G(u_{j_۱}, \ldots, u_{j_m})$$

تعریف ۱۰.٦ عطف به مفروضات بالا، توزیع امکان $X_{(q)}$، شرطی شده بر توزیع امکان G (برای $X_{(q')}$)، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Pi_{X_{(q)}}[\Pi_{X_{(q')}} = G] = Porj_{U_{(q)}}(\Pi_X \cap \bar{G})$$

دقت کنید که رابطه فوق چیزی نیست جز ترکیب Π_X و $\bar{G}$. به عبارت دیگر داریم

$$[\Pi_{X_{(q)}}|\Pi_{X_{(q')}} = G] = \max_{U_{(q)}}\{\min[\pi_X(u_1, \ldots, u_n), \bar{G}(u_1, \ldots, u_n)]\}$$

مثال ۱۴.٦ فرض کنید محمد مهدی شخصی تنومند باشد، که در این توصیف، تنومندی بر حسب طول قد (به سانتی‌متر) و وزن (به کیلوگرم) به صورت توزیع امکان π_X زیر داده شده است

X_1 : طول قد

X_2 : وزن

	۱۷۰ − ۱۸۰	۱۸۰ − ۱۹۰	۱۹۰ − ۲۰۰	۲۰۰ به بالا
۷۰ − ۸۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴
۸۰ − ۹۰	۰/۲	۰/۴۵	۰/۵۵	۰/٦۵
۹۰ − ۱۰۰	۰/۲	۰/٦	۰/۷	۰/۸
۱۰۰ به بالا	۰/۵۵	۰/۷۵	۰/۹	۱

اکنون فرض کنید، علاوه بر این‌که بدانیم «محمد مهدی تنومند است»، هم‌چنین اطلاع داشته باشیم که «محمد مهدی نسبتاً بلند قد است» که در این گزاره، نسبتاً بلند قد بودن به وسیله‌ی تابع امکان زیر تعریف شده باشد

$$G(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۱۷۰ \\ ۰/۴ & ۱۷۰ \leq x < ۱۸۰ \\ ۰/۸ & ۱۸۰ \leq x < ۱۹۰ \\ ۱ & ۱۹۰ \leq x < ۲۰۰ \\ ۰/۷ & ۲۰۰ \leq x \end{cases}$$

که در آن x، طول قد به سانتی‌متر است.

اکنون این سؤال را مطرح می‌کنیم: با توجه به دو اطلاع راجع به تنومندی و نسبتاً بلند قد بودن محمد مهدی (به صورت‌های فوق) درباره‌ی وزن وی چه می‌توان گفت؟

حل: از تعریف ۱۰.٦ می‌توان توزیع امکان وزن وی را به دست آورد. باید ابتدا $\bar{G}$ را به دست آورده و سپس از رابطه ۱۱.٦ استفاده کنیم. $\bar{G}$ عبارت است از

X_1 : طول قد

X_2 : وزن

وزن \ طول قد	۱۷۰ − ۱۸۰	۱۸۰ − ۱۹۰	۱۹۰ − ۲۰۰	۲۰۰ به بالا
۷۰ − ۸۰	۰/۴	۰/۸	۱	۰/۷
۸۰ − ۹۰	۰/۴	۰/۸	۱	۰/۷
۹۰ − ۱۰۰	۰/۴	۰/۸	۱	۰/۷
۱۰۰ به بالا	۰/۴	۰/۸	۱	۰/۷

در نتیجه $\Pi_X \cap \bar{G}$ برابراست با

X_1 : طول قد

X_2 : وزن

وزن \ طول قد	۱۷۰ − ۱۸۰	۱۸۰ − ۱۹۰	۱۹۰ − ۲۰۰	۲۰۰ به بالا
۷۰ − ۸۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴
۸۰ − ۹۰	۰/۲	۰/۴۵	۰/۵۵	۰/۶۵
۹۰ − ۱۰۰	۰/۴	۰/۶	۰/۷	۰/۸
۱۰۰ به بالا	۰/۴	۰/۷۵	۰/۹	۰/۷

یعنی

$$\Pi_{\text{وزن}} \quad [\Pi_{\text{قد}} \quad = G](x) = \begin{cases} \text{۰/۴} & \text{۷۰} \le x < \text{۸۰} \\ \text{۰/۶۵} & \text{۸۰} \le x < \text{۹۰} \\ \text{۰/۷} & \text{۹۰} \le x < \text{۱۰۰} \\ \text{۰/۹} & \text{۱۰۰} \le x \end{cases}$$

مثلاً اگر بدانیم محمدمهدی تنومند است و به‌علاوه نسبتاً بلندقد است، آنگاه امکان این که وی بیش از ۱۰۰ کیلوگرم وزن داشته باشد، ۰/۹ است.

۶.۵ امکان و احتمال

به محض مطرح شدن نظریه مجموعه‌های فازی و به‌ویژه نظریه امکان، پرسش‌هایی درباره‌ی ارتباط بین نظریه امکان و نظریه احتمال مطرح می‌شود. چه بسا به دلیل شباهت صوری بین توابع امکان و احتمال، مقایسه‌های مسامحه‌آمیزی نیز بین این دو مفهوم صورت می‌گیرد. این به دلیل آن است که ذهن ما تنها به جنبه‌ی تصادفی و احتمالی

متغیرها و پدیده‌ها خو گرفته است. در بخش قبل مثال هایی را ذکر کردیم که در آن‌ها فقط جنبه‌ی امکانی متغیرها قابل بررسی بود. مانند مثال‌های مربوط به بزرگ بودن یک قالی و یا تنومند بودن یک فرد (مثال‌های ۹.٦ و ۱۴.٦). اما وضیعت‌هایی نیز وجود دارند که از هر دو جنبه‌ی احتمال و امکان قابل بررسی‌اند. در این موارد یک سؤال اساسی مطرح است. آیا چه ارتباطی بین احتمال و امکان وجود دارد؟ در این بخش مثال‌هایی خواهیم آورد که خواننده با وجوه امکانی و احتمالی یک متغیر آشنا شود. آنگاه بررسی خواهیم کرد که در این موارد، چه ارتباطی می‌تواند بین اندازه‌های امکان و احتمال وجود داشته باشد.

مثال ۱۵.٦ برای یک بررسی ژرف‌تر به مثال ۱.٦ بر می‌گردیم و مسأله‌ی پیش بینی متوسط درجه حرارت هوا در ۱۳ آبان را دقیق‌تر مطالعه می‌کنیم. برای سادگی تنها یک شهر، مشهد، را در نظر می‌گیریم. فرض کنید متخصص هواشناسی می‌خواهد در تاریخ ۱۲ آبان، متوسط درجه حرارت هوا را در شهر مشهد برای ۱۳ آبان پیش‌بینی کند. وی پیش‌بینی را دو گونه می‌تواند انجام دهد. نخست این که بررسی کند که آخرین اطلاعات و گزارش‌های موجود تا چه اندازه با وضعیتی که منجر به هر یک از درجه حرارت‌های موجود در فواصل A : ۱۰ − ۱۲، B : ۱۲ − ۱۴، C : ۱۴ − ۱٦، D : ۱٦ − ۱۸، و E : ۱۸ − ۲۰ درجه سانتی‌گراد می‌شود، منطبق است؟ به عبارت دیگر، سازگاری و همخوانی اطلاعات موجود با هر یک از پیشامدهای A تا E چه اندازه است؟ براین پایه، وی یک توزیع امکان برای درجه حرارت ۱۳ آبان در مشهد در نظر می‌گیرد که صورت بندیِ پیش‌بینیِ وی با توجه به وجه امکانی متغیر درجه حرارت است.

نوع دیگر پیش‌بینی می تواند بر اساس وجه احتمالی متغیر درجه حرارت انجام گیرد. مثلاً وی ملاحظه می‌کند که طی سال‌های گذشته در مشهد، در چند درصد از روزهای ۱۳ آبانی که شرائط جوّیِ روزهای قبل آن با شرایط جویِ فعلی مشابه است، درجه حرارت در فاصله‌ی ۱۰—۱۲ بوده است؟ و در چند در صد از روزها در فاصله‌ی ۱۲—۱۴ بوده است؟ و ... . وی بر این اساس به هر پیشامد A تا E یک عدد نسبت می‌دهد که احتمال رخ دادن آن پیشامد است. این اعداد صرفاً بر اساس فراوانی نسبیِ حالت‌های مشابه با آن پیشامد در طول یک دوره‌ی طولانی از مشاهدات نتیجه می‌شوند. اکنون فرض کنید متخصص هواشناسی اندازه‌های امکان و احتمال زیر را برای متغیر متوسط درجه حرارت هوا در ۱۳ آبان در مشهد در نظر می‌گیرد

		A ۱۰° − ۱۲°	B ۱۲° − ۱۴°	C ۱۴° − ۱٦°	D ۱٦° − ۱۸°	E ۱۸° − ۲۰°
اندازه امکان	Π	۰/۲	۰/۷۵	۱	۰/۷	۰/۴
اندازه احتمال	P	۰/۰۵	۰/۲۰	۰/۵۵	۰/۱۵	۰/۰۵

در این صورت برای نمونه داریم

$$\Pi(A) = ۰/۳, \qquad\qquad P(A) = ۰/۰۵,$$

$$\Pi(D \cup E) = Poss(\text{متوسطدرجه حرارت در ۱۳ آبان در مشهد بین ۱۶ تا ۲۰ باشد.}) = \max[\Pi(D), \Pi(E)] = \max[۰/۷, ۰/۴] = ۰/۷۰$$

$$P(D \cup E) = P(\text{متوسطدرجه حرارت در ۱۳ آبان در مشهد بین ۱۶ تا ۲۰ باشد.}) = P(D) + P(E) = ۰/۱۵ + ۰/۰۵ = ۰/۲۰$$

از همین مثال معلوم می‌شود که اندازه‌های امکان، بر خلاف اندازه‌های احتمال، ویژگی جمع‌پذیری ندارند. به علاوه ملاحظه می‌کنید که امکان یک پیشامد را نمی‌توان براساس امکان متمم آن به دست آورد، در حالی که در احتمال این کار شدنی است. مثلاً

$$\begin{aligned}\Pi(D \cup E)^C = \Pi(A \cup B \cup C) \quad &= \max[\Pi(A), \Pi(B), \Pi(C)] \\ &= \max[۰/۳, ۰/۷۵, ۱] = ۱ \\ &\neq ۱ - \Pi(D \cup F) = ۱ - ۰/۷ = ۰/۳\end{aligned}$$

اما

$$\begin{aligned}P(D \cup E)^C \quad &= P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \\ &= ۰/۵ + ۰/۲۰ + ۰/۵۵ = ۰/۸ \\ &= ۱ - P(D \cup E) = ۱ - ۰/۲۰ = ۰/۸\end{aligned}$$

در مثال زیر نیز وضعیتی بررسی شده است که هم وجه احتمالی و هم وجه امکانی در آن وجود دارد.

مثال ۱۶.۶ یک بیمار به پزشک مراجعه می‌کند. پزشک پس از انجام معاینات و آزمایش‌های لازم بیماری او را یکی از انواع برونشیت، سرماخوردگی، سینه‌پهلو و سل تشخیص می‌دهد. پزشک با توجه به فراوانی مریض‌های قبلی که در وضعیت مشابه مریض فعلی بوده‌اند و سپس دانسته شده که بیماری آن‌ها از چه نوعی است، یک توزیع احتمال برای نوع بیماری ارائه می‌دهد. به علاوه پزشک از روی میزان تطابق و همخوانیِ نتایج آزمایش‌ها و معاینات با علایم بیماری‌های فوق، یک توزیع امکان را نیز برای نوع بیماری ارائه می‌دهد. این دو توزیع در جدول زیر آمده‌اند.

نوع بیماری	A	B	C	D
اندازه احتمال P	۰/۱	۰/۵	۰/۳	۰/۱
اندازه امکان Π	۰/۴	۱	۰/۸	۰/۳

توضیحی درباره‌ی مقادیر مندرج در جدول فوق می‌دهیم. در اینجا $P(A) = ۰/۱$ یعنی تجربه و سابقه‌ی گذشته نشان می‌دهد که ۱۰٪ از مریض‌های قبلی که در وضعیت مشابه با مریض فعلی بوده‌اند، پس از بررسی‌های دقیق‌تر دانسته شده که بیماری آن‌ها از نوع A

یعنی برونشیت بوده است. بنابراین به احتمال ۰/۱، بیماری مریض فعلی نیز برونشیت است. اما $\Pi(A) = 0/4$ یعنی علائم بیماری فعلی به اندازه‌ی ۴۰% با علائم بیماری A یعنی برونشیت منطبق و سازگار است و در نتیجه امکان اینکه بیمار برونشیت داشته باشد ۰/۴ است. همین نوع تفسیر و تعبیر را درباره‌ی بیماری های دیگر و احتمال و امکان مربوط به آن‌ها می‌توان ارائه داد.

عینی یا ذهنی بودن امکان

یکی ار نخستین پرسش‌ها پس از مطرح شدن مفهوم امکان، این است که آیا امکان، یک مفهوم ذهنی است یا عینی ؟ و آیا مقادیر یک تابع توزیع امکان (یا به‌طور متناظر: درجات تابع عضویت یک مجموعه فازی) براساس داوری های شخصی صورت می گیرد یا برپایه‌ی مشاهدات و نتایج عملی و عینی؟ می‌دانیم که از دیرباز این پرسش در باره‌ی مفهوم احتمال مطرح بوده است. گروهی مانند کینر[۲] و جفریز[۳] از احتمال یک مفهوم ذهنی را برداشت کردند، و عده‌ای شامل رایشن‌باخ [۴] و میزس [۵] احتمال را یک مفهوم عینی تلّقی می‌کردند. گروه سومی نیز مانند کارناپ، صدر و پوپر احتمال منطقی را مطرح کردند. در این باره مباحث گسترده‌ای در اوائل و اواسط قرن گذشته میلادی در گرفت .اکنون آشکار شده است هر کدام از گروه‌های فوق، کم و بیش یک مفهوم و مقصود متفاوتی را مد نظر داشته‌اند. به این صورت که یک گروه احتمال بر مبنای فراوانی نسبی (که مفهومی عینی و تجربی است) و گروهی دیگر احتمال ذهنی (که یک مفهوم شخصی است) را در نظر داشته و گروهی نیز مفهوم احتمال منطقی را که چارچوب و کاربردهای خاصی دارد مورد توجه قرار داده‌اند. در واقع گروه‌های فوق سه مفهوم متفاوت را مد نظر قرار دارند که هر سه مفهوم با یک کلمه‌ی احتمال بیان می‌شود، و البته هر سه در اصول موضوعه‌ای برای احتمال صدق می‌کنند [].

گذشته از این مباحث، باید گفت که احتمال به صورتی که بیشتر متداول و رایج است مفهومی براساس فراوانی نسبی و بنابراین یک مفهوم عینی است. این برداشت از احتمال همان چیزی است که با جنبه‌ی تصادفی بودن پدیده‌ها و متغیرها مرتبط است. هرچند مفاهیمی مانند احتمال منطقی و احتمال ذهنی نیز مطرح هستند که در آن ها، وجه غالب، جنبه‌ی ذهنی و شخصی است [۳۲] و [۱۰۹]. درباره‌ی امکان نیز وضع کمی شبیه احتمال است. در مفهوم امکان، هم می‌توان وجه ذهنی را و هم وجه عینی را، با توجه به زمینه‌ی مربوطه، تصور کرد. برای نمونه در مثال ۴.٦ یک تابع امکان داریم که کاملاً

[۲] J.M. Keynes
[۳] H. Jeffreys
[۴] H. Reichenbach
[۵] R.V. Misses

ذهنی و شخصی است، زیرا افراد مختلف برداشت‌های مختلفی از مفهوم جوان بودن دارند. شخصی ممکن است یک فرد ۳۵ ساله را به اندازه‌ی ۰/۷ جوان بداند در حالی که شما آن فرد را فقط به اندازه‌ی ۰/۳ جوان بدانید. از طرف دیگر، در بعضی موارد، جنبه‌ی شخصی و ذهنی امکان کم رنگ است. برای نمونه در مثال ۱۶.۶ که توزیع نوع بیماری مطرح است، اندازه‌های مختلف امکان بر اساس مشاهدات و تطبیق‌های عینی صورت می‌گیرد. البته در اینجا نیز ممکن است قضاوت پزشک‌های مختلف درباره‌ی میزان تطبیق متفاوت باشد، ولی در هر صورت، آنچه اساس کار است شرائط عینی بیمار است.

پس به‌طور خلاصه می توان گفت که امکان، در بعضی موارد صِرفاً دارای جنبه‌ی ذهنی و شخصی است و در بعضی موارد دارای جنبه‌ی عینی (گاهی با رگه‌هایی از جنبه‌های شخصی و ذهنی) است. البته در اینجا نیز مانند احتمال، اصول موضوعه‌ای که برای یک اندازه امکان تعریف شده است (تعریف ۱.۶) چارچوبی دقیق برای هر تابعی است که بخواهد، با هر تعبیری، یک اندازه امکان باشد.

مقایسه‌ای کوتاه بین امکان و احتمال

نظر به اهمیت تفاوت بین مفاهیم امکان و احتمال و برای مقایسه‌ی بهتر این دو، موارد زیر را به عنوان وجوه اشتراک و افتراق امکان و احتمال بر می‌شمریم.

