مقدمه‌ای بر نظریه قابلیت اعتماد

مجید اسدی

۱

ساختار سیستم‌ها

۱.۱ مقدمه

در دنیای امروز معمولاً با سیستم‌هایی سر و کار داریم که متشکل از تعدادی جزء است و بر اساس یک ساختار از قبل طراحی شده برای هدف معینی در کنار یکدیگر، قرار گرفته‌اند. هر یک از اجزاء به طور مستقل یا وابسته به یکدیگر وظیفه‌ای را انجام داده و بسته به نوع اتصال اجزاء، سیستم وظیفه خود را انجام می‌دهد. از مثال‌هایی که می‌توان برای سیستم بر شمرد اتومبیل است که در یک اندازه متوسط آن حدود ۶۰۰ جزء (بسته به آن که چه چیز را در آن جزء بنامیم) وجود دارد. کامپیوتر خانگی نیز یک سیستم است که حدود ۳۰۰ جزء در آن وجود دارد و تلویزیون یک سیستم است که اجزاء آن تا ۱۰۰ قطعه می‌تواند باشد. سیستم‌هایی از این دست به سیستم‌هایی معروفند که آنها را منسجم می‌گویند.

در این فصل تابع ساختار سیستم منسجم را به عنوان تابعی از اجرای تشکسل دهنده آن تعریف می‌کنیم. ابتدا در بخش ۲.۱ تعریف دقیق تابع ساختار را به عنوان یک تابع دو مقداری معرفی می‌کنیم. در بخش ۳.۱ بعضی از توابع ساختار متداول در در قابلیت اعتماد مهندسی مانند ساختارهای موازی، متوالی و k از n را معرفی کرده و توابع ساختار آن‌ها را ارائه می‌کنیم. در بخش ۴.۱، با معرفی بردارهای مسیر مینیمال و بردارهای قطع کننده مینیمال، نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان توابع ساختار سیستم‌های منسجم را بر اساس این گونه بردارها نمایش داد.

۲.۱ سیستم و اجزای آن

در ادامه یک سیستم را در نظر می‌گیریم که شامل تعدادی جزء است و برای هدفی معین طراحی شده است. طبیعی است که فرض کنیم عملکرد سیستم تابعی است از عملکرد اجزای آن است. در اینجا فرض می‌کنیم سیستم دارای n ($n \geq ۱$) جزء است و هر جزء در سیستم یا فعال است یا غیر فعال. برای توصیف این وضعیت یک متغیر دو مقداری x_i، $i = ۱,\ldots,n$، به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$x_i = \begin{cases} ۱ & \text{اگر جزء } i \text{ام فعال باشد،} \\ ۰ & \text{اگر جزء } i \text{ام غیر فعال باشد،} \end{cases}$$

با این نمایش فرض بر این است که جزء iام در سیستم یا به طور رضایت بخش کار می‌کند یا این که از کار افتاده است. همچنین فرض می‌کنیم که سیستم نیز در یکی از دو وضعیت فعال یا غیر فعال باشد. برای تعیین وضعیت سیستم بر حسب وضعیت اجزاء فرض می‌کنیم که وابستگی سیستم به اجزای آن توسط تابع دو مقداری $\varphi(\mathbf{x})$، که به تابع ساختار سیستم معروف است، مشخص شود که در آن $\mathbf{x} = (x_۱,\ldots,x_n)$ و به آن بردار وضعیت سیستم گوییم. بنابراین بسته به وضعیت بردار $\mathbf{x}$ داریم:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر سیستم فعال باشد،} \\ ۰ & \text{اگر سیستم غیر فعال باشد،} \end{cases}$$

شکل تابعی $\varphi(\mathbf{x})$ پس از آنکه نوع ارتباط بین اجزاء در سیستم معلوم شود قابل تعیین خواهد بود. نکته قابل ذکر در اینجا این است که بردار وضعیت $\mathbf{x} = (x_۱,\ldots,x_n)$ برداری است که عناصر آن، x_i، مقادیر صفر یا یک را (بسته به اینکه جزء iام غیر فعال یا فعال باشد) اختیار می‌کند. لذا در سیستمی با n جزء، تعداد ۲^n وضعیت برای بردار وضعیت اجزاء وجود دارد. برای مثال در یک سیستم با ۳ جزء، $۸ = ۲^۳$ بردار وضعیت وجود دارد که عبارتند از

$(۱,۰,۱)$	$(۱,۱,۱)$
$(۱,۰,۰)$	$(۱,۱,۰)$
$(۰,۰,۱)$	$(۰,۱,۱)$
$(۰,۰,۰)$	$(۰,۱,۰)$

لذا بسته به نوع ساختار سیستم هر بردار وضعیت منتج به این می‌شود که مقدار $\varphi(\mathbf{x})$ صفر یا یک شود. اگر چه از دیدگاه ریاضی تابع $\varphi(\mathbf{x})$ می‌تواند هیچ محدودیتی از نظر رفتار، نداشته

الف - $\varphi(0,0,\dots,0)=0$ (سیستم خاموش است هرگاه تمام اجزای آن خاموش باشد)

ب - $\varphi(1,1,\dots,1)=1$ (سیستم روشن است هرگاه تمام اجزای آن روشن باشد)

ج)

باشد، اما در اینجا با توجه به اینکه φ تابع ساختار سیستم است، خود را به توابعی محدود می‌کنیم که به آنها توابع یکنوا گوییم و در تعریف زیر صدق می‌کنند.

تعریف ۱.۱ سیستمی با تابع ساختار φ را در نظر بگیرید. سیستم را یکنوا گوییم هر گاه برای هر دو بردار وضعیت $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ که در آن $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$ داشته باشیم، $\varphi(\mathbf{x}) \le \varphi(\mathbf{y})$.

قرارداد $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$ بدین معنی است که $x_i \le y_i$، $i = 1,2,\dots,n$، اما حداقل برای یک i یعنی حداقل برای یک i $x_i < y_i$ نامساوی اکید است.

بنابراین یک سیستم یکنواست هرگاه وضعیت یکی از اجزای سیستم از غیر فعال به وضعیت فعال تبدیل شود، وضعیت سیستم بدتر نخواهد شد.

بردار وضعیت $\underline{x}$

تعریف ۲.۱ جزء iام در سیستم را یک جزءنامربوط گوییم هرگاه به ازای هر x_j، $j \neq i$

$$\varphi(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n) = \varphi(x_1,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n)$$

دقت کنید جزء iام باید در همه بردارهای وضعیت $\underline{x}$ به صورت

$\varphi(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n) = \varphi(x_1,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n)$

تا جزء iام نامربوط شود. اگر فقط در یک یا چند بردار وضعیت $\underline{x}$، تابع ساختار تغییری نکند نمی‌توان گفت آن جزء نامربوط است. مثال آن را در جدول ۱.۱ صفحه ۹ مشاهده کنید.

با توجه به تعریف فوق، یک سیستم منسجم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳.۱ یک سیستم را منسجم گوییم هرگاه تابع ساختار آن یکنوا باشد و جزء نامربوط در آن وجود نداشته باشد.

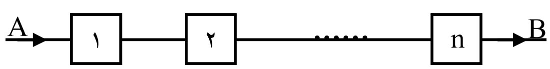
در ادامه بحث با سیستم‌هایی سر و کار داریم که در تعریف سیستم منسجم صدق می‌کنند.

۳.۱ توابع ساختار سیستم‌های منسجم

از معروفترین توابع ساختار در مهندسی قابلیت اعتماد می‌توان از سیستم‌هایی با ساختار متوالی، ساختار موازی، ساختار k از n و ... نام برد.

سیستم‌های متوالی

ساده‌ترین نوع ساختار در بین سیستم‌های منسجم سیستم متوالی است. یک سیستم را متوالی گوییم هر گاه فعال بودن سیستم مستلزم فعال بودن همه اجزای آن باشد. به عبارت دیگر، سیستم فعال است اگر و تنها اگر همه اجزای آن فعال باشند. یک مثال عینی از سیستم‌های متوالی مدارهای الکتریکی متوالی هستند که دارای نموداری به شکل زیر می‌باشند. طراحی این سیستم‌ها طوری است که باید از نقطه A به نقطه B جریان برقرار باشد. اگر بخواهد از نقطه A به نقطه B جریان برقرار باشد.



شکل ۱.۱ نموداری از یک سیستم متوالی

اگر چه سیستم‌های متوالی محدود به مدارهای الکتریکی نیست و مثال‌های متنوع دیگری در صنعت وجود دارد که ساختار آنها متوالی است، اما در حالت کلی برای نمایش ساختار چنین سیستم‌هایی از شکل ۱.۱ استفاده می‌کنند که برای فهم رابطه بین اجزای سیستم مفید است.

با توجه به تعریف سیستم متوالی، اگر سیستم دارای n جزء باشد و بردار وضعیت آن را با $\mathbf{x}=(x_{۱},x_{۲},\ldots,x_n)$ نمایش می‌دهیم، آنگاه تابع ساختار سیستم، $\varphi(\mathbf{x})$، برابر است با

$$\varphi(\mathbf{x})=\prod_{i=۱}^{n} x_i.$$

یا معادل آن

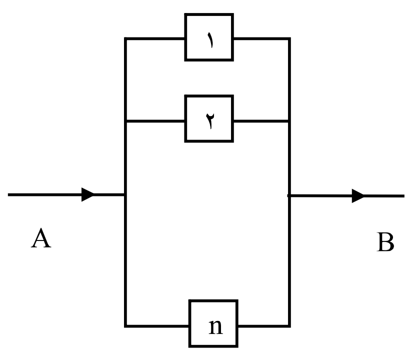
تابع ساختار سیستم متوالی (سری)

$$\varphi(\mathbf{x})=\min(x_{۱},x_{۲},\ldots,x_n).$$

برای مثال سیستمی با ۳ جزء را در نظر بگیرید. آنگاه برای نمونه در حالت $\mathbf{x}=(۱,۱,۰)$ داریم $\varphi(\mathbf{x})=۰$، در حالت $\mathbf{x}=(۰,۱,۰)$ داریم $\varphi(\mathbf{x})=۰$، در حالت $\mathbf{x}=(۱,۰,۱)$ به دست می‌آوریم $\varphi(\mathbf{x})=۰$ و در حالت $\mathbf{x}=(۱,۱,۱)$ داریم $\varphi(\mathbf{x})=۱$.

سیستم‌های موازی

از دیگر سیستم‌های متداول در مهندسی قابلیت اعتماد، سیستم‌های با ساختار موازی هستند. بر اساس تعریف، سیستم موازی سیستمی را گویند که فعال بودن آن مستلزم فعال بودن حداقل یکی از اجزای آن باشد. به عبارت دیگر، سیستم هنگامی از کار می‌افتد که تمام اجزای آن غیر فعال باشند. شکل ۲.۱ نمودار یک سیستم موازی با n جزء را نشان می‌دهد.



شکل ۲.۱ نمودار سیستم موازی

مثالی از سیستم‌های موازی، ماهواره‌های مخابراتی هستند که در آن‌ها در هر کانال مخابراتی چند کانال به طور موازی جهت انتقال اطلاعات به هم متصل می‌شوند. به عبارت دیگر جهت اطمینان از انتقال اطلاعات، معمولاً سه یا چهار کانال مخابراتی به صورت موازی کنار هم قرار می‌گیرند تا در صورت از کار افتادن یکی از آنها بقیه انتقال اطلاعات کنند.

تابع ساختار یکی سیستم موازی با n جزء بر اساس تعریف سیستم عبارتست از

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i). \qquad (1.1)$$

توجه کنید که با در نظر گرفتن تعریف سیستم موازی در عبارت فوق، اگر حداقل به ازای یک i، $x_i = 1$ آنگاه $\varphi(\mathbf{x}) = 1$ در غیر اینصورت $\varphi(\mathbf{x}) = 0$.

به طور مشابه با سیستم متوالی، می‌توان نمایش زیر را برای تابع ساختار سیستم موازی نوشت که معادل با نمایش (1.1) است.

$$\varphi(\mathbf{x}) = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

تابع ساختار سیستم موازی

به عنوان مثال در یک سیستم موازی با ۳ جزء اگر $\mathbf{x} = (1,1,0)$ آنگاه $\varphi(\mathbf{x}) = 1$، اگر $\mathbf{x} = (0,0,1)$ آنگاه $\varphi(\mathbf{x}) = 1$ و اگر $\mathbf{x} = (0,0,0)$ داریم $\varphi(\mathbf{x}) = 0$.

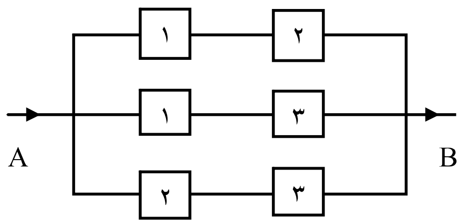
سیستم‌های موازی از ساده‌ترین نوع سیستم‌های منسجم هستند که اصطلاحاً به آن‌ها سیستم‌های افزونگی نیز می‌گویند. در اینگونه سیستم‌ها در کنار جزء مورد نظر، ممکن است یک یا چند جزء را، معمولاً با همان کیفیت، به صورت موازی قرار دهند. اینگونه اجزاء را اجزای افزوده گویند که خود غالباً دارای دو نوع هستند. یکی اجزای افزوده فعال که هنگام عملکرد جزء اصلی این اجزاء نیز به طور همزمان مشغول به فعالیت هستند و دیگری اجزای افزوده هستند که به صورت آماده باش با جزء اصلی به صورت موازی متصل می‌شوند و در صورت از کار افتادن جزء اصلی یکی از آنها شروع به فعالیت می‌کند تا وظیفه آن جزء را انجام دهد. طبیعی است که وجود اجزای افزوده در سیستم‌های موازی و دیگر سیستم‌ها باعث بالا رفتن قابلیت انجام فعالیت سیستم‌ها می‌شود.

سیستم‌های k از n

یک سیستم k از n، به عنوان یک سیستم منسجم، تعمیمی از سیستم‌های متوالی و موازی است. یک سیستم شامل n جزء را k از n گوییم هر گاه فعال بودن آن مستلزم فعال بودن حداقل k $(k \le n)$ جزء از n جزء آن باشد. تابع ساختار سیستم‌های k از n را نمی‌توان به فرم بسته مانند سیستم‌های متوالی و موازی ارائه کرد. نمایش جبری تابع ساختار سیستم‌های k از n با بردار وضعیت $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ به صورت زیر است.

$$\varphi(\mathbf{x})=\begin{cases}\text{۱} & \text{اگر } \sum_{i=\text{۱}}^{n} x_i \ge k \text{ ،}\\ \text{۰} & \text{در غیر اینصورت،}\end{cases}$$

به عنوان مثالی از سیستم‌های k از n، هواپیمایی را در نظر بگیرید که ۳ موتور دارد و فرض کنید برای آنکه هواپیما بتواند با موفقیت پرواز کند باید حداقل ۲ موتور از ۳ موتور آن فعال باشند. چنین هواپیمایی به عنوان یک سیستم، سیستمی ۲ از ۳ است. یک نمودار توضیحی برای چنین سیستمی به شکل زیر خواهد بود. توجه کنید که نمودار تنها جنبه تحلیلی دارد چرا که یک جزء در سیستم تنها در یک موقعیت قرار می‌گیرد.



شکل ۳.۱ نمودار سیستم ۲ از ۳

با توجه به شکل ملاحظه می‌شود برای آنکه سیستم کار کند با حداقل موتورهای ۱ و ۲ یا موتورهای ۱ و۳ و یا موتورهای ۲ و ۳ با موفقیت کار کنند. بنابراین برای مثال، در این سیستم اگر $\mathbf{x}=(\text{۱,۱,۰})$ آنگاه $\varphi(\mathbf{x})=\text{۱}$، اگر $\mathbf{x}=(\text{۰,۱,۱})$ آنگاه $\varphi(\mathbf{x})=\text{۱}$ و اگر $\mathbf{x}=(\text{۰,۰,۱})$ داریم $\varphi(\mathbf{x})=\text{۰}$.

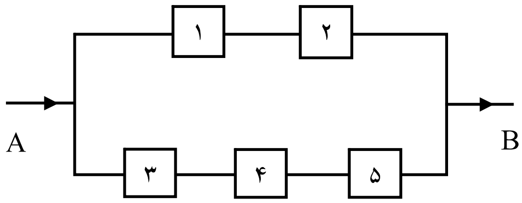
ذکر این نکته ضروری است که، با توجه به تعریف سیستم‌های متوالی و موازی، مشاهده می‌شود که سیستم متوالی یک سیستم n از n است و یک سیستم موازی یک سیستم ۱ از n است.

$\to k=1$ $\qquad$ $\to k=n$

سیستم‌های موازی–متوالی و سیستم‌های متوالی–موازی

دو نوع متدوال دیگر از سیستم‌های منسجم سیستم‌های موازی–متوالی و سیستم‌های متوالی–موازی هستند. سیستم‌های موازی–متوالی متشکل از تعدادی زیر سیستم هستند که در آن اجزای زیر سیستم‌ها به صورت متوالی به هم متصل شده و سپس زیر سیستم‌ها خود به صورت موازی به

هم متصل شده‌اند. به عنوان مثال نمودار ۴.۱ یک سیستم موازی–متوالی را نشان می‌دهد که دارای ۵ جزء است.

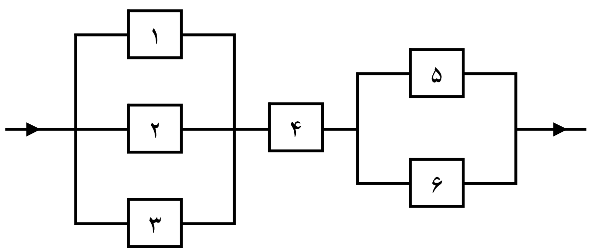


شکل ۴.۱ سیستم موازی–متوالی

در این سیستم اجزای ۱ و ۲ متوالی‌اند که تشکیل یک زیر سیستم را می‌دهند. اجزای ۳، ۴ و ۵ نیز متوالی‌اند که تشکیل یک زیر سیستم دیگر می‌دهند. حاصل این زیر سیستم‌ها به صورت موازی به یکدیگر متصل شده‌اند. بنابراین، بر اساس آنچه برای سیستم‌های موازی و متوالی بیان کردیم، تابع ساختار این سیستم برابر است با:

$$\begin{aligned}\varphi(x_۱, x_۲, \ldots, x_۵) &= \left[۱-(۱-x_۱x_۲)(۱-x_۳x_۴x_۴)\right] \\ &= \max\left[\min(x_۱, x_۲), \min(x_۳, x_۴, x_۵)\right]\end{aligned}$$

به طور مشابه می‌توان یک سیستم متوالی–موازی را تعریف کرد. این سیستم‌ها را می‌توان متشکل از چند زیر سیستم دانست که در آن اجزای زیر سیستم‌ها به صورت موازی به یکدیگر متصل شده و سپس زیر سیستم‌های حاصل به صورت متوالی کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند. به عنوان مثال سیستمی با نمودار زیر را در نظر بگیرید.



شکل ۵.۱ سیستم متوالی–موازی

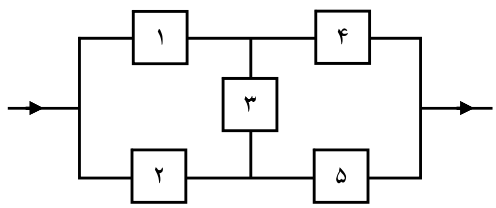
این سیستم دارای ۶ جزء است که در آن اجزای ۱، ۲ و ۳ به صورت موازی تشکیل یک زیر سیستم داده و حاصل با زیر سیستم تک جزئی۴ متوالی شده و سپس حاصل این دو زیر سیستم با

زیر سیستمی متشکل از اجزای موازی ۵ و ۶ به صورت متوالی متصل شده است. تابع ساختار این سیستم برابر است با

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_6) &= \left[1-(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)\right] x_4 \left[1-(1-x_5)(1-x_6)\right] \\ &= \min\left[\max(x_1, x_2, x_3), x_4, \max(x_5, x_6)\right].\end{aligned}$$

۴.۲ نمایش ساختار سیستم‌ها بر اساس بردار مسیرها و قطع کننده‌های مینیمال

در مثال‌هایی که در بخش‌های قبل در مورد سیستم‌ها ارائه شد، دیدیم که سیستم‌های پایه در مهندسی قابلیت اعتماد به صورت متوالی، سری یا ترکیبی از چنین سیستم‌هایی است. اما در دنیای واقعی ممکن است با سیستم‌هایی مواجه شویم که شکل‌های پیچیده‌تری در مقایسه با سیستم‌های اشاره شده در بالا داشته باشند. در تحلیل سیستم‌های پیچیده‌تر یکی از ابزارهای مهم استفاده از نمایش ساختار سیستم‌ها بر مبنای بردارهای مسیر مینیمال و بردارهای قطع کننده‌های مینیمال است. قبل از آنکه تعریف اینگونه بردارها را ارائه کنیم به ذکر یک مثال می‌پردازیم.
فرض کنید سیستمی با ۵ جزء دارای ساختاری با نمودار زیر باشد



شکل ۶.۱ سیستم پل

این سیستم، در مبحث قابلیت اعتماد، به سیستم پل معروف است. این سیستم هیچکدام از سیستم‌های موازی، متوالی یا k از n نیست. برای تحلیل این سیستم روش‌های مختلفی وجود دارد. اولین روش آن است که تمام بردارهای وضعیت $\mathbf{x}$ را مشخص نموده و سپس تابع ساختار سیستم، $\varphi(\mathbf{x})$، را به ازای هر $\mathbf{x}$ تعیین کنیم. در اینجا با توجه به اینکه تعداد اجزای سیستم $n = 5$ است، تعداد $2^5 = 32$ بردار وضعیت وجود دارد. جدول ۱.۱ بردارهای وضعیت سیستم و مقادیر تابع ساختار سیستم را به ازای هر بردار وضعیت نشان می‌دهد.
در این مثال، علیرغم آن که سیستم چندان پیچیده نیست، می‌بینیم که تعیین تمام بردارهای وضعیت برای سیستم و محاسبه تابع ساختار سیستم کار ساده‌ای نیست. بنابراین اگر سیستم

ساختاری پیچیده‌تر داشته باشد، محاسبه تمام بردارهای وضعیت و در نتیجه محاسبه تابع ساختار سیستم برای هر بردار وضعیت کار طاقت فرسایی خواهد بود. برای غلبه بر چنین مشکلاتی مفاهیم بردارهای قطع کننده مینیمال و بردارهای مسیر مینیمال بسیار مفید خواهد بود. در ادامه آنها را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴.۱ یک بردار وضعیت $\mathbf{x}$ را یک **بردار مسیر** گوییم هر گاه $\varphi(\mathbf{x})=۱$. مجموعه تمام اندیس‌هایی که در آنها $x_i=۱$، را **مجموعه مسیر** گوییم. به عبارت دیگر اگر $P=P(\mathbf{x})$ مجموعه مسیر باشد آنگاه $P=\{i,\ x_i=۱\}$. علاوه بر آن اگر به ازای دو بردار وضعیت $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ به طوری که $\mathbf{y}<\mathbf{x}$ داشته باشیم $\varphi(\mathbf{y})=۰$ آنگاه بردار $\mathbf{x}$ را بردار مسیر مینیمال و مجموعه مسیر متناظر را مجموعه مسیر مینیمال گوییم.

جدول ۱.۱ بردارهای وضعیت و تابع ساختار سیستم پل

$\mathbf{x}$	$\varphi(\mathbf{x})$	$\mathbf{x}$	$\varphi(\mathbf{x})$
(۱,۱,۱,۱,۱)	۱	(۰,۱,۱,۱,۱)	۱
(۱,۱,۱,۱,۰)	۱	(۰,۱,۱,۱,۰)	۱
(۱,۱,۱,۰,۱)	۱	(۰,۱,۱,۱,۰)	۱
(۱,۱,۱,۰,۰)	۰	(۰,۱,۱,۰,۰)	۰
(۱,۱,۰,۱,۱)	۱	(۰,۱,۰,۱,۱)	۱
(۱,۱,۰,۱,۰)	۱	(۰,۱,۰,۱,۰)	۰
(۱,۱,۰,۰,۱)	۱	(۰,۱,۰,۰,۱)	۱
(۱,۱,۰,۰,۰)	۰	(۰,۱,۰,۰,۰)	۰
(۱,۰,۱,۱,۱)	۱	(۰,۰,۱,۱,۱)	۰
(۱,۰,۱,۱,۰)	۱	(۰,۰,۱,۱,۰)	۰
(۱,۰,۱,۰,۱)	۱	(۰,۰,۱,۰,۱)	۰
(۱,۰,۱,۰,۰)	۰	(۰,۰,۱,۰,۰)	۰
(۱,۰,۰,۱,۱)	۱	(۰,۰,۰,۱,۱)	۰
(۱,۰,۰,۱,۰)	۱	(۰,۰,۰,۱,۰)	۰
(۱,۰,۰,۰,۱)	۰	(۰,۰,۰,۰,۱)	۰
(۱,۰,۰,۰,۰)	۰	(۰,۰,۰,۰,۰)	۰

هر یک

بر اساس این تعریف یک مسیر مینیمال، یک بردار وضعیت است که به ازای آن سیستم فعال است و اگر ~~حداقل یکی~~ از اجزای فعال آن بردار غیر فعال شود سیستم نیز غیر فعال خواهد شد. اکنون ببینیم در مورد سیستم پل بردارهای مسیر مینیمال چگونه‌اند. یک بررسی ساده نشان می‌دهد که این سیستم دارای ۴ بردار مسیر مینیمال است که همراه با مجموعه مسیرهای مینیمال متناظر آن‌ها در جدول ۲.۱ آمده‌اند.

جدول ۲.۱ بردارها و مجموعه‌های مسیر مینیمال

بردار مسیر مینیمال (P)	مجموعه مسیر مینیمال $(\mathbf{x})$
$P_1=\{1,4\}$	$\mathbf{x}_1=\{1,0,0,1,0\}$
$P_2=\{2,5\}$	$\mathbf{x}_2=\{0,1,0,0,1\}$
$P_3=\{1,3,5\}$	$\mathbf{x}_3=\{1,0,1,0,1\}$
$P_4=\{2,3,4\}$	$\mathbf{x}_4=\{0,1,1,1,0\}$

اکنون به استدلال زیر توجه کنید. اگر بخواهد سیستم پل فعال باشد باید حداقل یکی از ۴ بردار مسیر مینیمال آن اتفاق بیافتد. در مسیر مینیمال اول باید هر دو جزء اول و چهارم فعال باشند. این بدین معنی است که جزء اول و چهارم را می‌توان مانند یک زیر سیستم متوالی در نظر گرفت. اگر تابع ساختار این زیر سیستم را با $\rho_1(\mathbf{x})$ نمایش دهیم داریم

$$\rho_1(\mathbf{x})=\prod_{i\in p_1}x_i=x_1x_4.$$

در مسیر مینیمال دوم باید هر دو جزء ۲ و ۵ فعال باشند. یعنی این دو جزء را می‌توان یک زیر سیستم متوالی در نظر گرفت. اگر تابع ساختار آن را با $\rho_2(\mathbf{x})$ نمایش دهیم داریم

$$\rho_2(\mathbf{x})=\prod_{i\in p_2}x_i=x_2x_5.$$

به همین ترتیب برای بردارهای مینیمال سوم و چهارم داریم

$$\rho_3(\mathbf{x})=\prod_{i\in p_3}x_i=x_1x_3x_5,$$

و

$$\rho_4(\mathbf{x})=\prod_{i\in p_4}x_i=x_2x_3x_4.$$

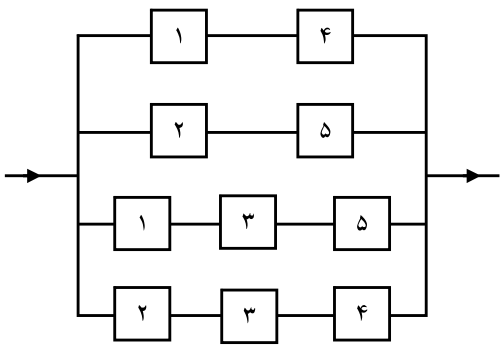
حال با توجه به این که عملکرد سیستم پل مستلزم عملکرد حداقل یکی از این زیر سیستم‌ها است، این بدین معنی است که زیر سیستم‌ها به صورت موازی به هم متصل شده‌اند. لذا تابع ساختار سیستم با توجه به ساختار سیستم موازی برابر است با

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= 1-\prod_{j=1}^{4}(1-\rho_j(\mathbf{x}))\\ &= 1-\prod_{j=1}^{4}(1-\prod_{i\in p_j}x_i)\\ &= 1-(1-x_1x_4)(1-x_2x_5)(1-x_1x_3x_5)(1-x_2x_3x_4).\end{aligned} \tag{۲.۱}$$

ساختار سیستم برحسب مسیرهای مینیمال

شکل ۷.۱ نمودار سیستم پل را بر حسب بردارهای مسیر مینیمال نشان می‌دهد.

یکی دیگر از روش‌های بدست آوردن تابع ساختار سیستم‌ها استفاده از مفهوم بردارهای قطع کننده مینیمال است که در ادامه به آن می‌پردازیم.



سیستم موازی-متوالی

شکل ۷.۲ نمودار ساختار سیستم پل برحسب مسیرهای مینیمال

تعریف ۵.۱ یک بردار وضعیت $\mathbf{x}$ را یک بردار قطع کننده گوییم هر گاه $\varphi(\mathbf{x})=0$. مجموعه تمام اندیس‌هایی که در آنها $x_i=0$ را مجموعه قطع کننده گوییم. به عبارت دیگر اگر $C=C(\mathbf{x})$ مجموعه قطع کننده باشد، آنگاه $C=\{i,\, x_i=0\}$. علاوه بر آن اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ دو بردار وضعیت باشند به طوریکه $\mathbf{x}<\mathbf{y}$ و $\varphi(\mathbf{y})=1$ آنگاه بردار قطع کننده $\mathbf{x}$ را یک بردار قطع کننده مینیمال گوییم.

با توجه به تعریف، یک بردار قطع کننده مینیمال برداری است که به ازای آن سیستم از کار می‌افتد و اگر حداقل یکی از اجزای آن بردار فعال شود، سیستم به کار می‌افتد.

هریک

با یک بررسی ساده نتیجه می‌گیریم که بردارهای قطع کننده مینیمال و مجموعه قطع کننده متناظر در سیستم پل به صورت جدول ۳.۱ خواهند بود.

جدول ۳.۱ بردارها و مجموعه‌های قطع‌کننده مینیمال

مسیر قطع کننده مینیمال (C)	مجموعه قطع کننده مینیمال $(\mathbf{x})$
$C_1=\{1,2\}$	$\mathbf{x}_1=\{0,0,1,1,1\}$
$C_2=\{4,5\}$	$\mathbf{x}_2=\{1,1,1,0,0\}$
$C_3=\{1,3,5\}$	$\mathbf{x}_3=\{0,1,0,1,0\}$
$C_4=\{2,3,4\}$	$\mathbf{x}_4=\{1,0,0,0,1\}$

اکنون با استدلال زیر می‌توان تابع ساختار سیستم پل را بر اساس بردارهای قطع کننده مینیمال آن نوشت. اگر بخواهد سیستم فعال باشد باید در بردار قطع کننده $\mathbf{x}_1$ جزء اول یا دوم فعال باشد و در بردار قطع کننده $\mathbf{x}_2$، جزء چهارم یا پنجم فعال باشد و ... بنابراین ملاحظه می‌شود که می‌توان تابع ساختار سیستم را متشکل از زیر سیستم‌هایی در نظر گرفت که به صورت متوالی به هم متصل شده‌اند که در آن هر زیر سیستم دارای اجزایی است که به صورت موازی کنار هم قرار گرفته‌اند.