وجوه اشتراک امکان و احتمال

۱) امکان و احتمال هر دو وجوهی از عدم اطمینان هستند. در واقع اندازه‌های امکان و احتمال دو نوع اندازه عدم اطمینان هستند.

۲) هم برای امکان و هم برای احتمال می‌توان هر دو وجه عینی و ذهنی را تصور کرد. البته آن وجه از احتمال که بیشتر شناخته شده و متداول است، وجه عینی و تجربی آن است.

۳) بُرد توابع امکان و احتمال هردو محدود به بازه [۱ و ۰] است.

وجوه افتراق امکان و احتمال

۱) احتمال، با وجه تصادفی یک متغیر سرو کار دارد. در حالی که امکان، با وجه امکانی یک متغیر (میزان سازگاری و تطابق با یک صفت) مرتبط است.

۲) جمع مقادیر هر تابع احتمال روی کلّ فضای مورد نظر برابر یک است. در حالی که برای تابع امکان این محدودیت وجود ندارد.

۳) در هر اندازه احتمال، احتمال پیشامد متممِ A بر پایه‌ی احتمال پیشامد A به‌طور یکتا مشخص می‌شود ($P(A^C) = ۱ - P(A)$) ولی برای یک اندازه امکان چنین نیست.

۴) اندازه‌های احتمال دارای ویژگی جمع‌پذیری هستند، ولی اندازه‌های امکان این ویژگی را ندارند.

۵) در چارچوب نظریه احتمال، عدم اطمینان مربوط به هر پیشامد مانند A با یک عدد که احتمال آن پیشامد است مشخص می‌شود ($P(A)$). در حالی که در نظریه امکان، عدم اطمینان مربوط به هر پیشامد با دو عدد یکی امکان آن پیشامد ($Poss(A)$) و دیگری لزوم آن پیشامد ($Ness(A)$) مشخص می‌گردد.

اصل سازگاری امکان — احتمال

از بحث های این فصل معلوم شد که احتمال و امکان دو جنبه‌ی متفاوت از عدم اطمینان هستند. در عین حال وضعیت‌هایی وجود دارند که از هر دو جنبه‌ی احتمال و امکان قابل بررسی‌اند (مانند مثال های ١٥.٦ و ١٦.٦). در این موارد یک پرسش مطرح می‌شود: چه ارتباطی بین احتمال و امکان وجود دارد؟ در بیان یک رابطه بین امکان و احتمال، اصل سازگاریِ امکان — احتمال توسط زاده به این صورت ارائه شده است که

«یک درجه‌ی بالای امکان، مستلزم یک درجه‌ی بالای احتمال نیست، ولی یک درجه‌ی بالای احتمال، مستلزم یک درجه‌ی بالای امکان است؛به بیان دیگر در هر مورد امکان، حداقل به بزرگی احتمال است» [۱۳۷].

همان‌طور که زاده خود تأکید می کند: « باید توجه داشت که اصل سازگاری یک قاعده‌ی دقیق و یا رابطه‌ی ذاتی بین مفاهیم امکان و احتمال نیست، بلکه یک صورت بندی تقریبیِ درک شهودی ما نسبت به این نکته است که کم شدن امکان، منجر به کم شدن احتمال می‌شود و نه بالعکس». اصل سازگاری زاده، صرفاً به بیان رابطه‌ی بین امکان و احتمالِ تک تک عناصر فضای نمونه نظر دارد. اما همان‌طور که دوبوا و پراد [۴۴] یادآوری کرده‌اند، دراین اصل بایدِ بر بزرگ‌تر بودنِ امکان هر پیشامد دلخواه (و نه هر پیشامد منفرد) نسبت به احتمال آن تأکید کرد. البته به نظر می‌رسد که اصل سازگاری، حتی با لحاظ کردن اصلاح دوبوا و پراد شایان دقت بیشتری است. توضیح آن‌که به همان دلیل که می‌پذیریم که امکان هر پیشامد بزرگ‌تر از احتمال آن باشد، باید توجه کنیم که برای دو پیشامد، آنکه ممکن‌تر است باید محتمل‌تر هم باشد (و نیز بالعکس). می‌توان مثال‌هایی ساخت که دو توزیع احتمال و امکان در شرائط زاده و هم‌چنین دوبوا و پراد

صدق کنند، اما به‌طور غیر مستقیم از رعایت مقصودِ اصل سازگاری تخطّی کنند. بدین گونه که برای دو پیشامد، احتمال پیشامد اول از پیشامد دوم بیشتر ولی امکان پیشامد اول کمتر باشد. برای پرهیز از این دشواری به نظر می‌رسد که باید اصل سازگاری را به‌صورت تصحیح شده‌ی زیر بیان کنیم.

اصل سازگاری امکان — احتمال: یک درجه‌ی بالای امکان برای یک پیشامد، مستلزم یک درجه‌ی بالای احتمال برای آن پیشامد نیست، ولی یک درجه‌ی بالای احتمال مستلزم یک درجه‌ی بالای امکان است. به‌علاوه برای دو پیشامد آنکه ممکن‌تر است، محتمل‌تر است.

اندازه سازگاری

فرض کنید یک متغیر دارای هر دو جنبه امکان و احتمال باشد. دراین صورت می توان توزیع های امکان و احتمال گوناگونی برای آن متغیر در نظر گرفت که در اصل سازگاری نیز صدق کنند. در این موارد معیار دیگری وجود دارد که **اندازه سازگاری** بین دو توزیع امکان و احتمالِ مرتبط با آن متغیر را نشان می‌دهد.

تعریف ۱۱.۶ اگر متغیر X مقادیر $u_1, u_2, ..., u_n$ را با احتمال‌های $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ و امکان‌های $\Pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n)$ اختیار کند، آن‌گاه درجه سازگاری توزیع های احتمال P و امکان Π به صورت زیر تعریف می‌شود

$$C(P, \Pi) = \sum_{i=1}^{n} P(u_i)\Pi(u_i)$$

مثال ۱۷.۶ در مثال ۱۶.۶، اندازه سازگاری توابع احتمال و امکان نوع بیماری برابر ۰/۸۱ است.

برای مطالعه‌ی بیشتر

بخش‌های ۱.۶ و ۲.۶

اندازه‌های امکان و هم‌چنین اندازه‌های لزوم و اندازه‌های احتمال، حالات خاصی از اندازه‌هایی موسوم به **اندازه‌های فازی** هستند. اندازه‌های فازی رده بزرگی از انواع اندازه‌های عدم اطمینان می باشند که به‌ویژه پس از مطرح شدن نظریه مجموعه‌های فازی، بیشتر مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در [۷] اندازه‌های فازی به‌طور مختصر مرور شده‌اند. برای مطالعه‌ی گسترده‌تر به [] مراجعه کنید. همچنین در [۷۷] و [۷۸] انواع اندازه‌های اطمینان، که اندازه‌های فازی حالت خاصی از آنهاست، بررسی شده‌اند.

رویکرد شهودی و رویکرد اصل موضوعی به امکان

از مطالب این فصل روشن شد که نظریه امکان و نظریه مجموعه‌های فازی ارتباط تنگاتنگی با یکدیگر دارند. برای رسیدن به این ارتباط دو رویکرد وجود دارد. یک رویکرد این است که در ابتدا، مجموعه‌های فازی، رابطه‌های فازی، تحدیدهای فازی و مباحث مربوط به آن‌ها تعریف و تشریح می‌شوند و سپس یک تابع امکان به‌صورت یک تحدید فازی و نیز یک تابع توزیع امکان به صورت یک تابع عضویت تعریف می‌گردند [۱۳۷]. در رویکرد دوم ابتدا اندازه‌های فازی تعریف می‌شوند و سپس حالات خاص آنها یعنی اندازه‌های امکان مورد بحث قرار می‌گیرند. آن‌گاه هر تابع توزیع امکان به یک تابع به نام تابع عضویت متناظر می‌شود که این تابع عضویت، مشخص کننده‌ی مفهومی به نام یک مجموعه فازی است [۴۴] و [۷۸].

رویکرد نخست، مستقیماً از نظریه مجموعه‌های فازی به نظریه امکان می‌پردازد و از لحاظ شهودی و درک عمومی مزیت دارد (رک []). از طرفی، رویکرد دوم صورت‌بندی ریاضی دقیق‌تر و واضح‌تری دارد (رک []). در فصلی که گذشت سعی کردیم، با توجه به مزیت های هر دو روش، این دو شیوه را به نوعی تلفیق کرده و بحث را هماهنگ و سازگار با هر دو رهیافت ارائه کنیم.

بخش‌های ۳.٦ و ۴.٦

توزیع‌های امکان چندمتغیره و مفاهیم توزیع‌های حاشیه‌ای و شرطی و مفهوم غیرمتعامل برای متغیرهای امکانی، نخستین بار توسط زاده در سال ۱۹۷۸ مطرح شد. یک مرجع مناسب برای نظریه امکان، کتاب دوبوا و پراد است []، که در آن در باره‌ی امکان شرطی نیز به گستردگی بحث شده است. در باره‌ی امکان شرطی مراجع [] نیز حائز اهمیت هستند.

بخش ۵.٦

مقایسه بین احتمال و امکان (توانایی‌های هرکدام، مفهوم و مبنای آن‌ها، روابطی که هر کدام در آن روابط صدق می‌کنند، کاربردهای بالقوه و بالفعل آن‌ها، ...) موضوع گسترده‌ای است که توسط بسیاری از محققین مورد توجه قرار گرفته است. در این زمینه مراجع [] معرفی می‌شوند.

یکی از مباحث مهم در نظریه امکان، ساختن و یا به دست آوردن تابع امکان (به عبارت دیگر ساختن تابع عضویت یک مجموعه فازی) است. در مواردی که وجه عینی و تجربی وجه برتر است، چگونگی استفاده ار داده‌های تجربی در ساختن تابع امکان اهمیت دارد. در مواردی که وجه ذهنی و شخصی برتری دارد چگونگی صورت‌بندی مفاهیم و

دیدگاه‌های شخصی حائز اهمیت است. مسلماً در مسائلی که با هر دو جنبه‌ی ذهنی و عینیِ امکان روبرو هستیم، پیچیدگی موضوع بیشتر می‌شود (این نکات کم و بیش مشابه نکاتی است که در زمینه‌ی احتمال و در به دست آوردن یا ساختن تابع احتمال وجود دارد). برای مطالعه درباره‌ی ساختن تابع امکان (تابع عضویت) می‌توانید به [] مراجعه کنید.

در باره‌ی اندازه‌های سازگاری اندازه‌های احتمال و امکان، معیارهای دیگری نیز پیشنهاد شده است. در این باره به [] مراجعه کنید.

تمرین‌ها

۱.٦ در هرمورد مشخص کنید که عدم اطمینان، جنبه‌ی امکانی دارد یا احتمالی؟

الف) عدم اطمینان نسبت به وجهی که رو خواهد شد در پرتاب یک تاس.

ب) عدم اطمینان نسبت به میزان مناسب بودن هر یک از متقاضیان یک شغل برای تصّدی آن.

پ) عدم اطمینان نسبت به اینکه شخصی که به‌طور تصادفی از جمعی انتخاب می‌کنیم، چه کسی خواهد بود.

ت) عدم اطمینان نسبت به اینکه از بین شاگردان یک کلاس که وضع تحصیلی آن‌ها را می‌دانیم، چه کسانی در امتحان ریاضی پایان ترم نمره‌ی قبولی خواهند آورد.

ث) عدم اطمینان نسبت به ارزش یک کالای عتیقه.

ج) عدم اطمینان نسبت به میزان سرعت خوردویی که از پیش چشم شما در حال گذر است.

۲.٦ در مثال ۱.٦ تابع توزیع امکان مربوط به شهرهای کرمان و تبریز را بیابید.

۳.٦ در مثال ۱.٦ مطلوب است

$$N_{۴}(B), \Pi_{۳}(A \cup B \cup C), N_{۱}(C \cup E), \Pi_{۱}(C \cup E)$$

۴.٦ فرض کنید $U = \{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ و متغیر X: «تقریباً پنج» ، دارای توزیع امکان زیر باشد

$$\Pi_X = \{\frac{۰/۱}{۲}, \frac{۰/۴}{۳}, \frac{۰/۷}{۴}, \frac{۱}{۵}, \frac{۰/۷}{٦}, \frac{۰/۴}{۷}, \frac{۰/۱}{۸}\}$$

اگر $A = \{۱, ۲, ۳\}$ و $B = \{۳, ۷\}$، $\Pi(A)$ و $\Pi(B)$ را بیابید.

۵.٦ افزون بر مفروضات تمرین ۴.٦، فرض کنید E مجموعه فازی اعداد «کوچک» از U با تابع عضویت زیر باشد

$$E = \{\frac{۱}{۱}, \frac{۰/۸}{۲}, \frac{۰/٦}{۳}, \frac{۰/۴}{۴}, \frac{۰/۲}{۵}\}$$

$\Pi(E)$ و $\Pi(E^C)$ را بیابید و آن‌ها را تعبیر کنید.

۶.۶ فرض کنید $U = R^+ U\{\circ\}$ و به‌علاوه اندازه امکان متناظر با متغیر X: «تقریباً ۵» به‌صورت زیر تعریف شده باشد

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{x}{۵} & \circ \leq x < ۵ \\ \frac{۱\circ - x}{۵} & ۵ \leq x < ۱\circ \end{cases}$$

اگر $A = [۶, ۱۲]$ و $B = [۳, ۸]$، مقادیر $\Pi(A)$، $\Pi(B)$، $\Pi(A \cup B)$، $N(A)$ و $N(A \cap B)$ را بیابید.

۷.۶ افزون بر مفروضات تمرین بالا، فرض کنید L مجموعه فازی «اعداد بزرگ» با تابع عضویت زیر باشد

$$L(x) = \frac{۱}{۱ + ۱\circ x^{-۱}} \qquad \circ < x < \infty$$

$\Pi(L)$ و $\Pi(L^C)$ را بیابید و آن‌ها را تعبیر کنید.

۸.۶ شرکتی می‌خواهد یک نفر را برای شغل خاصی استخدام کند. میزان مناسب بودن هر متقاضی با توجه به میزان تحصیلات و آشنایی وی با زبان خارجی به‌صورت توزیع امکان دومتغیره زیر داده شده است

X : تحصیلات	Y : میزان آشنایی با زبان خارجی			
	کم	معمولی	خوب	عالی
دیپلم	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۷
فوق دیپلم	۰/۲	۰/۳	۰/۶	۰/۸
لیسانس	۰/۴	۰/۸	۰/۹	۱

توزیع‌های امکان حاشیه‌ای را بیابید و آن‌ها را تفسیر کنید. هم‌چنین توزیع امکان شرطی X به شرط «Y: خوب» را بیابید و آن‌را تفسیر کنید.

۹.۶ در تمرین بالا فرض کنید فردی استخدام شده است (یعنی برای شغل مورد نظر مناسب تشخیص داده شده است) و به‌علاوه می‌دانیم که وی به زبان خارجی « کم و بیش» مسلط است، که در این گزاره کم و بیش مسلط به وسیله‌ی تابع امکان زیر معرفی می‌شود

$$G(x) = \begin{cases} ۰/۳ & \text{آشنایی کم} \\ ۰/۷ & \text{آشنایی معمولی} \\ ۰/۷ & \text{آشنایی خوب} \\ ۰/۲ & \text{آشنایی عالی} \end{cases}$$

اکنون درباره‌ی میزان تحصیلات فرد استخدام شده چه می‌توان گفت؟ (توزیع امکان شرطی V را به شرط G بیابید). امکان این‌که وی فوق دیپلم باشد، چقدر است؟

۱۰.۶ در مثال ۱۶.۶ مقادیر $D(A^C)$ و $\Pi(A^C)$ و $N(B)$ و $N(C)$ را بیابید. هم چنین $\Pi(A\cup B)$ و $Pr(A\cup B)$ را به دست آورید.

۱۱.۶ در مواردی از تمرین ۱.۶ که با وجه امکانی سر و کار داریم، تعیین کنید که در هر مورد، امکان وجه عینی دارد یا ذهنی؟

۱۲.۶ یک توزیع احتمال و یک توزیع امکان برای متغیر X در گزاره‌ی زیر تعریف کنید.

سرعت خودروهایی که در بزرگراه کاشان — نطنز حرکت می‌کنند، $X(km/h)$ است.

۱۳.۶ گزاره زیر را در نظر بگیرید

مجید X تخم‌مرغ همراه با صبحانه می‌خورد.

که در آن $X \in U = \{۰, ۱, ۲, ۳, ..., ۱۰\}$. توزیع‌های احتمال و امکان زیر برای متغیر X ارائه شده‌اند

U	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
$P_X(u)$	۰/۲۰	۰/۵	۰/۲۵	۰/۰۵	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
$\Pi_X(u)$	۰/۸	۱	۱	۰/۷	۰/۵	۰/۳	۰/۲	۰/۱	۰	۰	۰

دقت کنید که مقادیر $P_X(u)$ بر طبق آمار گذشته و با دانستن فراوانی روزهایی که مجید u تخم‌مرغ در صبحانه خورده است (نسبت به کل روزهای تحت بررسی) به دست آمده است. از سوی دیگر، مقادیر $P_X(u)$ بر اساس توانایی و سازگاری مجید (از لحاظ ساختار بدنی، علاقه، ...) با خوردن u تخم‌مرغ در صبحانه نوشته شده است.

بررسی کنید که توابع احتمال و امکان بالا در اصل سازگاری زاده صدق می‌کنند. به‌علاوه در شرط دوبوا و پراد نیز صدق می‌کنند، و هم‌چنین در اصل سازگاری امکان — احتمال نیز صدق می‌کنند.

۱۴.۶ در تمرین بالا، فرض کنید توزیع‌های احتمال و امکان مربوط به متغیر X به صورت زیر باشند

U	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
$P_X(u)$	۰/۱	۰/۱	۰/۴	۰/۴	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
$\Pi_X(u)$	۱	۱	۰/۶	۰/۵	۰/۳	۰/۲	۰/۱	۰	۰	۰	۰

بررسی کنید که توابع احتمال و امکان بالا در اصل سازگاری زاده صدق می‌کنند، ولی در شرط دوبوا و پراد صدق نمی‌کنند.

۱۵.۶ در تمرین ۱۳.۶، فرض کنید توزیع‌های احتمال و امکان مربوط به متغیر X به صورت زیر باشند

U	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
$P_X(u)$	۰/۱	۰/۱	۰/۲	۰/۴	۰/۲	۰	۰	۰	۰	۰	۰
$\Pi_X(u)$	۱	۰/۹	۰/۸	۰/۷	۰/۵	۰/۳	۰/۱	۰	۰	۰	۰

بررسی کنید که توابع احتمال و امکان بالا در اصل سازگاری زاده صدق می‌کنند، و در شرط دوبوا و پراد نیز صدق می‌کنند، ولی در اصل سازگاری امکان — احتمال صدق نمی‌کنند.

۱۶.۶ در تمرین ۱۳.۶، اندازه سازگاری توابع احتمال و امکان را بیابید.

۱۷.۶ بر پایه‌ی نتایج آزمون‌های گذشته مربوط به ۵ دانشجو و توانایی‌های آن‌ها در طول تحصیل، توابع امکان زیر به‌عنوان پیش‌بینی نمره‌ی آن‌ها در امتحان اصول مدیریت ارائه شده است

			نمره			
دانشجو	A	B	C	D	E	F
مهشید	۰/۷	۱	۰/۶	۰/۱	۰	۰
مهوش	۱	۰/۸	۰/۶	۰/۲	۰/۰۵	۰
مهرو	۰/۲	۰/۵	۰/۵	۱	۰/۵	۰/۳
مهتاب	۰/۳	۱	۰/۵	۰/۳	۰/۳	۰/۱
مهناز	۰/۳	۱	۰/۴	۰	۰	۰

الف) امکان این که مهوش در امتحان اصول مدیریت نمره‌ی A یا B بگیرید، چقدر است؟ امکان این که نمره‌ی C یا پایین تر بگیرد، چقدر است؟ اندازه لزوم این پیشامد چقدر است؟

ب) امکان این که مهتاب نمره A یا B بگیرد؟ چقدر است؟ اندازه لزوم این پیشامد چند است؟

پ) امکان این که مهرو یا مهتاب نمره‌ی F بگیرند، چقدر است؟

ت) امکان این که دست کم یکی از این دانشجویان نمره‌ی F بگیرد، چقدر است؟ اندازه لزوم این پیشامد چند است؟

فصل ۷

منطق فازی

چشم‌ها را باید شست، جور دیگر باید دید.
واژه‌ها را باید شست.
واژه باید خود باد، واژه باید خود باران باشد.
سهراب سپهری[۱]

مقدمه

منطق عبارت است از علم روش‌ها و اصول استدلال. منطق کلاسیک، که دیرینگی آن به دوران ارسطو باز می‌گردد، تنها با مفاهیم و استدلال‌های دقیق سر و کار دارد. از طرف دیگر استدلال‌هایی که انسان در زندگی روزمره انجام می‌دهد، و بر مبنای نتایج آنها تصمیم‌گیری می‌کند، به‌ندرت آن دقتی را دارند که بتوان آن‌ها را در چارچوب منطق کلاسیک صورت‌بندی کرد. برای مثال قانون قیاس استثنایی را که یک قاعده اساسی و بسیار مهم در منطق کلاسیک است، در نظر بگیرید. بیان ساده‌ی این قانون چنین است: $(A,(A\to B))\to B$. برای نمونه از دو گزاره «سقراط انسان است» و «هر انسانی فانی است»، نتیجه می‌شود «سقراط فانی است». اما آیا تمام استدلال‌های قیاسی ما دقیقاً در این قالب می‌گنجند؟ مسلماً خیر. به چند نمونه اشاره می‌کنیم.

[۱] سهراب سپهری، هشت کتاب (از شعر: صدای پای آب)، انتشارات طهوری، ۱۳۷۹.

ما از دو گزاره «بهروز متوسط القامه است» و «بهزاد کمی بلندتر از بهروز است»، نتیجه می‌گیریم که «بهزاد کمی بلند قد است»؛ و از دو گزاره «اگر فشار متوسط باشد، آنگاه دما متوسط خواهد بود؛ و اگر فشار زیاد باشد، آنگاه دما زیاد خواهد بود» و «فشار بسیار زیاد است»، نتیجه می‌گیریم که «دما بسیار زیاد است»؛ و هم‌چنین از دو گزاره «دربیش از نیمی از زمستان هوای تبریز سرد است» و «در اکثر فصل زمستان هوای اردبیل از تبریز سردتر است»، نتیجه می‌گیریم که «در حدود نیمی از زمستان هوای اردبیل بسیار سرد است». هیچ‌کدام ازاین نوع استدلال‌ها در قالب قانون قیاس استثنایی و نه هیچ قانون منطقی دیگر در منطق کلاسیک نمی‌گنجد. زیرا در این استدلال‌ها از مفاهیم نادقیق و تقریبی استفاده شده است (مانند بلند، کمی، متوسط، زیاد، بسیار زیاد، اکثر، بسیار سرد) که درمنطق کلاسیک وجود ندارند. خود می‌توانید قضاوت کنید که چه مقدار از استدلال‌های انسانی و از طرف دیگر وضعیت‌ها و زمینه‌هایی که انسان (یا یک سیستم هوشمند دیگر) می‌خواهد در آن‌ها تصمیم بگیرد از نوع کاملاً دقیق است که بتوان از منطق کلاسیک بهره جست.

منطق فازی ابزار مناسبی برای صورت‌بندی این نوع مفاهیم و استدلال‌ها یعنی مفاهیم نادقیق و استدلال‌های تقریبی است. به عبارت دیگر این منطق، منطقی است برای توصیف استدلال‌های انسانی آن چنان که هست، و به کارگیری آن‌ها در سیستم‌های هوشمند.

موضوع منطق فازی شایستگی عنوان یک بلکه چندین کتاب را دارد. اما در این کتاب، که هدف آن آشنایی کلی با مبانی نظریه مجموعه‌های فازی است، به ناچار به ارائه‌ی مطالب اصلی منطق فازی بسنده می‌کنیم. در دو فصل آینده نیز به موضوع استدلال تقریبی می‌پردازیم.

در بخش اول این فصل مروری بر منطق کلاسیک می‌کنیم. بخش دوم شامل یک مطالعه‌ی اجمالی برمنطق‌های چندارزشی است.

دربخش سوم به متغیرهای زبانی پرداخته‌ایم که نقش اساسی منطق فازی دارند. در بخش چهارم سیمای کلی منطق فازی را ارائه کرده‌ایم. افرادی که به جهات کاربردی منطق فازی علاقمندند می توانند از بخش سوم به مطالعه‌ی این فصل بپردازند. چند نکته‌ی تکمیلی که ارتباطی باتداوم منطقی مباحث ندارند، در بخش نکات تکمیلی آورده شده‌اند.

۷.۱ مروری بر منطق کلاسیک

منطق علم استنتاج است و هدف از آن مهیا ساختن ابزار نظام یافته‌ای است که با کمک آن دریابیم که آیا نتایج ادعا شده، حاصل مقدمه‌هایی مفروض هستند یا نه، یعنی آیا استنتاج‌ها درست هستند یا نادرست. منطق کلاسیک دوارزشی که تاچند دهه‌ی گذشته تنها منطق موجود بوده و اکنون نیز مسلط‌ترین و سامان یافته‌ترین منطق است، با گزاره‌هایی سر و کار دارد که فرض می‌شوند یا درست هستند یا نادرست (هر چند ما نتوانیم یا مشکل بتوانیم درست یا نادرست بودن آن‌ها را تحقیق کنیم). از حدود یک سده قبل، تلاش‌هایی جهت نمادین کردن منطق انجام شده است تا از اغتشاش و سفسطه در منطق جلوگیری شود.

منطق گزاره‌ها

یک حوزه‌ی منطق، منطق گزاره‌ها نام دارد که با گزاره‌ها یعنی عباراتی که راست و یا دروغ‌اند سر و کار دارد. معمولاً به جای خود گزاره‌ها از متغیرهای گزاره‌ای که جانشین آن‌ها می‌شوند استفاده می‌کنیم. هر گزاره یا درست است یا نادرست، پس می‌توان تصور کرد که هر متغیر گزاره‌ای یکی از دو ارزش درستی T (درست) یا F (نادرست) را اختیار می‌کند. استفاده از این نمادها به توصیف گزاره‌ها و روابط بین آن‌ها براساس جداولی که جداول درستی نامیده می‌شوند، کمک می‌کند. مسلماً هر عبارتی شاید چنان ساده نباشد که بتوان بلافاصله به آن نسبت درست یا نادرست داد، بلکه می‌تواند یک گزاره مرکب از چند گزاره ساده باشد که توسط تعدادی **رابط** به هم مرتبط اند. مهم‌ترین رابط‌ها در جدول زیر عرضه شده‌اند.

جدول ۱.۷ رابط‌های مهم در منطق کلاسیک.

نماد	معنی	اصطلاح
$\sim A$	چنین نیست که A	نقیض A
$A \wedge B$	A و B	ترکیب عطفی A و B
$A \vee B$	A یا B	ترکیب فصلی A و B
$A \rightarrow B$	اگر A آنگاه B	ترکیب شرطی A و B
$A \leftrightarrow B$	A تنها اگر B	ترکیب دوشرطی A و B

$\sim A$، نقیض گزاره A، درست است اگر A نادرست باشد، و نادرست است اگر A درست باشد. این مطلب به صورت نمادین در جدول درستی زیر نشان داده شده است

A	$\sim A$
T	F
F	T

جدول‌های درستی چهار رابطه دیگر در جدول زیر خلاصه شده‌اند.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

در منطق دوارزشی برای ترکیب دو گزاره می‌توان ۱۶ رابط تعریف کرد ولی پنج رابط بالا رابطهایی هستند که متداول و معمول اند و البته تعابیر مناسبی هم دارند. گر چه می‌توان به مجموعه‌هایی کوچک‌تر ازاین پنج تا نیز اکتفا کرد و بقیه رابط‌ها را بر پایه‌ی آنها به‌دست آورد و در نتیجه تمام گزاره‌های مرکب را صرفاً بر پایه‌ی آنها نوشت (مثلاً مجموعه‌های ($\vee$ و$\sim$) یا($\wedge$ و$\sim$)؛ ولی این کار منجر به پیچیدگی و طولانی شدن عبارات خواهد شد. پس برای جلوگیری از ابهام و پیچیدگی، قرارداد می‌کنیم که صرفاً با گزاره‌های مرکبی سر و کار داشته باشیم که در آنها فقط متغیرهای گزاره‌ای و پنج رابطفوق وجود دارند. برای تمایز این گزاره‌ها با دیگر گزاره‌هایی که ممکن است با رابط‌های دیگر تعریف شوند، این گزاره‌ها را صورت‌های گزاره‌ای می‌نامیم. برای بررسی درستی یا نادرستی یک صورت گزاره‌ای، کافی است یک جدول درستی تشکیل دهیم. یعنی جدولی که به ازای هر ارزش دهی به متغیرهای گزاره‌ای، ارزش درستی صورت گزاره‌ای را نشان دهد.

مثال ۱.۷ جدول درستی صورت گزاره‌ای $(A \rightarrow (B \wedge C))$ این‌گونه است

A	B	C	$B \wedge C$	$(A \rightarrow (B \wedge C))$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

در حالت کلی برای یک گزاره مرکب شامل n متغیر گزاره‌ای مختلف، جدول درستی دارای 2^n سطر خواهد بود. که هر کدام به یکی از ترکیب‌های ممکن ارزش‌های درستی متغیرهای گزاره‌ای مربوط می‌شوند. از این گذشته توجه کنید که برای هر جدول درستی به صورت فوق یعنی با 2^n سطر، 2^{2^n} روش ممکن برای قرار دادن T و Fها در آخرین ستون جدول درستی وجود دارد.

تعریف ۱.۷ یک صورت گزاره‌ای یک راستگو (تناقض) نامیده می‌شود اگر به ازای هر ارزش دهی به متغیرهای گزاره‌ای آن، ارزش $T(F)$ داشته باشد.

مثال ۲.۷ $A \vee \sim A$ و $A \leftrightarrow \sim\sim A$ و $A \to (B \to A)$ چند راستگو هستند و $A \wedge \sim A$ یک تناقض است. برای نمونه به جدول درستی $A \to (B \to A)$ توجه کنید

A	B	$B \to A$	$A \to (B \to A)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T

راستگوها از آن جهت اهمیت دارند که در استدلال قیاسی از آن‌ها استفاده می‌شود.

آنچه از به کارگیری مفاهیم فوق برای ما مهم است این است که بدانیم یک گزاره‌ی مفروض را می‌شود از تعدادی مقدمات نتیجه گرفت یا خیر؟

تعریف ۲.۷ هنگامی که که دنباله‌ای متناهی از صورت‌های گزاره‌ای داریم که آخرین آنها به عنوان نتیجه و بقیه به عنوان مقدمات تلقی می‌شوند، این دنباله را یک صورت استدلالی گوییم.

اکنون سؤال این است که چه هنگام یک استدلال معتبر و صحیح است؟ از لحاظ شهودی آنچه که از یک استدلال معتبر انتظار داریم این است که تحت هر ارزش‌دهی به متغیرهای گزاره‌ای، اگر همه‌ی مقدمات ارزش T را اختیار کنند، نتیجه هم ارزش T را اختیار کند. پس فرض کنید $A_۱, \ldots, A_n$ و A چند صورت گزاره‌ای باشند.

تعریف ۳.۷ صورت استدلالی $(A_۱, A_۲, \ldots, A_n) \Rightarrow A$ **نامتعبر** است اگر بتوان یک نوع ارزش‌دهی برای متغیرهای گزاره‌ای آن یافت به‌طوری که هر یک از $A_۱, \ldots, A_n$ ها دارای ارزش T باشند ولی A دارای ارزش F باشد. در غیر این صورت استدلال **معتبر** است.

تعریف فوق، در عین حال، یک روش برای آزمون اعتبار یک صورت استدلالی نیز در اختیار ما می‌گذارد. ولی اگر تعداد متغیرهای گزاره‌ای زیاد باشد، جدول درستی غیر قابل مهار و غیر عملی خواهد بود. خوشبختانه برای رسیدن به مقصود، به تمام جدول ارزش احتیاج نداریم بلکه می‌توانیم جستجوی خود را محدود کنیم به تلاش برای یافتن سطری که مقدمات آن درست و تالی آن نادرست باشد. با یافتن چنین سطری استدلال نامعتبر خواهد بود و با اثبات عدم وجود چنین سطری، استدلال معتبر است. یک جنبه‌ی اهمیت راستگو این است که ثابت می‌شود صورت استدلالی $(A_۱, \ldots, A_n) \Rightarrow A$ معتبر است اگر و

فقط اگر صورت گزاره‌ای $((A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow A)$ یک راستگو باشد.

آنچه تاکنون گفته شد، مفاهیم مهم منطق گزاره‌ها نام دارد. ولی هنوز به یک نکته اساسی نپرداخته‌ایم. اینکه یک فرآیند استنتاج را از کجا و بر چه پایه‌هایی شروع کنیم؟ مسلماً نمی توان یک استنتاج را از هیچ به عمل آورد و باید تعدادی فرض‌های اولیه داشته باشیم. در اینجاست که به منطق صوری گزاره‌ها می‌رسیم. یعنی یک دستگاه منطقی که همه چیز، اعم از نمادها و فرمول‌ها و قوانین، درآن مشخص و معین باشند. رایج‌ترین دستگاه صوری گزاره‌ها دستگاهی است که تنها فرمول‌های به کار رفته شده درآن، صورت‌های گزاره‌ای بوده و دارای سه اصل موضوع زیر است [۴]،

$$
\begin{array}{ll}
L_1) & (A \rightarrow (B \rightarrow A)) \\
L_2) & ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\
L_3) & (((\sim A) \rightarrow (\sim B)) \rightarrow (B \rightarrow A))
\end{array}
$$

به‌علاوه تنها قاعده استنتاج در این دستگاه، قاعده قیاس استثنایی در قالب زیر است

$$
\begin{array}{l}
p_1 : A \rightarrow B \\
\underline{p_2 : A \qquad\quad} \\
\therefore B
\end{array}
$$

دقت کنید که در قاعده فوق، دقیقاً همان چیزی که در مقدم رابطه شرطی p_1 آمده است، به عنوان مشاهده در p_2 آمده است. این نکته یک تفاوت استنتاج در منطق دوارزشی و در منطق فازی است که در آینده به آن می‌پردازیم. این نکته را نیز یادآور می‌شویم که در منطق گزاره‌ها، اعتبار یک استدلال و استنتاج تنها به رابطه‌ی بین مقدمات و نتیجه بستگی دارد و نه به رابطه‌ی بین اجزای گزاره‌ها یا معنی آن‌ها.