در این مثال چهار زیر سیستم (به تعداد بردارهای قطع کننده مینیمال) وجود دارد که عبارتند از

$$k_1(\mathbf{x})=1-\prod_{j\in C_1}(1-x_j)=1-(1-x_1)(1-x_2),$$

$$k_2(\mathbf{x})=1-\prod_{j\in C_2}(1-x_j)=1-(1-x_4)(1-x_5),$$

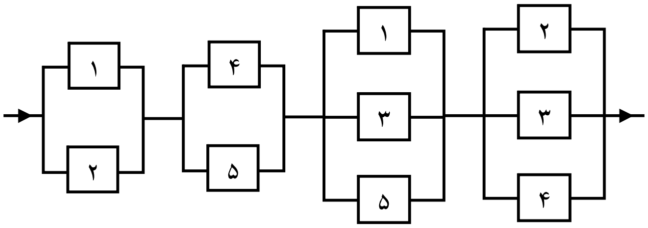
$$k_3(\mathbf{x})=1-\prod_{j\in C_3}(1-x_j)=1-(1-x_1)(1-x_3)(1-x_5),$$

$$k_4(\mathbf{x})=1-\prod_{j\in C_4}(1-x_j)=1-(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4).$$

و بنابراین تابع ساختار سیستم به صورت زیر قابل نمایش است؛

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x})&=\prod_{i=1}^{4}k_i(\mathbf{x})\\&=\prod_{i=1}^{4}\Big(1-\prod_{j\in C_i}(1-x_j)\Big).\end{aligned}\tag{3.1}$$

شکل ۸.۱ نمودار تحلیلی تابع ساختار سیستم پل را بر اساس بردار قطع کننده‌های مینیمال سیستم نشان می‌دهد.



سیستم متوالی-موازی

شکل ۸.۲ ساختار سیستم پل بر حسب قطع کننده‌های مینیمال

اگر طرف راست تساوی‌های (۲.۱) و (۳.۱) را ساده سازی کنیم آنگاه (با توجه به اینکه برای هر متغیر دو مقداری $x_i^2 = x_i$) عبارت‌های حاصل با هم برابر خواهند شد.

از نتایج به دست آمده در مورد سیستم پل در جمع بندی به این نتیجه می‌رسیم که تابع ساختار سیستم که در جدول ۱.۱ به طور مشروح ارائه شد دارای دو نمایش معادل است که بر مبنای بردارهای مسیر مینیمال و بردارهای قطع کننده مینیمال به دست می‌آید. بنابراین مجدداً به این نکته تأکید می‌کنیم که استفاده از بردارهای مسیر مینیمال و بردارهای قطع کننده مینیمال ما را قادر می‌سازد که تابع ساختار سیستم پل را به ترتیب به صورت ساختارهای موازی–متوالی و یا متوالی–موازی بنویسیم. در حالت اول اجزای فعال داخل مسیرهای مینیمال به صورت متوالی به هم متصل و سپس زیر سیستم‌های حاصل به صورت موازی کنار هم قرار می‌گیرند و در حالت دوم اجزای فعال داخل قطع کننده‌های مینیمال به صورت موازی و سپس زیر سیستم‌های حاصل به صورت متوالی به هم متصل می‌شوند. این واقعیت یک نتیجه کلی است که در مورد سیستم‌های منسجم دلخواه صادق است. بنابراین، قضیه کلی زیر را خواهیم داشت که اثبات آن از آنچه در مورد سیستم پل استدلال کردیم حاصل می‌شود و لذا آن را به خواننده واگذار می‌کنیم.

قضیه ۱.۱ یک سیستم منسجم دلخواه با تابع ساختار $\varphi(\mathbf{x})$ را در نظر بگیرید.

الف) اگر $P_1, P_2, \ldots, P_l$ مجموعه مسیرهای مینیمال سیستم باشند آنگاه

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{i=1}^{l} (1 - \prod_{j \in P_i} x_j). \quad = \max_{1 \le i \le l} \left\{ \min_{j \in P_i} (x_j) \right\}$$

ب) اگر $C_1, C_2, \ldots, C_k$ مجموعه قطع کننده‌های مینیمال سیستم باشند آنگاه

$$\varphi(\mathbf{x})=\prod_{i=1}^{k}(1-\prod_{j\in C_i}(1-x_j)). \quad = \min_{1\le i\le k}\{\max_{j\in C_i}(x_j)\}$$

لازم به ذکر است که طرف راست تساوی‌ها در قضیه ۱.۱ پس از ساده سازی عبارات (با توجه به اینکه برای $m\ge 1$، $x_i^m=x_i$) به نتیجه یکسان منتهی می‌شود.

با توجه به تعریف سیستم‌های موازی و متوالی و قضیه ۱.۱، تابع ساختار سیستم منسجم را می‌توان به صورت زیر نیز نمایش داد.

$$\varphi(\mathbf{x})=\max_{1\le i\le p}\min_{j\in P_i} x_i,$$

و

$\min\max_{j\in C_i} x_i$

$$\varphi(\mathbf{x})=\min_{1\le i\le k}\cancel{\min}_{j\in C_i} x_i \quad \max$$

قبل از اینکه این فصل را به پایان برسانیم دو قضیه زیر را در ارتباط با ساختار سیستم‌های منسجم ارائه می‌کنیم که در تحلیل قابلیت اعتماد سیستم‌ها مفید هستند. ابتدا قرارداد زیر را معرفی می‌کنیم.

برای اطلاعات در مورد $\coprod_{i=1}^{n}$ (کاپروداکت)

https://en.m.wikipedia.org/wiki/coproduct

$$\coprod_{i=1}^{n}x_i=1-\prod_{i=1}^{n}(1-x_i),$$

$$x_1\amalg x_2=1-(1-x_1)(1-x_2),$$

$$\mathbf{x}\amalg\mathbf{y}=(x_1\amalg y_1,\ldots,x_n\amalg y_n),$$

$$\mathbf{x}.\mathbf{y}=(x_1.y_1,\ldots,x_n.y_n).$$

قضیه ۲.۱ فرض کنید φ تابع ساختار یک سیستم منسجم با n جزء باشد، آنگاه

$$\prod_{i=1}^{n}x_i\le\varphi(\mathbf{x})\le\coprod_{i=1}^{n}x_i$$

اثبات.

فرض کنیم $\prod_{i=1}^{n}x_i=1$ آنگاه $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$. در نتیجه طبق تعریف سیستم‌های منسجم $\varphi(\mathbf{x})=1$. لذا در این حالت $\prod_{i=1}^{n}x_i\le\varphi(\mathbf{x})$. اگر $\prod_{i=1}^{n}x_i=0$ آنگاه نامساوی بدیهی

است. بنابراین نامساوی سمت چپ اثبات می‌شود. اگر $\prod_{i=1}^{n} x_i = 0$ یا معادل با آن $1-\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)=0$ آنگاه $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. در نتیجه طبق تعریف $\varphi(\mathbf{x})=0$. لذا در این حالت $\prod_{i=1}^{n} x_i \le \varphi(\mathbf{x})$. اگر $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$ آنگاه نامساوی بدیهی است در نتیجه نامساوی راست نیز اثبات می‌شود. ■

نتیجه ۱.۱ این قضیه بیان می‌کند که تابع ساختار هر سیستم منسجم دلخواه همواره بین توابع ساختار سیستم‌های متوالی و موازی قرار می‌گیرد.

قضیه ۳.۱ فرض کنید φ تابع ساختار یک سیستم منسجم باشد. آنگاه

الف) $\varphi(\mathbf{x} \amalg \mathbf{y}) \ge \varphi(\mathbf{x}) \amalg \varphi(\mathbf{y})$

ب) $\varphi(\mathbf{x}.\mathbf{y}) \le \varphi(\mathbf{x}).\varphi(\mathbf{y})$

اثبات :

$x_i . y_i \le x_i$

$x_i . y_i \le y_i$

φ تابعی صعودی است پس

$\varphi(\underline{x}.\underline{y}) \le \varphi(\underline{x})$

& $\varphi(\underline{x}.\underline{y}) \le \varphi(\underline{y})$

$\Rightarrow \varphi(\underline{x}.\underline{y}) \le \min[\varphi(\underline{x}).\varphi(\underline{y})]$

$=$

رابطه صفحه ۹ کتاب

اثبات.

الف) به ازای هر i داریم $x_i \amalg y_i \ge x_i$، بنابراین با توجه به اینکه φ تابعی صعودی است داریم $\varphi(\mathbf{x} \amalg \mathbf{y}) \ge \varphi(\mathbf{x})$. به طور مشابه به دست می‌آوریم $\varphi(\mathbf{x} \amalg \mathbf{y}) \ge \varphi(\mathbf{y})$. در نتیجه

$$\varphi(\mathbf{x} \amalg \mathbf{y}) \ge \max[\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})]$$
$$\equiv \varphi(\mathbf{x}) \amalg \varphi(\mathbf{y})$$

ــ رابطه (۱.۱)

ب) به شیوه‌ای مشابه با قسمت الف اثبات می‌شود و لذا اثبات آن را به خواننده واگذار می‌کنیم.

بنابراین اثبات قضیه کامل است. ■

قسمت (الف) در قضیه ۳.۲ یک نتیجه مهم در مورد ساختار سیستم را بیان می‌کند و آن این است که افزونگی (موازی سازی) در سطح مؤلفه‌های یکی سیستم مؤثرتر است از افزونگی در سطح سیستم است.

اجزای

موازی سازی

۵.۱ مسایل

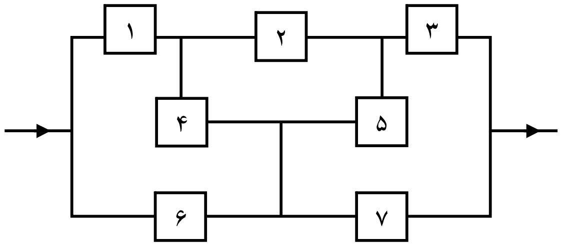
۱. در هر یک از سیستم‌های زیر بردارهای مسیر مینیمال و بردارهای قطع کننده مینیمال را تعیین کنید.

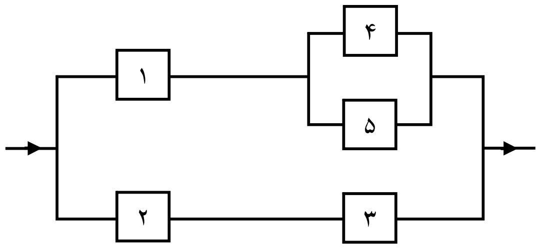
الف) یک سیستم متوالی با ۳ جزء

ب) یک سیستم موازی با ۳ جزء

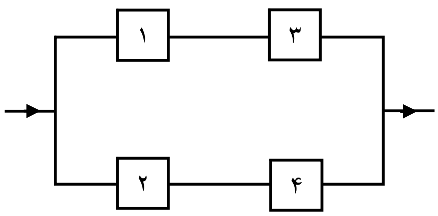
ج) یک سیستم ۲ از ۳.

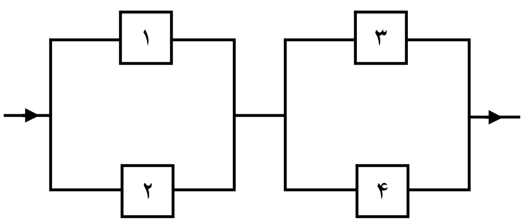
۲. بردارهای مسیر مینیمال و بردارهای قطع کننده مینیمال سیستمهایی با نمودار زیر را تعیین کنید.





۳. بردارهای مسیر مینیمال و بردارهای قطع کننده مینیمال سیستم‌های زیر را به دست آورده و با هم مقایسه کنید. تابع ساختار هر یک از دو سیستم را مشخص کنید.

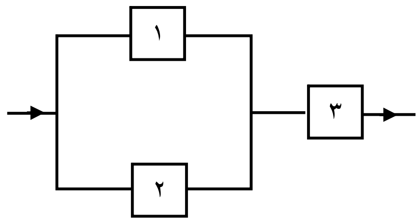




۴. فرض کنید φ تابع ساختار سیستمی با نمودار زیر باشد. درقضیه **۳.۱**،

الف) نمودار $\varphi(\mathbf{x} \amalg \mathbf{y})$ و $\varphi(\mathbf{x}) \amalg \varphi(\mathbf{y})$ را مشخص کنید.

ب) نمودار $\varphi(\mathbf{x}.\mathbf{y})$ و $\varphi(\mathbf{x}).\varphi(\mathbf{y})$ را مشخص کنید.



۵. در قضیه ۳.۱ ثابت کنید که در قسمت (الف) تساوی اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر سیستم موازی باشد و در قسمت (ب) تساوی برقرار است اگر و تنها اگر سیستم متوالی باشد.

۶. ثابت کنید در یک سیستم منسجم با تابع ساختار φ، $\varphi(۱,۱,\ldots,۱) = ۱$ و $\varphi(۰,۰,\ldots,۰) = ۰$.

بدیهی است، از شروط سیستم یکنوا است.

۷. نمادهای زیر را در نظر بگیرید.

$$(۱_i, \mathbf{x}) = (x_۱, \ldots, x_{i-۱}, ۱, x_{i+۱}, \ldots, x_n)$$

$$(۰_i, \mathbf{x}) = (x_۱, \ldots, x_{i-۱}, ۰, x_{i+۱}, \ldots, x_n)$$

و ثابت کنید تابع ساختار φ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد

$$\varphi(\mathbf{x}) = x_i \varphi(۱_i, \mathbf{x}) + (۱ - x_i)\varphi(۰_i, \mathbf{x})$$

۸. مثالی از یک سیستم ارائه کنید که در آن یک جزء نامربوط وجود داشته باشد.

۹. فرض کنید $C_۱$، $C_۲$، $C_۳$، $C_۴$ و $C_۵$ به طور مستقل از یکدیگر عمل می‌کنند. همچنین فرض کنید سیستم i که با k_i نمایش می‌دهیم به صورت زیر ساخته شده باشد

$k_۱$ شامل اجزای $C_۱$ و $C_۲$ است که متوالی‌اند

$k_۲$ شامل اجزای $C_۳$ و $C_۴$ است که موازی‌اند

$k_۳$ شامل $C_۵$ است

اگر سیستم k متشکل از $k_۱$، $k_۲$ و $k_۳$ باشند که متوالی‌اند

الف) نمودار سیستم k را رسم کنید.

ب) بردارهای مسیر مینیمال و بردارهای قطع‌کننده مینیمال k را تعیین کنید.

۲

قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم

۱.۲ مقدمه

در فصل اول تابع ساختار سیستم‌های منسجم را تعریف کرده و ساختارهای پایه در قابلیت اعتماد مانند ساختارهای موازی–متوالی، k از n و ... را معرفی کردیم. با معرفی مفاهیم بردارهای مسیر و قطع کننده مینیمال دیدیم که چگونه می‌توان تابع ساختار یک سیستم منسجم را بر حسب مسیرها و قطع‌کننده‌های مینیمال نمایش داد. در این فصل قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ابتدا، [illegible] در بخش ۲.۲، قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم را بر حسب قابلیت اعتماد اجزای آن در حالتی که اجزای سیستم مستقل هستند به دست می‌آوریم. سپس دو روش برای محاسبه قابلیت اعتماد سیستم ارائه می‌کنیم. روش اول استفاده از بردارهای مسیر و بردارهای قطع کننده مینیمال است. روش دوم استفاده از قضیه‌ی تجزیه است که بعضاً محاسبات قابلیت اعتماد سیستم‌های پیچیده را ساده‌تر می‌کند. در بخش ۳.۲، معیاری ارائه می‌کنیم که با استفاده از آن اهمیت نسبی قابلیت اعتماد سیستم را اندازه‌گیری می‌کنیم. بخش ۴.۲ قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم را در حالتی که اجزای سیستم وابسته هستند (استقلال آماری ندارند) مورد مطالعه قرار می‌دهد. در این بخش، با توجه به این که محاسبه قابلیت اعتماد در حالت وابستگی اجزاء مشکل است، کران‌هایی برای قابلیت اعتماد سیستم ارائه می‌کنیم که از نقطه نظر محاسباتی ساده‌تر هستند و در مقاصد عملی کاربردهایی فراوانی دارند.

۲.۲ قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم با اجزای مستقل

در ادامه فرض می‌کنیم سیستم منسجم دارای n جزء است که به طور مستقل عمل می‌کنند (حالتی که اجزاء وابسته‌اند در بخش‌های بعد مورد بررسی قرار می‌گیرد). فرض می‌کنیم $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ بردار وضعیت اجزاء باشد و تابع ساختار سیستم را همانند قبل با $\varphi(\mathbf{x})$ نمایش می‌دهیم. همچنین فرض می‌کنیم وضعیت جزء iام، یک متغیر تصادفی دو مقداری باشد که دارای تابع جرم احتمال زیر است،

$$P(X_i=x_i)=\begin{cases} p_i & \text{اگر } x_i=1 \text{ (جزء } i \text{ام فعال باشد)،} \\ 1-p_i & \text{اگر } x_i=0 \text{ (جزء } i \text{ام غیر فعال باشد)،} \end{cases}$$

به طوریکه $0\le p_i\le 1$.

p_i را قابلیت اعتماد جزء iام گوییم. بنابراین قابلیت اعتماد جزء iام برابر است با احتمال اینکه جزء iام فعال باشد. توجه کنید که

$$\begin{aligned} p_i &= P\left(X_i=1\right) \\ &= E\left(X_i\right) \end{aligned}$$

که در آن E نشان دهنده "امید ریاضی" (مقدار متوسط) X_i است. به طور مشابه قابلیت اعتماد سیستم (با توجه به اینکه تابع ساختار سیستم دو مقداری است) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$P\left(\varphi(\mathbf{X})=1\right)=E\left(\varphi(\mathbf{X})\right)$$

بردار $\underline{X}=(X_1,\ldots,X_n)$

از آنجایی که φ تابعی از بردار $\mathbf{x}$ است، قابلیت اعتماد سیستم تابعی از قابلیت اعتماد اجزای آن یعنی تابعی از بردار $\mathbf{p}=\left(p_1,p_2,\ldots,p_n\right)$ است که این تابع را با $h(\mathbf{p})$ نمایش می‌دهیم. داریم

$$h(\mathbf{p})=E\left(\varphi(\mathbf{X})\right)$$

اگر $p_1=p_2=\ldots=p_n$ از علامت $h(p)$ استفاده می‌کنیم.

در ادامه قابلیت اعتماد سیستم‌های پایه در قابلیت اعتماد، در حالتی که اجزاء مستقل‌اند، را محاسبه می‌کنیم.

۱.۲.۲ سیستم متوالی

فرض کنید ساختار سیستم متوالی باشد و اجزای آن مستقل از یکدیگر عمل کنند اگر جزء iام دارای قابلیت p_i باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} h(\mathbf{p}) &= E\big(\varphi(\mathbf{X})\big) \\ &= E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} E(X_i) && \text{از فرض استقلال} \\ &= \prod_{i=1}^{n} p_i. \end{aligned}$$

با توجه به این نمایش ملاحظه می‌شود که قابلیت اعتماد سیستم متوالی تابعی صعودی از قابلیت اعتماد اجزای آن است (البته این مسئله برای هر سیستم منسجمی درست است) و تابعی نزولی از تعداد اجزای سیستم است. در حالت خاص اگر $p_i = p$ ، $i = 1, 2, \ldots, n$، داریم

$$h(p) = p^n.$$

$$\frac{\partial \ln h(p)}{\partial n} = \frac{\partial (n \ln p)}{\partial n} = \ln p < 0$$

پس $h(p)$ تابعی نزولی از n است.

۲.۲.۲ سیستم موازی

فرض کنید $\varphi(\mathbf{x})$ تابع ساختار یک سیستم موازی با اجزای مستقل باشد به طوریکه قابلیت اعتماد جزء iام p_i است، آنگاه

$$\begin{aligned} h(\mathbf{p}) &= E\big(\varphi(\mathbf{X})\big) \\ &= E\left(1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - X_i)\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} E(1 - X_i) && \text{از فرض استقلال} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i). \end{aligned}$$

از نتیجه حاصل مشاهده می‌شود که قابلیت اعتماد یک سیستم موازی تابعی صعودی از قابلیت اعتماد اجزای آن و تابعی صعودی از تعداد اجزای سیستم است. در حالت خاص که $p_i = p$، $i = 1, 2, \ldots, n$، داریم

$$h(p) = 1 - (1 - p)^n.$$

$$\frac{\partial \ln h(p)}{\partial n} = \frac{\partial \ln(1 - (1-p)^n)}{\partial n} = \frac{-(1-p)^n \ln(1-p)}{1 - (1-p)^n} > 0$$

پس $h(p)$ تابعی صعودی از n است.

۳.۲.۲ سیستم k از n

قابلیت اعتماد سیستم‌های k از n در حالت کلی شکل ساده‌ای ندارد. درحالت خاص اگر اجزای سیستم مستقل و دارای قابلیت یکسان باشند، یعنی $p_۱ = p_۲ = \ldots = p_n = p$ داریم،

$$
\begin{aligned}
h(\mathbf{p}) &= E\left(\varphi(\mathbf{X})\right) \\
&= P\left(\sum_{i=۱}^{n} X_i \geq k\right) \\
&= \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p^i (۱-p)^{n-i}
\end{aligned}
$$

چون X_i، در حالت ما Binary است!

که تساوی اخیر از این واقعیت نتیجه می‌شود که تحت فرض‌های موجود، $\sum_{i=۱}^{n} X_i$ دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای n و p است. به راحتی مشاهده می‌شود که برای مقدار ثابت n، تابع قابلیت اعتماد سیستم برحسب k نزولی است و برای k ثابت تابع قابلیت اعتماد سیستم تابعی صعودی از n است. همچنین می‌توان نشان داد که $h(p)$ تابعی صعودی از p است که اثبات آن به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

مثال ۱.۲ فرض کنید سیستم خنک کننده یک راکتور اتمی دارای ۳ پمپ آب است. همچنین فرض کنید پمپ‌ها به طور مستقل از یکدیگر و هر یک با قابلیت اعتماد ۰/۹۵ در یک فاصله ۱۰۰۰ ساعتی کار می‌کنند. اگر برای خنک کردن راکتور لازم باشد حداقل ۲ پمپ عمل کنند، قابلیت اعتماد سیستم خنک کننده را محاسبه کنید.

حل. اگر $h(۰/۹۵)$ قابلیت اعتماد سیستم در فاصله زمانی ۱۰۰۰ ساعتی باشد آنگاه داریم،

$$
\begin{aligned}
h(۰/۹۵) &= \sum_{j=۱}^{n} \binom{۳}{j} (۰/۹۵)^j (۰/۰۵)^{۳-j} \\
&= ۰/۹۹۲
\end{aligned}
$$

توجه کنید که در اینجا قابلیت اعتماد سیستم از قابلیت اعتماد هر یک از اجزای آن بیشتر است. در این مثال این حالت برقرار است.

۴.۲.۲ سیستم‌های منسجم کلی‌تر

در بخش قبل دیدیم، در حالتی که اجزای سیستم مستقل از یکدیگر کار کنند، چگونه می‌توان قابلیت اعتماد سیستم‌های موازی-متوالی و k از n را محاسبه نمود. در مورد سیستم‌های پیچیده‌تر اغلب محاسبه قابلیت اعتماد ممکن است کار طاقت فرسایی باشد به ویژه اگر تعداد اجزای سیستم زیاد باشد. به عنوان مثال سیستم پل در فصل ۱ را دوباره در نظر بگیرید. همانطور

که در جدول ۱.۱ ملاحظه شد، سیستم پل دارای $۳۲ = ۲^۵$ بردار وضعیت بود که برای ۱۶ حالت از بردارهای وضعیت سیستم فعال بود. برای محاسبه قابلیت اعتماد سیستم باید $P\big(\varphi(\mathbf{X})=۱\big)$ را در هر یک از این ۱۶ حالت محاسبه کرده و سپس مقادیر حاصل را با هم جمع کنیم. به عنوان مثال اگر اجزاء مستقل از هم و به ترتیب با قابلیت‌های $p_۱$، $p_۲$، ... و $p_۵$ فعال باشند آنگاه قابلیت اعتماد سیستم به ازای بردارهای وضعیت مختلف برابر $h(\mathbf{p})$ خواهد بود که در جدول زیر ارائه شده است

$\mathbf{x}$	$\varphi(\mathbf{x})$	$h(\mathbf{p})$
$(۱,۱,۱,۱,۱)$	۱	$p_۱p_۲p_۳p_۴p_۵$
$(۱,۱,۱,۱,۰)$	۱	$p_۱p_۲p_۳p_۴(۱-p_۵)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(۰,۱,۰,۰,۱)$	۱	$(۱-p_۱)p_۲(۱-p_۳)(۱-p_۴)p_۵$

اگر مقادیر حاصل را جمع کنیم، پس از انجام عملیات جبری دست و پاگیر، به این نتیجه می‌رسیم که قابلیت اعتماد سیستم برابر است با

$$\begin{aligned}h(\mathbf{p}) &= p_۱p_۴ + p_۲p_۵ + p_۱p_۳p_۵ + p_۲p_۳p_۴ - p_۱p_۲p_۳p_۴\\ &\quad - p_۱p_۲p_۳p_۵ - p_۱p_۲p_۴p_۵ - p_۱p_۳p_۴p_۵ - p_۲p_۳p_۴p_۵ + ۲p_۱p_۲p_۳p_۴p_۵.\end{aligned}$$

اگر اجزای سیستم علاوه بر اینکه مستقل عمل می‌کنند دارای قابلیت یکسان نیز باشند آنگاه

$$h(\mathbf{p}) = ۲p^۲ + ۳p^۳ - ۵p^۴ + ۲p^۵.$$

همانطور که ملاحظه شد محاسبه قابلیت اعتماد سیستم در این حالت با وجود اینکه دارای فقط ۵ جزء است کار ساده نمی‌باشد. در ادامه دو روش برای محاسبه قابلیت اعتماد ارائه می‌کنیم که محاسبات را به طور چشمگیری کاهش می‌دهند.

روش اول: استفاده از بردارهای مسیر و بردارهای قطع کننده مینیمال است. همانطور که در فصل دوم دیدیم تابع ساختار سیستم بر اساس بردارهای مسیر و بردارهای قطع کننده به صورت زیر قابل نمایش است.

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= ۱-\prod_{i=۱}^{l}\left(۱-\prod_{j\in P_i} x_j\right)\\ &= \prod_{i=۱}^{k}\left(۱-\prod_{j\in C_i}(۱-x_j)\right).\end{aligned}$$

بنابراین قابلیت اعتماد سیستم برابر است با

$$\begin{aligned} h(\mathbf{p}) &= E(\varphi(\mathbf{X})) \\ &= E\left(1-\prod_{i=1}^{l}\left(1-\prod_{j\in P_i}X_j\right)\right) && \text{برحسب بردارهای مسیر مینیمال} \\ &= E\left(\prod_{i=1}^{k}\left(1-\prod_{j\in C_i}(1-X_j)\right)\right). && \text{برحسب بردارهای قطع کننده مینیمال} \end{aligned}$$

باید توجه داشت که چون ممکن است یک جزء در چند بردار مسیر مینیمال یا چند بردار قطع کننده مینیمال ظاهر شود در وحله اول امید ریاضی را نمی‌توان داخل عبارت کروشه برد. لذا ابتدا باید عبارات داخل کروشه را حتی الامکان ساده سازی نمود به طوریکه مجاز باشیم امید ریاضی عبارات حاصلضرب را به صورت حاصلضرب امید ریاضی بنویسیم. برای روشن‌تر شدن مطلب دوباره مثال پل را در نظر بگیرید. همانطور که دیدیم سیستم دارای چهار مسیر مینیمال با مجموعه‌های مینیمال $p_1=\{1,4\}$ ، $p_2=\{2,5\}$ ، $p_3=\{1,3,5\}$ و $p_4=\{2,3,4\}$ است. لذا تابع ساختار آن برابر است با

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1-(1-x_1x_4)(1-x_2x_5)(1-x_1x_3x_5)(1-x_2x_3x_4).$$

اگر عبارت سمت راست را (با توجه به اینکه $x_i^2=x_i$) ساده کنیم بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= x_1x_4+x_2x_5+x_1x_3x_5+x_2x_3x_4-x_1x_2x_3x_4 \\ &\quad -x_1x_2x_3x_5-x_1x_2x_4x_5-x_1x_3x_4x_5-x_2x_3x_4x_5+2x_1x_2x_3x_4x_5. \end{aligned}$$

در نتیجه $h(\mathbf{p})$ قابلیت اعتماد سیستم، برابر است با

$$\begin{aligned} h(\mathbf{p}) = E\left(\varphi(\mathbf{X})\right) &= p_1p_4+p_2p_5+p_1p_3p_5+p_2p_3p_4-p_1p_2p_3p_4 \\ &\quad -p_1p_2p_3p_5-p_1p_2p_4p_5-p_1p_3p_4p_5-p_2p_3p_4p_5+2p_1p_2p_3p_4p_5 \end{aligned}$$

اگر تابع ساختار را برحسب قطع کننده‌های مینیمال نمایش داده و ساده سازی کنیم مقدار قابلیت اعتماد سیستم همین مقدار خواهد شد.

روش دوم: برای محاسبه قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم، که منجر به ساده‌تر شدن محاسبات می‌شود، استفاده از قضیه‌ای است به نام قضیه تجزیه[1] که در ادامه آن را بیان و اثبات می‌کنیم. قبل از آن نمادهای زیر را معرفی می‌کنیم، (تمرین ۷ فصل اول را ببینید)

---

[1] Decomposition theorm

$$(1_i,\mathbf{x})=(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

$$(0_i,\mathbf{x})=(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

و

$$(1_i,\mathbf{p})=(p_1,p_2,\ldots,p_{i-1},1,p_{i+1},\ldots,p_n)$$

$$(0_i,\mathbf{p})=(p_1,p_2,\ldots,p_{i-1},0,p_{i+1},\ldots,p_n)$$

قضیه ۱.۲ (**قضیه تجزیه**) یک سیستم منسجم شامل n جزء با تابع ساختار $\varphi(\mathbf{x})$ را در نظر بگیرید. آنگاه تابع قابلیت اعتماد سیستم را می‌توان به صورت زیر نمایش داد.

$$h(\mathbf{p})=p_i h(1_i,\mathbf{p})+(1-p_i)h(0_i,\mathbf{p}).$$

که در آن $h(1_i,\mathbf{p})$ قابلیت اعتماد یک سیستم منسجم با n جزء را نشان می‌دهد که جزء iام آن کاملاً قابل اعتماد است (همواره فعال است) و $h(0_i,\mathbf{p})$ قابلیت اعتماد یک سیستم منسجم با n جزء را نشان می‌دهد که جزء iام آن از کار افتاده است.

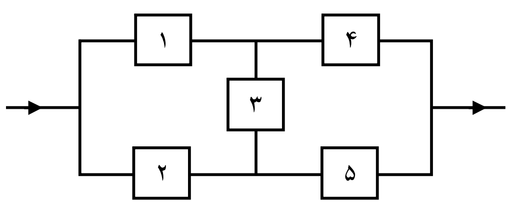
اثبات.

از تمرین ۷ فصل اول می‌توان نوشت

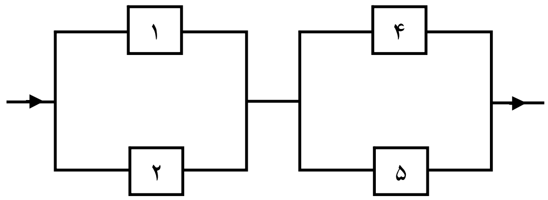
$$\begin{aligned}h(\mathbf{p})&=E\left(\varphi(\mathbf{X})\right)=E\left[X_i\varphi(1_i,\mathbf{X})+(1-X_i)\varphi(0_i,\mathbf{X})\right]\\&=E(X_i)E(\varphi(1_i,\mathbf{X}))+E(1-X_i)E(\varphi(0_i,\mathbf{X}))\quad \text{از استقلال اجزاء}\\&=p_i h(1_i,\mathbf{p})+(1-p_i)h(0_i,\mathbf{p}).\end{aligned}$$

■

برای توضیح این قضیه بار دیگر مثال پل را در نظر بگیرید. همانطور که دیدیم نمودار این سیستم به شکل زیر است.