منطق محمولات

گر چه با داشتن یک دستگاه صوری گزاره‌ها می‌توانیم چیزهایی درباره‌ی آنچه که یک استدلال را معتبر می‌سازد کشف نماییم، اما بعضی از استدلال‌ها الگویی دارند که تمهیدات فوق برای بررسی آن‌ها کافی نسیت. مثال زیر را در نظر بگیرید:

۱) هر انسانی فانی است.

۲) سقراط انسان است.

۳) پس، سقراط فانی است.

هر چند از لحاظ شهودی استدلال فوق پذیرفتنی است، ولی این استدلال در چارچوب منطق گزاره‌ها نمی‌گنجد.

دراین مثال اعتبار استدلال به رابطه‌ی بین مقدمات و نتیجه و در عین حال به رابطه‌ی بین گزاره‌های به کار رفته و نیز به صورت‌های خود گزاره‌ها وابسته است. به‌طور خلاصه دو تفاوت با حالت‌های قبل داریم.

۱. استفاده از محمول. توضیح آنکه هر گزاره ساده، یک موضوع و یک محمول دارد. موضوع چیزی است که گزاره درباره‌ی آن چیزی را بیان می‌کند و محمول به خاصیتی از موضوع مربوط می‌شود. در گزاره‌ی سقراط انسان است، «سقراط» موضوع و «انسان است»، محمول گزاره می‌باشد. می‌توان گامی در جهت نمادین شدن برداشت و جمله سقراط انسان است را مثلاً با $A(s)$ نشان داد که در آن A یک حرف محمولی است که به جای «انسان است» و s به جای «سقراط» قرار گرفته است.

۲. استفاده از قید «هر» که آن‌را سور عمومی می‌نامیم و با نماد $\forall$ نشان میدهیم. البته سور دیگری هم داریم که سور وجودی نام دارد که همان قید «بعضی» است و معنی «دست کم یکی» را می‌دهد و با نماد $\exists$ نشان داده می‌شود. با این توضیحات و با در نظر گرفتن A برای محمول «انسان است» و B به جای «فانی است» و s به جای «سقراط» و x در مقام یک متغیر، صورت استدلالی فوق این گونه می‌شود

$$\begin{array}{l} \forall x; (A(x) \to B(x)) \\ A(s) \\ \hline \therefore B(s) \end{array}$$

برای داشتن یک ساختار روشن و دقیق که استدلال‌هایی از نوع بالا را نیز بتوان در آن بررسی کرد، منطق صوری محمولات، با روشی مشابه ساخت دستگاه صوری گزاره‌ها، ساخته می‌شود. بدین معنی که مجموعه‌ی نمادها و اصول موضوع و قاعده استنتاج منطق صوری گزاره‌ها و افزون بر این‌ها نمادها و اصول و قاعده‌ای برای کار با گزاره‌های شامل سور، منطق صوری محمولات را تشکیل می‌دهند.

نکته ۱.۷ نکته شایان ذکر این است که هم سورهای عمومی و وجودی در منطق محمولات و هم محمول‌ها مفاهیم دقیق و مشخص و کاملاً تعریف شده هستند. دراین منطق نمی‌توان از سورها و محمول‌های نادقیق استفاده کرد. مثلاً عبارت «بسیاری از انسان‌ها عمر طولانی می‌کنند» در این منطق قابل بررسی نیست، زیرا «بسیاری» نه سور عمومی و نه سور وجودی است و به‌علاوه محمول «عمر طولانی می‌کنند» نیز نادقیق و مبهم است. این نکته نیز از تفاوت‌های منطق معمولی و منطق فازی است که در بخش‌های آینده در باره‌ی آن بحث خواهیم کرد.

۷.۲ منطق‌های چند ارزشی

منطق دوارزشی با عباراتی سرو کار دارد که یا درست‌اند و یا نادرست. محدود شدن به چنین عباراتی، معادل است با چشم‌پوشی از بسیاری از مفاهیم و گزاره‌هایی که وضعیت مشخصی ندارند، یعنی نه کاملاً درست اند و نه کاملاً نادرست. برای رفع این مشکل، منطق‌دانان منطق‌های مختلف سه ارزشی را به عنوان تعمیمی از منطق دوارزشی پیشنهاد کرده‌اند. دراین منطق‌ها ارزشی سومی که بین دو ارزش درست و نادرست است وجود دارد. گزاره‌هایی که از لحاظ درستی، نامشخص یا مبهم یا غیر قابل تصمیم هستند، ارزش سوم را دارند. نخستین منطق سه‌ارزشی توسط لوکاسیویچ [۲]، منطق‌دان لهستانی، در سال‌های حدود ۱۹۳۰م عرضه شد. سپس محققان دیگر، منطق‌های سه‌ارزشی دیگری ارائه کردند. وجه اشتراک این منطق‌ها دراین است که همگی به گزاره‌ی درست ارزش ۱ و به گزاره‌ی نادرست ارزش ۰ و به گزاره‌ی نامشخص ارزش $\frac{1}{2}$ می‌دهند. همچنین نقیض هر گزاره با ارزش a، ارزش $1-a$ دارد. اما تفاوت منطق‌های سه‌ارزشی در تعریف جداول درستی برای رابط‌های $\wedge$ و $\vee$ و $\rightarrow$ و $\leftrightarrow$ است.

جدول‌های درستی برای منطق‌های سه ارزشی منسوب به لوکاسیویچ، بوخوار[۳]، لین[۴]، هی‌تینگ [۵] در جدول زیر عرضه شده است [۷۸].

جدول ۲.۷ جدول تعریف رابطها برای چهار منطق سه ارزشی.

		لوکاسیویچ				بوخوار				لین				هی‌تینگ			
a	b	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱
۰	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۱	۰
۰	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰
$\frac{1}{2}$	۰	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۰	۰
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱	۱
$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$	۱	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱	۱	$\frac{1}{2}$
۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰
۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

یک تفاوت اساسی بین منطق‌های سه‌ارزشی و دوارزشی این است که بعضی راستگوهای منطق دوارزشی در حالت سه‌ارزشی راستگو نیستند. به‌ویژه، در این منطق‌ها

[۲] J. Lukasiewicz
[۳] Bochvar
[۴] S.C. Kleene
[۵] A. Heyting

قوانین شمول ($a \vee \bar{a} = ۰$) و طرد ($a \wedge \bar{a} = ۰$) برقرار نیستند. به‌جای مفاهیم راستگو و تناقض، در این منطق‌ها از مفاهیم نیمه راستگو و نیمه تناقض استفاده می‌شود. یک صورت گزاره‌ای را نیمه راستگو (نیمه تناقض) گوییم اگر به ازای هر ارزش‌دهی به متغیرهای آن، حاصل عبارت، ارزش ۱ یا $\frac{۱}{۲}$ (۰ یا $\frac{۱}{۲}$) داشته باشد.

هم‌چنان که منطق دوارزشی به سه‌ارزشی تعمیم داده می‌شود، می‌توان آن‌را به منطق n– ارزشی (برای هر عدد طبیعی $n \geq ۳$) تعمیم داد. دراین منطق‌ها ارزش درستی هر گزاره با یک عدد گویا از بازه [۱ و۰] تعیین می‌شود. اولین منطق چند ارزشی را خود لوکاسیویچ عرضه کرد. در این منطق درجات درستی گزاره‌ها از مجموعه T_n زیر اختیار می‌شود

$$T_n\{۰ = \frac{۰}{n-۱}, \frac{۱}{n-۱}, \frac{۲}{n-۱}, \ldots, \frac{n-۲}{n-۱}, \frac{n-۱}{n-۱} = ۱\}$$

و رابط‌های منطقی به صورت زیر تعریف شده‌اند

$$\begin{array}{l}
\bar{a} = ۱ - a \\
a \wedge b = \min(a, b) \\
a \vee b = \max(a, b) \\
a \rightarrow b = \min(۱, ۱ + b - a) \\
a \leftrightarrow b = ۱ - |a - b|
\end{array}$$

رابط‌های فوق در حالت خاص $n = ۲$، به رابط‌های متناظر در حالت دوارزشی تبدیل می‌شوند. در حالت حدی وقتی $n \rightarrow \infty$، با یک منطق ∞– ارزشی سر و کار داریم که درجات درستی، اعداد گویا بازه [۱ و ۰] هستند. یک جانشین دیگر برای منطق ∞– ارزشی، منطقی است که درجات درستی می‌تواند هر عدد حقیقی از بازه [۱و۰] باشد. منطق اخیر را منطق استاندارد لوکاسیویچ می‌نامند. در این منطق تعریف رابطه‌های منطقی همان تعاریف بالا هستند. گرچه منطق‌های ∞– ارزشی مختلف، دارای راستگوهای یکسانی هستند، در زمینه‌ی منطق محمولات برخی تفاوت‌های اساسی دارند.

یک بحث نظری

منطق دوارزشی گزاره‌ها، با نظریه مجموعه‌ها (با تناظری مناسب بین عناصر آنها) یکریخت است. افزون براین، هر دوی آنها با جبر بولی یکریخت‌اند. یکریختی بین این سه دستگاه تضمین می‌کند که هر قضیه در یک دستگاه، متناظر با یک قضیه از دستگاه دیگر باشد. به جدول زیر توجه کنید.

جدول ۳.۷ نمادهای متناظر در سه دستگاه یکریخت: نظریه مجموعه‌ها، جبر بولی و منطق گزاره‌ها.

نظریه مجموعه‌ها	جبر بولی	منطق گزاره‌ها
$\mathcal{P}(X)$	B	$F(V)$
$\cup$	$+$	$\vee$
$\cap$	$.$	$\wedge$
$-$	$-$	$-$
X	1	1
ϕ	۰	۰
$\subseteq$	$\leq$	$\rightarrow$

هم‌چنین منطق استناندارد لوکاسیویچ با نظریه مجموعه‌های فازی (بر پایه‌ی عملگرهای min و max و متمم معمولی) یکریخت است. توجه کنید که اگر A یک مجموعه فازی باشد، $A(x)$ یعنی درجه عضویت عنصر x در مجموعه فازی A را می‌توان این گونه تعبیر کرد: درجه درستی گزاره‌ی «x عضو A است.»

البته می‌توان منطق‌های $\infty-$ ارزشی مختلفی تعریف کرد. چنان‌که می‌توان نظریه مجموعه‌های فازی را به روش‌های مختلفی، بر پایه‌ی عملگرهای مختلف برای اشتراک و اجتماع و متمم، ساخت. در این صورت هر منطق $\infty-$ ارزشی با یک نظریه مجموعه‌های فازی یکریخت است.

۷.۳ متغیرهای زبانی

انسان‌ها در زبان طبیعی و در استدلال‌های خود از متغیرهایی که مقادیر آنها نادقیق و مبهم هستند بیشتر استفاده می‌کنند تا متغیرهای معمولی که مقادیر آن‌ها دقیق و کاملاً مشخص‌اند. برای نمونه هیچ وقت نشنیده‌ایم که گفته شود: در جامعه‌های با میزان سوادی بیشتر از ۹۰٪ ناهنجاری‌های اجتماعی در کمتر از ۲۳٪ افراد جامعه مشاهده می‌شود، یا این‌که افراد سنگین‌تر از ۱۰۰(kg) دو برابر و نیم بیشتر از افراد کم وزن‌تر از ۷۰(kg) در معرض ایست قلبی اند؛ بلکه معمولاً گفته می‌شود: در جامعه‌های با میزان با سوادی بالا، ناهنجاری‌های اجتماعی کم است، یا این‌که افراد سنگین وزن بیشتر در معرض ایست قلبی‌اند. در موارد اخیر ازمقادیری مانند بالا، کم، بیشتر و سنگین استفاده شده است که مقادیری عددی نیستند بلکه، به بیان رایج، زبانی (کلامی) هستند. به‌طور خلاصه «منظور از یک متغیر زبانی متغیری است که مقادیرش کلمات یا عبارات یک زبان طبیعی یا مصنوعی باشد [۱۳۵]». برای مثال، سن یک متغیر زبانی است اگر مقادیر آن به‌جای آن‌که عددی باشد، مانند ۲۰ و ۲۱ و ۲۲ و...، زبانی باشد مانند جوان، نه جوان، خیلی جوان، کمی جوان، پیر، نه خیلی پیر، ... .

برای داشتن یک الگوی مشخص هم برای متغیرهای معمولی و هم متغیرهای زبانی به دو تعریف زیر توجه کنید.

تعریف ۴.۷ یک متغیر معمولی توسط یک سه‌تایی مرتب $(X, U, R(X;u))$ مشخص می‌شود، که در آن X نام متغیر است و U مجموعه مرجع و $R(X;u)$ یک زیرمجموعه از U است که به‌عنوان یک تحدید بر مقادیری از U که X می‌تواند آن‌ها را اختیار کند، عمل می‌کند.

مثال ۳.۷ فرض کنید X متغیر طول قد برای انسان‌ها باشد و $U = (۰, ۲۵۰)$ و $R(X) = [۱۰۰, ۱۵۰]$. در این صورت $R(X)$ نشان دهنده‌ی تمام انسان‌هایی است که طول قد آن‌ها دست‌کم ۱۰۰ و حداکثر ۱۵۰ سانتی‌متر است. دقت کنید که $R(X)$ یک تحدید برای مجموعه‌ی مقادیری است که X می‌تواند در U اختیار کند. به‌علاوه این تحدید کاملاً مشخص و معین است.

تعریف ۵.۷ یک متغیر زبانی توسط یک پنج‌تایی مرتب $(X, T(X), U, G, M)$ مشخص می‌شود که در آن X نام متغیر است و U مجموعه مرجع و $T(X)$ مجموعه‌ی ترم (واژه)های مربوط به متغیر X است (ترم، یک مجموعه فازی است) که توسط قاعدی نحوی G تولید می‌شود و سرانجام M یک قاعده‌ی معنایی است که به هر ترم از $T(X)$ معنای آن را مربوط می‌سازد، یعنی تابع عضویت آن ترم را مشخص می‌کند.

مثال ۴.۷ فرض کنید X متغیر زبانی قد باشد و $U = [۰, ۲۵۰]$، ترم‌های این متغیر زبانی که هر کدام یک مجموعه فازی از U هستند چنین باشند: بلند، کوتاه، خیلی بلند، نه خیلی بلند و ... . بنابراین در اینجا $T(X)$ به‌صورت زیر است (که البته در حالت کلّی، می‌توان این ترم‌ها را توسط یک قاعده $G(X)$ به‌طور منظم تولید کرد)

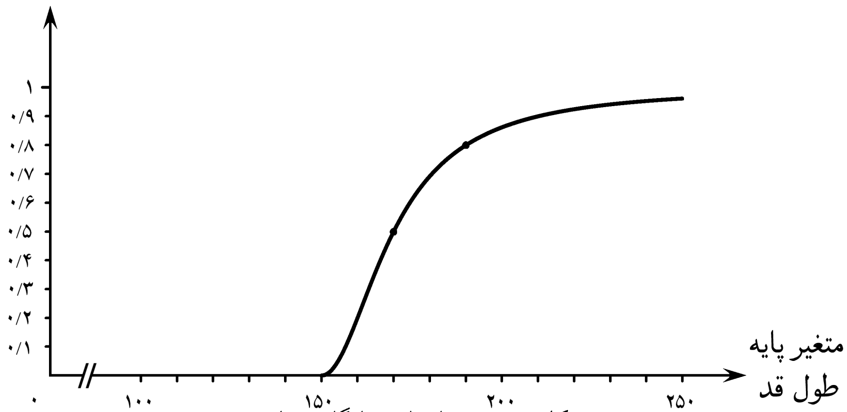
$$T(\text{طول قد}) = \{\text{بلند، کوتاه، خیلی بلند، نه‌خیلی بلند، ...}\}$$

$M(X)$ قاعده‌ای است که به هر ترم، معنایی را به‌صورت یک تابع عضویت از U می‌بخشد. مثلاً برای ترم A: «بلند» می‌توان مجموعه فازی زیر را در نظر گرفت

$$M(\text{بلند}) = \{(u, A(u)), u \in U\}$$

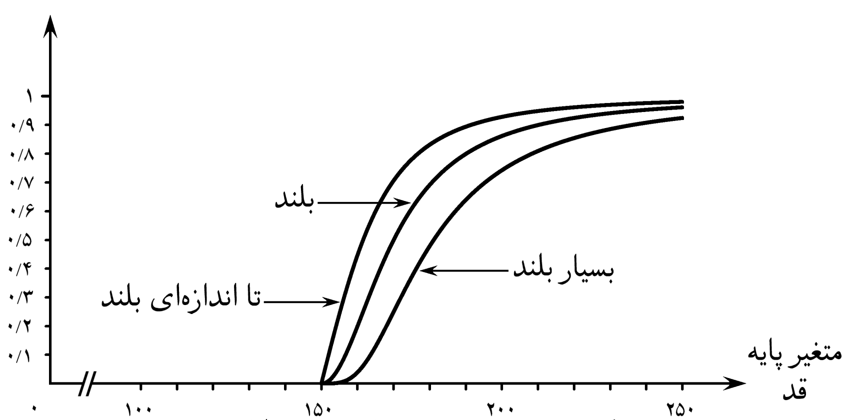
که در آن (شکل ۱.۷)

$$A(u) = \begin{cases} ۰ & ۰ \leq u < ۱۵۰ \\ \left[۱ + \left(\frac{u-۱۵۰}{۲۰}\right)^{-۲}\right]^{-۱} & ۱۵۰ \leq u \leq ۲۵۰ \end{cases}$$



شکل ۱.۷ نمودار تابع سازگاری بلند.