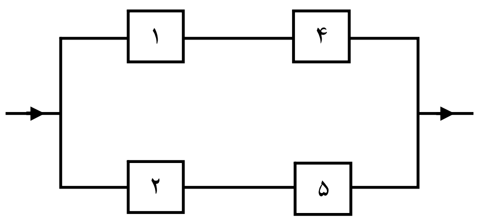
دوباره فرض می‌کنیم اجزاء به طور مستقل و با قابلیت اعتماد p_i ، $i = 1,2,\ldots,5$، کار می‌کنند. برای محاسبه قابلیت اعتماد سیستم فرض می‌کنیم جزء سوم همواره فعال است (کاملاً قابل اعتماد است). در این صورت سیستم پل به یک سیستم متوالی-موازی با چهار جزء با اجزای ۱، ۲، ۴ و ۵ تبدیل می‌شود که نمودار آن در شکل زیر آمده است.



قابلیت اعتماد این سیستم برابر است با

$$h(1_3, \mathbf{p}) = [1-(1-p_1)(1-p_2)][1-(1-p_4)(1-p_5)].$$

اکنون فرض می‌کنیم جزء سوم در سیستم پل از کار افتاده است (توجه کنید با این فرض یک عدم اتصال در موقعیت جزء سوم به وجود می‌آید). در این حالت سیستم پل به یک سیستم موازی-متوالی با چهار جزء ۱، ۲، ۴ و ۵ به صورت زیر تبدیل می‌شود.



برای چنین سیستمی قابلیت اعتماد برابر است با

$$h(0_3, \mathbf{p}) = 1-(1-p_1p_4)(1-p_2p_5).$$

بنابراین با توجه به قضیه تجزیه قابلیت اعتماد سیستم برابر است با عبارت زیر که با نتیجه قبلی یکسان است.

$$\begin{aligned} h(\mathbf{p}) &= p_3 h(1_3, \mathbf{p}) + (1-p_3) h(0_3, \mathbf{p}) \\ &= p_1p_4 + p_2p_5 + p_1p_3p_5 + p_2p_3p_4 - p_1p_2p_3p_4 - p_1p_2p_3p_5 \\ &\quad - p_1p_2p_4p_5 - p_1p_3p_4p_5 - p_2p_3p_4p_5 + 2p_1p_2p_3p_4p_5. \end{aligned}$$

۳.۲ اهمیت نسبی قابلیت اعتماد اجزای سیستم

همانطور که دیدیم قابلیت اعتماد یک سیستم تابعی از قابلیت اعتماد اجزای آن است. بنابراین در تعیین مقدار قابلیت سیستم طبیعی است این سؤال مطرح شود که نقش هر یک از اجزاء در قابلیت اعتماد سیستم چقدر است؟ یا به عبارت دیگر آیا بعضی از اجزاء در تعیین قابلیت اعتماد سیستم از بعضی دیگر اهمیت بیشتری دارند؟ اگر بتوان معیاری ارائه کرد که اهمیت نسبی قابلیت اعتماد اجزاء را مشخص کند آنگاه مهندسین و طراحان سیستم قادر خواهند بود که با استفاده از آن در طراحی و یا اصلاح سیستم اجزاء مهم‌تر را بیشتر مورد توجه قرار دهیم. در مهندسی قابلیت اعتماد معیارهای مختلفی برای اندازه‌گیری اهمیت نسبی قابلیت اعتماد اجزاء ارائه شده است که در میان آن‌ها معیاری که در ادامه تعریف می‌شود نقش مهمی را ایفاء می‌کند. قبل از ارائه تعریف اهمیت نسبی قابلیت اعتماد اجزاء قضیه زیر را ثابت می‌کنیم که نشان می‌دهد تابع قابلیت اعتماد سیستم منسجم برحسب p_i، $i=1,2,\dots,n$، تابعی صعودی است.

به ازای بردارهای وضعیت x^0 گوناگون،
$\varphi(1_i,\underline{X})-\varphi(0_i,\underline{X})$
تحقق‌های متفاوتی را
می‌گیرد که اساساً
$\varphi(1_i,\underline{X})-\varphi(0_i,\underline{X})$
بین صفر و یک اکید خواهد بود

قضیه ۲.۲ اگر $h(\mathbf{p})$ تابع قابلیت اعتماد یک سیستم منسجم با تابع ساختار $\varphi(\mathbf{x})$ باشد که در آن به ازای هر i، $i=1,2,\dots,n$، $0<p_i<1$، آنگاه $h(\mathbf{p})$ تابعی اکیداً صعودی از p_i است.

اثبات.

از قضیه تجزیه دیدیم که $h(\mathbf{p})$ را می‌توان به صورت زیر نوشت،

$$h(\mathbf{p})=p_i h(1_i,\mathbf{p})+(1-p_i)h(0_i,\mathbf{p}).$$

بنابراین با مشتق گیری برحسب p_i، $i=1,2,\dots,n$، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p_i}h(\mathbf{p})&=h(1_i,\mathbf{p})-h(0_i,\mathbf{p})\\&=E\big(\varphi(1_i,\mathbf{X})-\varphi(0_i,\mathbf{X})\big).\end{aligned}$$

چون φ یک تابع صعودی است داریم $E\big(\varphi(1_i,\mathbf{X})-\varphi(0_i,\mathbf{X})\big)\ge 0$. علاوه بر آن چون سیستم منسجم است، عضو نامربوط در آن وجود ندارد. بنابراین یک بردار وضعیت $\mathbf{x}^0$ وجود دارد که به ازای آن $\varphi(1_i,\mathbf{x}^0)-\varphi(0_i,\mathbf{x}^0)=1$. از طرفی چون طبق فرض به ازای هر i، $i=1,2,\dots,n$، $0<p_i<1$، $\mathbf{x}^0$ با احتمال مثبت اتفاق می‌افتد. بنابراین

$$E\big(\varphi(1_i,\mathbf{X})-\varphi(0_i,\mathbf{X})\big)>0$$

و در نتیجه $\partial h(\mathbf{p})/\partial p_i>0$ و اثبات کامل می‌شود. ■

اکنون تعریف اهمیت نسبی قابلیت اعتماد اجزاء را ارائه می‌کنیم.

برای اثبات $\dfrac{\partial h(p)}{\partial p_i}<1$ می‌توان یک بردار وضعیت $\underline{x}^0$ یافت که در آن $\varphi(1_i,x^0)-\varphi(0_i,x^0)=0$. از طرفی چون $0<p_i<1$، $i=1,\dots,n$ این $\underline{x}^0$ با احتمال کمتر از یک اتفاق می‌افتد پس
$E\big(\varphi(1_i,\underline{X})-\varphi(0_i,\underline{X})\big)<1$

دقت کنید با توجه به صعودی بودن φ نمی‌توان گفت $\varphi(1_i,\underline{X})-\varphi(0_i,\underline{X})=-1$

تعریف ۱.۲ فرض کنید φ تابع ساختار یک سیستم منسجم شامل n جزء با تابع قابلیت اعتماد $h(\mathbf{p})$ باشد. بنابر تعریف اهمیت نسبی قابلیت اعتماد جزء iام که با $I_h(i)$ نمایش می‌دهیم برابر است با

$$I_h(i) = \frac{\partial}{\partial p_i} h(\mathbf{p}),\ i = ۱, ۲, \ldots, n.$$

در صفحه قبل اثبات شد

از قضیه قبل توجه داریم که $I_h(i) > ۰$. از طرفی به راحتی می‌توان نشان داد که $I_h(i) < ۱$. بنابراین معیار اهمیت قابلیت اعتماد اجزای سیستم همواره مقداری در فاصله $(۰,۱)$ اختیار می‌کند. پس با توجه به تعریف منطقی است فرض کنیم که در یک سیستم اگر برای دو جزء i و j، $I_h(i) \geq I_h(j)$ آنگاه جزء iام از اهمیت نسبی بیشتری در سیستم نسبت به جزء iام برخوردار است. برای روشن‌تر شدن مطلب مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۲.۲ فرض کنید ساختار سیستم متوالی باشد که اجزای آن به طور مستقل عمل می‌کنند. همانطور که قبلاً دیدیم تابع قابلیت اعتماد سیستم برابر است با

$$h(\mathbf{p}) = \prod_{j=۱}^{n} p_j.$$

در نتیجه

$$I_h(i) = \frac{\partial}{\partial p_i} h(\mathbf{p}) = \frac{\partial}{\partial p_i} \prod_{j=۱}^{n} p_j = \prod_{\substack{j=۱ \\ j \neq i}}^{n} p_j$$

بنابراین در یک سیستم متوالی با اجزای مستقل اهمیت نسبی قابلیت اعتماد هر جزء برابر است با حاصلضرب قابلیت اعتماد اجزای دیگر. اگر فرض کنیم اجزاء سیستم طوری شماره‌گذاری شوند که

$$p_۱ \leq p_۲ \leq \cdots \leq p_n$$

آنگاه به راحتی ملاحظه می‌شود که

$$I_h(۱) \geq I_h(۲) \geq \cdots \geq I_h(n).$$

بنابراین ضعیف‌ترین جزء در سیستم از بقیه اجزاء مهم‌تر است.

اگر فرض کنیم ساختار سیستم موازی است که در آن اجزاء مستقل‌اند، آنگاه قابلیت اعتماد سیستم برابر است با

$$h(\mathbf{p}) = ۱ - \prod_{i=۱}^{n} (۱ - p_i).$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} I_h(i) &= \frac{\partial}{\partial p_i} h(\mathbf{p}) \\ &= \frac{\partial}{\partial p_i} \left(۱ - \prod_{j=۱}^{n} (۱ - p_j) \right) \\ &= \prod_{\substack{j=۱ \\ j \neq i}}^{n} (۱ - p_j). \end{aligned}$$

بنابراین با فرض اینکه اجزای سیستم طوری شماره‌گذاری شده‌اند که $p_۱ \le p_۲ \le \cdots \le p_n$ ملاحظه می‌شود که

$$I_h(۱) \le I_h(۲) \le \cdots \le I_h(n).$$

یعنی در سیستم جزئی که بیشترین قابلیت اعتماد را دارد از بقیه اجزاء مهم‌تر است. این نتیجه‌ای است که به طور شهودی انتظار آن را داشتیم.

۴.۲ قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم با اجزای وابسته

تاکنون فرض کردیم که سیستم شامل اجزایی است که به طور مستقل عمل می‌کنند. اگرچه فرض استقلال متغیرها در اغلب مطالعات آماری در سادگی محاسبات و تحلیل‌ها می‌تواند مفید واقع شود اما در عمل ممکن است این فرض واقع بینانه نباشد. به ویژه هنگامی که با سیستم‌ها سر و کار داریم معمولاً غیر منطقی است که فرض کنیم اجزاء سیستم مستقل از یکدیگر عمل می‌کنند. برای روشن‌تر شدن مطلب مثال‌های زیر را در نظر بگیرید.

الف) در سیستم‌های منسجم، اغلب بردارهای مسیر مینیمال دارای اجزاء مشترک هستند. بنابراین اگر یک جزء در یک مسیر فعال (غیر فعال) باشد در مسیر دیگر نیز چنین است. بنابراین منطقی است فرض کنیم که بردارهای مسیر مینیمال (به عنوان زیر سیستم) به هم وابسته‌اند.

ب) هنگامی که یک سیستم در محیطی مورد استفاده قرار می‌گیرد، تأثیر شرایط محیطی بر همه اجزاء یکسان است. به عبارت دیگر اگر فعالیت یک جزء بر اثر شرایط محیطی رو به تحلیل رود آنگاه محتمل است که اجزاء دیگر نیز همین وضعیت را داشته باشند.

ج) در اجزایی از سیستم که بار وارد شده به سیستم را به طور مشترک تحمل می‌کنند، شکست یک جزء باعث افزایش بار به دیگر اجزاء می‌شود.

در هر یک از ۳ مورد فوق مشاهده می‌شود که به طور شهودی نوعی وابستگی بین اجزاء و زیر سیستم‌ها وجود دارد. یعنی فعال بودن (غیر فعال بودن) یک جزء یا زیر سیستم باعث افزایش احتمال فعال بودن (غیر فعال بودن) اجزاء و یا زیر سیستم‌های دیگر می‌شود. نکته قابل توجه این است که در صورت وجود وابستگی بین اجزاء این وابستگی غالباً از نوع مثبت است.
در ادامه این بخش مفهوم وابستگی را در حالت کلی تعریف می‌کنیم و بعضی از خواص آن را بدون اثبات مطرح می‌کنیم.
اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند، متداول‌ترین معیار برای اندازه‌گیری وابستگی بین X و Y کوواریانس بین X و Y است. خاطر نشان می‌کنیم که کوواریانس بین X و Y به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

اگر X و Y وابستگی مثبت داشته باشند آنگاه $Cov(X,Y)\geq ۰$. در متون آماری صورت‌های قوی‌تری از مفهوم وابستگی مثبت (که در ادامه به آن تنها وابستگی گوییم) ارائه شده است که در حالت چند متغیره به تعریف زیر اشاره می‌کنیم. (برای جزئیات بیشتر می‌توان به کتاب بارلو و پروشان (۱۹۸۱) مراجعه کرد.)
تعریف ۲.۲ متغیرهای تصادفی $T_۱,T_۲,\ldots,T_n$ را وابسته گوییم هر گاه برای تمام توابع صعودی دو مقداری P و Δ داشته باشیم

بنا به صفحه ۲۰۹ کتاب بارلو و پروشان T_i ها باید Binary یا (دومقداری) باشند

$$Cov\big(P(\mathbf{T}),\Delta(\mathbf{T})\big)\geq ۰$$

که در آن $\mathbf{T}=(T_۱,T_۲,\ldots,T_n)$.
بر اساس تعریف فوق، متغیرهای تصادفی وابسته در خواص چند متغیره زیر صدق می‌کنند که آن‌ها را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

۱) زیر مجموعه‌های یک مجموعه از متغیرهای وابسته خود وابسته‌اند.

۲) مجموعه‌های شامل یک متغیر تصادفی وابسته وابسته است.

۳) توابع صعودی از متغیرهای تصادفی وابسته، وابسته‌اند.
۴) اگر دو مجموعه از متغیرهای تصادفی وابسته از هم مستقل باشند، آنگاه اجتماع آن‌ها یک مجموعه از متغیرهای تصادفی وابسته خواهد بود.

از دو رابطه ۲ و ۴ به راحتی ملاحظه می‌شود که مجموعه متغیرهای تصادفی مستقل وابسته هستند.
اکنون با استفاده از نتایج فوق قابلیت اعتماد سیستم‌های موازی و متوالی را در حالتی که اجزای آن‌ها وابسته باشند مورد بررسی قرار می‌دهیم. قضیه زیر را در نظر بگیرید.
قضیه ۳.۲ اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی دو مقداری وابسته باشند آنگاه

الف) $P\left(\prod_{i=1}^{n} X_i = 1\right) \geq \prod_{i=1}^{n} P(X_i = 1)$

ب) $P\left(\coprod_{i=1}^{n} X_i = 1\right) \leq \coprod_{i=1}^{n} P(X_i = 1)$

اثبات.
الف) توجه کنید که X_1 و $\prod_{i=2}^{n} X_i$ توابعی صعودی از $X_1, X_2, \ldots, X_n$ هستند. بنابراین از بند (۳) خواص متغیرهای تصادفی وابسته، X_1 و $\prod_{i=2}^{n} X_i$ وابسته‌اند. در نتیجه

$$Cov\left(X_1, \prod_{i=2}^{n} X_i\right) = E\left(X_1 \prod_{i=2}^{n} X_i\right) - E(X_1)E\left(\prod_{i=2}^{n} X_i\right) \geq 0$$

اینبار با X_2 و $\prod_{i=3}^{n} X_i$ این کار را ادامه دهید

اگر همین استدلال را به طور مکرر به کار ببریم به به دست می‌آوریم.

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) \geq \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = E\left(X_1 \prod_{i=2}^{n} X_i\right) \geq EX_1 E\left(\prod_{i=2}^{n} X_i\right) \geq EX_1 EX_2 E\left(\prod_{i=3}^{n} X_i\right) \ldots$$

و یا

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} X_i = 1\right) \geq \prod_{i=1}^{n} P(X_i = 1)$$

و اثبات قسمت (الف) کامل می‌شود.
ب) اثبات قسمت (ب) مشابه قسمت (الف) است و به خواننده واگذار می‌شود. ■
توجه داریم که $\prod_{i=1}^{n} X_i$ تابع ساختار یک سیستم متوالی را نشان می‌دهد. بنابراین، نتیجه قسمت الف بیان می‌کند که قابلیت اعتماد سیستم، $P\left(\prod_{i=1}^{n} X_i = 1\right)$، در حالتی که اجزاء وابسته‌اند

چون $X_1, \ldots, X_n$ وابسته اند پس $1-X_1, \ldots, 1-X_n$ نیز وابسته اند. از قسمت الف

$$E\left(\prod_{i=1}^{n}(1-X_i)\right) \geq \prod_{i=1}^{n} E(1-X_i) \Rightarrow$$

$$E\left(1-\prod_{i=1}^{n}(1-X_i)\right) \leq 1-\prod_{i=1}^{n} E(1-X_i) \Rightarrow$$

$$E\left(\coprod_{i=1}^{n} X_i\right) \leq \coprod_{i=1}^{n} EX_i \Rightarrow P\left(\coprod_{i=1}^{n} X_i = 1\right) \leq \coprod_{i=1}^{n} P(X_i = 1)$$

همواره بزرگتر یا مساوی است از قابلیت اعتماد سیستم، $\prod_{i=1}^{n} P\left(X_i = 1\right)$، در حالتی که اجزاء سیستم مستقل‌اند. به عبارت دیگر $\prod_{i=1}^{n} P\left(X_i = 1\right)$ یک کران پایین برای مقدار واقعی قابلیت اعتماد سیستم با جزاء وابسته است. همین استدلال برای قسمت (ب) نیز برقرار است. یعنی قابلیت اعتماد یک سیستم موازی با اجزای وابسته همواره کمتر یا مساوی از قابلیت اعتماد یک سیستم موازی با اجزای مستقل است.

توجه کنید که حتی در حالت‌های ساده مانند ساختارهای متوالی و موازی زمانی که اجزاء وابسته‌اند، معمولاً به راحتی قادر به محاسبه دقیق قابلیت اعتماد سیستم نیستیم و تنها می‌توانیم به تعیین کران‌هایی برای قابلیت اعتماد سیستم بپردازیم. در مسائل عملی نیز در بسیاری از موارد محاسبه دقیق قابلیت اعتماد سیستم ضروری نیست و تعیین کران‌هایی برای قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم برای مقاصد عملی کفایت می‌کند. قضیه زیر کران‌های ساده‌ای برای قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم ارائه می‌کند.

قضیه ۴.۲ فرض کنید $\varphi(\mathbf{x})$ تابع ساختار یک سیستم منسجم با n جزء باشد که در آن اجزای سیستم وابسته و قابلیت اعتماد هر یک به ترتیب $p_1, p_2, \ldots, p_n$ است. آنگاه $h(\mathbf{p})$، تابع قابلیت اعتماد سیستم، در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\prod_{i=1}^{n} p_i \le h(\mathbf{p}) \le \coprod_{i=1}^{n} p_i . = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)$$

اثبات.

از قضیه ۲.۱ دیدیم که تابع ساختار سیستم منسجم در نامساوی‌های زیر صدق می‌کند

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \le \varphi(\mathbf{x}) \le \coprod_{i=1}^{n} x_i .$$

اگر از طرفین عبارت اخیر امید ریاضی بگیریم خواهیم داشت

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) \le E\left(\varphi(\mathbf{X})\right) \le E\left(\coprod_{i=1}^{n} X_i\right)$$

اکنون با توجه به قضیه ۳.۳ داریم

$$\prod_{i=1}^{n} p_i \le E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)$$

و

$$E\left(\coprod_{i=1}^{n} X_i\right) \leq \coprod_{i=1}^{n} p_i$$

و لذا نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. . ■

نتیجه ۱.۲ قضیه ۴.۲ بیان می‌کند که قابلیت اعتماد هر سیستم منسجم با n جزء وابسته همواره از قابلیت اعتماد سیستم متوالی با n جزء مستقل بیشتر و از قابلیت اعتماد سیستم موازی با n جزء مستقل کمتر است.

کران‌های بدست آمده در قضیه ۴.۳ را می‌توان اصلاح کرد. قضیه زیر کران‌هایی برای قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم ارائه می‌کند که از نتایج به دست آمده از قضیه ۴.۳ دقیق‌ترند اما محاسبه آن‌ها مستلزم عملیات یعنی استفاده از بردارهای مسیر و بردارهای قطع کننده مینیمال است.

قضیه ۵.۲ فرض کنید $\varphi(\mathbf{x})$ تابع ساختار یک سیستم منسجم باشد که شامل n جزء وابسته با قابلیت‌های $p_1, p_2, \ldots, p_n$ است. فرض کنید $P_1(\mathbf{x}), P_2(\mathbf{x}), \ldots, P_l(\mathbf{x})$ مجموعه مسیرهای مینیمال و $C_1(\mathbf{x}), C_2(\mathbf{x}), \ldots, C_k(\mathbf{x})$ مجموعه قطع کننده‌های مینیمال سیستم باشد. اگر $h(\mathbf{p})$ تابع قابلیت اعتماد سیستم باشند آنگاه

$$\prod_{i=1}^{k} P\left(C_i(\mathbf{X}) = 1\right) \leq h(\mathbf{p}) \leq \coprod_{i=1}^{l} P\left(P_i(\mathbf{X}) = 1\right) = 1 - \prod_{i=1} \left[1 - P\left(P_i(\underline{X}) = 1\right)\right]$$

اثبات.

توجه کنید که $C_1(\mathbf{x}), C_2(\mathbf{x}), \ldots, C_k(\mathbf{x})$ توابعی صعودی از $\mathbf{x}$ هستند. چون $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغیرهای وابسته‌اند از بند (۳) خواص متغیرهای تصادفی وابسته که در بالا اشاره شد، $C_1(\mathbf{x}), C_2(\mathbf{x}), \ldots, C_k(\mathbf{x})$ متغیرهای تصادفی وابسته خواهند بود. بنابراین

$$h(\mathbf{p}) = P\left(\varphi(\mathbf{x}) = 1\right)$$

$$= P\left(\prod_{i=1}^{k} C_i(\mathbf{X}) = 1\right)$$

$$\geq \prod_{i=1}^{k} P\left(C_i(\mathbf{X}) = 1\right) \qquad \text{از قسمت قضیه (الف) ۳.۲}$$

خط اول رابطه ۲.۱ صفحه ۱۲ را ملاحظه کنید

با توجه به تعریف قطع کننده مینیمال در صفحه ۱۱ کتاب به راحتی نتیجه می‌شود.

و در نتیجه کران پایین $h(\mathbf{p})$ بدست می‌آید. به طور مشابه می‌توان نشان داد که

$$h(\mathbf{p}) = P(\varphi(\mathbf{X}) = ۱)$$
$$= P\left(\coprod_{i=۱}^{l} P_i(\mathbf{X}) = ۱\right)$$
$$\le \coprod_{i=۱}^{l} P(P_i(\mathbf{X}) = ۱). \qquad \text{از قسمت (ب) قضیه ۳.۲}$$

خط اول رابطه ۲.۱ صفحه ۱۱ را ملاحظه کنید

■

در حالتی که اجزاء سیستم منسجم مستقل از هم باشند کران‌هایی ارائه شده در قضیه ۵.۲ را می‌توان به فرم صریح‌تر به صورت زیر ارائه کرد.

نتیجه ۲.۲ اگر $\varphi(\mathbf{x})$ تابع ساختار یک سیستم منسجم با اجزای مستقل باشد آنگاه

$$\prod_{i=۱}^{k} \coprod_{j\in C_i} p_j \le h(\mathbf{p}) \le \coprod_{i=۱}^{l} \prod_{j\in P_i} p_j.$$

اثبات.

با توجه به اینکه اجزاء مستقل‌اند برای iامین مسیر مینیمال، $i = ۱,۲,\ldots,l$ داریم

$$P(P_i(\mathbf{X}) = ۱) = \prod_{j\in P_i} p_j$$

خط دوم رابطه (۲.۱) صفحه ۱۱

بنابراین از قضیه ۵.۲ داریم

$$h(\mathbf{p}) \le \coprod_{i=۱}^{l} \prod_{j\in P_i} p_j$$

کران پایین با استدلال مشابه به دست می‌آید و لذا نتیجه کامل است. ■

در ادامه دوباره سیستم پل را در نظر بگیرید و فرض کنید اجزای سیستم مستقل از هم با احتمال یکسان p عمل می‌کنند. قرار دهید

$$h_{mc} = \prod_{i=۱}^{k} \coprod_{j\in C_i} p_j \text{ ،} h_{mp} = \coprod_{i=۱}^{l} \prod_{j\in P_i} p_j \text{ ،} h_p = \coprod_{i=۱}^{n} p_i \text{ ،} h_c = \prod_{i=۱}^{n} p_i$$

$$p(C_i(\underline{X}) = 1) \le 1 - \prod_{j\in C_i}(1 - P_j)$$

خط دوم رابطه (۲.۱) صفحه ۱۲

در جدول ۱.۲ مقادیر دقیق قابلیت اعتماد سیستم، کران‌های بالا و پایین قابلیت اعتماد سیستم، h_p و h_c از قضیه ۴.۲ و کران بالا و پایین قابلیت اعتماد سیستم، h_{mp} و h_{mc} بر اساس قضیه ۵.۲ به ازای مقادیر مختلف p نمایش داده شده است.

و با توجه به قضیه ۵.۲ داریم:

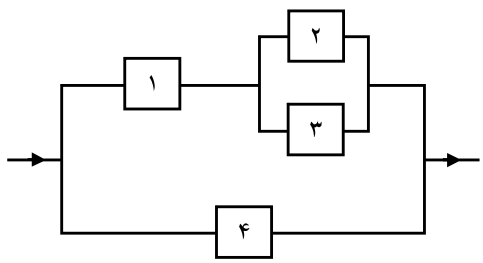
$$h(p) \ge \prod_{i=1}^{K} \coprod_{j\in C_i} P_j$$

جدول ۱.۲ کران بالا و پایین قابلیت اعتماد سیستم در سیستم پل

p	h_s	h_{mc}	$h(p)$	h_{mp}	h_p
۰/۹۹	۰/۹۵۱	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
۰/۹۵	۰/۷۷۴	۰/۹۹۵	۰/۹۹۵	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
۰/۹۰	۰/۵۹۱	۰/۹۷۸	۰/۹۷۹	۰/۹۹۷	۱/۰۰۰
۰/۷۵	۰/۲۳۷	۰/۸۵۲	۰/۸۶۱	۰/۹۳۶	۰/۹۹۹
۰/۶۰	۰/۰۷۵	۰/۶۱۸	۰/۶۶۰	۰/۷۴۸	۰/۹۹۰
۰/۵۰	۰/۰۳۱	۰/۴۳۱	۰/۵۰۰	۰/۵۶۹	۰/۹۶۹

۵.۲ مسایل

۱. سیستمی را با نمودار زیر در نظر بگیرید



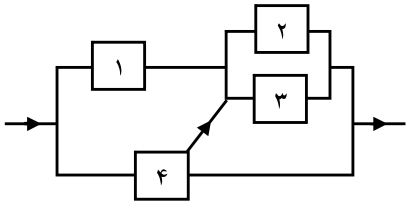
الف) تابع ساختار سیستم، $\varphi(\mathbf{x})$، را تعیین کنید.

ب) فرض کنید اجزای سیستم به طور مستقل به ترتیب با قابلیت‌های $p_1=۰/۹$ ، $p_2=۰/۸$ ، $p_3=۰/۸۵$ و $p_4=۰/۹$ عمل کنند. قابلیت اعتماد سیستم $h(\mathbf{p})$ را محاسبه کنید.

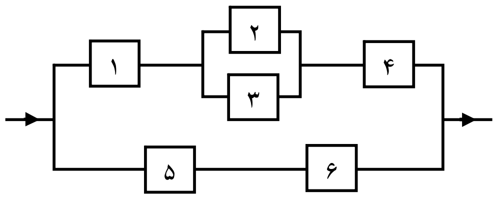
ج) کران‌های قابلیت اعتماد سیستم را بر مبنای قضیه ۴.۲ و ۵.۲ تعیین کنید.

۲. قابلیت اعتماد یک سیستم ۳ از ۴ را که اجزای آن به طور مستقل و با قابلیت اعتماد یکسان ۰/۸ کار می‌کنند محاسبه کنید.

۳. با استفاده از قضیه تجزیه قابلیت اعتماد سیستمی با نمودار زیر را تحت این شرایط که اجزاء مستقل و با قابلیت ۰/۸ فعالیت می‌کنند محاسبه کنید.

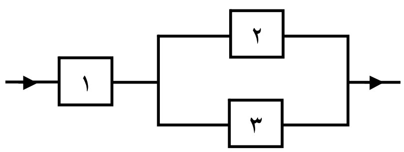


۴. با استفاده از بردارهای مسیر مینیمال و بردارهای قطع کننده مینیمال قابلیت اعتماد سیستمی را با نمودار زیر به دست آورید که در آن اجزای سیستم به طور مستقل با احتمال ۰/۹ فعالیت می‌کنند.



۵. در یک سیستم ۲ از ۳ که اجزاءبه طور مستقل و با قابلیت‌های p_1، p_2 و p_3 کار می‌کنند، اهمیت نسبی اجزاء را تعیین و برحسب مقادیر p_i، $i=1,2,3$، در مورد آن‌ها بحث کنید.

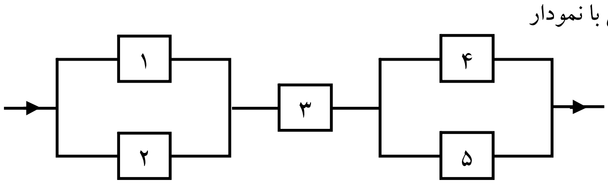
۶. سیستمی با نمودار زیر را در نظر بگیرید. اهمیت نسبی قابلیت اعتماد اجزاء را با این فرض که اجزاء به طور مستقل و به ترتیب با قابلیت ۰/۹۵، ۰/۹۰ و ۰/۹۹ فعالیت کنند تعیین کنید.



۷. برای سیستم‌های زیر با اجزای وابسته کران بالا و پایین قابلیت اعتماد را بر اساس قضایای ۴.۳ و ۵.۳ به دست آورید.

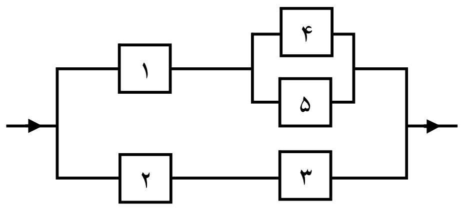
الف) سیستم ۲ از ۳

ب) سیستمی با نمودار



۸. یک سیستم را در نظر بگیرید که شامل ۳ دستگاه خنک کننده یکسان است که هر یک شامل دو لوله جزیان آب هستند که لوله‌ها به طور موازی کنار یکدیگر متصل شده‌اند. برای عملکرد سیستم لازم است که حداقل ۲ تا از ۳ خنک کننده کار کنند. قابلیت اعتماد هر یک از لوله‌ها ۰/۶ است و به طور مستقل عمل می‌کنند. قابلیت اعتماد سیستم را تعیین کنید.

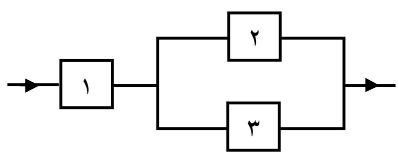
۹. سیستمی با نمودار زیر را در نظر بگیرید.



الف) بردارها و مجموعه‌های مسیر مینیمال سیستم را تعیین کنید.
ب) بردارها و مجموعه‌های قطع کننده مینیمال سیستم را تعیین کنید.
ج) با فرض آنکه اجزای سیستم مستقل و هر یک با قابلیت ۰/۸ کار کنند، قابلیت اعتماد سیستم را تعیین کنید.

۱۰. با توجه به قضیه ۳.۲ ثابت کنید
الف) $h(\mathbf{p}_1 \amalg \mathbf{p}_2) \ge h(\mathbf{p}_1) \amalg h(\mathbf{p}_2)$
ب) $h(\mathbf{p}_1 . \mathbf{p}_2) \ge h(\mathbf{p}_1) . h(\mathbf{p}_2)$

ج) صحت درستی نتایج (الف) و (ب) را در سیستمی با نمودار زیر بررسی کنید‌که در آن اجزاء مستقل و هر یک با احتمال p عمل می‌کنند.



۱۱. فرض کنید φ یک ساختار منسجم باشد. $p_1, p_2, \dots, p_l$ مجموعه مسیرهای مینیمال و $k_1, k_2, \dots, k_s$ مجموعه قطع کننده‌های مینیمال باشد. اگر اجزای سیستم وابسته باشند ثابت کنید.

$$\max_{1 \le r \le l} \prod_{i \in p_r} p_i \le h(\mathbf{p}) \le \min_{1 \le j \le s} \coprod_{i \in k_s} p_i$$

۳

قابلیت اعتماد وابسته به زمان و مفاهیم سالخوردگی

۱.۳ مقدمه

در فصل قبل قابلیت اعتماد سیستم را به عنوان تابعی از قابلیت اعتماد اجزای آن مورد بحث قرار دادیم. وضعیتی را که در آن فصل مورد بررسی قرار دادیم، برای اجزاء سیستم و در نتیجه برای سیستم دو وضعیت کارکرد یا عدم کارکرد را در نظر می‌گرفت. در این فصل علاقه‌مندیم قابلیت اعتماد سیستم را به عنوان تابعی از زمان مورد مطالعه قرار دهیم. بدین منظور، فرض می‌کنیم اجزای سیستم و در نتیجه خود سیستم دارای طول عمر هستند. طول عمر سیستم یک متغیر تصادفی است که بر اساس یک الگوی احتمال مقدار می‌گیرد. با فرض معلوم بودن مدل احتمال طول عمر سیستم قادریم در هر لحظه از زمان احتمال کارکرد سیستم را محاسبه کنیم. در همین ارتباط کمیت‌های مهمی را جهت بررسی خواص متغیر طول عمر سیستم معرفی کرده و ویژگی‌ها و ارتباط بین آن‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در بخش ۲.۳، قابلیت اعتماد را به عنوان تابعی از زمان تعریف می‌کنیم و خصوصیات آن را بررسی می‌کنیم. در بخش ۳.۳ به معرفی تابع نرخ خطر که از مفاهیم اساسی تحلیل داده‌های طول عمر است می‌پردازیم و مثال‌هایی در ارتباط با آن ارائه می‌کنیم. نشان می‌دهیم که رابطه بین تابع نرخ خطر با توزیع احتمال جامعه مورد بررسی یک به یک است. بخش ۴.۳یکی دیگر از مفاهیم اساسی را در مطالعات طول عمر به نام میانگین عمر باقیمانده معرفی می‌کنیم و خواص آن را بررسی می‌کنیم. در بخش ۵.۳ بعضی از مفاهیم مهم سالخوردگی سیستم‌ها را معرفی و نتایجی در مورد آن‌ها

ارائه می‌کنیم. در بخش ۶.۳ به طور مختصر اندازه‌های قابلیت اعتماد سیستم را در حالتی که طول عمر آن گسسته باشد ارائه می‌کنیم. در نهایت بخش ۷.۳ قابلیت اعتماد سیستم را به عنوان تابعی از قابلیت اعتماد اجزای آن در هر لحظه از زمان مورد مطالعه قرار می‌دهد.

۲.۳ تابع قابلیت اعتماد

فرض کنید یک سیستم، یک قطعه الکتریکی یا هر وسیله یا شئ دیگر دارای طول عمر T باشد. طبیعی است که T یک متغیر تصادفی است که می‌تواند در فاصله $(\cdot,\infty)$ مقدار بگیرد. متغیر T می‌تواند پیوسته و یا گسسته باشد. به عبارت دیگر سیستم می‌تواند طول عمری داشته باشد که هر مقدار را در فاصله $(\cdot,\infty)$ اختیار کند یا می‌تواند طول عمر آن را طوری تعریف کرد که مقادیر شمارش پذیر (مثلاً اعداد طبیعی) را در فاصله $(\cdot,\infty)$ اختیار کند. به عنوان مثال اگر سیستم را لامپ فلورسنت در نظر بگیریم طول عمر آن یک متغیر تصادفی T است که هر مقدار را در فاصله $(\cdot,\infty)$ می‌گیرد. اگر سیستم را مثلاً یک دستگاه فتوکپی در نظر بگیریم طول عمر آن، T، را می‌توان تعداد کپی‌هایی در نظر گرفت که قبل از خرابی گرفته است. در ادامه این فصل فرض می‌کنیم متغیر تصادفی T پیوسته است (هر گاه T گسسته باشد صراحتاً به آن اشاره می‌کنیم).

تابع توزیع احتمال T را با $F(t)$ نمایش می‌دهیم. طبق تعریف $F(t)$ برابر است با

$$F(t) = P(T \le t)$$

تابع توزیع F در سه خاصیت زیر صدق می‌کند.

الف) F تابعی غیر نزولی است.

ب) $F(\cdot) = \cdot$ و $F(\infty) = ۱$.

ج) F از راست پیوسته است.

فرض می‌کنیم T دارای تابع چگالی f باشد. در این صورت f در رابطه زیر صدق می‌کند

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$

واضح است که $f(t)$ در دو شرط زیر صادق است و هر تابع که دارای دو شرط زیر باشد را می‌توان به عنوان یک تابع چگالی احتمال استفاده کرد.

الف) به ازای هر $t \ge \cdot$، $f(t) \ge \cdot$

ب) $\int_{\cdot}^{\infty} f(t)\,dt = ۱$

Reliability function

هر عبارت احتمالی در ارتباط با متغیر طول عمر را می‌توان با استفاده از $f(t)$ و یا $F(t)$ تعیین کرد.

اما تابع محوری در مبحث قابلیت اعتماد جهت تعیین خواص متغیر طول عمر T، تابع قابلیت اعتماد است. تابع قابلیت اعتماد T در لحظه t، $(0<t)$، که آن را با $R(t)$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$R(t)=\int_t^{\infty} f(x)dx$$
$$=1-F(\cancel{x}\,t)$$

با این تعریف واضح است که $R(0)=1$، یعنی در زمان $t=0$ قابلیت اعتماد سیستم ۱ است و $R(\infty)=0$ یعنی در دراز مدت (هنگامی که $t\to\infty$) سیستم از کار می‌افتد. همچنین $R(t)$ یک تابع غیر صعودی است به این معنی که اگر $0<t_1<t_2$ آنگاه $R(t_1)\geq R(t_2)$ و این یعنی در زمان t_1 قابلیت اعتماد سیستم کمتر از زمان t_2 نیست. برای توضیح بیشتر مثال زیر را در نظر بگیرید.

چون $R(t)=1-F(t)$

صعودی برحسب t

مثال ۱.۳ فرض کنید T طول عمر یک سیستم الکتریکی برحسب سال باشد که تابع چگالی آن به صورت زیر است،

$$f(t)=\frac{2}{(t+1)^3}, \qquad t>0$$

توزیع پارتو: $f(x)=\dfrac{\alpha\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}\ ;\ x\geq\beta$

الف) تابع قابلیت اعتماد T را به دست آورید.

ب) قابلیت اعتماد سیستم در $t=2$ سال چقدر است؟

ج) چقدر احتمال دارد که طول عمر قطعه بین ۶ ماه و ۲ سال باشد؟

حل. الف) تابع قابلیت اعتماد T برابر است با

$$R(t)=\int_t^{\infty} f(x)dx$$
$$=\int_t^{\infty}\frac{2}{(x+1)^3}dx$$
$$=\left(\frac{1}{1+t}\right)^2, \qquad t>0$$

توزیع لوماکس یا پارتوی نوع دوم

$$f(x)=\frac{\alpha\beta^{\alpha}}{(1+\beta x)^{+(\alpha+1)}}\ ;\ x>0$$

ب) احتمال مطلوب برابر است با $R(2)=\left(\frac{1}{1+2}\right)^2=\frac{1}{9}$.

$\Rightarrow F(x)=1-(1+\beta x)^{-\alpha}\ ;\ x>0$

ج) در این حالت احتمال مطلوب مساوی است با

$$P(۰/۵<T<۲)=R(۰/۵)-R(۲)$$
$$=\frac{۴}{۹}-\frac{۱}{۹}=\frac{۱}{۳}.$$

مثال ۲.۳ فرض کنید طول عمر یک باطری برحسب سال یک متغیر تصادفی T است که تابع چگالی آن برابر است با

X ~ weibull(α, β)

$$f(t)=۲te^{-t^۲},\ t>۰$$

$f(x) = \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^{\beta}};\ x>0$

الف) تابع قابلیت اعتماد T را به دست آورید.

ب) قابلیت اعتماد باطری در $t=۱۸$ ماه چقدر است؟

حل. الف) تابع قابلیت اعتماد سیستم برابر است با

$$R(t)=\int_t^{\infty} f(x)dx$$
$$=\int_t^{\infty} ۲xe^{-x^۲}dx$$
$$=e^{-t^۲},\quad t>۰$$

ب) قابلیت اعتماد مورد نظر مساوی است با

$$R(۱/۵)=$$
$$=e^{-(۱/۵)^۲}$$
$$\cong ۰/۱.$$

failure rate - hazard rate

۳.۳ تابع نرخ خطر

نرخ خرابی آنی واحدی که تا زمان t سالم مانده باشد

تابع نرخ خطر یکی از مهمترین معیارها در مطالعات قابلیت اعتماد و مباحث طول عمر است. فرض کنید T طول عمر یک سیستم باشد که تابع چگالی آن $f(t)$ و تابع قابلیت آن $R(t)$ است. اکنون این سؤال اساسی را مطرح می‌کنیم که اگر فرض کنیم سیستم در زمان t $(۰<t)$ هنوز فعال است، چقدر احتمال دارد که بلافاصله بعد از زمان t از کار بیافتد؟ به عبارت دیگر، برای مقدار کوچک δ، علاقه‌مندیم احتمال شرطی زیر را محاسبه کنیم.

$$P\left(t<T<t+\delta \middle| T>t\right)=\frac{P\left(t<T<t+\delta\right)}{P\left(T>t\right)},\ \ t>۰, \delta>۰$$

مشروط بر آن که $P(T>t)>0$. اگر احتمال شرطی فوق را بر δ تقسیم کرده و حد حاصل را هنگامی که $\delta \to 0$ محاسبه کنیم، کمیتی حاصل می‌شود که به آن تابع نرخ خطر معروف است. لذا تعریف زیر را داریم

تعریف ۱.۳ تابع نرخ خطر متغیر تصادفی طول عمر T که آن را با $h(t)$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$h(t)=\lim_{\delta\to 0}\frac{P(t<T<t+\delta)}{\delta P(T>t)} = \lim_{\delta\to 0}\frac{F(t+\delta)-F(t)}{\delta R(t)}$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\frac{R(t)-R(t+\delta)}{\delta R(t)}$$

$$= -\frac{\partial \ln R(t)}{\partial t} =\frac{f(t)}{R(t)},\ t>0 \Rightarrow R(t)=\exp\left\{-\int_0^t h(x)\,dx\right\}$$

که در آن تساوی اخیر از این واقعیت ناشی می‌شود که

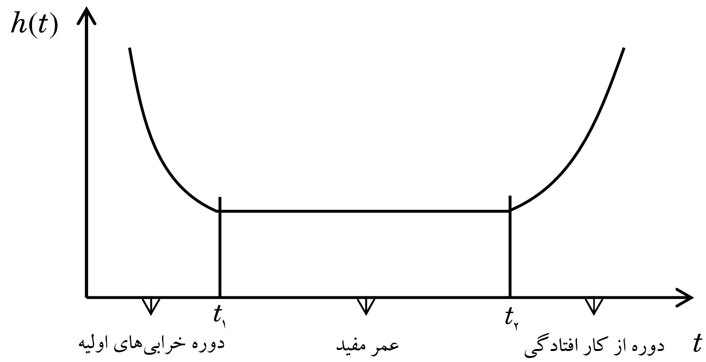
$$f(t)=\lim_{\delta\to 0}\frac{R(t)-R(t+\delta)}{\delta}. = \lim_{\delta\to 0}\frac{F(t+\delta)-F(t)}{\delta} = f(t)$$

تابع نرخ خطر، که در مباحث قابلیت اعتماد و طول عمر به تابع "نرخ شکست" نیز معروف است، نقش محوری در اغلب تحلیل‌های بقا ایفاء می‌کند. باید توجه داشت که تابع نرخ خطر احتمال از کار افتادن سیستم نیست (یعنی لزوماً مقداری بین صفر و یک را اختیار نمی‌کند). این کمیت در واقع نرخ از کار افتادگی سیستم را در زمان t نشان می‌دهد و معیاری برای اندازه‌گیری سالخوردگی سیستم است. اگر $h(t)$ تابعی صعودی از t باشد، بدین معنی است که سیستم با گذشت زمان دچار سالخوردگی شده و قابلیت اعتماد آن کم می‌شود. اگر $h(t)$ نزولی باشد آنگاه سیستم با گذشت زمان دچار سالخوردگی منفی می‌شود، بدین معنی که قابلیت اعتماد آن بیشتر می‌شود. اغلب پدیده‌های طول عمر دارای نرخ خطری هستند که با افزایش زمان صعود می‌کنند و البته متغیرهای طول عمری نیز وجود دارند که با افزایش زمان نرخ خطر آن‌ها کاهش پیدا می‌کند. یکی از الگوهای معروف تابع نرخ خطر، که در مهندسی قابلیت اعتماد کاربردهای فراوانی داشته و پدیده‌های متنوعی را می‌توان با آن تفسیر کرد، الگوی نرخ خطر U-شکل (یا وانی شکل) است. در این الگو تابع نرخ خطر دارای نموداری به صورت شکل ۱.۳ است.

همانطور که ملاحظه می‌شود، نرخ خطر سیستم ابتدا برای یک دوره نزولی خواهد بود که به آن دوره خرابی‌های اولیه می‌گویند. در یک دوره زمانی نرخ خطر تقریبا ثابت است که به آن دوره

عمر مفید سیستم می‌گویند. سپس نرخ خطر شروع به صعود می‌کند که به آن دوره از کار افتادگی می‌گویند.

این الگو اغلب برای تحلیل طول عمر محصولات مختلف صنعتی (و حتی تحلیل طول عمر موجودات زنده دیگر مانند انسان) بسیار مفید است. برای مثال هنگامی که یک تولید کننده اتومبیل محصولات خود را وارد بازار می‌کند در ابتدای استفاده از اتومبیل‌ها نرخ از کار افتادگی آن‌ها بالاست و نیاز به آب بندی و رسیدگی دارند. پس از دوران آب بندی نرخ خطر اتومبیل تقریباً ثابت است و برای یک دوره نسبتاً طولانی اتومبیل بدون خرابی عمل می‌کند. سپس دوره از کار افتادگی اتومبیل می‌شود که نرخ از کار افتادگی با گذشت زمان صعود خواهد کرد.



شکل ۱.۳ الگوی نرخ خطر U-شکل

اگر t_1 و t_2، $t_1 \leq t_2$، نقاطی باشند که در آن‌ها رفتار تابع تغییر می‌کند، t_1 و t_2 را نقاط تغییر تابع نرخ خطر گویند. واضح است که اگر $t_1 = 0$ و $t_2 = 0$ آنگاه نرخ خطر صعودی و اگر $t_1 = \infty$ و $t_2 = 0$ آنگاه تابع نرخ خطر نزولی خواهد بود.

اکنون مثال‌های زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۳.۳ فرض کنید متغیر طول عمر T دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f(t) = (2t+1)e^{-(t+t^2)}, \ t > 0.$$

آنگاه تابع قابلیت اعتماد T برابر است با

$$R(t) = \int_t^\infty (2x+1)e^{-(x+x^2)}dx$$
$$= e^{-(t+t^2)}, \ t > 0$$

در این صورت تابع نرخ خطر T برابر است با

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{f(t)}{R(t)} \\ &= \frac{(2t+1)e^{-(t+t^2)}}{e^{-(t+t^2)}} \\ &= 2t+1 \end{aligned}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود $h(t)$ تابعی صعودی از t است.

مثال ۴.۳ فرض کنید متغیر طول عمر T دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f(t) = \frac{3}{(1+t)^4},\ t > 0$$

آنگاه تابع قابلیت اعتماد T برابر است با

$$R(t) = \frac{1}{(1+t)^3},\ t > 0$$

در نتیجه تابع نرخ خطر آن برابر است با

$$h(t) = \frac{3}{1+t}.$$

در این مدل تابع نرخ خطر برحسب زمان نزولی است.

یکی از دلایل اهمیت تابع نرخ خطر، علاوه بر مفهوم شهودی آن که نرخ از کار افتادگی T را نشان می‌دهد، رابطه یک به یک آن با تابع توزیع طول عمر T است. این واقعیت در قضیه زیر نشان داده شده است.

قضیه ۱.۳ فرض کنید T یک متغیر طول عمر باشد که تابع چگالی آن f، تابع قابلیت اعتماد آن R و تابع نرخ خطر آن h است، آنگاه $R(t)$ برحسب $h(t)$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$R(t) = e^{-\int_0^t h(x)dx},\quad t > 0 \tag{1.3}$$

اثبات.

اگر از رابطه $h(t) = \dfrac{f(t)}{R(t)}$ در فاصله $(0,t)$ انتگرال بگیریم به دست می‌آوریم:

مشتق گیری از انتگرال

فرمول کلی : $\dfrac{\partial \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,dt}{\partial t} = \beta'(t) f(\beta(t),t) - \alpha'(t) f(\alpha(t),t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,dx$

$$\begin{aligned}\int_0^t h(x)dx &= \int_0^t \frac{f(x)}{R(x)}dx \\ &= -\ln R(x)\Big|_0^t \\ &= -\ln R(t) + \ln R(0) \\ &= -\ln R(t)\end{aligned}$$

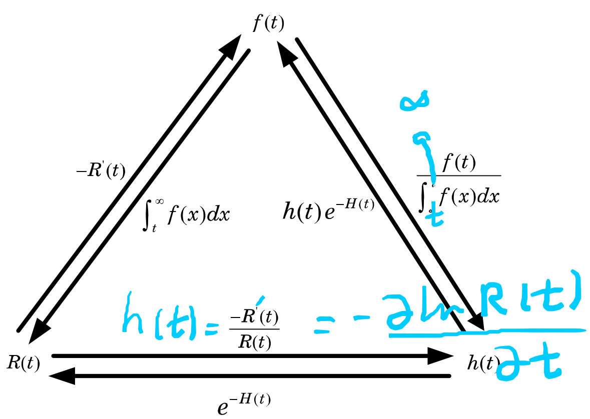
که در آن تساوی اخیر از این واقعیت نتیجه می‌شود که $R(0)=1$. بنابراین اثبات قضیه کامل می‌شود. ■

اگر از طرفین (۱.۳) برحسب t مشتق بگیریم به راحتی ملاحظه می‌شود تابع چگالی احتمال $f(t)$، برحسب $h(t)$ به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$f(t) = h(t)e^{-\int_0^t h(x)dx}.$$

تبصره ۱.۳ کمیت $H(t)=\int_0^t h(x)dx = -\ln R(t)$ را تابع نرخ خطر تجمعی می‌گویند.

شکل ۲.۳ رابطه بین $f(t)$، $R(t)$ و $h(t)$ را نشان می‌دهد.



شکل ۲.۳ رابطه بین $f(t)$، $R(t)$ و $h(t)$

قضیه زیر نشان می‌دهد که اگر نرخ خطر یک سیستم از نرخ خطر سیستمی دیگر کمتر باشد آنگاه سیستم اول قابل اعتمادتر از سیستم دوم است.

قضیه ۲.۳ فرض کنید T_1 و T_2 متغیرهای طول عمر به ترتیب با توابع چگالی f_1 و f_2، توابع قابلیت اعتماد R_1 و R_2 باشند. اگر به ازای هر $0<t$، $h_1(t)\le h_2(t)$ آنگاه $R_1(t)\ge R_2(t)$.

اثبات.

فرض اینکه برای $0<t$، $h_1(t)\le h_2(t)$ نتیجه می‌دهد،

$$\int_0^t h_1(x)dx \le \int_0^t h_2(x)dx$$

و این معادل است با اینکه به ازای هر $0<t$، $-\ln R_1(t)\le -\ln R_2(t)$ و این یعنی به ازای $0<t$، $R_1(t)\ge R_2(t)$ و اثبات کامل می‌شود. ■

قضیه ۱-۳ صفحه ۴۳ کتاب.

اگر هر تابعی در این دو شرط صدق کند آنگاه تابع نرخ خطر است.

قبل از آنکه این بخش را به پایان برسانیم به این نکته اشاره می‌کنیم که، گاهی اوقات در مدل سازی‌های آماری ممکن است بخواهیم که تعیین کنیم آیا یک تابع خاص را می‌توان به عنوان تابع نرخ خطر در نظر گرفت. روش تعیین این مسئله ساده است. به طور کلی هر تابع $h(t)$ که در دو خاصیت زیر صدق کند یک تابع نرخ خطر خواهد بود.

الف) برای هر $t\ge 0$، $h(t)\ge 0$

ب) $\lim_{t\to 0} H(t)=0$ و $\lim_{t\to \infty} H(t)=\infty$

که در آن $H(t)=\int_0^t h(x)dx$ تابع نرخ تجمعی است.

$$\lim_{t\to 0} H(t)=\lim_{t\to 0}\{-\ln R(t)\}=\lim_{t\to 0}\{-\ln(1-F(t))\}=0$$

$$\lim_{t\to \infty} H(t)=\lim_{t\to \infty}\{-\ln R(t)\}=\lim_{t\to \infty}\{-\ln(1-F(t))\}=\infty$$

زیرا

$$\lim_{x\to\infty}\ln x=\infty\ ;\ \lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$$

mean time to failure (MTTF)

۴.۳ میانگین و میانگین باقیمانده عمر

یک مشخصه مهم متغیر طول عمر T، همانند هر نوع متغیر تصادفی دیگر، متوسط T می‌باشد که در قابلیت اعتماد به آن "میانگین تا زمان خرابی" یا "متوسط طول عمر" سیستم می‌گویند. در اینجا متوسط T را با $E(T)$ نمایش می‌دهیم و طبق تعریف برابر است با

$$E(T)=\int_0^\infty xf(x)dx$$

قضیه زیر نشان می‌دهد که چگونه با استفاده از تابع قابلیت اعتماد می‌توان $E(T)$ را محاسبه کرد.

قضیه ۳.۳ اگر T متغیر تصادفی پیوسته با تابع قابلیت اعتماد $R(t)$ و تابع چگالی احتمال $f(t)$ باشد آنگاه در صورت وجود $E(T)$،

$$E(T)=\int_0^\infty R(x)dx$$

اثبات دیگر قضیه ۳.۳ در صفحه ۲.۶ صفحه ۳۳۶ ویرایش سوم کتاب مبانی احتمال دکتر قهرمانی:

اثبات. داریم

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_{۰}^{\infty} xf(x)dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\int_{۰}^{b} xf(x)dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[-bR(b)+\int_{۰}^{b}R(x)dx\right] \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-bR(b)\right)+\int_{۰}^{\infty}R(x)dx \end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء

$$\begin{cases} x=u \to dx=du \\ f(x)\,dx=dv \end{cases} \to v=\int_0^x f(t)\,dt = 1-F(x)=R(x)$$

$$EX=\int_0^\infty x f(x)\,dx = \int_0^\infty \left(\int_0^x dt\right) f(x)\,dx = \int_0^\infty \int_t^\infty f(x)\,dx\,dt = \int_0^\infty (1-F(t))\,dt$$

$x>0$

کافیست نشان دهیم $\lim_{b\to\infty}\left(-bR(b)\right)=۰$. داریم

$$\begin{aligned} bR(b) &= b\int_{b}^{\infty} f(x)dx \\ &\le \int_{b}^{\infty} xf(x)dx \end{aligned}$$

$b<x$

چون $E(T)\le\infty$ است سمت راست نامساوی، هنگامی که $b\to\infty$، به سمت صفر میل می‌کند. در نتیجه $bR(b)$ نیز هنگامی که $b\to\infty$ به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین

$$E(T)=\int_{۰}^{\infty}R(x)dx$$

مثال ۵.۳ در مثال ۱.۳ و ۲.۳ متوسط طول عمر قطعات را به دست آورید.

حل. در مثال ۱.۳ داریم

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_{۰}^{\infty}\frac{۱}{(۱+t)^{۲}}dt \\ &= \left.\frac{۱}{۱+t}\right|_{۰}^{\infty} \\ &= ۱. \end{aligned}$$

یعنی متوسط طول عمر قطعه برابر یک سال است.

مثال ۲.۳، $E(T)$ برابر است با

$$E(T)=\int_{۰}^{\infty}e^{-t^{۲}}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$$

$= ۰/۸۸۶$ سال $\equiv ۳۲۳$ روز

روش ۱: $\begin{cases} t^2=u \\ 2t\,dt=du \to 2\sqrt{u}\,dt=du \end{cases}$

$$ET=\int_0^\infty e^{-u}\frac{du}{2\sqrt{u}}=\int_0^\infty \frac{e^{-u}u^{-1/2}}{2}du = \frac{\Gamma(1/2)}{2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}dx=\Gamma(\alpha)\beta^\alpha$$

روش ۲:

$$I=\int_0^\infty e^{-t^2}dt \to I^2=\int_0^\infty e^{-x^2}dx\int_0^\infty e^{-y^2}dy$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$$

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \to J=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=r$$

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r\,d\theta\,dr = \pi/2 \int_0^\infty r e^{-r^2} dr = \pi/4 \rightarrow$$

$$I = \sqrt{\pi/2}$$

که در آن انتگرال با استفاده از روش مختصات قطبی به راحتی نتیجه می‌شود.

مثال‌های ۱.۳ و ۲.۳ به ترتیب حالت خاص توزیع پارتو و توزیع وایبل هستند که از مدل‌های معروف در قابلیت اعتمادند. در فصل بعد به طور مشروح در مورد این مدل‌ها و مدل‌های دیگر آماری بحث می‌کنیم.

یکی از دیگر معیارهای مهم در مطالعات قابلیت اعتماد و مباحث طول عمر، میانگین عمر باقیمانده است. فرض کنید T متغیر تصادفی طول عمر با تابع قابلیت اعتماد $R(t)$ باشد. فرض کنید سیستمی با طول عمر T در زمان $t=0$ مورد استفاده قرار بگیرد و در زمان $t>0$ سیستم هنوز فعال باشد. آنگاه عمر باقیمانده سیستم تحت این شرط که $T>t$ عبارتست از

mean Residual Life (MRL)

$$T_t = T - t \mid T > t$$

خواص متغیر تصادفی عمر باقیمانده T_t می‌تواند برای مهندسان قابلیت اعتماد مهم باشد. اگر تابع قابلیت اعتماد T_t را با $R(x\mid t)$ نشان دهیم آنگاه برای $x>0$ داریم

$$\begin{aligned} R(x\mid t) &= P\left(T_t > x\right) \\ &= P\left(T - t > x \mid T > t\right) \\ &= \frac{P\left(T > x+t\right)}{P\left(T > t\right)} \\ &= \frac{R\left(x+t\right)}{R\left(t\right)}, \quad x,t>0 \end{aligned}$$

واضح است که $R(x\mid t)$ به عنوان یک تابع پویا از زمان قابلیت اعتماد شرطی سیستم را در هر لحظه از زمان نشان می‌دهد. در نقطه $t=0$، داریم $R(x\mid 0)=R(x)$.

اگر میانگین T_t را، به عنوان تابعی از t، با $m(t)$ نمایش دهیم از قضیه ۳.۳ داریم،

$$\begin{aligned} m(t) &= E\left(T_t\right) \\ &= E\left(T - t \mid T > t\right) \\ &= \int_0^\infty R(x\mid t)dx \\ &= \int_0^\infty \frac{R(x+t)}{R(t)}dx \\ &= \int_t^\infty \frac{R(u)}{R(t)}du \end{aligned}$$

که در آن تساوی اخیر از تغییر متغیر $x+t=u$ حاصل می‌شود. تابع $m(t)$ را میانگین عمر باقیمانده T می‌گویند و در واقع متوسط عمر باقیمانده T را در هر لحظه از زمان نشان می‌دهد. واضح است که $m(۰)=E(T)$

مثال ۶.۳ فرض کنید توزیع طول عمر یک لامپ الکتریکی برحسب ماه به صورت زیر باشد.

$$F(t)=۱-\frac{(۳-t)^۲}{۹},\ ۰<t<۳$$

الف) تابع نرخ خطر F را تعیین کنید.

ب) قابلیت اعتماد این لامپ در زمان $t=۲$ ماه چقدر است؟

ج) میانگین باقیمانده عمر لامپ را به دست آورید.

د) اگر بدانیم که لامپ در زمان $t=۱$ هنوز کار می‌کند، چقدر احتمال دارد که یک ماه دیگر کار کند؟

حل. الف) تابع چگالی احتمال طول عمر لامپ برابر است با

$$f(t)=\frac{۲}{۹}(۳-t),\ ۰<t<۳$$

در نتیجه تابع نرخ خطر لامپ مساوی است با

$$h(t)=\frac{۲}{۳-t},۰<t<۳$$

به راحتی ثابت می‌شود که $h(t)$ تابعی صعودی از t است.

ب) تابع قابلیت اعتماد لامپ مساوی است با

$$\begin{aligned}R(t)&=۱-F(t)\\&=\frac{(۳-t)^۲}{۹},\end{aligned}$$

و بنابراین در زمان $t=۲$ قابلیت اعتماد لامپ برابر است با

$$R(۲)=\frac{(۳-۲)^۲}{۹}=\frac{۱}{۹}.$$

ج) میانگین عمر باقیمانده T به صورت زیر به دست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
m(t) &= \int_{t}^{\infty} \frac{R(x)}{R(t)} dx \\
&= \int_{t}^{۳} \frac{(۳-x)^{۲}}{(۳-t)^{۲}} dx \\
&= ۱-\frac{t}{۳}, \quad ۰<t<۳.
\end{aligned}
$$

د) احتمال مطلوب برابر است با

$$
\begin{aligned}
P\left(T-۱>۱ \mid T>۱\right) &= \frac{P\left(T>۲\right)}{P\left(T>۱\right)} \\
&= \frac{R\left(۲\right)}{R\left(۱\right)} \\
&= \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}
\end{aligned}
$$

در قضیه زیر نشان می‌دهیم که رابطه بین توزیع احتمال T و میانگین باقیمانده آن یک به یک است.

قضیه ۴.۳ فرض کنیم متغیر تصادفی طول عمر T دارای قابلیت اعتماد $R(t)$ و میانگین عمر باقیمانده $m(t)$ باشد. آنگاه برای $۰<t$

$$
R(t)=\frac{m(۰)}{m(t)} e^{-\int_{۰}^{t} \frac{dx}{m(x)}}, \quad t>۰
$$

اثبات.

با توجه به تعریف $m(t)$ داریم

$$
\frac{۱}{m(t)}=\frac{R(t)}{\int_{t}^{\infty} R(x) dx}
$$

اگر از طرفین رابطه اخیر در فاصله $(۰,t)$ انتگرال بگیریم به دست می‌آوریم

$$
\begin{aligned}
\int_{۰}^{t} \frac{۱}{m(x)} dx &= \int_{۰}^{t} \frac{R(x)}{\int_{t}^{\infty} R(u) du} dx \\
&= -\ln \int_{t}^{\infty} R(u) du \Big|_{۰}^{t} \\
&= -\ln \frac{\int_{t}^{\infty} R(u) du}{m(۰)}.
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$\frac{\int_t^\infty R(u)du}{m(0)} = e^{-\int_0^t \frac{dx}{m(x)}}.$$

با مشتق گیری از طرفین این رابطه برحسب t به دست می‌آوریم

$$R(t) = \frac{m(0)}{m(t)} e^{-\int_0^t \frac{dx}{m(x)}}.$$

و اثبات کامل می‌شود. ■

قضیه زیر رابطه بین تابع میانگین عمر باقیمانده $m(t)$ و تابع نرخ خطر $h(t)$ را نشان می‌دهد.

قضیه ۵.۳ اگر $m(t)$ و $h(t)$ به ترتیب میانگین عمر باقیمانده و تابع نرخ خطر T باشند آنگاه،

$$h(t) = \frac{1 + m'(t)}{m(t)}$$

$$= \frac{\int_t^\infty R(u)du}{R(t)}$$

اثبات.