اکنون مثال فوق را از چند جنبه‌ی دیگر نیز بررسی می‌کنیم، و ضمن این بررسی، مفاهیم و نکات دیگری را یادآور می‌شویم. در این مثال متغیر عددی طول قد را که مقادیرش در [۲۵۰ و ۰] تغییر می‌کند، اصطلاحاً متغیر پایه گوییم. اکنون یک مقدار زبانی مانند بلند را می‌توانیم به صورت یک تحدید فازی بر مقادیر متغیر پایه تعبیر کنیم. این تحدید فازی، که آن‌را به‌صورت تابع عضویت یک مجموعه فازی بیان می‌کنیم، منظور ما را از معنی و مفهوم بلندقد بودن نشان می‌دهد. در این موارد، تابع عضویت مربوطه را تابع سازگاری نیز می‌نامید، زیرا این تابع به هر مقدار متغیر پایه، یک عدد از [۱ و۰] نسبت می‌دهد که نشان دهنده‌ی میزان سازگاری آن مقدار از متغیر پایه با تحدید فازی مورد نظر ما (در این‌جا: بلند قد) است. برای نمونه در این مثال $A_{\text{بلند}}(۱۶۰) = ۰/۱$ و $A_{\text{بلند}}(۱۹۰) = ۰/۶۴$ یعنی سازگاری طول قدهای ۱۶۰ و ۱۹۰ سانتی‌متر با آن معنا از بلند که به‌صورت تحدید فازی فوق بیان شد، به‌ترتیب ۰/۱ و ۰/۶۴ است. شکل ۲.۷، ساختار سلسله مراتبی متغیر طول قد همراه با چند مقدار زبانی آن‌را نشان می‌دهد.

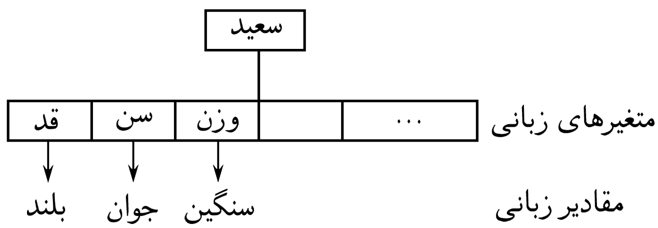


شکل ۲.۷ ساختار سلسله مراتبی متغیر طول قد.

در ادامه‌ی بررسی مثال بالا، فرض کنید گزاره‌ی «مسعود بلند قد است» داده شده باشد. در این‌صورت با توجه به این‌که متغیر مورد بررسی طول قد است و شخصِ مورد بحث مسعود، و مقدار زبانی متغیر طول قد برای مسعود «بلند» است، به‌صورت نمادین می‌نویسیم (از چپ به راست بخوانید)

بلند= (مسعود) طول قد (۱)

این معادله یک معادله تخصیص نامیده می‌شود. بدیهی است که درباره‌ی ویژگی‌ها و صفات مختلف مسعود می توان بحث کرد. در هر مورد یک متغیر زبانی داریم که یکی از مقادیر آن به مسعود تخصیص داده می‌شود. به شکل ۳.۷ توجه کنید.



شکل ۳.۷ تخصیص مقادیر زبانی مختلف به سعید.

مثال بالا را از جنبه‌ی منطقی نیز بررسی می‌کنیم. فرض کنید منظور خود را از بلند قد به‌صورت تابع سازگاری $A(u)$ بیان کرده باشیم. حال اگر طول قد مسعود ۱۹۰ سانتی‌متر باشد، می‌توانیم بگوییم: گزاره‌ی «مسعود بلند قد است» به اندازه ۰/۶۴ درست است.

در ادامه، متغیر زبانی درستی و متغیر زبانی احتمال را که به‌ترتیب در منطق فازی (که بعداً به آن می‌پردازیم) و در نظریه احتمال فازی اهمیت دارند، معرفی کرده و توضیح می‌دهیم.

متغیر زبانی درستی

یک متغیر زبانی که نقش محوری در منطق فازی دارد، متغیر زبانی درستی است. توضیح آن‌که در منطق $\infty-$ ارزشی، مقدار درستی یک گزاره می‌تواند به‌طور پیوسته از [۱و۰] انتخاب شود. اعداد عضو این بازه که مقادیر درستی گزاره‌ها را تعیین می‌کنند اعداد معمولی هستند، مثلاً ۰/۲ یا ۰/۷۸ یا ۱ یا ... . یک تعمیم این منطق به این صورت است که مقادیر درستی گزاره‌ها، خود، مقادیر زبانی باشند. در این حال با یک متغیر زبانی درستی سر و کار داریم که مجموعه‌ی ترم‌های مربوط به آن به صورت زیر است

T(درستی) = {درست، نه درست، خیلی درست، نادرست، نه درست و نه نادرست، ... }

در این‌جا مجموعه مرجع $U = [\circ, \text{۱}]$ است. یعنی متغیر پایه‌ی درستی، اعداد حقیقی از [۱و۰] را اختیار می‌کند. اما متغیر زبانی درستی مجموعه‌های فازی از [۱و۰] هستند. برای نمونه یک عضو از (درستی) T مثلاً «درست» توسط یک مجموعه فازی از $I = [\circ, \text{۱}]$ (یا به‌عبارت معادل توسط یک تابع سازگاری (عضویت) از I به I) تعریف می‌شود. اینکه تابع سازگاری مربوط به هر ترم چگونه تعریف شود به زمینه‌ی کاربرد آن و نظر متخصص باز می‌گردد. مثلاً برای معنی ترم «درست»، محققین توابع مختلفی را عرضه کرده‌اند.

بالدوین [6] [۱۸] توم «درست» را با تابع عضویت همانی تعریف می‌کند، یعنی

$$A(u) = u \qquad \circ \leq u \leq \text{۱}$$

به این معنی که اگر درجه درستی یک گزاره مثلاً ۰/۸ باشد، آن گزاره به اندازه ۰/۸ «درست» است.

بالدوین ترم‌های «خیلی درست» و «تقریباً درست» را به‌ترتیب به‌صورت $(A(u))^{\text{۲}}$ و $(A(u))^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}$ تعریف می‌کند. یعنی اگر درجه درستی یک گزاره ۰/۸ باشد آن گزاره به اندازه ۰/۶۴ «خیلی درست» و به اندازه ۰/۸۹ «تقریباً درست» است.

زاده [۱۳۵] تابع عضویت زیر را برای ترم $A =$ «درست» پیشنهاد کرده است

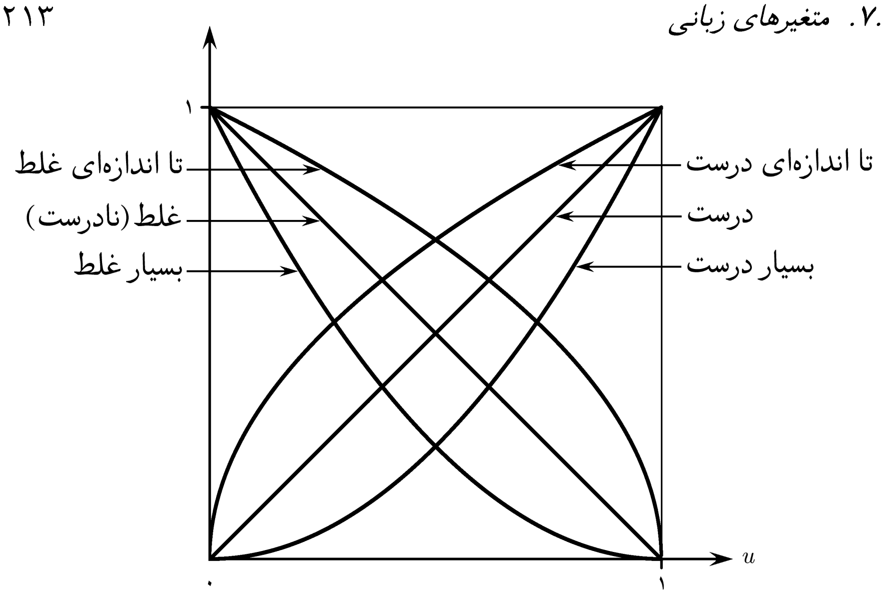
$$A(x) = \begin{cases} \circ & \circ \leq u < \alpha \\ \text{۲}\left(\frac{u-a}{\text{۱}-a}\right)^{\text{۲}} & a \leq u < \frac{a+\text{۱}}{\text{۲}} \\ \text{۱} - \text{۲}\left(\frac{\text{۱}-u}{\text{۱}-a}\right)^{\text{۲}} & \frac{a+\text{۱}}{\text{۲}} \leq u \leq \text{۱} \end{cases}$$

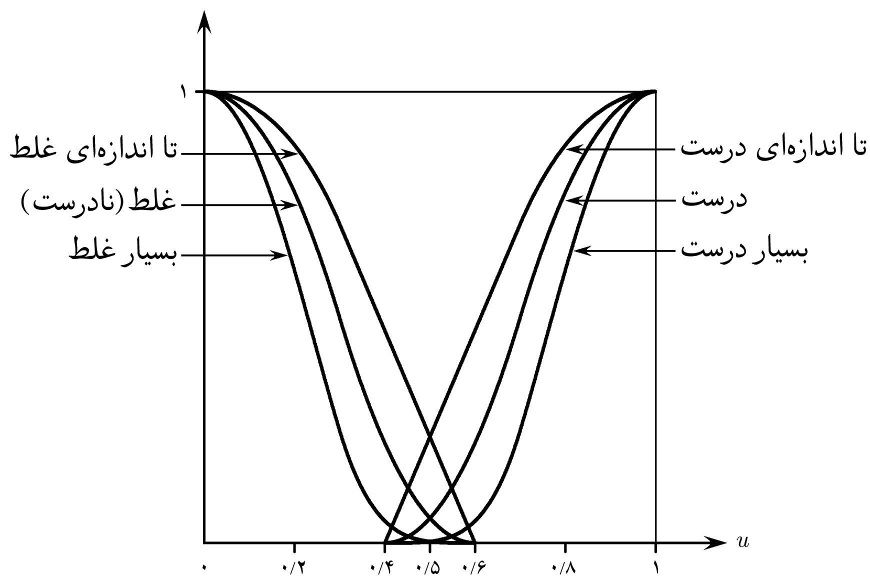
که درآن $\frac{\text{۱}+a}{\text{۲}}$ نقطه‌گذر است و $a \in [\circ, \text{۱}]$ پارامتری است که براساس دیدگاه کاربر تعیین می‌شود. پارامتر a حداقل مقدار برای u است که بتوان برای آن درجه‌ای مثبت از درستی در نظر گرفت. مثلاً چنان‌چه از دید شما مقدار درستی یک گزاره باید دست‌کم ۰/۶ باشد تا بتوانید به‌طور کلی لفظ درست را (با هر میزان و درجه‌ای) به آن اطلاق کنید، دراین صورت باید قرار دهید $a = \circ/\text{٦}$. در این حالت یک گزاره با مقدار درستی مثلاً ۰/۸ به اندازه ۰/۵ با معنی «درست» (از دید شما) سازگار است.

در شکل ۴.۷ توابع سازگاری ترم‌های «درست» و «نادرست» بنا به تعریف‌های بالدوین و زاده، برای $a = \circ/\text{٦}$، رسم شده اند. هم بالدوین و هم زاده ترم «نادرست» را به صورت متمم (نسبت به یک) ترم «درست» تعریف می‌کنند.

---

[6] J.F. Baldwin





شکل ۴.۷ نمودار ترم‌های «درست» و «نا درست» بر اساس دو تعریف مختلف.

نکته ۱.۷ با استفاده از متغیر زبانی درستی می‌توانیم گزاره‌ها و استنتاج‌هایی را که مبهم بوده و در منطق کلاسیک قابل بررسی نیستند، تحلیل کنیم. به استنتاج زیر که در زندگی روزمره با مانند آن بسیار سر و کار داریم توجه کنید.

مقدمه ۱: گزاره «افراد چاق خونسرد هستند» درست است.
مقدمه ۲: گزاره «افراد خونسرد صبورند» تقریباً درست است.
نتیجه: گزاره «افراد چاق صبورند» نسبتاً درست است.

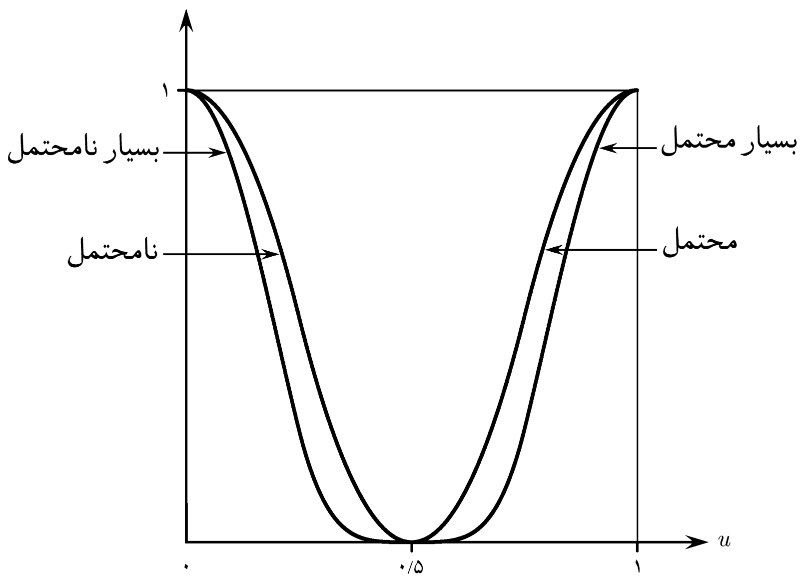
استنتاج بالا در قالب استنتاج‌های منطق‌های کلاسیک نمی‌گنجد، اما با استفاده از متغیر زبانی درستی می‌توان بسیاری از گزاره‌ها واستنتاج‌ها مانند استنتاج فوق را مدل‌سازی و آنگاه تحلیل و بررسی کرد. در فصول بعد به‌طور گسترده به این مسائل می‌پردازیم.

متغیر زبانی احتمال

کاربرد دیگر مفهوم متغیر زبانی در نظریه احتمال فازی است. هنگامی که بخواهیم احتمال را براساس متغیرهای زبانی آن در نظر بگیریم، مجموعه‌ی ترم‌ها به‌صورت زیر خواهد بود

$$T(\text{احتمال}) = \{\text{محتمل، خیلی محتمل، غیرمحتمل، کم و بیش محتمل، ...}\}$$

در اینجا نیز مجموعه مرجع $U = [0, 1]$ است. یعنی متغیر پایه‌ی احتمال، اعداد بازه $[0, 1]$ را اختیار می‌کند؛ اما متغیر زبانی احتمال، مجموعه‌های فازی از $[0, 1]$ را اختیار می‌کند. پس در اینجا نیز، مانند حالت متغیر زبانی درستی، هر تابع سازگاری تابعی از $[0, 1]$ به $[0, 1]$ است. تابع سازگاری چند ترم از T (احتمال) در شکل ۵.۷ رسم شده است [۱۴۶]. البته در اینجا نیز می‌توانیم توابع متفاوتی با آن‌چه عرضه شده است برای معنی و مفهوم ترم‌های مختلف از T (احتمال) در نظر بگیریم.



شکل ۵.۷ نمودار توابع عضویت چند ترم از متغیر زبانی احتمال.

مثال ۵.۷ برای روشن شدن موارد استفاده متغیر زبانی احتمال، این سؤال را در نظر بگیرید:

احتمال آن‌که تا حدود ۲۰ سال آینده شاهد یک سیلاب با دبی بالا در پشت سد زاینده‌رود باشیم چقدر است؟

ما می‌توانیم جواب دهیم: کم (به عنوان یک ترم از متغیر زبانی احتمال). دراینجا جواب زبانی به واقعیت و حقیقت نزدیک‌تر است تا جواب دقیق عددی. در نظر بگیرید که اولاً «سیلاب با دبی بالا» یک پیشامد فازی است و ثانیاً درک ما از عوامل مؤثر در بروز یک سیلاب منجر به یک گزاره‌ی صریح و دقیق درباره‌ی احتمال وقوع آن نمی‌شود. گذشته از این‌ها، تا حدود ۲۰ سال آینده، خود یک زمان نادقیق است.

۷.۴ گزاره‌های فازی

گزاره‌هایی که در منطق کلاسیک استفاده می‌شوند، شامل مؤلفه‌های دقیق هستند. در حالی که در زبان طبیعی از گزاره‌هایی استفاده می‌کنیم که مؤلفه‌های نادقیق دارند. در چارچوب منطق فازی، به این گزاره‌ها گزاره‌های فازی می‌گوییم. چهار نوع اصلی گزاره‌های فازی عبارت هستند از:

۱) گزاره‌های غیرشرطی غیرتوصیفی

۲) گزاره‌های غیرشرطی توصیفی

۳) گزاره‌های شرطی غیرتوصیفی

۴) گزاره‌های شرطی توصیفی

گزاه‌های غیرشرطی غیر توصیفی

این نوع گزاره‌ها به‌صورت زیر هستند

$$P : \mathcal{V} \ is \ F \qquad (۲)$$

که در آن V نام متغیر پایه‌ی مورد نظر است که مقادیر ν را از مجموعه مرجع V اختیار می‌کند. هم‌چنین F یک مجموعه فازی (یک ترم) از مجموعه مرجع V است (F در واقع یک محمول فازی است). به‌علاوه میزان درستی گزاره P، به ازای هر مقدار ν از V، برابر درجه عضویت ν در F است.