برای اثبات ادعا کافی است از $m(t)$ برحسب t مشتق بگیریم. اگر چنین کنیم به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} m'(t) &= \frac{-R^2(t) + f(t)\int_t^\infty R(x)dx}{R^2(t)} \\ &= -1 + h(t)m(t) \end{aligned}$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

و در نتیجه اثبات کامل است. ■

در بررسی خصوصیات یک متغیر تصادفی و توزیع احتمال آن، به ویژه یک متغیر طول عمر، مشخصه‌های دیگری نیز وجود دارند که هر یک می‌تواند در جایگاه خود مهم باشند. یکی از آن‌ها واریانس متغیر طول عمر T است. اگر $V(T)$ واریانس T باشد. آنگاه $V(T)$ معیاری است برای اندازه‌گیری میزان پراکندگی T، حول میانگین آن و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$V(T) = E\big(T - E(T)\big)^2.$$

به راحتی می‌توان نشان داد که $V(T)$ به صورت زیر نیز قابل نمایش است که از نقطه نظر محاسباتی می‌تواند مفید واقع شود.

$$V(T) = E\left(T^{۲}\right) - \left(E(T)\right)^{۲}.$$

جذر مثبت $V(T)$، یعنی $\sqrt{V(T)}$ به انحراف استاندارد (انحراف معیار) معروف است و در بسیاری از تحلیل‌های استنباطی به ویژه در تعیین فواصل اطمینان کاربرد دارد. انحراف استاندارد دارای مقیاس اندازه‌گیری است با متغیر T یکسان می‌باشد. برای مثال اگر T برحسب ساعت باشد، انحراف استاندارد نیز برحسب ساعت خواهد بود.

یکی دیگر از شاخص‌های مهم در مباحث آمار، صدک $p \times ۱۰۰$ام، $(۰ < p < ۱)$، توزیع است که با t_p نمایش می‌دهیم. صدک $p \times ۱۰۰$ام t_p مقداری از متغیر T است که از حل معادله زیر به دست می‌آید

$$F(t_p) = p.$$

در واقع مقدار t_p، در یک توزیع طول عمر، زمانی را نشان می‌دهد که در آن زمان به نسبت p ار واحدهای جامعه دچار از کار افتادگی می‌شود یا به تعبیر دیگر احتمال از کار افتادن یک واحد قبل از t_p مساوی p است. مقدار t_p را به چندک $p \times ۱۰۰$ام نیز می‌شناسند. در حالتی که $p = ۰/۵$، $t_{۰/۵}$ برابر با میانه توزیع است. میانه توزیع یکی از شاخص‌های مرکزی توزیع است که مرکز توزیع را نشان می‌دهد، از این نقطه نظر که ۵۰ درصد مقادیر توزیع از آن کمتر و ۵۰ درصد مقادیر توزیع از آن بیشتر است.

یک کمیت مهم دیگر در توزیع‌های طول عمر، ضریب تغییرات می‌باشد که با $C.V$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$C.V = \frac{\sqrt{V(T)}}{E(T)}$$

هر چه قدر که تابع چگالی متمرکزتر باشد، مقدار $C.V$ کمتر خواهد شد.

مثال ۷.۳ فرض کنید متغیر تصادفی T دارای توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f(t) = \frac{۱}{۵} e^{-\frac{t}{۵}} \ , \ t > ۰.$$

الف) انحراف استاندارد T را تعیین کنید.

ب) میانه توزیع را به دست آورید.

ج) مقدار $C.V$ چقدر است؟

حل. الف) به راحتی می‌توان نشان داده که میانگین T برابر است با $E(T)=۵$. از طرفی با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء داریم

$$\begin{aligned} E(T^۲) &= \int_۰^\infty t^۲ \frac{۱}{۵} e^{-\frac{t}{۵}}\, dt \\ &= ۵۰ \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} V(T) &= E(T^۲) - (E(T))^۲ \\ &= ۵۰ - ۵^۲ \\ &= ۲۵ \end{aligned}$$

در نتیجه انحراف استاندارد T مساوی است با $\sqrt{V(T)} = ۵$.

ب) تابع توزیع T برابر است با

$$F(t) = ۱ - e^{-\frac{t}{۵}},\ t > ۰$$

میانه توزیع، $t_{۰/۵}$، از معادله زیر به دست می‌آید

$$۱ - e^{-\frac{t_{۰/۵}}{۵}} = ۰/۵$$

این معادله به راحتی نتیجه می‌دهد

$$t_{۰/۵} = ۱/۵.$$

ج) با توجه به نتایج (الف) CV توزیع برابر است با

$$\begin{aligned} CV &= \frac{\sqrt{V(T)}}{E(T)} = \frac{\sqrt{۲۵}}{۵} \\ &= ۱ \end{aligned}$$

۵.۳ مفاهیم سالخوردگی

یک مفهوم مهم در نظریه قابلیت اعتماد که در بخش‌های مختلف آن مطرح می‌شود، مفهوم سالخوردگی است. به طور شهودی، سالخوردگی به معنی افزایش نرخ از کارافتادگی در طول زمان است. از این نقطه نظر، یک معیار مناسب برای اندازه گیری سالخوردگی مفهوم نرخ خطر

است. اگر نرخ خطر صعودی باشد، متغیر طول عمر دچار سالخوردگی می‌شود و اگر تابع نرخ خطر نزولی باشد متغیر طول عمر دچار سالخوردگی منفی خواهد بود بدین معنی که سیستم مربوطه با گذشت زمان جوان‌تر می‌شود. اگر نرخ خطر برحسب زمان ثابت باشد، اصطلاحاً می‌گوییم سیستم دچار سالخوردگی نمی‌شود. به راحتی اثبات می‌شود وضعیت اخیر زمانی اتفاق می‌افتد که توزیع تحت بررسی نمایی باشد که در فصل بعد در مورد آن بحث می‌کنیم. با توجه به بحث فوق بعضی از مفاهیم سالخوردگی را به شکل دقیق به صورت زیر معرفی می‌کنیم.

تعریف ۲.۳ فرض کنید F تابع توزیع متغیر تصادفی طول عمر T باشد. F را متعلق به کلاس توزیع‌های با نرخ خطر صعودی (نزولی) گوییم هرگاه تابع نرخ خطر آن ، $h(t)$، تابعی غیر نزولی (غیر صعودی) از t باشد.

Increasing failure rate

تبصره ۲.۳ از علامت اختصاری IFR (DFR) استفاده می‌کنیم بر آنکه نشان دهیم F متعلق به کلاس توزیع‌های با نرخ خطر صعودی (نزولی) است.

قضیه زیر رابطه بین کلاس توزیع‌های IFR (DFR) را با رفتار $R(x|t)$، قابلیت اعتماد شرطی، نشان می‌دهد.

Decreasing failure rate

قضیه ۶.۳ توزیع F متعلق به کلاس توزیع‌های IFR (DFR) است اگر و تنها اگر تابع قابلیت اعتماد شرطی آن، $R(x|t)$، برحسب t نزولی (صعودی) باشد.

اثبات.

اگر از تابع $R(x|t)=\dfrac{R(t+x)}{R(t)}$ بر حسب t مشتق بگیریم (در صورت وجود مشتق) برای مقدار ثابت x به دست می‌آوریم.

$$\left(R(x|t)\right)'=\frac{-f(t+x)R(t)+f(t)R(t+x)}{\left(R(t)\right)^{2}}$$

$R(x|t)$ نزولی (صعودی) است اگر و تنها اگر $\left(R(x|t)\right)'\le(\ge)0$ این معادل است با این که

$$\frac{f(t)}{R(t)}\le(\ge)\frac{f(t+x)}{R(t+x)}\quad,\ t,x>0$$

و این یعنی

نزولی

$$h(t)\le(\ge)h(t+x)$$

صعودی

و لذا اثبات کامل است. ■

معادل

$R(x|y) \le (\ge) R(x)$

نتیجه این قضیه بیان می‌کند اگر سیستم دچار سالخوردگی (سالخوردگی منفی) شود آنگاه تابع قابلیت اعتماد شرطی آن با گذشت زمان کمتر (بیشتر) شود و بالعکس.

یکی دیگر از کلاس‌های مهم توزیع‌ها، کلاس توزیع‌های میانگین باقیمانده عمر صعودی (نزولی) است. تعریف زیر این مفهوم را ارائه می‌کند.

یکی دیگر از مفاهیم سالخوردگی قابلیت اعتماد که به ویژه در تعمیر و نگهداری سیستم‌ها مهم است، مفهوم "نو بهتر از استفاده شده" و "نو بدتر از استفاده شده" است که در زیر به تعریف آن‌ها می‌پردازیم

تعریف ۳.۳ توزیع طول عمر F را "نو بهتر از استفاده شده" ("نو بدتر از استفاده شده") گوییم هر گاه به ازای هر x و y نامنفی، تابع قابلیت اعتماد آن در نامساوی زیر صدق کند.

New better than used

$$R(x+y) \le (\ge) R(x)R(y) \qquad (۲.۳)$$

از علامت اختصاری NBU (NWU) استفاده می‌کنیم برای آن که نشان دهیم F متعلق به کلاس توزیع‌های نو بهتر از استفاده شده (نو بدتر از استفاده شده) است.

New worse than used

نامساوی (۲.۳) معادل است با این که بگوییم قابلیت اعتماد شرطی سیستم $R(x|y)$ (یعنی سیستم با سن y) از قابلیت اعتماد سیستم نو $R(x)$ کمتر (بیشتر) است.

به راحتی می‌توان نشان داد که اگر F، IFR (DFR) باشد آنگاه F، NBU (NWU) است. (اثبات به دانشجو واگذار می‌شود) (*)

تعریف ۴.۳ فرض کنید تابع توزیع احتمال F دارای میانگین عمر باقیمانده $m(t)$ باشد. گوییم F متعلق به کلاس توزیع‌های با میانگین عمر باقیمانده نزولی (صعودی) است اگر و تنها اگر $m(t)$ تابعی نزولی (صعودی) برحسب t باشد.

DMRL(IMRL)

از علامت اختصاری $DMRL$ ($IMRL$) استفاده می‌کنیم برای آنکه نشان دهیم F متعلق به کلاس توزیع‌های با میانگین عمر باقیمانده نزولی (صعودی) است.

اکنون قضیه زیر را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۷.۳ اگر F، IFR (DFR) باشد آنگاه F، $DMRL$ ($IMRL$) است.

اثبات.

در قضیه ۶.۳ دیدیم که F، IFR (DFR) است اگر و تنها اگر به ازای x ثابت $\frac{R(t+x)}{R(t)}$ تابعی نزولی (صعودی) از t باشد. به عبارت دیگر F، IFR (DFR) است اگر و تنها اگر به ازای $0 < t_1 < t_2$ داشته باشیم

اثبات (*) :

F is IFR $\Rightarrow R(x|t)$ به ازای x ثابت برحسب t نزولی است

$$\Rightarrow \forall t > 0 \quad \frac{R(x+t)}{R(t)} \le \frac{R(x)}{R(0)} \Rightarrow R(x|t) \le R(x)$$

برای حالت DFR هم به طور مشابه بالا اثبات می‌شود.

$$\frac{R(x+t_1)}{R(t_1)} \geq (\leq) \frac{R(x+t_2)}{R(t_2)}$$

اگر از طرفین رابطه اخیر روی مقادیر x در فاصله $(0,\infty)$ انتگرال بگیریم به دست می‌آوریم

$$\int_0^\infty \frac{R(x+t_1)}{R(t_1)}dx \geq (\leq) \int_0^\infty \frac{R(x+t_2)}{R(t_2)}dx$$

تساوی یکی مانده به آخر صفحه ۱۷ کتاب

و این یعنی $m(t_1) \geq (\leq) m(t_2)$ و اثبات کامل می‌شود. ■

از این قضیه نتیجه می‌گیریم که اگر سیستم دچار سالخوردگی (سالخوردگی منفی) شود آنگاه میانگین عمر باقیمانده آن با گذشت زمان کمتر (بیشتر) می‌شود. باید توجه داشت که عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست. یعنی نمی‌توان نتیجه گرفت که اگر $m(t)$ برحسب زمان نزولی (صعودی) باشد آنگاه $h(t)$ برحسب زمان صعودی (نزولی) است.

۶.۳ متغیرهای طول عمر گسسته

در دنیای واقعی وضعیت‌هایی به وجود می‌آید که در آن‌ها متغیر تصادفی طول عمر را می‌توان گسسته در نظر گرفت. برای مثال اگر T طول عمر یک اتومبیل باشد، T را می‌توان مقدار کیلومترهایی در نظر گرفت که اتومبیل قبل از خرابی طی کرده است. همچنین گاهی اوقات جهت سهولت تحلیل‌ها بهتر است یک متغیر تصادفی پیوسته را به متغیر تصادفی گسسته تبدیل کرد. برای مثال اگر T طول عمر یک کامپیوتر خانگی باشد، آنگاه واضح است که T یک متغیر تصادفی پیوسته است که هر مقدار در فاصله $(0,\infty)$ را اختیار می‌کند. اگر فرض کنیم T تعداد روزهایی باشد که کامپیوتر قبل از خرابی عمل می‌کند، آنگاه T یک متغیر تصادفی خواهد بود که مقادیر $0,1,2,\ldots$ را اختیار می‌کند.

T گسسته

T پیوسته تبدیل به گسسته

در ادامه فرض کنیم T متغیر طول عمر گسسته باشد که روی مجموعه $S=\{0,1,2,\ldots\}$ مقدار بگیرد. فرض کنید $f(t)$ تابع جرم احتمال T باشد. یعنی

$$f(t)=P(T=t),\ \ t\in S$$

اگر $F(t)$ تابع توزیع T باشد آنگاه

$$F(t)=P(T\leq t),\ \ t\in S$$

و لذا تابع قابلیت اعتماد آن برابر خواهد بود با

$$\begin{aligned} R(t) &= 1-F(t) \\ &= P(T>t) \end{aligned}$$

درحالت پیوسته، $h(t)$ می‌تواند احتمال نباشد
مثلاً شکل های ۲.۳ و ۳.۳

تابع نرخ خطر T را با $h(t)$ نمایش می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} h(t) &= P(T=t \mid T\ge t) \\ &= \frac{P(T=t)}{P(T\ge t)} \\ &= \frac{f(t)}{R(t-1)},\ t\in S \end{aligned}$$

توجه کنید که در حالت گسسته، $h(t)$ یک احتمال شرطی است و همواره مقدار آن بین صفر و یک است.

تابع توزیع F را می‌توان با استفاده از $h(t)$ به دست آورد. بدین منظور به ازای $t\in S$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} 1-h(t) &= 1-\frac{f(t)}{P(T\ge t)} = \frac{P(T\ge t)-P(T=t)}{P(T\ge t)} \\ &= \frac{P(T\ge t+1)}{P(T\ge t)} \end{aligned}$$

اگر این معادله بازگشتی را حل کنیم به دست می‌آوریم

$$P(T\ge t)=\prod_{i=0}^{t-1}[1-h(i)],\quad t=1,2,\ldots$$

$$1-h(0)=\frac{P(T\ge 1)}{P(T\ge 0)}=P(T\ge 1)$$

$$1-h(1)=\frac{P(T\ge 2)}{1-h(0)}$$

$$1-h(2)=\frac{P(T\ge 3)}{(1-h(0))\,(1-h(1))}$$

و بنابراین تابع جرم احتمال T برابر است با

$$\begin{aligned} f(r) &= P(T\ge t)-P(T\ge t+1) \\ &= \prod_{i=0}^{t-1}[1-h(i)]-\prod_{i=0}^{t}[1-h(i)] \\ &= h(t)\prod_{i=0}^{t-1}[1-h(i)] \end{aligned}$$

$$=\prod_{i=0}^{t-1}[1-h(i)]\,[1-(1-h(t))]$$

در حالت گسسته میانگین T را برحسب تابع قابلیت اعتماد $R(t)$ به صورت زیر می‌توان محاسبه کرد. ابتدا توجه کنید که میانگین T برحسب $f(t)$ برابر است با

تمرین تحویلی: مث به شکل ۲.۳ صفحه ۴۴ - رابطه بین $h(t)$، $f(t)$ و $R(t)$ را به دست آورید.

$$\begin{tikzcd} & f(t) \arrow[dl, shift left] \arrow[dr, shift left] & \\ R(t) \arrow[ur, shift left] \arrow[rr, shift left] & & h(t) \arrow[ul, shift left] \arrow[ll, shift left] \end{tikzcd}$$

$$
\begin{aligned}
E(T) &= \sum_{t=۰}^{\infty} t f(t) \\
&= f(۱) + ۲f(۲) + ۳f(۳) + \cdots
\end{aligned}
$$

سمت راست رابطه اخیر را می‌توان به صورت زیر دوباره نویسی کرد.

$$
\begin{array}{l}
f(۱) + f(۲) + f(۳) + \cdots \\
\qquad f(۲) + f(۳) + f(۴) + \cdots \\
\qquad\qquad f(۳) + f(۴) + \cdots \\
\qquad\qquad\ \vdots \qquad \vdots
\end{array}
$$

سطر اول نمایش فوق برابر است با $P(T \geq ۱)$، سطر دوم برابر است با $P(T \geq ۲)$ و ... در نتیجه $E(T)$ که برابر با جمع سطرهای نمایش فوق است، مساوی خواهد شد با

$$
\begin{aligned}
E(T) &= \sum_{t=۱}^{\infty} P(T \geq t) \\
&= \sum_{t=۱}^{\infty} R(t-۱)
\end{aligned}
\tag{۳.۳}
$$

اکنون فرض کنید $T_t = (T - t \mid T \geq t)$ عمر باقیمانده T باشد آنگاه

$$
\begin{aligned}
P(T_t \geq x) &= P(T - t \geq x \mid T \geq t) \\
&= \frac{P(T \geq x + t)}{P(T \geq t)} \\
&= \frac{R(t + x - ۱)}{R(t - ۱)}
\end{aligned}
$$

با استفاده از رابطه اخیر و نمایش (۳.۳) عمر باقیمانده T، که با $m(t)$ نمایش می‌دهیم، برابر است با

$$
\begin{aligned}
m(t) &= \sum_{x=۰}^{\infty} P(T \geq x) \\
&= \sum_{x=۰}^{\infty} \frac{R(x + t - ۱)}{R(t - ۱)} \\
&= \frac{\sum_{u=t-۱}^{\infty} R(u)}{R(t - ۱)}, \quad t = ۱, ۲, \ldots
\end{aligned}
$$

مثال ۸.۳ فرض کنید متغیر طول عمر T دارای جرم احتمال زیر باشد که در آن T تعداد ماه‌هایی است که سیستم قبل از اولین خرابی کار می‌کند.

$$f(t)=\frac{۱}{۳}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{t},\ t=۰,۱,\ldots$$

در این حالت تابع قابلیت اعتماد T برابر است با

$$\begin{aligned} R(t)&=P(T>t)\\ &=\sum_{x=t+۱}^{\infty}\frac{۱}{۳}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{x}=\left(\frac{۲}{۳}\right)^{t+۱} \end{aligned}$$

تابع نرخ خطر T مساوی است با

$$\begin{aligned} h(t)&=\frac{f(t)}{R(t-۱)}\\ &=\frac{\frac{۱}{۳}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{t}}{\left(\frac{۲}{۳}\right)^{t}}\\ &=\frac{۱}{۳} \end{aligned}$$

که مقداری ثابت است و به t بستگی ندارد. میانگین باقیمانده عمر به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} m(t)&=\frac{\sum_{x=t-۱}^{\infty}R(x)}{R(t-۱)}\\ &=\frac{\sum_{x=t-۱}^{\infty}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{x+۱}}{\left(\frac{۲}{۳}\right)^{t}},\quad t=۰,۱,\ldots\\ &=۳ \end{aligned}$$

$= \frac{a}{۱-r} =$ مجموع سری هندسی

با قدر نسبت r و

جمله اول a

میانگین باقیمانده عمر نیز در این حالت مقدار ۳ است که به t بستگی ندارد. این نشان می‌دهد به طور متوسط در هر لحظه از زمان که سیستم فعال باشد، مدت عملکرد آن ۳ ماه است. این توزیع حالت خاص توزیع هندسی است.

۷.۳ توزیع طول عمر سیستم‌های منسجم

در فصل دوم قابلیت اعتماد سیستم‌ها را در حالت ایستا مورد بررسی قرار دادیم. بدین معنی که فرض کردیم یک جزء در سیستم دو وضعیت دارد، یا کار می‌کند یا از کار افتاده است. به همین دلیل برای سیستم نیز دو وضعیت در نظر گرفتیم. متغیرهای مورد بررسی در حالت ایستا مقادیر ۰ یا ۱ را اختیار می‌کردند. در این بخش می‌خواهیم وضعیتی را مورد بررسی قرار دهیم که در آن برای هر یک از اجزای سیستم و در نتیجه برای سیستم طول عمر قائل شویم. در مطالعه چنین وضعیتی قادر خواهیم بود که قابلیت اعتماد سیستم را، در هر لحظه از زمان، به عنوان تابعی از قابلیت اعتماد اجزای سیستم به صورت دقیق محاسبه کنیم یا کران‌هایی برای آن ارائه کنیم.

فرض کنید φ تابع ساختار یک سیستم با n جزء باشد و فرضیات زیر را در نظر بگیرید.

الف) فرض کنید جزء iام، $i=۱,۲,\ldots,n$، دارای طول عمر T_i باشد که دارای تابع توزیع $F_i(t)$، تابع چگالی $f_i(t)$ و تابع قابلیت اعتماد $R_i(t)$ است.

ب) T_i ها متغیرهای تصادفی مستقل‌اند، $i=۱,۲,\ldots,n$.

ج) در زمان $t=۰$ همه اجزاء فعال هستند. اجزایی که از کار می‌افتند تعمیر یا تعویض نمی‌شوند و در همان حالت باقی می‌مانند.

برای تعریف طول عمر سیستم فرض کنید متغیرهای تصادفی دو مقداری $X_i(t)$، $i=۱,۲,\ldots,n$، را به صورت زیر تعریف کنیم

$$X_i(t)=\begin{cases} ۱ & ,T_i>t \\ ۰ & ,T_i\le t \end{cases}$$

و بردار وضعیت سیستم را با $\mathbf{X}(t)=\left(X_۱(t),\ldots,X_n(t)\right)$ نمایش می‌دهیم. اکنون تعریف زیر را داریم.

تعریف ۵.۳ طول عمر سیستم مقداری از t است که در آن سیستم برای اولین بار وارد وضعیت از کار افتادگی می‌شود. اگر این مقدار را با T نمایش دهیم آنگاه

$$T=\inf\left\{t;\ \varphi\left(\mathbf{X}(t)\right)=۰\right\}.$$

اگر $R(t)=P(T>t)$ قابلیت اعتماد سیستم باشد آنگاه برای به دست آوردن $R(t)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم. فرض کنید $h(\mathbf{p})$ تابع قابلیت اعتماد سیستم در حالت ایستا باشد یعنی

$$h(\mathbf{p})=E\left(\varphi\left(X_۱,X_۲,\ldots,X_n\right)\right).$$

آنگاه بسته به نوع ساختار سیستم تابعی مانند ψ وجود دارد که

$$h(\mathbf{p})=\psi\left(p_۱,p_۲,\ldots,p_n\right).$$

با توجه به این که تابع قابلیت اعتماد سیستم در زمان t برابر است با

$$R(t)=\psi\left(R_۱(t),R_۲(t),\ldots,R_n(t)\right)$$

برای توضیح بیشتر مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۹.۳ سیستم متوالی: فرض کنید ساختار φ متوالی با n جزء است که به طور مستقل کار می‌کنند. اگر $T_۱,T_۲,\ldots,T_n$ طول عمر اجزای سیستم باشند آنگاه طول عمر سیستم برابر است با $T=\min\left(T_۱,T_۲,\ldots,T_n\right)$. در این حالت قابلیت اعتماد سیستم به طور مستقیم به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}R(t)&=P\left(T>t\right)\\&=P\left(\min\left(T_۱,T_۲,\ldots,T_n\right)>t\right)\\&=\prod_{i=۱}^{n}P\left(T_i>t\right) && \text{از فرض استقلال}\\&=\prod_{i=۱}^{n}R_i(t)\end{aligned}$$

توجه کنید که قابلیت اعتماد سیستم در حالت ایستا برابر بود با $h(\mathbf{p})=\prod_{i=۱}^{n}p_i$. اگر در تساوی اخیر قرار دهیم $p_i=R_i(t)$ آنگاه به دست می‌آوریم

$$R(t)=\prod_{i=۱}^{n}R_i(t)$$

در حالتی که به ازای هر t، $R_i(t)=R(t)$، آنگاه به دست می‌آوریم

$$R(t)=\left(R_۱(t)\right)^n \Rightarrow 1-F(t)=(R_1(t))^n \Rightarrow$$

$$f(t)=n\left[1-F_1(t)\right]^{n-1}f_1(t)$$

$$\Rightarrow h(t)=\frac{f(t)}{R(t)}=\frac{n\left[1-F_1(t)\right]^{n-1}f_1(t)}{\left[1-F_1(t)\right]^{n}}=\frac{n f_1(t)}{1-F_1(t)}$$

$$=n h_1(t)$$

توجه کنید که در این حالت تابع نرخ خطر سیستم برابر است با

$$h(t) = nh_۱(t),\ t > ۰$$

یعنی، در حالتی که اجزای سیستم هم توزیع باشند، نرخ خطر سیستم برابر است با n برابر نرخ خطر هر یک از اجزای آن. اگر $h_۱$ تابعی صعودی (نزولی) از t باشد آنگاه $h(t)$ نیز چنین است.

یعنی نرخ خطر یک سیستم متوالی همواره از نرخ خطر اجزای آن بزرگتر است.

مثال ۱۰.۳ سیستم موازی: فرض کنید ساختار φ موازی با n جزء است که به طور مستقل عمل می‌کنند. اگر طول عمر اجزای سیستم $T_۱, T_۲, \ldots, T_n$ باشند آنگاه طول عمر سیستم برابر است با $T = \max(T_۱, T_۲, \ldots, T_n)$ و قابلیت اعتماد سیستم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} R(t) &= P(T > t) \\ &= P\big(\max(T_۱, T_۲, \ldots, T_n) > t\big) \\ &= ۱ - P\big(\max(T_۱, T_۲, \ldots, T_n) \le t\big) \\ &= ۱ - \prod_{i=۱}^{n} P(T_i \le t) && \text{از فرض استقلال} \\ &= ۱ - \prod_{i=۱}^{n} \big(۱ - P(T_i > t)\big) \\ &= ۱ - \prod_{i=۱}^{n} \big(۱ - R_i(t)\big). && (۴.۳) \end{aligned}$$

نتیجه اخیر را می‌توانستیم از این واقعیت به دست آوریم که در حالت ایستا، قابلیت اعتماد سیستم برابر بود با

$$h(\mathbf{p}) = ۱ - \prod_{i=۱}^{n} (۱ - p_i).$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $p_i = R_i(t)$ آنگاه $R(t)$ برابر خواهد شد با (۴.۳).
اگر به ازای هر t، $R_i(t) = R(t)$، $i = ۱, ۲, \ldots, n$، آنگاه قابلیت اعتماد مساوی است با،

$$\begin{aligned} R(t) &= ۱ - \big(۱ - R_۱(t)\big)^n \\ &= ۱ - \big(F_۱(t)\big)^n,\ t > ۰ \end{aligned}$$

که در آن $F_۱$ تابع توزیع مشترک اجزاء است. در این حالت تابع نرخ خطر سیستم به صورت زیر به دست می‌آید. تابع چگالی طول عمر سیستم مساوی است با

$$f(t)=nf_1(t)F_1^{n-1}(t),\quad t>0$$

در نتیجه تابع نرخ خطر سیستم برابر است:

$$h(t)=\frac{nf_1(t)F_1^{n-1}(t)}{1-F_1^n(t)}$$
$$=\frac{nf_1(t)F_1^{n-1}(t)}{\left(1-F_1(t)\right)\sum_{i=1}^{n}F^{i-1}(t)}$$
$$=h_1(t)L(t)$$

با بازکردن سیگما به راحتی می‌توان از $(1-F_1)\sum_{i=1}^{n}F_1^{i-1}$ به $1-F_1^n$ رسید.

که در آن

$$L(t)=\frac{nF_1^{n-1}(t)}{\sum_{i=1}^{n}F^{i-1}(t)}.$$

$(n-k+1)$ حداقل جزء کار می‌کنند ولی حداکثر $k-1$ جزء کار نمی‌کنند

به راحتی می‌توان نشان داد که $0<L(t)\le 1$ بنابراین $h(t)\le h_1(t)$ و این یعنی تابع نرخ خطر یک سیستم موازی همواره کمتر یا مساوی است از نرخ خطر هر یک از اجزای سیستم.

چون $0<F_1<1$ پس به طور کلی $F_1^2<F_1$ یا بنابراین $F_1^n<F_1^{n-1}$

مثال ۱۱.۳ سیستم‌های $(n-k+1)$ از n: برای چنین سیستم‌هایی اگر $T_1,T_2,\dots,T_n$ طول عمر اجزاء باشند، آنگاه با توجه به تعریف سیستم، طول عمر سیستم برابر است با $T=T_{k:n}$ که در آن $T_{k:n}$، kامین آماره ترتیبی متناظر با متغیرهای $T_1,T_2,\dots,T_n$ است. اگر فرض کنیم T_iها، $i=1,2,\dots,n$، مستقل و هم توزیع با قابلیت اعتماد مشترک $R_i(t)=R_1(t)$ هستند، آنگاه قابلیت اعتماد سیستم به صورت زیر به دست می‌آید. قابلیت اعتماد سیستم در حالت ایستا برابر است با

$T_k>t \Rightarrow T_{k+1}>t,\dots,T_n>t$

$$h(\mathbf{p})=\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}p^{n-i}(1-p)^i$$

$F_1^0+F_1^1+\dots+F_1^{n-1}\ge F_1^{n-1}+F_1^{n-1}+\dots+F_1^{n-1}$

بنابراین با قرار دادن $p=R_1(t)$ قابلیت اعتماد سیستم در زمان t به دست می‌آید. یعنی

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}F_1^{i-1}(t)\ge nF_1^{n-1}$

$$R(t)=P\left(T_{k:n}>t\right)$$
$$=\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}\left(R_1(t)\right)^{n-i}\left(1-R_1(t)\right)^i,\quad t>0.$$

$$P(T_{k:n}\le t)=\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}(F(t))^i[1-F(t)]^{n-i}$$

$\Rightarrow 0<L(t)<1$

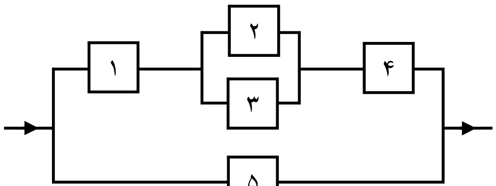
از درس روش‌های ناپارامتری

یا می‌توان نوشت:

$0<nF_1^{n-1}(t)<n\;,\quad 0<\sum_{i=1}^{n}F^{i-1}(t)\le n$

$\Rightarrow 0<L(t)\le 1$

مثال ۱۲.۳ سیستمی را با نمودار ۳.۳ را در نظر بگیرید و فرض کنید که اجزای سیستم دارای طول عمر T_i، $i=1,2,\dots,n$، هستند که از یکدیگر مستقل و دارای قابلیت اعتماد $R_1(t)$ هستند. مطلوبست تعیین تابع قابلیت اعتماد طول عمر سیستم.



شکل ۳.۳ نمودار مثال ۱۲.۳

حل. ابتدا توجه کنید که سیستم دارای ۳ مجموعه مسیر مینیمال به صورت $P_1=\{1,2,4\}$، $P_2=\{1,3,4\}$ و $P_5=\{5\}$ است. بنابراین تابع ساختار سیستم برابر است

$$\varphi(\mathbf{x})=1-\left[(1-x_1x_2x_4)(1-x_1x_3x_4)(1-x_5)\right].$$

به راحتی می‌توان نشان داد که قابلیت اعتماد سیستم در این حالت، با فرض $p_i=p$، برابر است با

$$\begin{aligned}h(p)&=E\big(\varphi(\mathbf{X})\big)\\&=p+2p^3-3p^4+p^5.\end{aligned}$$

بنابراین قابلیت اعتماد سیستم که در آن اجزاء مستقل و دارای قابلیت مشترک $R_1(t)$ هستند برابر است با

$$R(t)=R_1(t)+2R_1^3(t)-3R_1^4(t)+R_1^5(t).$$

ذکر این نکته لازم است که طول عمر سیستم را در مثال ۹.۳ می‌توان به راحتی با عملگرهای مینیمم-ماکزیمم تعیین کرد. اگر T طول عمر سیستم باشد، با یک بررسی ساده می‌توان نشان داد،

$$(*)\quad T=\max\left\{T_5,\min\big(T_1,T_4,\max(T_2,T_3)\big)\right\}.$$

اکنون با استفاده از متغیر تصادفی T می‌توان قابلیت اعتماد سیستم را محاسبه کرد. با محاسبات ساده می‌توان نشان داد که

تمرین کوئیز ۲ - با استفاده از تعریف T در (*) و کمک گرفتن از مثال‌های ۹.۳ و ۱۰.۳، قابلیت اعتماد سیستم فوق را به صورت زیر محاسبه کنید

$$P(T>t)=P(\max\{T_5,\min(T_1,T_4,\max T_2,T_3))\}>t)$$

$$R(t)=P\big(T>t\big)=R_1^2(t)+2R_1^3(t)-3R_1^4(t)+R_1^5(t).$$

به طور کلی طول عمر یک سیستم منسجم را می‌توان به صورت زیر نمایش داد. فرض کنید $T_1,T_2,\ldots,T_n$ طول عمر اجزای سیستم و T طول عمر سیستم باشد. آنگاه

تعریف صفحه ۱۴ کتاب.

$$\begin{aligned} T &= \min_{1\le j\le k}\max_{i\in C_j} T_i \\ &= \max_{1\le j\le l}\min_{i\in P_j} T_i \end{aligned}$$

که در آن P_j، $j=1,2,\ldots,l$ و C_j، $j=1,2,\ldots,k$ به ترتیب نشان دهنده مجموعه مسیرها و قطع کننده‌های مینیمال سیستم هستند.

مشابه کران‌هایی که برای قابلیت اعتماد سیستم در حالت ایستا به دست می‌آوریم، در اینجا نیز می‌توان کران‌های قابلیت اعتماد را برای طول عمر سیستم‌ها تعیین کرد. بدین منظور قضیه زیر را در نظر بگیرید که اثبات آن را به خواننده واگذار می‌کنیم.

اثبات مشابه نتیجه ۲.۲ صفحه ۳۲ کتاب می باشد.

قضیه ۸.۳ فرض کنید $T_1,T_2,\ldots,T_n$ طول عمر اجزای یک سیستم منسجم باشند که مستقل از یکدیگر عمل می‌کنند. قابلیت اعتماد جزء iام را با $R_i(t)$، $i=1,2,\ldots,n$، نمایش دهید. اگر $P_1,P_2,\ldots,P_l$ مجموعه مسیرهای مینیمال و $C_1,C_2,\ldots,C_k$ مجموعه قطع کننده‌های مینیمال سیستم باشند و قابلیت اعتماد سیستم را با $R(t)$ نمایش دهیم آنگاه

$$\prod_{i=1}^{k}\left(1-\prod_{j\in C_i}(1-R_j(t))\right)\le R(t)\le 1-\prod_{i=1}^{l}\left(1-\prod_{j\in P_i}R_j(t)\right).$$

براساس قطع کننده های مینیمال

براساس مسیرهای مینیمال

۸.۳ مسائل

۱. تابع توزیع طول عمر یک قطعه الکتریکی برحسب ماه به صورت زیر است،

$$F(t)=\begin{cases}\dfrac{t^4}{256} & ,0<t<4\\ 1 & ,4\le t\end{cases}$$

الف) تابع نرخ خطر این قطعه را به دست آورید.

ب) میانگین عمر قطعه را تعیین کنید.

ج) قابلیت اعتماد قطعه در زمان $t=2$ چقدر است؟

۲. فرض کنید تابع نرخ خطر یک متغیر طول عمر T برابر است با

$$h(t)=\frac{\alpha t^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha}},\ t>0, \alpha>1$$

الف) تابع قابلیت اعتماد T را تعیین کنید.
ب) برای $\alpha=2$، با فرض اینکه سیستمی با طول عمر T، در زمان $t=2$ هنوز فعال است، احتمال آن را محاسبه کنید که ۲ واحد زمان دیگر کار کند.

۳. فرض کنید که تابع خطر یک سیستم به صورت زیر باشد،

$$h(t)=\begin{cases} h_1 & , 0\le t\le t_1 \\ h_2 & , t_1<t<\infty \end{cases}$$

یعنی نرخ خطر تا زمان t_1 مقدار ثابت h_1 است و بعد از زمان t_1 مقدار آن ثابت h_2 است به طوریکه $h_1<h_2$.
الف)تابع قابلیت اعتماد سیستم را به دست آورید.
ب) نمودار تابع قابلیت اعتماد را رسم کنید.
ج) قابلیت اعتماد سیستم در زمان $\frac{3}{2}t_1$ (سال) به ازای $h_1=\frac{1}{3}$، $h_2=\frac{1}{2}$ و $t=6$ چقدر است؟
د) چقدر احتمال دارد که سیستم حداقل ۹ سال و حداکثر ۱۰ سال عمر کند؟

۴. یکی دیگر از مفاهیم سالخوردگی بر مبنای تابع نرخ خطر تجمعی $H(t)=-\ln R(t)$ تعریف می‌شود. گوییم متغیر تصادفی طول عمر T، دارای نرخ خطر تجمعی صعودی (نزولی) است و با علامت $IFRA$ ($DFRA$) نمایش می‌دهیم هر گاه $\frac{H(t)}{t}$ تابعی صعودی (نزولی) از t باشد. ثابت کنید هرگاه T IFR (DFR) باشد آنگاه $IFRA$ ($DFRA$) است.

۵. فرض کنید $h_1(t)$ و $h_2(t)$ توابع نرخ خطر دو سیستم باشند و تابع قابلیت اعتماد آن‌ها را به ترتیب با $R_1(t)$ و $R_2(t)$ نمایش دهید. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه به ازای هر t، $h_1(t)\le h_2(t)$ آن است که $\frac{R_1(t)}{R_2(t)}$ تابعی نزولی از t باشد.

۶. فرض کنید $h_1(t)$ و $h_2(t)$ توابع نرخ خطر دو سیستم باشند و به ازای هر t، $h_1(t) \le h_2(t)$. ثابت کنید $m_1(t) \ge m_2(t)$، که در آن $m_1(t)$ و $m_2(t)$ به ترتیب میانگین‌های عمر باقیمانده سیستم‌ها هستند.

۷. فرض کنید تابع میانگین باقیمانده عمر یک سیستم به صورت $m(t) = at + b$ باشد که در آن $-1 < a < \infty$ و $b > 0$،

الف) تابع قابلیت اعتماد سیستم را به دست آورید.

ب) نشان دهید که سیستم DFR است.

ج) فرض کنید $\theta(t) = \dfrac{m(t)}{m(0)}$، نشان دهید که تابع قابلیت اعتماد سیستم در تساوی زیر صدق می‌کند.

$$R(\theta(t)x + t) = R(t)R(x)$$

۸. فرض کنید $T_1, T_2, \ldots, T_n$ متغیرهای طول عمر مستقل و به ترتیب دارای توابع نرخ خطر $h_1(t), h_2(t), \ldots, h_n(t)$ باشند. نشان دهید که نرخ خطر یک سیستم متوالی با طول عمرهای T_i، $i = 1, 2, \ldots, n$، برابر است با،

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i(t)$$

۹. فرض کنید یک سیستم موازی دارای n جزء است که در آن اجزاء دارای طول عمرهای مستقل و هم توزیع‌اند. ثابت کنید که اگر توزیع مشترک اجزاء IFR باشد آنگاه توزیع طول عمر سیستم IFR است.

۱۰. کلاس مهم دیگری از توزیع‌های طول عمر، کلاس توزیع‌های $IFRA$ $(DFRA)$ است. توزیع طول عمر F را متعلق به کلاس توزیع‌های با "متوسط نرخ خطر صعودی" (متوسط نرخ خطر نزولی) گوییم و با $IFRA$ $(DFRA)$ نمایش می‌دهیم هر گاه $\dfrac{H(t)}{t}$ تابعی غیر نزولی (غیر صعودی) از t باشد که در آن $H(t) = -\ln R(t)$ تابع نرخ خطر تجمعی F است. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آن که F $IFRA$ $(DFRA)$ باشد آن است که $\left(R(t)\right)^{\frac{1}{t}}$ تابعی نزولی (صعودی) از t، $t > 0$، باشد.

۱۱. ثابت کنید که رابطه زیر بین کلاس توزیع‌های طول عمر برقرار است.

$$IFR \Rightarrow IFRA \Rightarrow NBU$$
$$DFR \Rightarrow DFRA \Rightarrow NWU$$

۱۲. فرض کنید T یک متغیر تصادفی طول عمر با تابع توزیع F باشد و C را یک مقدار ثابت در نظر بگیرید و قرار دهید $X=\min(C,T)$. $E(X)$ را تعیین کنید.

۱۳. فرض کنید T_1 و T_2 دو متغیر تصادفی طول عمر مستقل و به ترتیب دارای توزیع‌های F و G باشند. اگر f و g به ترتیب توابع چگالی متناظر با T_1 و T_2 باشند.

الف) $P(T_1>T_2)$ را تعیین کنید.

ب) اگر $T_1^t=(T_1-t\,|\,T_1>t)$ و $T_2^t=(T_2-t\,|\,T_2>t)$ به ترتیب عمر باقیمانده متناظر با T_1 و T_2 باشند، $\rho(t)=P(T_1^t>T_2^t)$ را به دست آورید.

ج) اگر $F(t)=1-e^{-\lambda_1 t}, t>0$ و $G(t)=1-e^{-\lambda_2 t}, t>0$، احتمالات ارائه شده در (الف) و (ب) را به دست آورید.

۱۴. فرض کنید دو متغیر طول عمر مستقل T_1 و T_2 دارای توابع قابلیت اعتماد زیر باشند

$$R_{T_1}(t)=1-\frac{t}{2}, 0\le t\le 2 \quad و \quad R_{T_2}(t)=1-2t, 0\le t\le \frac{1}{2}$$

الف) میانگین طول عمر یک سیستم متوالی متشکل از T_1 و T_2 را تعیین کنید.

ب) میانگین طول عمر سیستم موازی متشکل از T_1 و T_2 را تعیین کنید.

۱۵. تابع نرخ خطر سیستمی دارای شکل زیر می‌باشد

$$h(t)=\alpha\mu t^{\alpha-1}+\beta\gamma t^{\gamma-1}, \alpha>0, \beta>0, \mu>0, \gamma>0$$

قابلیت اعتماد سیستم را تعیین کنید. آیا می‌توان نتیجه گرفت که سیستم دارای ساختار متشکل از دو جزء است؟

۱۶. فرض کنید $T_۱$، $T_۲$ و $T_۳$ سه متغیر طول عمر مستقل باشند که به ترتیب دارای توابع قابلیت اعتماد $R_{T_۱}(t)=e^{-۲t}, t>۰$ ، $R_{T_۲}(t)=e^{-t^۲}, t>۰$ و $R_{T_۳}(t)=e^{-\sqrt{t}}, t>۰$ باشند. اگر T طول عمر سیستمی متوالی متشکل از $T_۱$، $T_۲$ و $T_۳$ باشد، آنگاه

الف) قابلیت اعتماد سیستم را تعیین کنید.

ب) به صورت تحلیلی یا نموداری نشان دهید که تابع نرخ خطر سیستم U-شکل است.

۱۷. فرض کنید T دارای تابع نرخ خطر $h(t)=\dfrac{t}{t+۱}, t>۰$ باشد.

الف) نشان دهید که T متعلق به کلاس IFR است.

ب) تابع قابلیت اعتماد T را تعیین کنید.

ج) میانگین عمر باقیمانده T را به دست آورد و در مورد رفتار آن بحث کنید.

۱۸. فرض کنید یک قطعه الکتریکی دارای طول عمری است که تابع قابلیت اعتماد آن برحسب ماه به صورت زیر است

$$R(t)=\frac{۴}{(t+۲)^۲}, t>۰$$

الف) میانگین عمر باقیمانده T را در زمان $t=۳$ ماه تعیین کنید.

ب) نمودار میانگین عمر باقیمانده، $m(t)$، را رسم کنید.

۱۹. ثابت کنید اگر T یک متغیر طول عمر با میانگین عمر باقیمانده $m(t)$ و تابع قابلیت اعتماد $R(t)$ باشد آنگاه میانگین آن μ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mu=\int_۰^t R(x)\,dx+R(t)m(t)$$

تعبیر این رابطه چیست؟

۲۰. فرض کنید تابع نرخ خطر سیستمی به صورت زیر باشد

$$h(t)=\frac{e^{\sqrt{t}}}{۲\sqrt{t}}, t>۰$$

الف) تابع قابلیت اعتماد سیستم را تعیین کنید.

ب) نشان دهید که $h(t)$، U-شکل است.

۲۱. قضیه ۸.۳ را اثبات کنید.

۲۲. یکی از مفاهیم مهم در تحلیل داده‌های عمر، مفهوم نرخ مخاطره‌های متناسب است. فرض کنیم T_1 و T_2، دو متغیر تصادفی طول عمر و به ترتیب دارای نرخ خطرهای h_1 و h_2 باشند. گوییم T_1 و T_2 دارای نرخ مخاطره‌های متناسب هستند، هر گاه ثابت نامنفی مانند c وجود داشته باشد به طوریکه

$$h_2(t) = ch_1(t)$$

الف) ثابت کنید T_1 و T_2 دارای نرخ مخاطره‌های متناسب هستند اگر و تنها اگر $R_2(t) = (R_1(t))^c$ که در آن R_1 و R_2 به ترتیب توابع قابلیت اعتماد T_1 و T_2 هستند.
ب) ثابت کنید T_1 و T_2 دارای نرخ خطرهای متناسب هستند اگر و تنها اگر $\rho(t)$ در قسمت (ب) تمرین ۱۳ مقداری ثابت باشد (یعنی به t بستگی نداشته باشد).

۲۳. فرض کنید T_1 و T_2 طول عمرهای مستقل دو جزء یک سیستم متوالی باشند که به ترتیب دارای نرخ خطر h_1 و h_2 هستند.
الف) اگر T طول عمر سیستم باشد، ثابت کنید به ازای $t > 0$

$$P(T_1 = T \mid T = t) = \frac{h_1(t)}{h_1(t) + h_2(t)}$$

ب) ثابت کنید اگر T_1 و T_2 دارای نرخ مخاطره‌های متناسب باشند آنگاه احتمال ارائه شده در قسمت (الف) به t بستگی ندارد.

۴

توزیع‌های طول عمر

۱.۵ توزیع نمایی

توزیع نمایی یکی از مهم‌ترین توزیع‌های آماری است که در مدل سازی و تحلیل داده‌های طول عمر به کار می‌رود. از جمله دلایل مهم کاربرد فراوان توزیع نمایی در قابلیت اعتماد یکی فرم ساده محاسباتی این توزیع و دیگری خواص منحصر به فرد این مدل است.

متغیر تصادفی طول عمر T دارای توزیع نمایی است و به طور خلاصه می‌نویسیم $T \sim E(\lambda)$ اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0, \ \lambda > 0$$

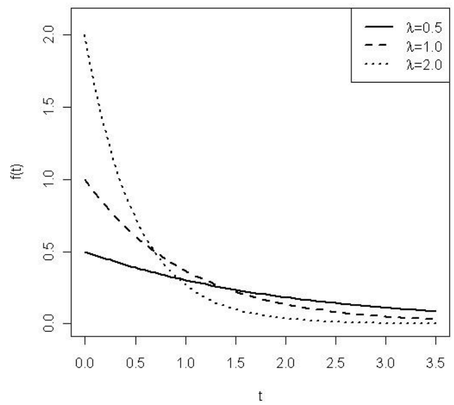
در این صورت تابع قابلیت اعتماد T برابر است با

$$\begin{aligned} R(t) &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= e^{-\lambda t}, \quad t > 0, \ \lambda > 0 \end{aligned}$$

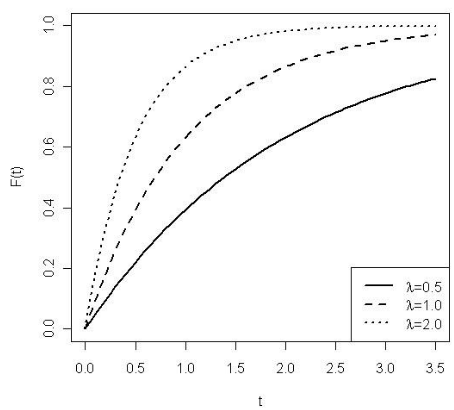
و در نتیجه تابع توزیع آن مساوی است با

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

λ تنها پارامتر این توزیع است که یک پارامتر مقیاس است. اگر λ معلوم باشد، هر عبارت احتمالی در مورد سیستمی با طول عمر T می‌توان محاسبه کرد. اما در مسایل کاربردی، معمولاً λ مجهول است و باید از داده برآورد شود. شکل‌های ۱.۵ و ۲.۵ به ترتیب نمودارهای $f(t)$ و $F(t)$ را برای چند مقدار λ نشان می‌دهند.



شکل ۱.۵ نمودار تابع چگالی احتمال توزیع نمایی



شکل ۲.۵ نمودار تابع توزیع تجمعی توزیع نمایی

تابع نرخ خطر توزیع نمایی، $h(t)$ برابر است با

۷۲

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \frac{f(t)}{R(t)} \\
&= \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

ملاحظه می‌شود که $h(t)$ به t بستگی ندارد. یعنی تابع نرخ خطر سیستمی که دارای توزیع نمایی است با گذشت زمان تغییر نمی‌کند و همواره مساوی مقدار ثابت λ است. این خصوصیت یکی از مشخصه‌های منحصر به فرد توزیع نمایی است. به عبارت دیگر اگر تابع نرخ خطر یک متغیر تصادفی پیوسته T همواره ثابت، مثلاً λ باشد، آنگاه به راحتی اثبات می‌شود که توزیع متغیر باید نمایی باشد. دلیل درستی این مطلب از این واقعیت ناشی می‌شود که اگر $R(t)$ تابع قابلیت اعتماد T باشد، آنگاه

اثبات قضیه ۱.۵

$$
\begin{aligned}
R(t) &= e^{-\int_0^t h(x)dx} \\
&= e^{-\int_0^t \lambda dx} \\
&= e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

نتیجه بحث فوق قضیه زیر است.

قضیه ۱.۵ در بین توزیع‌های پیوسته، توزیع نمایی تنها مدل احتمالی است که نرخ خطر آن ثابت است.

اثبات مشابه مثال ۲۰.۷ صفحه ۱۱۴ ـ ویرایش سوم کتاب مبانی احتمال دکتر بهبودیان

در دنیای واقعی می‌توان پدیده‌هایی یافت که برای آن‌ها فرض ثابت بودن نرخ خطر را می‌توان کم و بیش پذیرفت. برای مثال شکست یک قطعه الکتریکی مانند لامپ با گذشت زمان بر اثر سالخوردگی لامپ نیست بلکه امری کاملاً اتفاقی است. در مورد انسان طبیعی است که با گذشت زمان هنگامی که فرد دچار سالخوردگی می‌شود، نرخ خطر آن نیز افزایش می‌یابد. بنابراین برای مصنوعاتی مانند قطعات الکتریکی فرض ثابت بودن نرخ خطر در طول زمان غیر منطقی به نظر نمی‌رسد.

مثال. ۱.۵ فرض کنید نوعی ترانزیستور دارای نرخ خطر ثابت $\lambda = ۰/۰۴$ (در هزار ساعت) باشد.

۷۳

الف) چقدر احتمال دارد که یکی از نوع ترانزیستورها قبل از ۱۵۰۰۰ ساعت استفاده از کار بیافتد.

ب) چه مدت زمان باید منتظر ماند که در آن احتمال شکست برابر ۰/۰۱ شود.

حل. الف) ابتدا توجه کنید که باید λ را به واحد زمان بنویسیم. بنابراین در اینجا باید λ را در 10^{-3} ضرب کنیم. بنابراین $\lambda = 0/00004$ و در نتیجه احتمال مطلوب برابر است با

$$p(T<15000) = F(15000) = 1 - e^{-(0/00004 \times 15000)}$$
$$= 0/25$$
$$= 25\%$$

ب) باید مقدار t را طوری تعیین کنیم که $F(t) = 0/01$. بنابراین t به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$t = \frac{-\ln(1-0/01)}{0/00004}$$
$$= 251/26 \text{ ساعت}$$

یکی دیگر از خواص منحصر به فرد توزیع نمایی که در واقع بسیاری از ویژگی‌های دیگر این توزیع را باعث می‌شود، حاصیت فقدان حافظه است. بنابر تعریف یک متغیر تصادفی پیوسته T گوییم دارای خاصیت فقدان حافظه است اگر و تنها اگر به ازای هر دو مقدار t_1 و t_2 از تکیه‌گاه T داشته باشیم

$$R(t_1+t_2 \mid t_1) = R(t_2) \text{ یا } P(T > t_1 + t_2 \mid T > t_1) = P(T > t_2)$$

به عبارت دیگر اگر $R(t)$ تابع قابلیت اعتماد T باشد، آنگاه T دارای خاصیت فقدان حافظه است اگر و تنها اگر

$$R(t_1+t_2) = R(t_1)R(t_2), \quad t_1, t_2 > 0$$

قضیه زیر نشان می‌دهد که توزیع نمایی دارای خاصیت فقدان حافظه است.

$$R(t_1+t_2) = R(t_1)R(t_2), \quad t_1, t_2 > 0$$

قضیه ۲.۵ اگر $T \sim E(\lambda)$، آنگاه برای هر دو مقدار t_1 و t_2 داریم

۷۴

$$R(t_1+t_2)=R(t_1)R(t_2)$$

اثبات.

اگر $T\sim E(\lambda)$ داریم

$$\begin{aligned}R(t_1+t_2)&=e^{-\lambda(t_1+t_2)}\\&=e^{-\lambda t_1}e^{-\lambda t_2}\\&=R(t_1)R(t_2)\end{aligned}$$

اثبات در تمرین ۱۵ صفحه ۲۹۱ ویرایش سوم مبانی احتمال دکتر تهرانی

و بنابراین اثبات کامل است.

در متون پیشرفته‌تر ثابت می‌شود که در بین توزیع‌های پیوسته، توزیع نمایی، تنها مدل آماری است که در خاصیت فقدان حافظه صدق می‌کند.

از نقطه نظر سالخوردگی، خاصیت فقدان حافظه نشان می‌دهد که یک سیستم با توزیع طول عمر نمایی هرگز دچار سالخوردگی نمی‌شود. یعنی اگر بدانیم که سیستم در زمان t هنوز کار می‌کند، آنگاه احتمال اینکه به اندازه t_2 واحد زمان دیگر کار کند برابر است با احتمال اینکه سیستم در وضعیت نو بودن به اندازه t_2 واحد زمان کار کند. بنابراین از دیدگاه قابلیت اعتماد اگر سیستم دارای توزیع نمایی باشد آنگاه

الف) چون سیستم استفاده شده مانند یک سیستم نو عمل می‌کند، نیازی به ارائه و طرح برنامه برای تعویض و نگهداری سیستم نیست.

ب) در برآورد میانگین طول عمر، صدک‌های توزیع، قابلیت اعتماد و غیره، داده‌های لازم می‌توانند بر مبنای اینکه واحد چه مدت زمان کار کرده و اینکه تعداد شکست‌ها چقدر بوده است جمع آوری شوند و سن هر یک از واحدهای مورد بررسی مهم نیست.

با توجه به خاصیت فقدان حافظه به راحتی نتیجه می‌گیریم که میانگین عمر باقیمانده توزیع نمایی نیز مقداری ثابت است و به زمان بستگی ندارد. دلیل درستی این مطلب این است که

$$\begin{aligned}m(t)&=E\left(T-t\mid T>t\right)\\&=\int_0^\infty R(x\mid t)\,dx\end{aligned}$$

تنها توزیع های پیوسته و گسسته بدون حافظه

هندسی — نمایی

X: طول عمر نمایی با پارامتر λ

Y: تعداد کل سالهایی که دستگاه کار می‌کند $=[X]$

$$P([X]=n)=P(n<X<n+1)=\int_n^{n+1}\lambda e^{-\lambda x}\,dx=(e^{-\lambda})^n(1-e^{-\lambda})=P(Y=n)$$

تابع احتمال توزیع هندسی با پارامتر $p=1-e^{-\lambda}$

تمرین ۱۴ صفحه ۲۹۱ ویرایش سوم کتاب مبانی احتمال دکتر تهرانی

۷۵

$$=\int_{۰}^{\infty} R(x)dx$$

$$=\int_{۰}^{\infty} e^{-\lambda x}dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_{۰}^{\infty}$$

$$=\frac{1}{\lambda}$$

گشتاور مرتبه kام توزیع نمایی، یعنی $E\left(T^k\right)$، $k>-۱$، به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$E\left(T^k\right)=\int_{۰}^{\infty}\lambda t^k e^{-\lambda k}dt$$

$$=\frac{۱}{\lambda^k}\int_{۰}^{\infty}x^k e^{-x}dx \qquad \text{با تبدیل } \lambda t = x$$

$$=\lambda^{-k}\Gamma(k+۱)$$

که در آن $\Gamma(k+۱)=\int_{۰}^{\infty}x^k e^{-x}dx$ به تابع گاما معروف است و به راحتی می‌توان نشان داد که در خاصیت زیر صدق می‌کند.

$$\Gamma(k+۱)=k\Gamma(k)$$

به ویژه برای $k=۱,۲,\dots$، داریم

$$E\left(T^k\right)=\frac{k!}{\lambda^k}$$

بنابراین واریانس توزیع نمایی برابر است با

$$V(T)=E\left(T^۲\right)-\left(E(T)\right)^۲$$

$$=\frac{۲}{\lambda^۲}-\frac{۱}{\lambda^۲}$$

$$=\frac{۱}{\lambda^۲}$$

۷۶

که نتیجه می‌دهد ضریب تغییرات این توزیع که بنابر تعریف مساوی است با $\frac{\sqrt{V(T)}}{E(T)}$ برابر با ۱ است.

اگر صدک مرتبه p ام توزیع نمایی را با $E_p(\lambda)$ نمایش دهیم آنگاه

$$E_p(\lambda)=\frac{-\ln(۱-p)}{\lambda}$$

$ET=\frac{1}{\lambda}=100$

بنابراین میانه توزیع نمایی برابر خواهد شد با $E_p(\lambda)=۰/۶۹۳\lambda^{-۱}$. این نشان می‌دهد که برای مثال اگر میانگین زمان کارکرد یک سیستم ۱۰۰ ساعت باشد آنگاه ۵۰ درصد چنین سیستم‌هایی طول عمر کمتر از ۶۹/۳ ساعت خواهد داشت. دلیل چنین اتفاقی چوله بودن زیاد توزیع است. همچنین به راحتی می‌توان نشان داد که مُد این توزیع (یعنی مقدار که تابع چگالی در آنجا ماکزیمم خود را اختیار می‌کند) برابر صفر است. نتایج بدست آمده در مورد این توزیع را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم.

جدول ۱.۵ خواص توزیع نمایی

نام مشخصه	مقدار
تابع توزیع $F(t)$	$۱-e^{-\lambda t}$
تابع چگالی $f(t)$	$\lambda e^{-\lambda t}$
تابع قابلیت اعتماد $R(t)$	$e^{-\lambda t}$
تابع نرخ خطر $h(t)$	λ
تابع میانگین عمر باقیمانده $m(t)$	λ^{-1}
میانگین $E(T)$	$\lambda^{-۱}$
واریانس $V(T)$	$\lambda^{-۲}$
میانه	$۰/۶۹۳\lambda^{-۱}$
مُد	۰

یکی از خواص جالب توزیع نمایی در قضیه زیر بیان و اثبات می‌شود که نشان می‌دهد در یک مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل نمایی، کمترین مقدار نمونه نیز دارای توزیع نمایی است.

قضیه ۳.۵ اگر $T_۱,T_۲,\ldots,T_n$ متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با تابع توزیع

برای به دست آوردن مُد در توزیع های پیوسته از مشتق گیری از تابع چگالی و صفر کردن این کار

آیا $f'(x)<0$ است یا نه؟ استفاده از ای سوال این جا

تابع $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ در صفر $f'(x)<0$

ماکسیمم مقدار خود را با توجه به نزولی بودل اختیار می کند

۷۷

$$F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t},\ t_i > 0,\ \lambda_i > 0,\ i = 1,2,\ldots,n$$

باشند آنگاه متغیر $T = \min(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ نیز دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ است.

اثبات.

اگر $R(t)$ تابع قابلیت اعتماد T باشد آنگاه

$$\begin{aligned} R(t) &= P(T > t) \\ &= P(\min(T_1, T_2, \ldots, T_n) > t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(T_i > t) \quad \text{از استقلال } T_i \text{ ها} \\ &= \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t} \\ &= e^{-\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)t} \end{aligned}$$

کتاب مبانی آمار ریاضی $\rightarrow X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} E(\lambda)$

دکتر پارسیان $X_{(1)} \sim E(n\lambda)$

$\cancel{R(t) = e^{-\lambda t},\ t_i > 0,\ \ldots,\ i = 1,2,\ldots,n}$

یعنی T دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ است و اثبات کامل می‌شود. ■

$$h(t) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right) e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i t}}{e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i t}} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

یک نتیجه صریح این قضیه این است که از اجزای یک سیستم متوالی دارای طول عمرهای نمایی و به ترتیب با نرخ خطرهای $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ باشند، آنگاه طول عمر سیستم نیز نمایی با نرخ خطر $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ است.

در مطالعات قابلیت اعتماد، گاهی اوقات با مسایلی سر و کار داریم که در آن‌ها آمیزه[1] توزیع‌ها مطرح می‌شود. فرض کنید T_i، $i = 1,2,\ldots,n$، متغیرهای تصادفی مستقل باشند با تابع چگالی $f_i(t)$. گوییم متغیر تصادفی Y آمیزه‌ای از $T_1, T_2, \ldots, T_n$ است اگر تابع چگالی آن، $f(t)$، برابر باشد با

ترکیب محدب

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t),\ 0 \le \alpha \le 1,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

از اینجا به بعد تعریف آمیزه توزیع ها یا mixture distribution شروع می‌شود.

[1] Mixture

دقت کنید که همیشه نمی‌توان تابع چگالی ترکیبی از متغیرهای تصادفی $T_1, T_2, \ldots, T_n$ را به صورت ترکیب محدب از چگالی‌های آنها نوشت.

مثال

1) $X_1, X_2 \overset{iid}{\sim} E(1) \Rightarrow Y = X_1 + X_2 \sim Gamma(2,1)$

2) $X_1, X_2 \overset{iid}{\sim} N(0,1) \Rightarrow Y = \frac{X_1}{X_2} \sim C(0,1)$ کوشی

۷۸

از جمله مثال‌هایی که در آن آمیزه توزیع‌ها ظاهر می‌شود آن است که فرض کنید تولیدات روزانه یک کارخانه که توسط چند دستگاه یکسان تولید می‌شوند با هم در یک مکان به صورت آمیخته نگهداری شوند. فرض کنید α_i نسبت تولیدات ماشین iام باشد که طول عمر محصول تولیدی آن T_i است، $i=1,2,\dots,n$. هنگامیکه مشتری یکی از این محصولات را خریداری می‌کند توزیع طول عمر آمیزه توزیع T_iها خواهد بود.

مثالی کاربردی از توزیع آمیخته

قضیه زیر نتیجه جالبی را در مورد آمیزه توزیع‌های نمایی نشان می‌دهد.

قضیه ۶.۵ فرض کنید $T_i \sim E(\lambda_i)$ که در آن T_iها مستقل‌اند، $i=1,2,\dots,n$، آنگاه آمیزه T_iها دارای توزیع DFR است.

اثبات.