مثال ۶.۷ گزاره: «درجه حرارت هوا بالا است» را در نظر بگیرید. در این گزاره، که یک گزاره فازی (غیرشرطی غیرتوصیفی) است، متغیر مورد بحث ($\mathcal{V}$) درجه حرارت هوا است که مقادیرش را، مثلاً، از مجموعه مرجع $V = [-۵۰, ۷۰]$ اختیار می‌کند. هم‌چنین بالا یک ترم از ترم‌های متغیر زبانی درجه حرارت است، که می‌توان آن‌را با یک تابع عضویت از V تعریف کرد.

تذکر گاهی، مقادیر $\mathcal{V}$ به عناصری از یک مجموعه I نسبت داده می‌شوند. در این موارد یک گزاره‌ی غیرشرطی غیرتوصیفی به شکل زیر نوشته می‌شود ($i \in I$)

$$P : \mathcal{V}(i) \;\; is \;\; F \tag{۳}$$

مثال ۷.۷ گزاره «طول قد سعید، بلند است» و، به‌طور متناظر، معادله تخصیص زیر را در نظر بگیرید

بلند= (سعید) طول قد

در گزاره‌ی بالا، که یک گزاره فازی (غیرشرطی غیرتوصیفی) است، متغیر مورد بحث ($\mathcal{V}$) طول قد است که مقادیرش را از مجموعه مرجع $V = [۰, ۲۵۰]$ اختیار می‌کند. سعید یک عضو از مجموعه انسان‌ها $= I$ است، و بلند یک ترم از ترم‌های متغیر زبانی طول قد است (که مثلاً با تابع عضویت $A(\nu)$ مثال ۴.۷ تعریف می‌شود). به‌علاوه اگر مقدار عددی طول قد ۱۹۰ سانتی‌متر باشد، آنگاه میزان درستی گزاره بالا برابر با $A(۱۹۰) = ۰/۶۴$ است.

گزاره‌های غیرشرطی توصیفی

این گزاره‌ها به صورت زیر هستند

$$P : "\mathcal{V} \;\; is \;\; F" \;\; is \;\; S \tag{۴}$$

که در آن $\mathcal{V}$ و F همان‌هایی هستند که پیش‌تر گفتیم، و S یک توصیف کننده است. توصیف کننده‌ها بر سه نوع‌اند:

۱) توصیف کننده درستی، با مقادیری مانند: درست، بسیار درست، کمی درست، ... .

۲) توصیف کننده احتمالی، با مقادیری مانند: محتمل، بسیار محتمل، کمی محتمل، ... .

۳) توصیف کننده امکانی، با مقادیری مانند: ممکن، بسیار ممکن، کمی ممکن، ... .

به علاوه میزان درستی گزاره P به ازای هر مقدار ν از V برابر میزان عضویت $F(\nu)$ در S منظور می‌شود، یعنی $S(F(\nu))$.

مثال ۸.۷ گزاره زیر را در نظر بگیرید

(۵) مسعود بلند قد است، کم و بیش درست است.

در این گزاره، متغیر مورد در نظر ($\mathcal{V}$) طول قد است و مجموعه فازی بلند قد (با تابع عضویت $A(\nu)$ مثال ۴.۷) نقش F را در صورت گزاره‌ای ۴.۷ دارد. هم‌چنین «کم و بیش درست» نقش S را در ۴.۷ ایفا می‌کند. همان‌طور که قبلاً گفته شد، «کم و بیش درست» را می‌توان براساس تعریفی برای درست (مثلاً $A(\nu) = \nu$) و به‌صورت $(A(\nu))^{\frac{1}{2}}$ تعریف کرد.

مثال ۹.۷ در مثال بالا، فرض کنید بلند قد به وسیله‌ی تابع عضویت مثال ۴.۷ تعریف شود. هم‌چنین کم و بیش درست به صورت $T(\nu) = \nu^{\frac{1}{2}}$ تعریف شود. اکنون اگر طول قد مسعود ۱۹۰ سانتی‌متر باشد، آنگاه میزان درستی گزاره ۵.۷، برابر $T(A(۱۹۰)) = T(۰/۶۴) = ۰/۸$ است.

نکته ۲.۷ شایسته است توضیحی درباره‌ی گزاره‌هایی به صورت ۴.۷ که توصیف کننده‌ی احتمالی دارند، داده شود (تشریح مطلب درباره‌ی گزاره‌های با توصیف کننده‌ی امکانی به‌طور مشابه است). در مواردی که از گزاره‌های غیرشرطی توصیفی با توصیف کننده‌های احتمالی استفاده می‌شود، صورت گزاره‌ای ۴.۷ را بدین گونه می‌نویسیم

$$P : Prob\{\mathcal{V} \ \ is \ \ F\} \ \ is \ \ S \qquad (٦)$$

هر گزاره به صورت $Prob\{\mathcal{V} \ \ is \ \ F\}$ بیانگر یک تحدید منعطف بر مقادیر محتمل متغیر $\mathcal{V}$ است. فرض کنید $f(\nu)$ تابع چگالی احتمال بر فضای V باشد. در این‌صورت، طبق رهیافت زاده برای احتمال پیشامدهای فازی [ ]،

$$Prob\{\mathcal{V} \ \ is \ \ F\} = \int_{\nu \in V} f(\nu) F(\nu) d\nu \qquad (۷)$$

(در حالت گسسته که به جای تابع چگالی، تابع جرم احتمال داریم، انتگرال‌گیری به مجموع‌یابی تبدیل می‌شود). اکنون میزان درستی گزاره P عبارت است از

$$T(P) = S(\int f(\nu) F(\nu) d\nu \qquad (۸)$$

مثال ۱۰.۷ فرض کنید $\mathcal{V}$ بهای هر شبکه نفت ایران در یک بازار خاص در ماه آینده باشد. گزاره زیر را که مانند آن در محاورات روزانه متداول است در نظر بگیرید

(۹) بسیار محتمل است که قیمت نفت در ماه آینده حدود ٦۵ دلار باشد.

گزاره بالا در واقع یک گزاره فازی غیرشرطی توصیفی است که اگر آن‌را به‌صورت ٦ بازنویسی کنیم، داریم

$$Prob\{\mathcal{V}\ is\ around\ \$٦۵\}\ is\ verry\ likely$$

اکنون فرض کنید تابع چگالی احتمال قیمت نفت (با مشخصات گفته شده) بر پایه‌ی داده‌های آماری مربوط به چندین سال گذشته به‌صورت یک توزیع نرمال با میانگین ٦۳ و انحراف معیار ۳ دلار داده شده باشد، یعنی

$$f(\nu) = \frac{۱}{۳\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{(\nu-٦۳)^۲}{۱۸}} \quad \nu \in R$$

هم‌چنین فرض کنید محمول فازی حدوداً ٦۵ دلار با تابع عضویت زیر تعریف شود

$$F(\nu) = \begin{cases} \frac{\nu-٦۰}{۵} & ٦۰ \le \nu < ٦۵ \\ \frac{۷۰-\nu}{۵} & ٦۵ \le \nu < ۷۰ \end{cases}$$

در این‌صورت، طبق رابطه ۷،

$$\begin{aligned} Prob\{\mathcal{V}\ is\ around\ \$٦۵\} &= \int f(\nu)F(\nu)d\nu \\ &= ۰/۲۳ \end{aligned}$$

پس احتمال این پیشامد فازی که بهای نفت در ماه آینده حدوداً ٦۵ دلار باشد، برابر ۰/۲۳ است. اکنون می‌خواهیم میزان درستی گزاره ۹ را بیابیم. باید نخست منظور خود را از «بسیار محتمل (very likely)» بیان کنیم. فرض کنید بسیار محتمل (بر اساس ایده‌ی: [۲]محتمل=بسیار محتمل) با تابع عضویت زیر تعریف شود

$$S(p) = \begin{cases} (۲p^۲)^۲ & ۰ \le p < ۰/۵ \\ (۱-۲(۱-p)^۲)^۲ & ۰/۵ \le p < ۰/۷۵ \end{cases}$$

بنابراین، طبق رابطه ۸، میزان درستی گزاره ۹ عبارت است از

$$T(P) = S(۰/۲۳) = ۰/۰۱۱.$$

گزاره‌های شرطی غیرتوصیفی

این گزاره‌ها به‌صورت زیر هستند

$$P: If\ \mathcal{U}\ is\ A,\ then\ \mathcal{V}\ is\ B \qquad (۱۰)$$

که در آن $\mathcal{U}$ و $\mathcal{V}$ متغیرهایی هستند که مقادیر آن‌ها به‌ترتیب از مجموعه‌های مرجع U و V حاصل می شوند. A و B نیز مجموعه‌های فازی به ترتیب از U و V هستند. گزاره‌های فوق گاهی به‌صورت زیر نیز نوشته می‌شوند

$$(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \ \ is \ \ R \tag{۱۱}$$

که در آن R یک مجموعه فازی از مجموعه $U \times V$ است، که بر اساس توابع عضویت مجموعه‌های فازی A و B و از طریق یک عملگر استلزام به دست می آید.

مثلاً اگر از عملگر استلزام رایشن‌باخ استفاده شود، آنگاه

$$R(u, v) = I(A(u), B(v)) = ۱ - A(u) + A(u)B(v)$$

به‌علاوه میزان درستی گزاره ۱۰ نیز، در هر نقطه (u, v)، به صورت $R(u, v)$ تعریف می‌شود.

مثال ۱۱.۷ گزاره زیر را در نظر بگیرید

اگر میزان نقدینگی زیاد باشد، آنگاه تورم نسبتاً زیاد است.

در این گزاره، که یک گزاره فازی شرطی غیرتوصیفی است، متغیر قسمت مقدم گزاره، میزان نقدینگی است، و متغیر قسمت تالی تورم است. زیاد و نسبتاً زیاد نیز، به ترتیب، نقش A و B را در مدل ۱۰ ایفا می‌کنند.

حال اگر، در یک وضعیت خاص، $A(u) = ۰/٦$ و $B(v) = ۰/۸۵$، بااستفاده از عملگر استلزام رایشن‌باخ $R(u, v) = ۰/۹۱$ و لذا میزان درستی گزاره فوق برابر ۰/۹۱ خواهد بود.

گزاره‌های شرطی به صورت ۱۰ اساس کار در استنتاج فازی و در کنترل‌گرهای فازی هستند. استنتاج فازی مبتنی بر گزاره‌های شرطی ۱۰ (که قواعد اگر — آنگاه نامیده می‌شوند) به گستردگی در فصل آینده بحث خواهد شد.

گزاره‌های شرطی توصیفی

این گزاره‌ها به‌صورت زیر هستند

$$P : \text{"}If \ \ \mathcal{U} \ \ is \ \ A, \ \ them \ \ \mathcal{V} \ \ is \ \ B\text{"} \ \ is \ \ S \tag{۱۲}$$

که در آن $\mathcal{U}$ و $\mathcal{V}$ و A و B و S همان‌هایی هستند که پیش‌تر گفته شد. به‌ویژه اگر S یک توصیف کننده‌ی احتمالی باشد، گزاره ۱۲ را بدین گونه می‌توان نوشت

$$P : Prob\{If\ \mathcal{U}\ is\ A,\ \ them\ \mathcal{V}\ is\ B\}\ is\ S$$

میزان درستی گزاره P نیز در هر نقطه (u, v) به‌صورت $S(R(u, v))$ تعریف می‌شود.

مثال ۱۲.۷ گزاره مثال ۱۱.۷ را همراه با یک توصیف کننده درستی در نظر بگیرید «اگر میزان نقدینگی زیاد باشد، آنگاه تورم نسبتاً زیاد است»، گزاره‌ای تقریباً درست است. در این‌جا، «تقریباً درست» نقش توصیف کننده S را در مدل ۱۲ ایفا می‌کند.

نکته ۳.۷ هر چند گزاره‌های فازی، در ساده‌ترین صورت‌های آن، به چهار نوع بالا تقسیم می‌شود، اما در عمل با صورت‌های پیچیده‌تر و متنوع‌تری از گزاره‌های فازی روبرو هستیم. درفصل آینده صورت‌های گسترده‌تری از گزاره‌های شرطی فازی را معرفی و شیوه‌ی استنتاج بر پایه‌ی آن‌ها را بیان می‌کنیم.

نکته۴.۷ یادآور می‌شویم که ترکیب عطفی («و» منطقی) و ترکیب فصلی («یا»ی منطقی) بین دو گزاره فازی به‌ترتیب توسط عملگر min و عملگر max (در حالت کلی‌تر: $T-$ ترم‌ها و $S-$ ترم‌ها) مدل سازی می‌شوند. برای نمونه در مثال ۷.۷ فرض کنید طول قد سعید ۱۶۰ سانتی‌متر باشد. اکنون گزاره زیر را در نظر بگیرید

مسعود و سعید هر دو بلند قد هستند

گزاره بالا در واقع خلاصه‌شده‌ی این گزاره است

مسعود بلند قد است و سعید بلند قد است

اکنون، ارزش درستی گزاره فوق عبارت است از

$$\min[A(۱۹۰), A(۱۶۰)] = \min[۰/۶۴, ۰/۱] = ۰/۱$$

۷.۵ قیدهای زبانی

در این بخش به معرفی قیدهای زبانی (در برخی متون: قیدهای فازی) می‌پردازیم. افزون بر این، تشریح می‌کنیم چگونه می‌توان مفاهیم و عباراتی را که در زبان طبیعی انسانی به عنوان قید استفاده می‌شود، با به کارگیری مجموعه‌های فازی مدل‌سازی کرد.

تعریف ۶.۷ یک قید زبانی عملگری است که معنای یک ترم (مجموعه فازی) را تغییر می‌دهد. اگر A یک ترم باشد و m یک قید زبانی، آنگاه $B = m(A)$ یک ترم مرکب است که نتیجه‌ی اِعمال قید m بر ترم A است.

قیدهای متداول و الگوهای آن‌ها به شرح زیر هستند.

بسیار (خیلی) (Very): این قید توسط عملگر تمرکز (Concntration) مدل‌سازی می‌شود. یعنی اگر A یک مجموعه فازی (در مقام یک موضوع یا محمول یا توصیف کننده) باشد، آنگاه $Very(A)$ به‌صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر مدل‌سازی می‌شود

$$Con(A)(u) = A^{۲}(u)$$

کم و بیش (More or Less): این قید توسط عملگر اتساع (Dilation) به صورت زیر مدل‌سازی می‌شود

$$Dil(A)(u) = (A(u))^{\frac{۱}{۲}}$$

نکته ۵.۷ یادآور می‌شویم که در منطق کلاسیک تنها قیدی که استفاده می‌شود، قید نفی (این چنین نیست که) است. این قید در منطق فازی با عملگر متمم مدل‌سازی می‌شود، یعنی

$$(NotA)(u) = A^c(u)$$

مثال ۱۳.۷ فرض کنید X متغیری با مجموعه مرجع $U = \{۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ باشد. هم‌چنین ترم (مجموعه فازی) A بیانگر «اعداد بزرگ» به‌صورت زیر تعریف شده باشد

$$A = \{\frac{۰/۱}{۱}, \frac{۰/۲}{۲}, \frac{۰/۳}{۳}, \frac{۰/۴}{۴}, \frac{۰/۵}{۵}, \frac{۰/۶}{۶}, \frac{۰/۷}{۷}, \frac{۰/۸}{۸}, \frac{۰/۹}{۹}, \frac{۱}{۱۰}\}$$

در این صورت ترم‌های (مجموعه‌های فازی) بیانگر اعداد خیلی بزرگ، کم و بیش بزرگ، و غیر بزرگ به صورت زیر هستند

$$VeryA = CON(A) = \{\frac{۰/۰۱}{۱}, \frac{۰/۰۴}{۲}, \frac{۰/۰۹}{۳}, \frac{۰/۱۶}{۴}, \frac{۰/۲۵}{۵}, \frac{۰/۳۶}{۶}, \frac{۰/۴۹}{۷}, \frac{۰/۶۴}{۸}, \frac{۰/۸۱}{۹}, \frac{۱}{۱۰}\}$$

$$More\ or\ LessA = DIL(A) = \{\frac{۰/۳۲}{۱}, \frac{۰/۴}{۲}, \frac{۰/۵۵}{۳}, \frac{۰/۶۳}{۴}, \frac{۰/۷۱}{۵}, \frac{۰/۷۷}{۶}, \frac{۰/۸۴}{۷}, \frac{۰/۸۹}{۸}, \frac{۰/۹۵}{۹}, \frac{۱}{۱۰}\}$$

$$A^c = \{\frac{۰/۹}{۱}, \frac{۰/۸}{۲}, \frac{۰/۷}{۳}, \frac{۰/۶}{۴}, \frac{۰/۵}{۵}, \frac{۰/۴}{۶}, \frac{۰/۳}{۷}, \frac{۰/۲}{۸}, \frac{۰/۱}{۹}\}$$

تعبیر و تفسیر مجموعه‌های فازی فوق، به صورتی است که در زیر برای $u = 4$ (برای نمونه) آورده‌ایم

	معنی ومفهوم
$A(4) = 0/4$	عدد ۴ به اندازه۰/۴ بزرگ است.
$Con(A)(4) = 0/16$	عدد ۴ به اندازه۰/۱۶ خیلی بزرگ است.
$A^c(4) = 0/6$	عدد ۴ به میزان ۰/۶ ویژگی بزرگ نبودن را دارد.