اگر T آمیزه T_iها باشد آنگاه تابع نرخ خطر T برابر است با

$$h_T(t)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i e^{-\lambda_i t}}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e^{-\lambda_i t}}$$

اگر از $h_T(t)$ برحسب t مشتق بگیریم به دست می‌آوریم

$$\frac{dh_T(t)}{dt}=\frac{-\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i^2 e^{-\lambda_i t}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e^{-\lambda_i t}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i e^{-\lambda_i t}\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e^{-\lambda_i t}\right)^2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^2}$$

فرض کنید $a_i=\alpha_i^{\frac{1}{2}}\lambda_i e^{-\frac{\lambda_i t}{2}}$، $b_i=\alpha_i^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda_i t}{2}}$ آنگاه با استفاده از نامساوی کشی-شوارتز که بیان می‌کنند برای اعداد حقیقی a_i و b_i، $i=1,2,\dots,n$،

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$$

نتیجه می‌گیریم که $\frac{dh_T(t)}{dt}\le 0$ و در نتیجه T دارای توزیع DFR است. ■

قبل از اینکه این بخش را به اتمام برسانیم، به این نکته اشاره می‌کنیم که در توزیع نمایی $E(\lambda)$ می‌تواند یک پارامتر مکان نیز وارد کرد. به عبارت دیگر، توزیع نمایی با دو پارامتر λ و θ که با $E(\lambda,\theta)$ نمایش می‌دهیم دارای چگالی زیر است

$$f(t)=\cancel{\frac{1}{\lambda}}\,\lambda\, e^{-\lambda(t-\theta)},\ t>\theta>0$$

در قابلیت اعتماد پارامتر θ مثبت است و به آن پارامتر ضمانت گویند. برای یک متغیر طول عمر با تابع چگالی فوق، مطمئن هستیم که مقدار طول عمر همواره از θ بیشتر است. برای تولید کنندگان محصولات برآورد هر چه دقیق‌تر θ می‌تواند مهم باشد. در این توزیع نرخ خطر دوباره λ است اما میانگین طول عمر برابر با $\theta+\frac{1}{\lambda}$ خواهد بود و واریانس آن نیز $\frac{1}{\lambda^2}$ است.

۱.۱.۵ آماره‌های ترتیبی توزیع نمایی

آماره‌های ترتیبی نقش به سزایی در مطالعات طول عمر و تحلیل داده‌های قابلیت اعتماد دارند. در این بخش پس از معرفی آماره‌های ترتیبی، این آماره‌ها را درحالتی که توزیع تحت بررسی نمایی است مورد مطالعه قرار می‌دهیم. فرض کنید $T_1,T_2,\ldots,T_n$ نمونه‌های تصادفی به حجم n از توزیعی پیوسته با تابع توزیع F، تابع چگالی f و تابع بقای R باشد. مقادیر مرتب شده نمونه را که با $T_{1:n}\le T_{2:n}\le\cdots\le T_{n:n}$ نمایش می‌دهیم آماره‌های ترتیبی نمونه گوییم. در بین دلایل مختلف اهمیت آماره‌های ترتیبی در قابلیت اعتماد، به دو دلیل زیر اشاره می‌کنیم.

الف) در یک سیستم $(n-k+1)$ از n، طول عمر سیستم برابر با $T_{k:n}$ است. به طور کلی‌تر ثابت می‌شود که طول عمر یک سیستم منسجم با n جزء، یکی از مقادیر مرتب شده طول عمر اجزای آن است.

ب) در برآورد متوسط طول عمر مثلاً یک قطعه الکتریکی، هنگامی که قرار است n داده تولید کنیم باید n قطعه را در زمان $t=0$ وارد آزمایش می‌کنیم و زمان شکست آن‌ها را ثبت می‌کنیم. واضح است که زمان شکست قطعات مقادیر آماره‌های ترتیبی $T_{1:n},T_{2:n},\ldots,T_{n:n}$ خواهند بود.

به راحتی می‌توان نشان داد که تابع قابلیت اعتماد تابع چگالی احتمال kامین آماره ترتیبی، $T_{k:n}$، به ترتیب برابرند با

۸۰

$$P(T_k \le t) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F(t))^j (1-F(t))^{n-j}$$

$$R_{k:n}(t) = P(T_{k:n} > t) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} (F(t))^{j} (1-F(t))^{n-j}$$

و

$$f_{k:n}(t) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} (F(t))^{k-1} (1-F(t))^{n-k} f(t)$$

تفاضل بین دو آماره ترتیبی متوالی $T_{k:n} - T_{k-1:n}$، $k = 1,2,\ldots,n$، با $T_{0:n} = 0$ که به آن‌ها فاصله[1] بین دو آماره ترتیبی گوییم و با D_k نمایش می‌دهیم نقش مهمی در آزمون‌های طول عمر بازی می‌کندکه در فصل‌های بعد به آن اشاره می‌کنیم. در حالتی که توزیع تحت بررسی نمایی است فاصله‌های n_k خواص بسیار جالبی دارند که در قضیه زیر به آن‌ها اشاره می‌کنیم.

قضیه ۷.۵ فرض کنید $D_1, D_2, \ldots, D_n$ فاصله‌های متوالی بین آماره‌هایی بر اساس یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی $E(\lambda)$ باشند آنگاه

اثبات در صفحه ۱۸ کتاب حل تمرین مبانی آمار ریاضی دکتر پارسیان

الف) به ازای $k = 1,2,\ldots,n$،

$$P(D_k \le t) = 1 - e^{-(n-k+1)\lambda t}, t > 0$$

یعنی توزیع‌فاصله‌های D_k نیز نمایی‌اند با نرخ خطر $(n-k+1)\lambda$. بنابراین

$$E(D_k) = \frac{1}{(n-k+1)\lambda}$$

و

$$V(D_k) = \frac{1}{[(n-k+1)\lambda]^2}$$

ب) $D_1, D_2, \ldots, D_n$ مستقل از یکدیگر هستند.

اثبات.

اثبات قضیه به عنوان تمرین به دانشجو واگذار می‌شود. ■

قضیه ۷.۵ دو نتیجه فوری زیر را در پی خواهد داشت.

[1] Spacing

۸۱

→ معرفی ۱۸ کتاب حل تمرین بیانی آمار ریاضی دکتر پارسیان

نتیجه ۱.۵ تحت شرایط قضیه ۷.۵، فاصله‌های نرمال شده[1]، $D_n, \ldots, (n-1)D_2, nD_1$ از توزیع نمایی $E(\lambda)$، متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان $E(\lambda)$ هستند.

نتیجه ۲.۵ اگر $T_{1:n} \le T_{2:n} \le \cdots \le T_{n:n}$ آماره‌های ترتیبی نمونه‌های تصادفی به حجم n از توزیع نمایی $E(\lambda)$ باشند آنگاه برای $k = 1, 2, \ldots, n$ داریم

تمرین کوئیز ۳: اثبات کنید ←

$$E(T_{k:n}) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{n-k+1}\right)$$

و

$$V(T_{k:n}) = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n-k+1)^2}\right)$$

$$E(T_{k:n} - T_{k-1:n}) = \frac{1}{(n-k+1)\lambda}$$

با توجه به $\uparrow$ به آسانی حاصل می‌شود

با توجه به اینکه

$$\mathrm{var}(T_{k:n} - T_{k-1:n}) = \mathrm{var}(T_{k:n}) + \mathrm{var}(T_{k-1:n}) - 2\,\mathrm{cov}(T_{k:n}, T_{k-1:n}) = \frac{1}{(\lambda(n-k+1))^2}$$

و

$$\mathrm{cov}(T_{k:n} - T_{k-1:n},\ T_{k-1:n} - T_{k-2:n}) = 0$$

به راحتی حاصل می‌شود.

در آزمون‌های طول عمر کمیتی به نام زمان کل آزمون[2] که آن را با TTT نمایش می‌دهیم نقش محوری ایفا می‌کند. فرض کنید در برآورد متوسط طول عمر یک قطعه الکتریکی لامپ‌های تولیدی یک کارخانه، n لامپ را در زمان $t=0$ روشن کرده و منتظر می‌مانیم تا لامپ‌ها از کار افتاده و زمان شکست آن‌ها را ثبت می‌کنیم. طبیعی است که زمان شکست لامپ‌ها آماره‌های ترتیبی $T_{1:n}, T_{2:n}, \ldots, T_{n:n}$ خواهند بود که در آن $T_{1:n}$ زمان اولین شکست، ...، $T_{n:n}$ زمان آخرین شکست در بین لامپ‌ها خواهد بود. فرض کنید $T_{k-1:n} \le t \le T_{k:n}$. آنگاه زمان کل آزمایش در فاصله $(0, t)$ برابر است با

$$TTT = nT_{1:n} + (n-1)(T_{2:n} - T_{1:n}) + \cdots$$
$$+ (n-k+1)(T_{k:n} - T_{k-1:n}) + (n-k)(t - T_{k:n})$$

سلسست

زمان صرف شده تا اولین

دلیل درستی این مطلب را می‌توان به صورت زیر بیان کرد. در زمان اولین شکست، $T_{1:n}$، با توجه به اینکه n لامپ در آزمایش بوده‌اند، برابر با $nT_{1:n}$ است؛ زمان صرف شده از اولین تا دومین شکست برابر $T_{2:n} - T_{1:n}$ است که در اینجا $(n-1)$ لامپ داریم و بنابراین زمان کل آزمایش تا دومین شکست برابر با $nT_{1:n} + (n-1)(T_{2:n} - T_{1:n})$ است و الی آخر ... بنابراین زمان کل آزمایش در فاصله $(0, t)$ برابر با TTT ارائه شده فوق خواهد بود. در حالت خاص که $t = T_{k:n}$، کمیت TTT اهمیت ویژه‌ای دارد. به ویژه در این حالت زمانی که توزیع تحت بررسی نمایی است. توزیع TTT را می‌توان به راحتی تعیین کرد. بدین منظور قضیه زیر را بیان می‌کنیم که اثبات آن را به دانشجویان واگذار می‌کنیم.

---

[1] Normalized spacing
[2] Total time on test

۸۲

قضیه ۸.۵ اگر توزیع طول عمر قطعات تحت آزمایش نمایی $E(\lambda)$ باشد، آنگاه زمان کل آزمایش

$$TTT=\sum_{i=1}^{k}\underbrace{(n-i+1)(T_{i:n}-T_{i-1:n})}_{=Z_i} \longrightarrow \sum_{i=1}^{k} Z_i \sim Ga(k,\lambda)$$

دارای توزیع گاما با تابع چگالی احتمال زیر است

$$f(t)=\frac{1}{\Gamma(k)}\lambda^{k}t^{k-1}e^{-\lambda t}, t>0, \lambda>0.$$

→ صفحه ۱۹ کتاب حل تمرین آمار ریاضی دکتر پارسیان

در مورد توزیع گاما و ویژگی‌های آن در بخش‌های بعد صحبت می‌کنیم.

۲.۵ توزیع وایبل

توزیع وایبل [1] یکی از معروفترین مدل‌های طول عمر است که به دلیل انعطاف پذیری آن کاربردهای فراوانی در تحلیل داده‌های قابلیت اعتماد دارد. بسیاری از پژوهش‌های صورت گرفته در مدل سازی داده‌های قابلیت، مقاومت مواد و ... با توزیع وایبل سر و کار دارند. گوییم متغیر تصادفی T دارای توزیع وایبل با پارامترهای λ و β است و با علامت $W(\lambda,\beta)$ نمایش می‌دهیم اگر تابع توزیع آن به صورت زیر باشد

منظور از انعطاف پذیری این است که اگر تغییری در سیستم به وجود بیاید آن سیستم توانایی و قابلیت تطبیق با تغییر اعمال شده را داشته باشد

$$F(t;\lambda,\beta)=1-e^{-(\lambda t)^{\beta}}, t>0, \beta>0, \lambda>0.$$

که در آن λ پارامتر مقیاس در توزیع و β پارامتر شکل توزیع است. تابع چگالی توزیع برابر است با

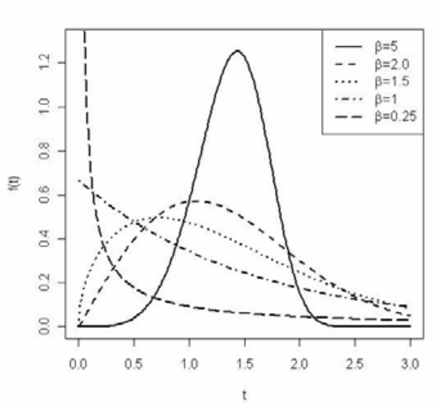
$$f(t;\lambda,\beta)=\beta\lambda^{\beta}t^{\beta-1}e^{-(\lambda t)^{\beta}}, t>0, \lambda>0, \beta>0.$$

شکل ۳.۵ نمودار تابع چگالی احتمال $W(\lambda,\beta)$ را برای $\lambda=1/5$ و مقادیر مختلف β نشان می‌دهد.

باعث تغییر شکل تابع چگالی شده و توزیع را flexible (انعطاف پذیر) می‌کند.

---

[1] Weibull distribution



شکل ۳.۵ تابع چگالی وایبل برای $\lambda = ۱/۵$ و مقادیر مختلف β

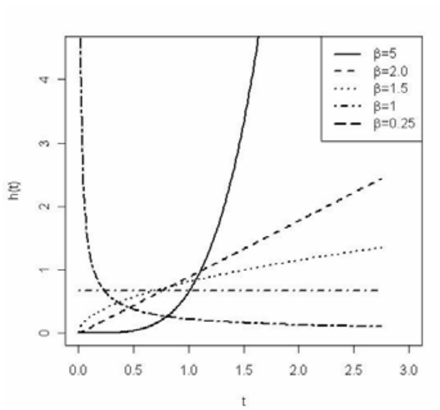
واضح است که به ازای $\beta = ۱$ توزیع وایبل به توزیع نمایی تبدیل می‌شود.
تابع قابلیت اعتماد و تابع نرخ خطر توزیع وایبل به ترتیب برابرند با

$$R(t) = e^{-(\lambda t)^{\beta}}, t > 0$$

و

$$h(t) = \beta \lambda^{\beta} t^{\beta - 1}$$

شکل ۴.۵ نمودار تابع نرخ خطر توزیع وایبل را به ازای $\lambda = ۱/۵$ و مقادیر مختلف β نشان می‌دهد.



شکل ۴.۵ نمودار تابع نرخ خطر توزیع وایبل

این واقعیت که تابع نرخ خطر توزیع وایبل به فرم بسته $h(t)=\beta\lambda^{\beta}t^{\beta-1}$ ارائه می‌شود یکی از خواص مهم توزیع وایبل است. واضح است که،

الف) به ازای $\beta>1$ تابع نرخ خطر برحسب زمان صعودی است و این یعنی توزیع IFR است.

ب) به ازای $\beta=1$ تابع نرخ خطر برحسب زمان ثابت است.

ج) به ازای $\beta<1$ تابع نرخ خطر برحسب زمان نزولی است و این یعنی توزیع DFR است.

با توجه به این موارد توزیع وایبل را برای مدل سازی انواع داده‌ها می‌توان به کار برد.

میانگین توزیع وایبل برابر است با

$$E(T)=\frac{1}{\lambda}\Gamma(1+\beta^{-1})$$

که در آن $\Gamma(\alpha)$ تابع گاما است. واریانش توزیع وایبل به صورت زیر ارائه می‌شود.

$$V(T)=\frac{1}{\lambda^{2}}\left[\Gamma(1+2\beta^{-1})-\Gamma^{2}(1+\beta^{-1})\right]$$

بررسی صحت عبارت میانگین و واریانس به عنوان تمرین به دانشجو واگذار می‌شود. جهت سهولت در محاسبه میانگین و واریانس توزیع وایبل مقادیر $\Gamma(1+\beta^{-1})$، $\Gamma(1+2\beta^{-1})$ و $\Gamma(1+2\beta^{-1})-\Gamma^{2}(1+\beta^{-1})$ به ازای مقادیر مختلف β در جدول ۱.۵ آورده شده است.

با توجه به مقادیر $E(T)$ و $V(T)$ در این توزیع، به راحتی ملاحظه می‌شود که ضریب تغییر توزیع $c.v=\frac{\sqrt{V(T)}}{E(T)}$ به λ بستگی ندارد و تنها تابعی است از β. ضریب تغییرات توزیع برابر است با

$$C.V=\left[\frac{\Gamma(1+2\beta^{-1})}{\Gamma^{2}(1+\beta^{-1})}-1\right]^{0.5}$$

یکی دیگر از خواص توزیع وایبل آن است که برای یک مجموعه مستقل از متغیرهای تصادفی این توزیع، مینیمم مجموعه نیز دارای توزیع وایبل است. این واقعیت به صورت دقیق در قضیه ۹.۵ آمده است.

جدول ۱.۵ مقادیر $\Gamma(1+\beta^{-1})$، $\Gamma(1+2\beta^{-1})$ و $\Gamma(1+2\beta^{-1})-\Gamma^{2}(1+\beta^{-1})$

β	$\Gamma(۱+\beta^{-۱})$	$\Gamma(۱+۲\beta^{-۱})$	$\Gamma(۱+۲\beta^{-۱})-\Gamma^{۲}(۱+\beta^{-۱})$
۰/۷۵	۱/۱۹۰۶۴	۴/۰۱۲۲۰	۲/۵۹۴۵۸
۱/۰۰	۱/۰۰۰۰۰	۲/۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰
۱/۲۵	۰/۹۳۱۳۸	۱/۴۲۹۶۲	۰/۵۶۲۱۵
۱/۵۰	۰/۹۰۲۷۴	۱/۱۹۰۶۴	۰/۳۷۵۶۹
۱/۷۵	۰/۸۹۰۶۲	۱/۰۶۹۰۷	۰/۲۷۵۸۷
۲/۰۰	۰/۸۸۶۲۳	۱/۰۰۰۰۰	۰/۲۱۴۶۰
۲/۲۵	۰/۸۸۵۷۳	۰/۹۵۸۰۱	۰/۱۷۳۴۹
۲/۵۰	۰/۸۸۷۲۶	۰/۹۳۱۳۸	۰/۱۴۴۱۵
۲/۷۵	۰/۸۸۹۸۶	۰/۹۱۴۰۹	۰/۱۲۲۲۴
۳/۰۰	۰/۸۹۲۹۸	۰/۹۰۲۷۵	۰/۱۰۵۳۳
۳/۲۵	۰/۸۹۶۳۳	۰/۸۹۵۳۴	۰/۰۹۱۹۳
۳/۵۰	۰/۸۹۹۷۵	۰/۸۹۰۶۲	۰/۰۸۱۰۷
۳/۷۵	۰/۹۰۳۱۲	۰/۸۸۷۷۶	۰/۰۷۲۱۳
۴/۰۰	۰/۹۰۶۴۰	۰/۸۸۶۲۳	۰/۰۶۴۶۶
۴/۲۵	۰/۹۰۹۵۶	۰/۸۸۵۶۴	۰/۰۵۸۳۴
۴/۵۰	۰/۹۱۲۵۷	۰/۸۸۵۷۳	۰/۰۵۲۹۴
۴/۷۵	۰/۹۱۵۴۴	۰/۸۸۶۳۲	۰/۰۴۸۲۸
۵/۰۰	۰/۹۱۸۱۷	۰/۸۸۷۲۶	۰/۰۴۴۲۳
۵/۲۵	۰/۹۲۰۷۵	۰/۸۸۸۴۷	۰/۰۴۰۶۸
۵/۵۰	۰/۹۲۳۲۰	۰/۸۸۹۸۶	۰/۰۳۷۵۶
۵/۷۵	۰/۹۲۵۵۲	۰/۸۹۱۳۷	۰/۰۳۴۷۸
۶/۰۰	۰/۹۲۷۷۲	۰/۸۹۲۹۸	۰/۰۳۲۳۲
۶/۲۵	۰/۹۲۹۸۰	۰/۸۹۴۶۴	۰/۰۳۰۱۱
۶/۵۰	۰/۹۳۱۷۸	۰/۸۹۶۳۳	۰/۰۲۸۱۲
۶/۷۵	۰/۹۳۳۶۶	۰/۸۹۸۰۴	۰/۰۲۶۳۳
۷/۰۰	۰/۹۳۵۵۴	۰/۸۹۹۷۵	۰/۰۲۴۷۰

۸۶ توزیع وایبل

قضیه ۹.۵ فرض کنید T_i، $i=1,2,\dots,n$، متغیرهای تصادفی مستقل باشند به طوریکه $T_i \sim W(\lambda_i,\beta)$. اگر قرار دهیم $T=\min(T_1,T_2,\dots,T_n)$، آنگاه $T\sim W(\lambda,\beta)$ که در آن $\lambda=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$.

اثبات. داریم

$$
\begin{aligned}
P(T>t) &= P\left(\min(T_1,T_2,\dots,T_n)>t\right)\\
&= \prod_{i=1}^{n} P(T_i>t)\\
&= \prod_{i=1}^{n} e^{-(\lambda_i t)^{\beta}}\\
&= e^{-t^{\beta}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{\beta}}\\
&= e^{-\left(t\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta}}
\end{aligned}
$$

یعنی $T\sim W(\lambda,\beta)$ که در آن $\lambda=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ و بنابراین اثبات کامل می‌شود. ■

نکته: در قضیه ۹.۵ اگر $T_i\sim W(\lambda,\beta)$، $i=1,2,\dots,n$. آنگاه $T=\min(T_1,T_2,\dots,T_n)$ دارای توزیع $W(n^{\beta^{-1}}\lambda,\beta)$ است.

نتیجه قضیه ۹.۵ به خاصیت ضعیف‌ترین اتصال[1] معروف است. این خاصیت به ویژه در مطالعه مقاومت مواد، مانند مفتول‌های فلزی و الیاف مصنوعی و غیره کاربرد دارد. برای مثال فرض کنید که یک زنجیر فلزی از n حلقه تشکیل شده است که در آن میزان مقاومت حلقه‌های زنجیر در برابر کشش دارای توزیع $W(\lambda_i,\beta)$ است، $i=1,2,\dots,n$. اگر زنجیر از دو طرف کشیده شود، پارگی زنجیر در حلقه‌ای اتفاق می‌افتد که ضعیف‌ترین اتصال باشد. بنابراین از قضیه ۹.۵ نتیجه می‌گیریم که با فرض استقلال توزیع مقاومت زنجیر در برابر کشش $W(\lambda,\beta)$ است که در آن $\lambda=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$.

[1] Weakest link

۸۷

اهمیت توزیع وایبل در مطالعه مقاومت و قدرت مواد فراتر از نتیجه‌ای است که در بالا به آن اشاره شده. به طور کلی‌تر فرض کنید $T_1,T_2,\dots,T_n$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند به طوریکه تابع توزیع آن‌ها در نزدیکی صفر به صورت زیر باشد

$$P\left(T_k \le t\right) = ct^d(1+o(1)),\ t>0$$

$\frac{O(n)}{n} \to \text{Constant}$

که در آن $c>0$، $d>0$ و $o(1)$ تابعی است که برای nهای بزرگ به صفر میل می‌کند. اگر قرار دهیم $T=a_n\left(T_1,T_2,\dots,T_n\right)$ که در آن $a_n=n^{1/d}$ ثابت نرمال ساز است، آنگاه ثابت می‌شود که هنگامیکه $n\to\infty$، T در توزیع به توزیع وایبل $W\left(c^{1/d},d\right)$ میل می‌کند.

$\frac{O(n)}{n} \to 0$

بنابراین اگر فرض کنیم برای مثال یک مفتول فلزی از بی‌نهایت اتصال به وجود آمده است که در آن‌ها اتصال‌ها دارای مقاومتی هستند که توزیع وایبل دارند آنگاه تحت شرایطی نه چندان دست و پاگیر توزیع استقامت فلز نیز وایبل خواهد بود.

مثال ۵.۲ یک کارخانه اتومبیل سازی در موتور یک مدل خودرو از ۵ لوله خنک کننده متفاوت برای سرد کردن موتور استفاده می‌کند. سازنده لوله‌های سرد کننده از تجربه می‌داند که طول عمر لوله‌ها برحسب ماه از توزیع وایبل با پارامتر شکل $\beta=1/8$ پیروی می‌کند. اگر پارامتر مقیاس طول عمر هر یک از خنک کننده‌ها به ترتیب ۰/۰۱، ۰/۰۲، ۰/۰۲، ۰/۰۴ و ۰/۰۵ باشد،

الف) توزیع طول عمر اولین از کار افتادگی، T، در بین لوله‌های خنک کننده را تعیین کنید.

ب) متوسط طول عمر اولین از کار افتادگی چقدر است؟

ج) میانه طول عمر اولین از کار افتادگی چقدر است؟

د) چقدر احتمال دارد که هیچ یک از لوله‌ها در اولین سال استفاده از کار نیافتد؟

حل. الف) از قضیه ۹.۵ می‌دانیم که طول عمر اولین از کار افتادگی (با شرط استقلال لوله‌ها)، $W(\lambda,1/8)$ است که در آن

$$\lambda=\left[(0/01)^{1/8}+(0/02)^{1/8}+(0/02)^{1/8}+(0/04)^{1/8}+(0/05)^{1/8}\right]^{\frac{1}{1/8}}$$
$$=0/074$$

۵

ب) میانگین طول عمر اولین از کار افتادگی با توجه به جدول ۱.۱، برابر است با،

$$E(T)=\frac{۱}{\lambda}\Gamma\left(۱+\frac{۱}{۱/۸}\right)$$
$$=\frac{۱}{۰/۰۷۴}\times ۰/۸۸۹$$
$$=۱۲/۰۲$$

صدک مرتبه p ام $= \frac{1}{\lambda}\left(-\ln(1-p)\right)^{1/\beta}$

ج) اگر $T \sim W(\lambda,\beta)$ باشد آنگاه به راحتی می‌توان نشان داد که میانه توزیع برابر است با $\frac{۱}{\lambda}(\ln ۲)^{\frac{۱}{\beta}}$. بنابراین در این مثال میانه اولین از کار افتادگی برابر است با

$\to .5 = 1 - e^{-(\lambda t)^{\beta}}$

$\to t_{.5} =$ میانه $= \frac{1}{\lambda}(\ln 2)^{1/\beta}$

$$\text{میانه} \quad =\frac{۱}{۰/۰۷۴}(\ln ۲)^{\frac{۱}{۱/۸}}$$
$$=۱۱/۰۲$$

د) قابلیت اعتماد اولین طول عمر در ماه ۱۲، برابر است با

$$R(۱۲)=e^{-(۰/۰۷۴\times ۱۲)^{۱/۸}}$$
$$=۰/۸۲$$

از خواص دیگر توزیع وایبل این است که لگاریتم متغیر تصادفی وایبل دارای توزیعی است که به آن توزیع مقدار غایی[1] نوع اول گویند. این نتیجه در قضیه زیر آمده است.

نوع اول توزیع مقادیر غایی:

$f(x) = \frac{1}{\sigma} e^{\frac{(x-\mu)}{\sigma}} e^{-e^{\frac{(x-\mu)}{\sigma}}} \; ; x\in R$

قضیه ۱۰.۵ فرض کنید $X \sim W(\lambda,\beta)$ و قرار دهید $T=\ln X$. آنگاه تابع توزیع T متعلق به خانواده توزیع مقدار غایی نوع اول است که تابع توزیع آن به صورت زیر است.

$$P(T\le t)=۱-e^{-e^{+\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)}}, -\infty<t<+\infty$$

که در آن $\mu=-\ln\lambda$ و $\sigma=\frac{۱}{\beta}$.

$F(x) = 1 - e^{-e^{\frac{+(x-\mu)}{\sigma}}} \; ; x\in R$

اثبات.

اثبات قضیه به عنوان تمرین به دانشجویان واگذار می‌شود. ■

نوع دوم توزیع مقادیر غایی (توزیع گامبل - در کتاب مبانی آمار ریاضی دکتر پارسیان):

$f(x) = \frac{1}{\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)}{\sigma}} e^{-e^{\frac{-(x-\mu)}{\sigma}}} \; ; x\in R$

$F(x) = e^{-e^{\frac{-(x-\mu)}{\sigma}}} \; ; x\in R$

www.weibull.com/hotwire/issue128/relbasics128.htm

اثبات قضیه 10.5

$P(T\le t) = P(\ln X \le t)$

$= P(X \le e^{t}) = 1 - e^{-(\lambda e^{t})^{\beta}} = 1 - e^{-\left(e^{\frac{t-\mu}{\sigma}}\right)} \; ; t\in R$

[1] Extreme value distribution

۸۹

$\mu = -\ln\lambda \,;\, \sigma = \frac{1}{\beta}$

توزیع مقدار غایی نوع اول متعلق به کلاسی از توزیع‌های آماری است که به خانواده توزیع‌های مکان–مقیاس معروفند. به طور کلی اگر فرض کنیم X دارای توزیع $F(x;\mu,\sigma)$ باشد که در آن $\sigma > ۰$، آنگاه گوییم F متعلق به خانواده توزیع مکان–مقیاس است اگر توزیعی مانند $F_{\cdot}$ وجود داشته باشد که به پارامتر بستگی ندارد و $F(x,\mu,\sigma) = F_{\cdot}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$. مثال‌هایی از این خانواده، علاوه بر توزیع مقدار غایی نوع اول توزیع نمایی دو پارامتری، توزیع نرمال، توزیع لجستیک و غیره است. یکی از دلایل اهمیت این خانواده از توزیع‌ها آن است که استنباط آماری در مورد پارامترهای آن نسبت به خانواده توزیع‌های دیگر راحت‌تر صورت می‌گیرد.

یک حالت خاص مهم دیگر از توزیع وایبل، هنگامی حاصل می‌شود که قرار دهیم $\beta = ۲$. در این حالت توزیع وایبل را، توزیع رایلی[1] گویند. توزیع رایلی دارای تابع قابلیت اعتماد

$$R(t,\lambda) = e^{-(\lambda t)^{۲}}$$

و تابع چگالی احتمال

$$f(t,\lambda) = ۲\lambda t e^{-(\lambda t)^{۲}}$$

است. بنابراین تابع نرخ خطر آن برابر با $h(t) = ۲\lambda t$ است که تابعی خطی از t می‌باشد. جدول ۳.۵ بعضی از خواص تابع چگالی احتمال و تابع نرخ خطر توزیع و وایبل را بر اساس پارامتر شکل β را نشان می‌دهد.

جدول ۳.۵ خواص توزیع وایبل

پارامتر β	تابع چگالي احتمال	تابع نرخ خطر
$۰ < \beta < ۱$	از منفي بي‌نهايت به صورت نمايي نزولي مي‌كند	از منفي بي‌نهايت به صورت نمايي نزول مي‌كند.
$\beta = ۱$	شروع به نزول λ به صورت نمايي از مقدار مي‌كند.	مقدار آن ثابت است.
$\beta > ۱$	ابتدا صعود كرده و سپس شروع به نزول مي‌كند.	صعودي است.
$\beta = ۲$	توزيع رايلي	به صورت خطي صعود مي‌كند.

[1] Rayleigh distribution

به سرعت صعود مي‌كند.	شكل زنگوله‌اي (نرمال) دارد.	$3 < \beta < 4$
صعودي با نرخ صعود بسيار بالا	خيلي شبيه توزيع مقدار غايي نوع اول دارد.	$\beta > 1$

در جدول ۴.۵ برخی از مشخصات توزیع وایبل را جهت دسترسی سریع‌تر ارائه می‌کنیم.