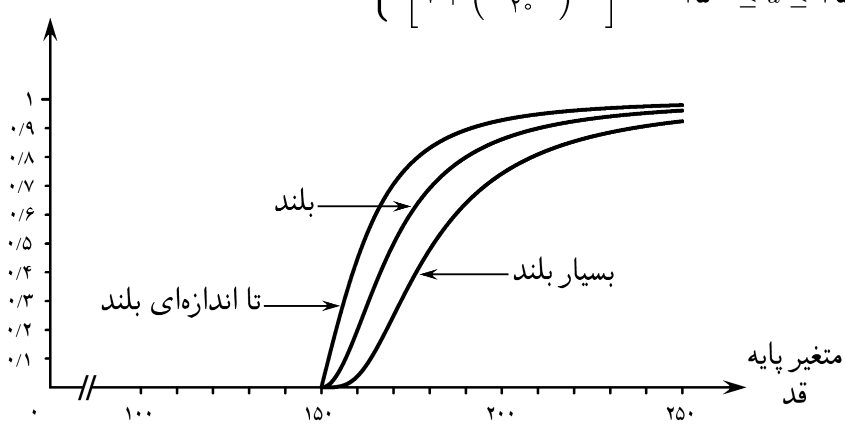
مثال ۱۴.۷ فرض کنید X متغیر طول قد باشد و $U = [0, 250]$ و ترم (مجموعه فازی) بلند قد که آن‌را با A نشان می‌دهیم با تابع سازگاری (عضویت) زیر تعریف شده باشد

$$A(u) = \begin{cases} 0 & 0 \leq u < 150 \\ \left[1 + \left(\frac{u-150}{20}\right)^{-2}\right]^{-1} & 150 \leq u \leq 250 \end{cases}$$

در این‌صورت ترم‌های (مجموعه‌های فازی) بیانگر طول قد «خیلی بلند» و «کم و بیش بلند» دارای توابع سازگاری (عضویت) زیر هستند (شکل ٦.٧)

$$Very A(u) = Con(A)(u) = \begin{cases} 0 & 0 \leq u < 150 \\ \left[1 + \left(\frac{u-150}{40}\right)^{-2}\right]^{-2} & 150 \leq u \leq 250 \end{cases}$$

$$More\ or\ Less A(u) = Dil(A)(u) = \begin{cases} 0 & 0 \leq u < 150 \\ \left[1 + \left(\frac{u-150}{20}\right)^{-2}\right]^{\frac{-1}{2}} & 150 \leq u \leq 250 \end{cases}$$



شکل ٦.٧ نمودار توابع سازگاری (عضویت) بلند، بسیار بلند و کم و بیش بلند.

در ادامه چند قید دیگر را که در منطق فازی کم و بیش استفاده می‌شوند، بیان کرده و توضیح می‌دهیم.

بیش از (Plus): این قید به صورت زیر مدل‌سازی می‌شود

$$Plus(A)(u) = (A(u))^{۱/۲۵}$$

کمتر از (Minus):این قید به صورت زیر مدل‌سازی می‌شود

$$Minus(A)(u) = (A(u))^{۰/۷۵}$$

تشدید تبیین (Contrast Intensificatiom): این قید به صورت زیر مدل‌سازی می‌شود

$$Int(A)(u) = \begin{cases} ۲A^{۲}(u) & ۰ \leq A(u) < \frac{۱}{۲} \\ ۱ - ۲[۱ - A(u)]^{۲} & \frac{۱}{۲} \leq A(u) < ۱ \end{cases}$$

کمی (Slightly) :این قید به صورت زیر مدل‌سازی می‌شود

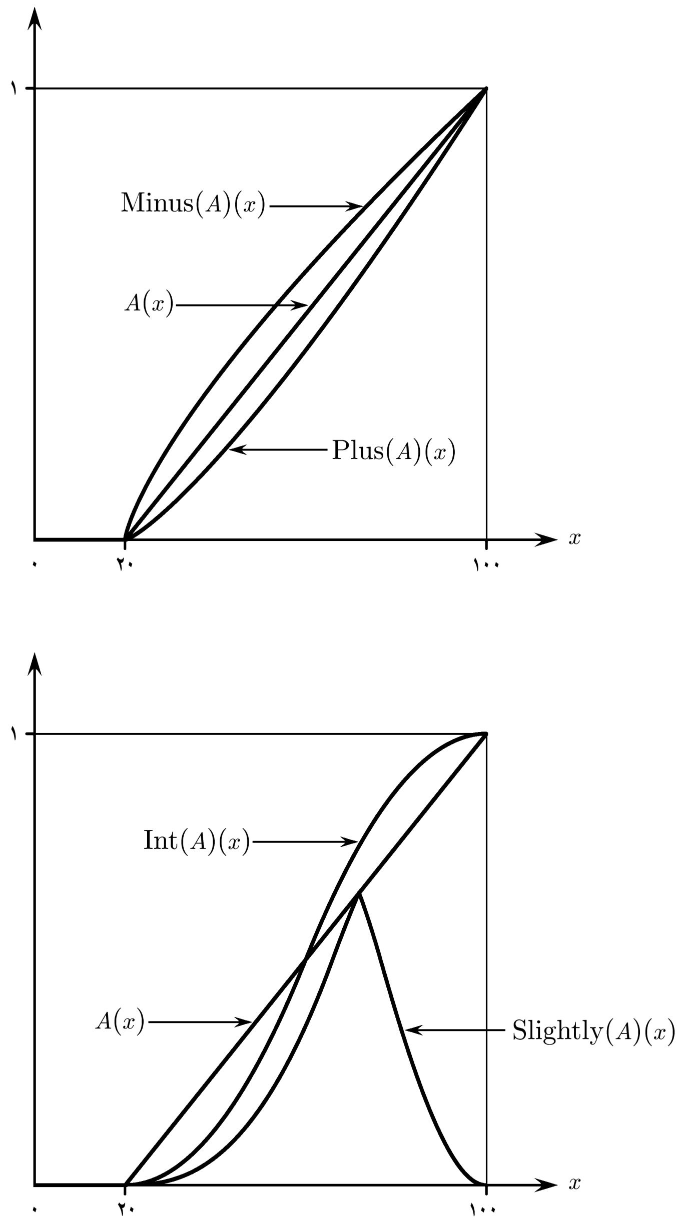
$$Slightiy\ (A)(u) = Int[Plus\ A\ and\ Not(VeryA)]$$

عملگرهای Plus و Minus نیز به نوعی باعث تمرکز و اتساع می‌شوند، اما نسبت به عملگرهای Con و Dil تأثیر کمتری دارند. عملگر تشدید تبیین (به‌کوتاهی: تشدید یا تأکید) باعث می‌شود ابهام مجموعه فازی کمتر شود. عملگر کمی (اندکی) این امکان را فراهم می‌آورد تا بتوانیم تعدیلی از نوع کاهش در ویژگی مورد نظر اِعمال کنیم.

مثال ۱۵.۷ یکی از مؤلفه‌های اصلی تشکیل دهنده‌ی هر نوع خاک، مقدار شن (به درصد) در ترکیبات آن خاک است. مقدار شن زیاد با تابع عضویت زیر مدل‌سازی شده است

$$A(x) = \begin{cases} ۰ & a < ۲۰ \\ \frac{x - ۲۰}{۸۰} & ۲۰ \leq x \leq ۱۰۰ \end{cases}$$

در این‌جا Plus(A) و Miuns(A) و Int(A) و Slightly(A) دارای توابع عضویتی هستند که در شکل ۷.۷ رسم شده است.



شکل ۷.۷ نمودار توابع عضویت چند قید زبانی مربوط به مثال ۱۵.۷.

نکته٦.۷ از قیدهای فازی می‌توان برای تعدیل و تغییر یک موضوع، یک محمول و هم‌چنین یک توصیف کننده (در گزاره‌های توصیفی) استفاده کرد. به نمونه‌های زیر توجه کنید.

۱) میترا جوان است.

به کارگیری قید بسیار برای محمول: میترا بسیار جوان است.

۲) میترا جوان است، درست است.

به کارگیری قید بسیار برای توصیف کننده درست: میترا جوان است، بسیار درست است.

۳) میترا جوان است، درست است.

به کارگیری قید بسیار برای محمول و برای توصیف کننده درست: میترا بسیار جوان است، بسیار درست است.

۴) افراد چاق، خونگرم هستند.

به کارگیری قید بسیار برای موضوع و/یا محمول: افراد (بسیار) چاق، (بسیار) خونگرم هستند.

(دقت دارید که مثال اخیر، در واقع یک گزاره فازی شرطی است.)

۷.٦ سورهای فازی

در منطق کلاسیک دو نوع سور تعریف می‌شود: سور عمومی (هر چه باشد، برای هر، ...) که با نماد $\forall$ نشان داده می‌شود، و سور وجودی (دست کم یک، وجود دارد که) که با نماد $\exists$ نشان داده می‌شود. البته سور صفر نیز تعریف می‌شود که در واقع می‌توان آن‌را با نقیض سور وجودی ساخت.

ولی انسان‌ها در زبان طبیعی از سورهای نادقیق استفاده می‌کنند، مانند: تقریباً نیمی، بسیار بیشتر از ۹۰%، بسیاری، اندکی و ... . با به کارگیری مجموعه‌های فازی می‌توان این‌گونه سورها را مدل‌سازی کرد و در منطق و استدلال به کار برد.

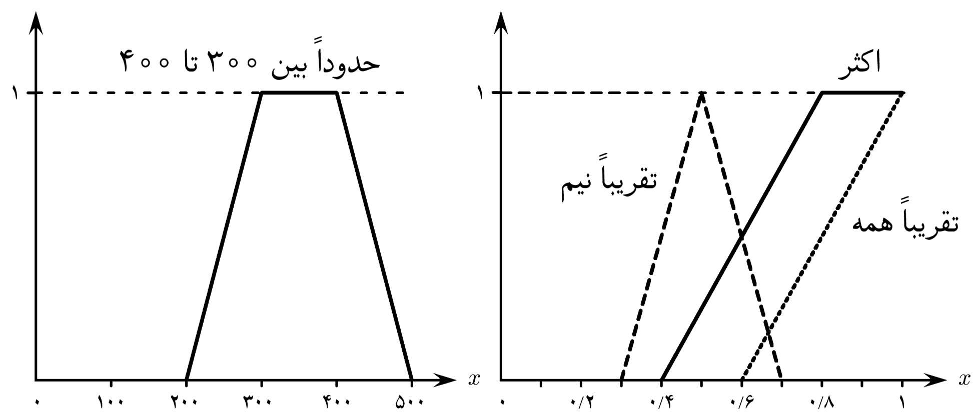
تعریف ۷.۷ یک سور فازی، که آن را با Q نشان می‌دهیم،

۱) الف) (نوع اول) عبارت است از یک مجموعه فازی از $R^+ \cup \{۰\}$ (در حالت گسسته از $N \cup \{۰\}$) که به‌عنوان یک سور نادقیق بر موضوع یک گزاره عمل می‌کند.

۲) ب) (نوع دوم) عبارت است از یک مجموعه فازی از $I = [۰.۱]$ که به‌عنوان یک سور نادقیق بر موضوع یک گزاره عمل می‌کند.

سورهای نوع اول سورهای مطلق (Absolute Quantifiers) و سورهای نوع دوم سورهای نسبی (Relative Quantifiers) نامیده می‌شوند.

مثال ۱۶.۷ نمونه‌هایی از سورهای فازی مطلق عبارت اند از: تقریباً ۵، بسیار بیشتر از ۱۰۰۰، حدوداً بین ۵۰ تا ۷۰. نمونه‌هایی از سورهای فازی نسبی عبارت اند از: تقریباً نیم، اکثر، تقریباً همه، حدوداً ۳۰٪. در شکل ۸.۷ توابع عضویت چند سور فازی مطلق و نسبی رسم شده است.



شکل ۸.۷ نمونه‌هایی از چند سور فازی.

برحسب آن‌که موضوع گزاره‌های سوردار، غیر فازی یا فازی باشد، صورت این گزاره‌ها چنین است

$$Q\ x's\ \ are\ \ B \qquad (۱۳)$$

$$Q\ Ax's\ \ are\ \ B \qquad (۱۴)$$

که در آن‌ها Q یک سورفازی، x عنصر نوعی از مجموعه X، و A و B دو مجموعه فازی از X هستند. در مدل ۱۳.۷ اعضای X موضوع گزاره هستند و B محمول فازی گزاره است. در حالی که در مدل ۱۴.۷ اعضای X که ویژگی فازی A را دارند موضوع گزاره هستند و B محمول فازی گزاره است.

۱۷.۷ گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید

الف) حدود ۲۰% از انسان‌ها دارای نوعی بیماری پوستی مزمن هستند.

ب) اکثر انسان‌های با شغل سخت دارای نوعی بیماری پوستی مزمن هستند.

گزاره الف نمونه‌ای از مدل ۱۳.۷ است، که در آن حدود ۲۰% یک سور فازی نوع دوم (نسبی) است. انسان‌ها محمول گزاره‌اند و داشتن نوعی بیماری پوستی مزمن، محمول است. گزاره ب نمونه‌ای از مدل ۱۴.۷ است که درآن اکثر یک سور فازی نسبی است و انسان‌های با شغل سخت موضوع گزاره‌اند که البته یک موضوع فازی است.

مثال ۱۸.۷ فرض کنید در یک جعبه تعداد ۱۰۰ مهره با شماره‌های ۱ تا ۱۰۰ وجود دارد. از این جعبه تعداد ۱۵ مهره به تصادف و بدون جایگزین استخراج می‌کنیم. گزاره زیر را در نظر بگیرید (این گزاره در واقع یک پیشامد فازی است)

حدود ۵ مهره استخراجی، شماره‌های بزرگ دارند.

گزاره فوق یک گزاره فازی با سور مطلق است. می‌توان Q: حدود ۵، و B: شماره بزرگ را، مثلاً، به‌صورت زیر تعریف کرد

$$Q = \{\frac{۰/۱}{۲}, \frac{۰/۴}{۳}, \frac{۰/۷}{۴}, \frac{۱}{۵}, \frac{۰/۷}{۶}, \frac{۰/۴}{۷}, \frac{۰/۱}{۸}\}\}$$

$$B(x) = \frac{x}{۱۰۰} \qquad ۱ \leq x \leq ۱۰۰$$

ارزش درستی گزاره‌های با سور فازی

ارزش درستی یک گزاره با مدل ۱۳.۷ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$Truth(Q\,x's\;\;are\;\;B) = Q(r), \;\; r = \frac{Card(B)}{Card(X)}$$

ارزش درستی یک گزاره با مدل ۱۴.۷ نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$Truth(QA\,x's\;\;are\;\;B) = Q(r), \;\; r = \frac{Card(A \cap B)}{Card(X)}$$

دقت کنید که برای رسیدن به رابطه اخیر برای r، در واقع مدل ۱۴.۷ را به‌صورت $Q(A\ and\ B)x's\ are\ B$ نوشته و سپس از رابطه نخست استفاده نموده‌ایم.

مثال ۱۹.۷ اعضای اصلی یک تیم دانشجویی بستکتبال عبارت هستند از

$$X = \{\text{الناز و فریناز و گلناز و مهناز و ساناز و بهناز}\}$$

فرض کنید (با توجه به تابع عضویت مجموعه فازی افراد بلند قد در مثال ۱۴.۷) مجموعه فازی افراد بلند قد تیم عبارت است از

$$B = \{\frac{۰/۷۷}{\text{بهناز}}, \frac{۰/۸۱}{\text{ساناز}}, \frac{۰/۶۳}{\text{مهناز}}, \frac{۰/۵۴}{\text{گلناز}}, \frac{۰/۵۹}{\text{فریناز}}, \frac{۰/۹۱}{\text{الناز}}\}$$

اکنون این گزاره در نظر بگیرید:

بیشتر اعضای تیم بلند قد هستند.

می‌خواهیم ارزش درستی گزاره‌ی بالا را تعیین کنیم. باید نخست معنی بیشتر را که یک سور فازی است، بیان کنیم. فرض کنید بیشتر به صورت زیر تعریف شود

$$Most(x) = \begin{cases} ۰ & ۰ \le x < ۰/۴ \\ ۱/۶۷x - ۰/۶۷ & ۰/۴ \le x < ۱ \end{cases}$$

بنابراین

$$r = \frac{Card(B)}{Card(X)} = \frac{۴/۲۵}{۶} = ۰/۷۱$$

و لذا ارزش درستی گزاره‌ی بالا برابر است با $Most(۰/۷۱) = ۰/۵۲$.

۷.۷ مقایسه‌ای بین منطق فازی و منطق‌های کلاسیک

دراین بخش که بخش پایانی فصل حاضر است، با توجه به مطالب گفته شده در بخش‌های پیشین، مقایسه‌ای کوتاه بین منطق فازی و منطق‌های کلاسیک دوارزشی انجام می‌دهیم، تا ضمن جمع‌بندی مطالب قبلی، سیمایی از منطق فازی فراهم آوریم.

منطق فازی یک تعمیم منطق $\infty-$ ارزشی است. این تعمیم صرفاً مشتمل بر بحث‌های محض و مجرّد نیست. بلکه این منطق به دلیل توانایی در صورت‌بندی وجوه تقریبی تفکر و استدلال، موارد استفاده و کاربردهای بسیاری یافته به قسمی که در زمینه‌های کاربردی نقشی کاملاً متفاوت با منطق‌های دوارزشی و چندارزشی ایفا کرده است. ویژگی‌ها و سیمای اصلی منطق فازی که آن‌را از منطق‌های کلاسیک جدا می‌سازد به شرح زیر است [۱۴۳]:

۱) در منطق‌های دوارزشی، یک گزاره یا درست است یا نادرست. در منطق‌های چندارزشی، هر گزاره می‌تواند درست یا نادرست باشد و یا یک مقدار درستی میانه داشته باشد که این مقدارِ درستی عضوی از یک مجموعه (متناهی یا نامتناهی) از مقادیر درستی T (معمولاً $T = [0, 1]$) است. اما در منطق فازی، مقادیر درستی مجموعه‌های فازی از $[0, 1]$ هستند. مثلاً «خیلی درست» یک مقدار درستی در منطق فازی است که توسط یک مجموعه فازی از $[0, 1]$ تعریف می‌شود. به سخن دیگر، در منطق فازی، هر ارزش درستی یک تابع است نه یک عدد.

۲) در منطق‌های کلاسیک، موضوع‌ها و محمول‌ها باید کاملاً مشخص و دقیق باشند، یعنی مجموعه‌هایی مشخص (غیرفازی) از مجموعه مرجع باشند. مانند: بزرگ‌تر از ۱۰ ، فانی، پدر، ... . در حالی که در منطق فازی، موضوع‌ها و محمول‌هامی‌توانند فازی باشند، مثلاً: بزرگ، سالم، بلند، سبک،... .

۳) در منطق‌های کلاسیک تنها دو سور عمومی و وجودی داریم، که به‌ترتیب بیانگر همه و بعضی (دست کم یکی) است. اما در منطق فازی می‌توان از سورهای فازی استفاده کرد، مانند: اکثر، خیلی، به‌ندرت، خیلی کم، حدود ۱۰، تقریباً نیمی، ... .

۴) در منطق دو ارزشی کلاسیک تنها قیدی که معنای یک گزاره را تغیر می‌دهد قید نفی (نه، چنین نیست که) است. اما در منطق فازی می‌توان از قیدهای فازی برای تعدیل و تشدید موضوع‌ها، محمول‌هاو توصیف کننده‌ها استفاده کرد؛ مانند قیدهای خیلی، کم وبیش، کمی، خیلی خیلی، ... .

۵) منطق کلاسیک یک **وجه توصیفی** دارد که همان وجه درستی (راستی) گزاره‌هاست و هر گزاره یا استنتاج تنها از جنبه‌ی درستی سنجیده می‌شود. در حالی که منطق فازی، سه وجه توصیفی به شرح زیر دارد:

الف) **توصیف درستی**. مانند آنکه بگوییم:

گزاره P: «احمد جوان است»، تقریباً درست است.

در اینجا گزاره P به وسیله یک توصیف درستی ارزیابی شده است.

ب) **توصیف احتمالی**. مانند آنکه بگوییم:

گزاره P: «بهای قالی به‌زودی افزایش چشمگیر خواهد یافت» تقریبا محتمل است.

در اینجا گزاره P به وسیله یک توصیف احتمالی ارزیابی شده است.

پ) **توصیف امکانی.** مانند آنکه بگوییم:

گزاره P: «منوچهر دونده‌ی سریعی است» خیلی ممکن است.

در اینجا گزاره P به وسیله یک توصیف امکانی ارزیابی شده است.

٦) استدلال و استنتاج در منطق کلاسیک مبتنی بر الگوهایی خاص (مانند قانون قیاس استثنایی) است. هم‌چنین این استدلال‌ها آرمانی و دقیق و غیر منعطف هستند. در حالی که استدلال و استنتاج در منطق فازی الگوهای متنوع‌تری دارد و به‌علاوه در منطق فازی استدلال معمولاً استدلال تقریبی است، یعنی بر گرفته از منطق و استدلال انسانی است (موضوع استدلال و استنتاج فازی در دو فصل آینده به گستردگی بحث خواهد شد.)

نکته ۷.۷ (نکته‌ی پایانی فصل) در منطق فازی با دو مرحله‌ی مهم روبرو هستیم. نخست آنکه عبارت‌ها و گزاره‌ها را، که به دلیل وجود موضوع‌ها، محمول‌ها، سورها و قیدهای فازی معنای مبهم دارند، در قالب الگوها و عبارات استاندارد و مشخصی که بتوان در استدلال‌ها به کار برد در آوریم. به عبارت دیگر، مرحله‌ی نخست این است که آگاهی و دانش خود را به‌طور مناسب توصیف و تبیین و مدل‌سازی کنیم. مرحله‌ی دوم این است که روش‌هایی برای استنباط و استنتاج بر اساس الگوهای به دست آمده، که محتوی آنها مفاهیم و گزاره‌های نادقیق است، بیابیم. مرحله‌ی نخست، یعنی توصیف دانش و آگاهی، براین پایه شکل می‌گیرد که هر دانش و آگاهی را می‌توان در چارچوب مجموعه‌های فازی و توابع امکان و متغیرهای زبانی مدل‌سازی کرد. موضوع مرحله‌ی دوم یعنی استدلال تقریبی و استنتاج فازی، در فصل‌های آینده به‌طور گسترده مورد مطالعه و بررسی قرار خواهد گرفت.

برای مطالعه‌ی بیشتر

بخش ۱.۷

در مورد منطق کلاسیک (در واقع: منطق‌های کلاسیک) منابع و مراجع بسیاری وجود دارد. مطالب بخش نخست بر پایه‌ی [] تدوین شده است. برای مطالعه‌ی بیشتر در این باره می‌توانید به مراجع فوق، یا کتاب‌های دیگر مانند []، مراجعه نمایید.

بخش ۲.۷

در برخی از متون منطقی، به منطق‌های چند ارزشی نیز پرداخته شده است، مانند []. کتاب‌هایی نیز به‌طور مستقل به این موضوع پرداخته‌اند که از جمله [] شایان توجه هستند. رابطه بین منطق‌های چند ارزشی و منطق فازی مورد توجه بسیار بوده و هست. در این باره می‌توان به [] اشاره نمود.

بخش‌های ۳.۷ و ۴.۷

متغیرهای زبانی توسط زاده در سال در مقالات [] معرفی شدند. البته این مقالات حاوی نکات دیگری نیز بود که مبنای بسیاری از تحقیقات بعد قرار گرفت. گزاره‌های فازی و نخستین تقسیم‌بندی‌های آن نیز توسط زاده طی چند اثر [] معرفی و بررسی شدند. برای مطالعه‌ی بیشتر در مورد متغیرهای زبانی و گزاره‌های فازی مراجع [ ] توصیه می‌شوند.

بخش‌های ۵.۷ و ٦.۷

به غیر از قیودی که در بخش ۵.۷ اشاره شد، قیدهای زبانی دیگری نیز معرفی شده‌اند که برای مطالعه‌ی بیشتر می‌توانید به [] مراجعه کنید. البته هر کاربر می‌تواند با توجه به زمینه‌ی بحث، قیود و سورهای مناسبی را تعریف نموده و به کار گیرد. شایان یادآوری است که در برخی متون قیدهای زبانی با عنوان محدودیت‌های زبانی (Linguistic Hedges) مطرح شده‌اند [].

بخش ۷.۷

مقایسه بین منطق فازی و منطق‌های کلاسیک می تواند از دیدگاه‌های گوناگونی انجام شود: تفاوت‌های ساختاری (اصول موضوعه، فرمول‌ها، رابط‌ها، ...)، تفاوت‌های ماهیتی (معانی و مفاهیم، تعابیر، ...) و تفاوت‌های کاربردی. آنچه در بخش ۷.۷، مبتنی بر []، گفته شد یک مقایسه‌ی کوتاه بین این منطق‌ها بود. خواننده‌ی علاقمند به این مباحث می‌تواند، برای نمونه، به [] مراجعه کند.

تمرین‌ها

۱.۷ جدول درستی صورت‌های گزاره‌ای زیر را تشکیل دهید.

الف) $(A \leftrightarrow B) \vee \sim B$

ب) $A \to (B \to C)$

پ) $(A \to B) \to (\sim (B \to A))$

ت) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

۲.۷ کدام یک از صورت‌های گزاره‌ای زیر راستگو هستند؟

الف) $(A \to (B \to A)$

ب) $(A \to B) \to (\sim A \vee B)$

پ) $((A \wedge (\sim B)) \vee C) \to (A \to (B \to C))$

۳.۷ نشان دهید که می‌توان بر پایه‌ی هر یک از زوج رابطهای $\{\sim, \wedge\}$ و $\{\sim, \vee\}$ و $\{\sim, \to\}$، سه رابط اصلی دیگر را ساخت.

۴.۷ اعتبار صورت‌های استدلالی زیر را بررسی کنید.

الف) $(A \to B), ((\sim B) \to C), C \therefore A$

ب) $A \to (B \to C), B \therefore (A \to C)$

۵.۷ با استفاده از سورها، متغیرها و نمادهای معمولی، گزاره‌های زیر را به نمادها ترجمه کنید.

الف) هر تابع مشتق پذیر، پیوسته است.

ب) این چنین نیست که هر عدد اول، فرد باشد.

پ) بعضی از مردم هم حسودند و هم طمّاع.

ت) اگر یکی از مخازن سوراخ شده باشد، آن‌گاه همه‌ی آن‌ها سوراخ شده‌اند.

ث) اگر از رنگ زرد استفاده شده باشد آن‌گاه زمینه‌ی شکل روشن است ، وگر نه خاکستری است.

۶.۷ ارزش درستی گزاره‌های زیر را بر پایه‌ی هر یک از منطق‌های سه‌ارزشی جدول ۱.۷ و برای تمام ترکیبات ممکن مقادیر درستی A و B و C بیابید. برای عملگر نفی از $a^c = ۱ - a$ استفاده کنید.

الف) $A \to (B \to A)$

ب) $(A^c \vee B^c) \leftrightarrow (A \wedge B)^c$

پ) $(A \to B) \to (\sim A \vee B)$

ت) $A \to (B \to C)$

۷.۷ برای منطق پنج‌ارزشی لوکاسیویچ، جدول رابط‌های منطقی $\wedge$ و $\vee$ و $\to$ و $\leftrightarrow$ را مشابه با جدول ۱.۷ تشکیل دهید.

۸.۷ با در نظر گرفتن X به عنوان متغیر زبانی سن، پنج‌تایی مرتب $(X, T(X), U, G, M)$ را به دلخواه خود تکمیل کنید. یک ساختار سلسله مراتبی برای X ترسیم کنید.

۹.۷ در باره‌ی تفاوت (های) بین تعاریف بالدوین و زاده برای ترم «درست»، بحث کنید.

۱۰.۷ با توجه به مثال ۸.۷، سه مجموعه فازی مثال بزنید که به‌ترتیب معنای ترم‌های کوتاه، متوسط القامه و خیلی بلندتر از (cm) ۱۷۰ باشند.

۱۱.۷ فرض کنید X متغیر زبانی درجه حرارت با مجموعه مرجع $U = [0, 200]$ باشد. افزون براین، ترم A: «گرم» این‌گونه تعریف شود

$$A(x) = \begin{cases} 0 & x < 75 \\ \left[1 + \left[\frac{x-75}{50}\right]^{-2}\right]^{-1} & 75 \leq x \leq 200 \end{cases}$$

توابع عضویت ترم‌های خیلی گرم، خیلی خیلی گرم، نه خیلی گرم، و کم و بیش گرم را مشخص کنید. درجه حرارت‌های $x_1 = 100$ و $x_2 = 150$ در هر یک از ترم‌هایی که به دست آورده‌اید، چه اندازه عضویت دارند؟

۱۲.۷ [۱۳۵] تابع عضویت ترم «درست» از متغیر زبانی درستی این‌گونه تعریف شده است

$$T(x; \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} 0 & x < \alpha \\ 2(\frac{x-\alpha}{\gamma-\alpha})^2 & \alpha \leq x < \beta \\ 1 - 2(\frac{x-\gamma}{\gamma-\alpha})^2 & \beta \leq x < \gamma \\ 1 & \gamma \leq x \end{cases}$$

که در آن فرض می‌شود $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$.

الف) نمودار تابع عضویت را با در نظر گرفتن $\alpha = \gamma = 0/1$ رسم کنید.

ب) تابع عضویت ترم‌های خیلی درست، تقریباً درست، و نه‌درست را بیابید.

پ) با $\alpha = ۰/۳$ و $\beta = ۰/۵$ و $\gamma = ۰/۷$، مقدار درستی یک گزاره با درستی ۰/۷۵ را برای ترم درست و سه ترم دیگر بیابید.

ت) قسمت (پ) را با انتخاب α و β و γ به دلخواه خود، دوباره انجام دهید.

ث) به نظر شما، α و β و γ چگونه باید انتخاب شوند و نشان‌دهنده‌ی چه چیزهایی هستند؟

۱۳.۷ سه متغیر زبانی X: سن، Y: طول قد و Z: وزن را در نظر بگیرید. فرض کنید ترم‌های A: «جوان» و B: «پیر» برای سن، و C: «بلند» برای طول قد، و E: «سبک» و F: «سنگین» برای وزن با توابع عضویت زیر تعریف شده باشند

$$A(x) = \begin{cases} ۱ & ۰ \le x < ۲۰ \\ ۱ - ۲(\frac{x-۲۰}{۴۰})^۲ & ۲۰ \le x < ۴۰ \\ ۲(\frac{۶۰-x}{۴۰})^۲ & ۴۰ \le x < ۶۰ \\ ۰ & ۶۰ \le x < ۱۰۰ \end{cases} \qquad B(x) = ۱ - A(x)$$

$$C(y) = \begin{cases} ۱ & ۰ \le y < ۵۰ \\ ۱ - ۲(\frac{y-۵۰}{۱۰۰})^۲ & ۵۰ \le y < ۱۰۰ \\ ۲(\frac{۱۵۰-y}{۱۰۰})^۲ & ۱۰۰ \le y < ۱۵۰ \\ ۱ & ۱۵۰ \le y < ۲۰۰ \end{cases} \qquad D(y) = \begin{cases} ۰ & ۰ \le y < ۱۰۰ \\ ۲(\frac{y-۱۰۰}{۱۰۰})^۲ & ۱۰۰ \le y < ۱۵۰ \\ ۱ - ۲(\frac{۲۰۰-y}{۱۰۰})^۲ & ۱۵۰ \le y < ۲۰۰ \\ ۱ & ۲۰۰ \le y \end{cases}$$

$$E(z) = \begin{cases} ۱ & ۰ \le z < ۵۰ \\ ۱ - ۲(\frac{z-۵۰}{۷۵})^۲ & ۵۰ \le z < ۷۵ \\ ۲(\frac{۱۰۰-z}{۷۵})^۲ & ۷۵ \le z < ۱۰۰ \\ ۰ & ۱۰۰ \le z \end{cases} \qquad F(z) = \begin{cases} ۰ & ۰ \le z < ۶۰ \\ ۲(\frac{z-۶۰}{۶۰})^۲ & ۶۰ \le z < ۹۰ \\ ۱ - ۲(\frac{۱۲۰-z}{۶۰})^۲ & ۹۰ \le z < ۱۲۰ \\ ۱ & ۱۲۰ \le z \end{cases}$$

با استفاده از تابع عضویت ترم «درست» تعریف شده توسط بالدوین، و قیدهای فازی تعریف شده در صفحه ۱۶۹، و برای مشخصات عددی یک فرد (مثلاً خود شما)، مقدار درستی هر یک از گزاره‌های زیر را بیابید. در محاسبات خود از عملگرهای استاندارد ($\min$ ، $\max, ۱ - q$) استفاده کنید.

الف) x بلند است و جوان، درست است.

ب) x بلند است و نه خیلی جوان و تقریباً سبک، درست است.

پ) x بلند است یا سبک، تقریباً درست است.

ت) x پیر است و بلند قد و تقریباً سبک، درست نیست.

۱۴.۷ توضیح دهید چگونه می‌توان یک صورت گزاره‌ای غیرشرطی توصیفی را به یک صورت گزاره‌ای غیرشرطی غیرتوصیفی تبدیل کرد.

۱۵.۷ گزاره‌های غیرشرطی غیرتوصیفی حالات خاصی از گزاره‌های غیرشرطی توصیفی هستند. این نکته را توضیح دهید.

۱۶.۷ برای هر یک از چهار نوع گزاره فازی، دو مثال از محاورات روزمره ارائه دهید.

۱۷.۷ برای هر یک از منطق‌های سه‌ارزشی جدول ۲.۷، ارزش درستی $(a \vee \bar{b}) \Rightarrow c$ را به ازای تمام ترکیب‌های ممکن درستی متغیرهای c, b, a به دست آورید.

۱۸.۷ بر پایه‌ی اطلاعات تمرین ۳.۲ میزان درستی گزاره زیر را محاسبه کنید

بیشتر درختان با رشد سریع، جلوه‌ی زیبا دارند.

که در آن، قید بیشتر با تابع عضویت زیر تعریف شده است

$$Most(x) = \begin{cases} ۰ & ۰ \leq x < ۰/۵ \\ ۲x - ۱ & ۰/۵ \leq x \leq ۱ \end{cases}$$