جدول ۴.۵ برخی از مشخصات توزیع وایبل

نام مشخصه	مقدار
تابع توزیع	$1 - e^{-(\lambda t)^{\beta}}$
تابع قابلیت اعتماد	$e^{-(\lambda t)^{\beta}}$
تابع چگالی احتمال	$\beta \lambda^{\beta-1} t^{\beta} e^{-(\lambda t)^{\beta}}$
تابع نرخ خطر	$\beta \lambda^{\beta-1} t^{\beta}$
میانگین	$E(T) = \lambda^{-1} \Gamma(1 + \beta^{-1})$
واریانس	$V(T) = \lambda^{-2} \left[\Gamma(1 + 2\beta^{-1}) - \Gamma^{2}(1 + \beta^{-1}) \right]$
میانه	$\lambda^{-1} (\ln 2)^{\beta^{-1}}$

قبل از آن که این بخش را به پایان برسانیم، به این نکته اشاره می‌کنیم که در توزیع وایبل می‌توان یک پارامتر مکان نیز داشت. در این حالت توزیع وایبل دارای تابع توزیعی به فرم زیر خواهد بود

$$F(t, \lambda, \beta, \theta) = 1 - e^{-(-\lambda(t-\theta))^{\beta}}, t \geq \theta, \lambda > 0, \beta > 0$$

که در آن در مطالعات طول عمر $\theta > 0$. برای یک متغیر طول عمر با چنین توزیعی مطمئن هستیم که مقادیر طول عمر از θ بیشتر است. اگر T دارای توزیع وایبل با سه پارامتر باشد آنگاه

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \Gamma(1 + \beta^{-1}) + \theta$$

و

$$V(T) = \frac{1}{\lambda^{2}} \left[\Gamma(1 + 2\beta^{-1}) - \Gamma^{2}(1 + \beta^{-1}) \right]$$

91

۳.۵ توزیع گاما

مقدمه پیچش، صفحه ۲۷۷ - ویرایش سوم کتاب مبانی احتمال دکتر همدانی:

فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل پیوسته به ترتیب با توابع چگالی f_1 و f_2 و توابع توزیع F_1 و F_2 باشند، در این صورت، g و G به ترتیب تابع چگالی و تابع توزیع متغیر تصادفی $X+Y$ عبارت است از:

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx$$

$$G(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)F_2(t-x)dx$$

فرض کنید سیستمی از n جزء تشکیل شده است که اجزای آن عملکرد مشابه دارند. عملکرد سیستم مستلزم عملکرد یکی از اجزاء است. هنگامی جزء اول از کار می‌افتد جزء دوم به صورت خودکار شروع به فعالیت می‌کند. در صورت از کار افتادگی جزء دوم، سومین جزء فعال می‌شود و الی آخر. هنگامی سیستم از کار می‌افتد که جزء nام از کار بیافتد. در این صورت اگر فرض کنیم طول عمر اجزاء به ترتیب $T_1,T_2,\dots,T_n$ است. آنگاه طول عمر سیستم، T، برابر است با

$$T=T_1+T_2+\cdots+T_n$$

چنین سیستمی "به سیستم آماده باش" با n جزء معروف است.

به ازای $n=2$ طول عمر سیستم از فرمول پیچش، توزیع طول عمر مجموعه دو متغیر تصادفی، به صورت زیر به دست می‌آید که در آن فرض می‌کنیم T_1 و T_2 مستقل‌اند با توزیع مشترک F و تابع چگالی مشترک f

$T=T_1+T_2$

$$F_2(t)=\int_0^t F(u)f(t-u)du$$

با تغییر متغیر $t-u=x$ به راحتی به $G(t)$ در مقدمه پیچش می‌رسیم.

اکنون اگر سومین جزء وارد عمل شود، با انجام یک پیچش دیگر F_3 را به دست می‌آوریم و با ادامه این روند، F_n توزیع طول عمر سیستم برای $n\geq 1$، (با $F_1=1$)، به صورت زیر به دست می‌آید.

$$F_n(t)=\int_0^t F_{n-1}(u)f(t-u)du$$

معمولاً محاسبه پیچش F_n برای توزیع‌های مختلف مانند توزیع وایبل پیچیده است و باید به طریق عددی محاسبه شود. اما اگر فرض کنیم T_iها دارای توزیع نمایی $E(\lambda)$ هستند آنگاه، F_n را به شکل بسته می‌توان به دست آورد. بدین منظور فرض کنید $n=2$ و $T_i\sim E(\lambda)$، $i=1,2$. آنگاه

$$F_2(t)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-x)}(1-e^{-\lambda x})du$$
$$=1-\lambda te^{-\lambda t}-e^{-\lambda t}$$

A: زمان انتظار برای وقوع n امین پیشامد باشد.

n: تعداد پیشامدهایی که در فاصله زمانی $[0, t]$ رخ داده اند

که تساوی اخیر از انتگرال‌گیری جزء به جزء حاصل شده است. اگر f_2 تابع چگالی احتمال متناظر با F_2 باشد آنگاه،

$$f_2(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}, t > 0, \lambda > 0$$

با ادامه این روند به ازای $n \geq 2$، تابع توزیع طول عمر سیستم، F_n، با $n-1$ جزء آماده باش برابر خواهد شد با

$$F_n(t) = \int_0^t f_2(x) f(t-x)\,dx$$

$$X \sim P(\lambda t)$$

$$F_n(t) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^i}{i!} = P(X \geq n)$$

و بنابراین قابلیت اعتماد سیستم مساوی است با

$$R_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^i}{i!}$$

سمت راست تساوی اخیر حاوی نتیجه جالبی در نظریه توزیع‌ها است. اگر X متغیر تصادفی پواسن با میانگین λt باشد، آنگاه $R_n(t)$ در واقع برابر است با

$$R_n(t) = P(X \leq n-1)$$

بخش ۴.۷ صفحه ۳۹۱-۲ ویرایش سوم کتاب مبانی احتمال دکتر قهرمانی را برای ارتباط با این مباحث ملاحظه نمایید.

با مشتق گیری از $F_n(t)$ برحسب t، تابع چگالی احتمال طول عمر سیستم به صورت زیر به دست می‌آید،

$$f_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \lambda^n e^{-\lambda t}, t > 0, \lambda > 0, n = 1, 2, \ldots, n.$$

این توزیع در متون آماری به توزیع ارلانژ[1] معروف است.

مثال ۳.۵ فرض کنید قطعه‌ای از یک دستگاه دارای توزیع نمایی با نرخ خطر $\lambda = 0/00002$ است. برای اطمینان از عملکرد دستگاه قطعه‌ای دیگر در کنار قطعه اول به صورت آماده باش قرار می‌دهیم. در زمانی که تابع توزیع قطعه مساوی ۰/۰۱ است وجود قطعه آماده باش چقدر نرخ خطر را کاهش می‌دهد؟ در مورد زمان‌هایی که تابع توزیع ۰/۱ یا ۰/۵ است چه می‌توان گفت؟

---

[1] Erlang distribution

۹۳

حل. با توجه به مقدار $\lambda = ۰/۰۰۰۰۲$، زمان مورد نظر که در آن تابع توزیع برابر ۰/۰۱ است از رابطه زیر بدست می‌آید،

$$۰/۰۱ = ۱ - e^{-۰/۰۰۰۰۲t}$$

که به راحتی مشاهده می‌شود، $t = ۵۰۲/۵$.

اگر مقدار تابع نرخ خطر سیستم را محاسبه کنیم به دست می‌آوریم،

$$\begin{aligned} h_۲(t) &= \frac{f_۲(t)}{۱ - F_۲(t)} \\ &= \frac{\lambda^۲ t e^{-\lambda t}}{\lambda t e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{\lambda^۲ t}{\lambda t + ۱} \end{aligned}$$

اگر $h_۲(t)$ را در $\lambda = ۰/۰۰۰۰۲$ و $t = ۵۰۲/۵$ محاسبه کنیم به دست می‌آوریم،

$$h_۲(۵۰۲/۵) = ۱/۹۹ \times ۱۰^{-۷}$$

که نشان می‌دهد با بودن قطعه آماده باش حدود ۱۰۰ برابر نرخ خطر کاهش پیدا می‌کند. به راحتی می‌توان نشان داد که این کاهش برای زمانی که تابع توزیع ۰/۱ یا ۰/۵ است به ترتیب حدود ۱۰ برابر و حدود ۲/۴ برابر خواهد بود.

توزیع ارلانژ، خود حالت خاص یک توزیع معروفی به نام توزیع گاما[1]، است که به دلیل انعطاف پذیری آن می‌تواند یک مدل مناسب برای انواع داده‌های طول عمر باشد. توزیع گاما (در ساده‌ترین حالت) دارای دو پارامتر مقیاس و شکل است و تابع چگالی آن به صورت زیر می‌باشد،

$$f(t,\alpha,\lambda) = \frac{۱}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} t^{\alpha-۱} e^{-\lambda t}, t > ۰, \alpha, \lambda > ۰$$

که در آن λ پارامتر مقیاس و α پارامتر شکل توزیع است و

$$\Gamma(\alpha) = \int_۰^{\infty} x^{\alpha-۱} e^{-x} dx$$

$$۰/۱ = ۱ - e^{-۲\times ۱۰^{-۵} t}$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln ۰/۹}{-۲\times۱۰^{-۵}} = ۵۲۶۸/۰۲۵$$

$$h_۲(۵۲۶۸/۰۲۵) = ۱/۹۰۶\times۱۰^{-۶}$$

$$۰/۵ = ۱ - e^{-۲\times۱۰^{-۵} t} \Rightarrow$$

$$t = \frac{\ln ۰/۵}{-۲\times۱۰^{-۵}} = ۳۴۶۵۷/۳۵$$

$$h_۲(۳۴۶۵۷/۳۵) = ۸/۱۸۷\times۱۰^{-۶}$$

---
[1] Gamma distribution

همانطور که قبلاً اشاره شد، $\Gamma(\alpha)$ به تابع گاما معروف است و با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء می‌توان نشان داد که $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$. به ویژه در حالتی که α عدد طبیعی باشد آنگاه $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$.

با توجه به رابطه $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$، کافی است برای محاسبه $\Gamma(\alpha)$، به ازای هر $\alpha>0$، مقدار $\Gamma(\alpha)$ را برای $0<\alpha<1$ داشته باشیم. جدول ۵.۵ مقادیر $\Gamma(\alpha)$ را برای بعضی مقادیر α، $0<\alpha<1$ ارائه می‌کند.

جدول ۵.۵ مقادیر $\Gamma(\alpha)$

α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$
۰/۰۱	۹۹/۴۳۲۶	۰/۲۶	۳/۴۷۸۵	۰/۵۱	۱/۷۳۸۴	۰/۷۶	۱/۲۱۲۳
۰/۰۲	۴۹/۴۴۲۲	۰/۲۷	۳/۳۴۲۶	۰/۵۲	۱/۷۰۵۸	۰/۷۷	۱/۱۹۹۷
۰/۰۳	۳۲/۷۸۵۰	۰/۲۸	۳/۲۱۶۹	۰/۵۳	۱/۶۷۴۷	۰/۷۸	۱/۱۸۷۵
۰/۰۴	۲۴/۴۶۱۰	۰/۲۹	۳/۱۰۰۱	۰/۵۴	۱/۶۴۴۸	۰/۷۹	۱/۱۷۵۷
۰/۰۵	۱۹/۴۷۰۱	۰/۳۰	۲/۹۹۱۶	۰/۵۵	۱/۶۱۶۱	۰/۸۰	۱/۱۶۴۲
۰/۰۶	۱۶/۱۴۵۷	۰/۳۱	۲/۸۹۰۳	۰/۵۶	۱/۵۸۸۶	۰/۸۱	۱/۱۵۳۲
۰/۰۷	۱۳/۷۷۳۶	۰/۳۲	۲/۷۹۵۸	۰/۵۷	۱/۵۶۲۳	۰/۸۲	۱/۱۴۲۵
۰/۰۸	۱۱/۹۹۶۶	۰/۳۳	۲/۷۰۷۲	۰/۵۸	۱/۵۳۶۹	۰/۸۳	۱/۱۳۲۲
۰/۰۹	۱۰/۶۱۶۲	۰/۳۴	۲/۶۲۴۲	۰/۵۹	۱/۵۱۲۶	۰/۸۴	۱/۱۲۲۲
۰/۱۰	۹/۵۱۳۵	۰/۳۵	۲/۵۴۶۱	۰/۶۰	۱/۴۸۹۲	۰/۸۵	۱/۱۱۲۵
۰/۱۱	۸/۶۱۲۷	۰/۳۶	۲/۴۷۲۷	۰/۶۱	۱/۴۶۶۷	۰/۸۶	۱/۱۰۳۱
۰/۱۲	۷/۸۶۳۳	۰/۳۷	۲/۴۰۳۶	۰/۶۲	۱/۴۴۵۰	۰/۸۷	۱/۰۹۴۱
۰/۱۳	۷/۲۳۰۲	۰/۳۸	۲/۳۳۸۳	۰/۶۳	۱/۴۲۴۲	۰/۸۸	۱/۰۸۵۳
۰/۱۴	۶/۶۸۸۷	۰/۳۹	۲/۲۷۶۵	۰/۶۴	۱/۴۰۴۱	۰/۸۹	۱/۰۷۶۸
۰/۱۵	۶/۶۲۰۳	۰/۴۰	۲/۲۱۸۲	۰/۶۵	۱/۳۸۴۸	۰/۹۰	۱/۰۶۸۶
۰/۱۶	۵/۸۱۱۳	۰/۴۱	۲/۱۶۲۸	۰/۶۶	۱/۳۶۶۲	۰/۹۱	۱/۰۶۰۷
۰/۱۷	۵/۴۵۱۲	۰/۴۲	۲/۱۱۰۴	۰/۶۷	۱/۳۴۸۲	۰/۹۲	۱/۰۵۳۰
۰/۱۸	۵/۱۳۱۸	۰/۴۳	۲/۰۶۰۵	۰/۶۸	۱/۳۳۰۹	۰/۹۳	۱/۰۴۵۶
۰/۱۹	۴/۸۴۶۸	۰/۴۴	۲/۰۱۳۲	۰/۶۹	۱/۳۱۴۲	۰/۹۴	۱/۰۳۸۴
۰/۲۰	۴/۵۹۰۸	۰/۴۵	۱/۹۶۸۱	۰/۷۰	۱/۲۹۸۱	۰/۹۵	۱/۰۳۱۵
۰/۲۱	۴/۳۵۹۹	۰/۴۶	۱/۹۲۵۲	۰/۷۱	۱/۲۸۲۵	۰/۹۶	۱/۰۲۴۷
۰/۲۲	۴/۱۵۰۵	۰/۴۷	۱/۸۸۴۳	۰/۷۲	۱/۲۶۷۵	۰/۹۷	۱/۰۱۸۲
۰/۲۳	۳/۹۵۹۸	۰/۴۸	۱/۸۴۵۳	۰/۷۳	۱/۲۵۳۰	۰/۹۸	۱/۰۱۱۹
۰/۲۴	۳/۷۸۵۵	۰/۴۹	۱/۸۰۸۱	۰/۷۴	۱/۲۳۹۰	۰/۹۹	۱/۰۰۵۹

۹۵ ارلانگ

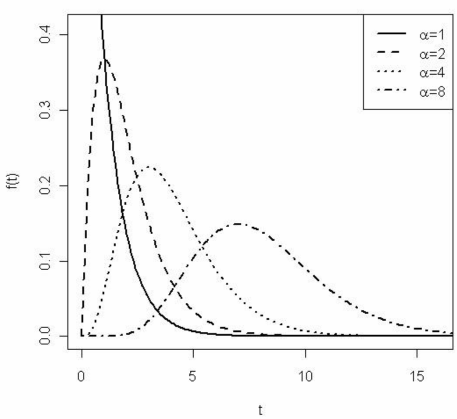
۱/۰۰۰۰	۱/۰۰	۱/۲۲۵۴	۰/۷۵	۱/۷۷۲۵	۰/۵۰	۳/۶۲۵۶	۰/۲۵

بنابراین به راحتی ملاحظه می‌شود که اگر α اعداد طبیعی را اختیار کند، توزیع [illegible] حالت خاص توزیع گاما خواهد شد. در ادامه برای آنکه نشان دهیم متغیر تصادفی T دارای توزیع گاما با پارامترهای α و λ است از علامت $T \sim G(\alpha,\lambda)$ استفاده می‌کنیم.

واضح است که اگر در توزیع گاما $\alpha = ۱$، یعنی $T \sim G(۱,\lambda)$ آنگاه T دارای توزیع نمایی با پارامتر λ است. همچنین می‌توان نشان داد که اگر $T \sim G(\alpha,\lambda)$ آنگاه میانگین و واریانس T به ترتیب برابر است با $E(T) = \alpha/\lambda$ و $V(T) = \alpha/\lambda^۲$ و در نتیجه ضریب تغییرات توزیع برابر خواهد شد با،

$$C.V = \frac{\sqrt{V(T)}}{E(T)} = \frac{۱}{\sqrt{\alpha}}$$

تابع چگالی گاما برای λ ثابت به ازای مقادیر کوچک α چوله به راست و هر چقدر مقدار α بزرگتر می‌شود شکل توزیع متقارن‌تر خواهد شد. شکل ۵.۵ تابع چگالی $G(\alpha,\lambda)$ به ازای $\lambda = ۱$ و بعضی از مقادیر α در شکل ۵.۵ آمده است.



شکل ۵.۵ نمودار تابع چگالی احتمال $G(\alpha,1)$ به ازای مقادیر مختلف α

تابع توزیع $G(\alpha,\lambda)$ برابر است با،

$$F(t,\alpha,\lambda)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{t}y^{\alpha-1}e^{-y}dy$$

انتگرال گامای ناقص

که در آن تابع انتگرال ارائه شده به تابع گاما ناقص معروف است که برای محاسبه آن از روش‌های عددی استفاده می‌شود و در متون آماری جداولی نیز برای آن ارائه شده است. به ویژه اگر α عدد طبیعی باشد برای محاسبه $F(t,\alpha,\lambda)$ می‌توان از جداول توزیع پواسن استفاده کرد.

همانطور که اشاره شد توزیع گاما می‌تواند به عنوان مدل مناسبی برای انواع داده‌های طول عمر به کار برود. صحت این ادعا در قضیه زیر نشان داده می‌شود.

قضیه ۱۱.۵ اگر $h(t)$ تابع نرخ خطر $G(\alpha,\lambda)$ باشد آنگاه

الف) برای $\alpha>1$، $h(t)$ تابعی صعودی از زمان است.

ب) برای $\alpha=1$، $h(t)$ ثابت است.

ج) برای $0<\alpha<1$، $h(t)$ تابعی نزولی از زمان است.

اثبات.

داریم

$$h(t)=\frac{t^{\alpha-1}e^{-\lambda t}}{\int_{t}^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx}$$

بنابراین

$$\left(h(t)\right)^{-1}=\int_{t}^{\infty}\left(\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}e^{-\lambda(x-t)}dx$$

با تغییر متغیر $x-t=u$،

$$=\int_{0}^{\infty}\left(1+\frac{u}{t}\right)^{\alpha-1}e^{-\lambda u}du$$

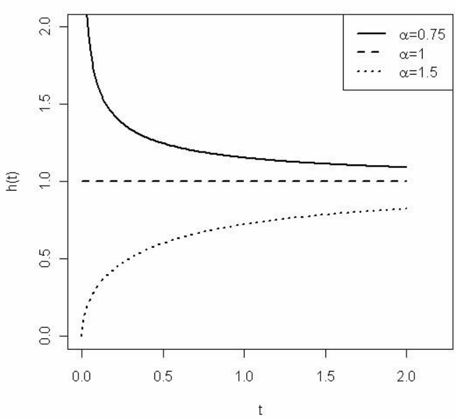
۹۷

بنابراین رفتار $(h(t))^{-1}$ (و در نتیجه رفتار $h(t)$) به رفتار تابع $\varphi(t)=\left(1+\frac{u}{t}\right)^{\alpha-1}$ در زیر انتگرال بستگی دارد. اگر $\alpha>1$، $\varphi(t)$ برحسب t نزولی و در نتیجه $h(t)$ تابعی صعودی از t است. اگر $\alpha=1$، $\varphi(t)$ ثابت و لذا $h(t)$ ثابت است و اگر $0<\alpha<1$، $\varphi(t)$ تابعی صعودی از t و در نتیجه $h(t)$ تابعی نزولی از t است. ■

$$\varphi'(t)=\frac{-(\alpha-1)u}{t^2}\left(1+\frac{u}{t}\right)^{\alpha-2}$$

$$\begin{cases}\alpha>1 \rightarrow \varphi'(t)<0 \rightarrow \text{صعودی } h(t)\\ \alpha=1 \rightarrow \varphi'(t)=0 \rightarrow \text{ثابت } h(t)\\ 0<\alpha<1 \rightarrow \varphi'(t)>0 \rightarrow \text{نزولی } h(t)\end{cases}$$

نمودار $h(t)$ به ازای $\lambda=1$ و مقادیر مختلف α در شکل ۶.۵ آمده است.



شکل ۶.۵ نمودار $h(t)$ به ازای $\lambda=1$ و مقادیر مختلف α

یکی دیگر از حالات خاص توزیع گاما را معرفی می‌کنیم که به توزیع کای دو[1] معروف است و نقش مهمی در تحلیل داده‌ها در بسیاری از شاخه‌های آمار دارد. اگر در توزیع گاما قرار دهیم $\alpha=\frac{n}{2}$، $n=1,2,\ldots$ و $\lambda=\frac{1}{2}$ توزیع $G\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)$ را توزیع کای دو با n درجه آزادی گویند که تابع چگالی احتمال آن برابر است با،

$$f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)2^{\frac{n}{2}}}t^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{t}{2}}, t>0, n=1,2,\ldots$$

جدول ۶.۵ فرمول‌ها و بعضی از خواص توزیع $G(\alpha,\lambda)$ را به طور خلاصه ارائه می‌کند.

---

[1] Chi-square distribution

جدول ۶.۵ فرمول‌ها و بعضی از خواص توزیع $G(\alpha,\lambda)$

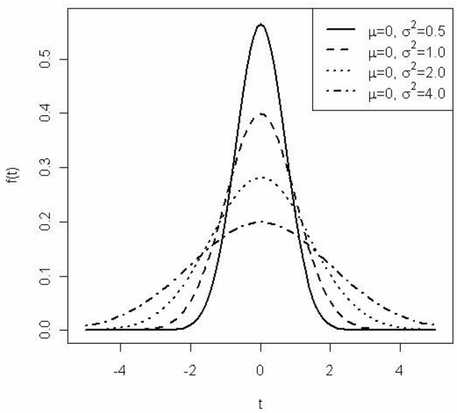
نام	فرمول یا خاصیت
تابع چگالی	$f(t,\alpha,\lambda)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha}t^{\alpha-1}e^{-\lambda t}, t>0, \alpha,\lambda>0$
تابع توزیع	$F(t,\alpha,\lambda)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{t\lambda} y^{\alpha-1}e^{-y}dy$
تابع قابلیت اعتماد	$R(t,\alpha,\lambda)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t\lambda}^{\infty} y^{\alpha-1}e^{-y}dy$
تابع نرخ خطر	$h(t)=\frac{f(t)}{R(t)}$ برای $\alpha>1$، برحسب t صعودی برای $\alpha=1$، برحسب t ثابت برای $0<\alpha<1$، برحسب t نزولی
$\alpha>1$	پارامتر شکل توزیع، اگر α کوچک باشد شکل توزیع چوله، α بزرگ باشد توزیع متقارن است.
عدد طبیعی $=\alpha$	توزیع گاما به توزیع ارلانژ تبدیل می‌شود. در این حالت توزیع گاما مجموع α متغیر تصادفی مستقل نمایی است.
میانگین	$\frac{\alpha}{\lambda}$
واریانس	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$

۴.۵ توزیع نرمال

متغیر تصادفی T دارای توزیع نرمال است اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد،

$$f(t,\mu,\sigma)=\frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{(t-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}},-\infty<t<+\infty$$

که در آن $\mu\in(-\infty,+\infty)$ پارمتر مکان و $\sigma>۰$ پارامتر مقیاس توزیع است. از نماد $T\sim N(\mu,\sigma^۲)$ استفاده می‌کنیم برای آن که نشان دهیم T دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و $\sigma^۲$ است. اگر $T\sim N(\mu,\sigma^۲)$ آنگاه $E(T)=\mu$ و $V(T)=\sigma^۲$. تابع چگالی $N(\mu,\sigma^۲)$ حول μ متقارن است و پارامتر σ میزان تخت یا قله بودن نمودار چگالی احتمال را کنترل می‌کند. شکل ۷.۵ نمودار تابع چگالی احتمال توزیع نرمال را به ازای مقادیر مختلف σ و μ ثابت نشان می‌دهد.



شکل ۷.۵ تابع چگالی احتمال $N(\mu,\sigma^۲)$ به ازای $\mu=۰$ و مقادیر مختلف σ

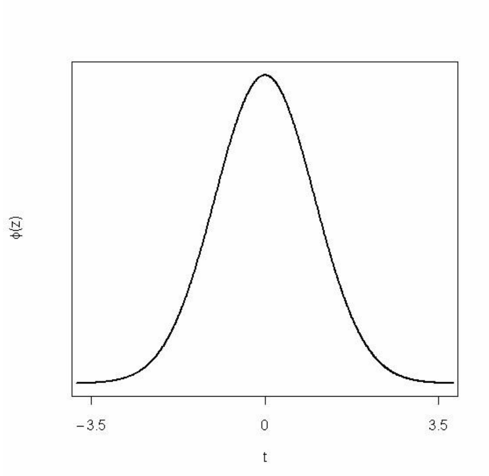
در حالتی که $\mu=۰$ و $\sigma=۱$ توزیع نرمال را نرمال استاندارد می‌گویند. در این حالت تابع چگالی احتمال $N(۰,۱)$ را که با $\varphi(z)$ نمایش می‌دهیم برابر است با،

$$\varphi(z)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{z^۲}{۲}},-\infty<z<+\infty$$

و تابع توزیع آن را که با $\Phi(z)$ نمایش می‌دهیم مساوی است با،

$$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{x^۲}{۲}}dx$$

نمودار تابع چگالی نرمال استاندارد در شکل ۸.۵ آمده است.



شکل ۸.۵ تابع چگالی احتمال نرمال استاندارد

برای متغیر نرمال استاندارد مقادیر احتمال بیشتر از ۳/۵ و ۳/۵- قابل چشم پوشی هستند و بنابراین تقریباً تمام جرم احتمال در فاصله (۳/۵ , ۳/۵-) قرار دارد.
همچنین به راحتی می‌توان نشان داد که صدک $۱۰۰p$ ام توزیع نرال استاندارد برابر است با،

$$t_p = \mu + z_p \sigma$$

اگر $T \sim N(\mu, \sigma^۲)$ آنگاه با تبدیل $Z = \frac{T-\mu}{\sigma}$ می‌توان آن را به نرمال استاندارد تبدیل کرد. بنابراین تابع توزیع و تابع قابلیت اعتماد T به ترتیب برابر خواهد شد با،

$$F(t, \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

و

$$R(t, \mu, \sigma) = ۱ - \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

بنابراین هر عبارت احتمالی در مورد T را می‌توان برحسب Z نوشت. و لذا کافی است بتوان تابع توزیع Z را محاسبه کرد. تابع توزیع Z به صورت بسته قابل محاسبه نیست. با استفاده از روش‌های عددی توزیع $N(۰,۱)$ به ازای مقادیر مختلف در فاصله (۳/۵ , ۳/۵−) محاسبه شده است. جدول ۷.۵ تابع توزیع $\Phi(z)$ را برای مقادیر مختلف z در فاصله (۳/۵ , ۰) ارائه می‌کند. برای مقادیر منفی z از تقارن توزیع می‌توان از رابطه $\Phi(-z)=۱-\Phi(z)$ استفاده کرد.

٪۲.۵ × ۷۵

مثال ۴.۵ یک مدار الکتریکی شامل سه مقاومت است که به صورت متوالی به هم متصل شده‌اند فرض کنید میزان مقاومت الکتریکی این سه نوع مقاومت برحسب اهم دارای توزیع نرمال باشند به طوریکه $R_۱ \sim N(۱۰,۰/۰۹)$ و $R_۲ \sim N(۱۵,۰/۲۵)$ و $R_۳ \sim N(۵۰,۳/۲۴)$. چقدر احتمال دارد که میزان کل مقاومت مدار در فاصله [illegible] $۷۵\pm$ قرار گیرد.

حل. میزان کل مقاومت سیستم، $R_۰$، برابر است با $R_۰ = R_۱ + R_۲ + R_۳$. این واقعیت مهم در مورد توزیع نرمال وجود دارد که با فرض استقلال ، مجموع متغیرهای تصادفی نرمال دارای توزیع نرمال است. بنابراین $R_۰$ دارای توزیع نرمال است با میانگین،

$$\begin{aligned} E(R_۰) &= E(R_۱)+E(R_۲)+E(R_۳) \\ &= ۷۵ \end{aligned}$$

و واریانس،

$$\begin{aligned} V(R_۰) &= V(R_۱)+V(R_۲)+V(R_۳) \\ &= ۰/۲۵+۰/۹+۳/۲۴ \\ &= ۳/۵۸ \end{aligned}$$

بنابراین احتمال مطلوب برابر است با،

$$\begin{aligned} P(۷۱/۲۵ < R_۰ < ۷۸/۷۵) &= \Phi\left(\frac{۷۸/۷۵-۷۵}{۱/۸۹}\right)-\Phi\left(\frac{۷۱/۲۵-۷۵}{۱/۸۹}\right) \\ &= ۰/۹۷۶-۰/۰۲۴ \\ &= ۰/۹۵۲ \end{aligned}$$

جدول ۷.۵ $\Phi(z)$ برای مقادیر مختلف z در فاصله (۳/۵ , ۰)

z	۰/۰۰	۰/۰۱	۰/۰۲	۰/۰۳	۰/۰۴	۰/۰۵	۰/۰۶	۰/۰۷	۰/۰۸	۰/۰۹
۰/۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۴۰	۰/۵۰۸۰	۰/۵۱۲۰	۰/۵۱۶۰	۰/۵۱۹۹	۰/۵۲۳۹	۰/۵۲۷۹	۰/۵۳۱۹	۰/۵۳۵۹
۰/۱	۰/۵۳۹۸	۰/۵۴۳۸	۰/۵۴۷۸	۰/۵۵۱۷	۰/۵۵۵۷	۰/۵۵۹۶	۰/۵۶۳۶	۰/۵۶۷۵	۰/۵۷۱۴	۰/۵۷۵۳
۰/۲	۰/۵۷۹۳	۰/۵۸۳۲	۰/۵۸۷۱	۰/۵۹۱۰	۰/۵۹۴۸	۰/۵۹۸۷	۰/۶۰۲۶	۰/۶۰۶۴	۰/۶۱۰۳	۰/۶۱۴۱
۰/۳	۰/۶۱۷۹	۰/۶۲۱۷	۰/۶۲۵۵	۰/۶۲۹۳	۰/۶۳۳۱	۰/۶۳۶۸	۰/۶۴۰۶	۰/۶۴۴۳	۰/۶۴۸۰	۰/۶۵۱۷
۰/۴	۰/۶۵۵۴	۰/۶۵۹۱	۰/۶۶۲۸	۰/۶۶۶۴	۰/۶۷۰۰	۰/۶۷۳۶	۰/۶۷۷۲	۰/۶۸۰۸	۰/۶۸۴۴	۰/۶۸۷۹
۰/۵	۰/۶۹۱۵	۰/۶۹۵۰	۰/۶۹۸۵	۰/۷۰۱۹	۰/۷۰۵۴	۰/۷۰۸۸	۰/۷۱۲۳	۰/۷۱۵۷	۰/۷۱۹۰	۰/۷۲۲۴
۰/۶	۰/۷۲۵۷	۰/۷۲۹۱	۰/۷۳۲۴	۰/۷۳۵۷	۰/۷۳۸۹	۰/۷۴۲۲	۰/۷۴۵۴	۰/۷۴۸۶	۰/۷۵۱۷	۰/۷۵۴۹
۰/۷	۰/۷۵۸۰	۰/۷۶۱۱	۰/۷۶۴۲	۰/۷۶۷۳	۰/۷۷۰۴	۰/۷۷۳۴	۰/۷۷۶۴	۰/۷۷۹۴	۰/۷۸۲۳	۰/۷۸۵۲
۰/۸	۰/۷۸۸۱	۰/۷۹۱۰	۰/۷۹۳۹	۰/۷۹۶۷	۰/۷۹۹۵	۰/۸۰۲۳	۰/۸۰۵۱	۰/۸۰۷۸	۰/۸۱۰۶	۰/۸۱۳۳
۰/۹	۰/۸۱۵۹	۰/۸۱۸۶	۰/۸۲۱۲	۰/۸۲۳۸	۰/۸۲۶۴	۰/۸۲۸۹	۰/۸۳۱۵	۰/۸۳۴۰	۰/۸۳۶۵	۰/۸۳۸۹
۱/۰	۰/۸۱۵۹	۰/۸۴۳۸	۰/۸۴۶۱	۰/۸۴۸۵	۰/۸۵۰۸	۰/۸۵۳۱	۰/۸۵۵۴	۰/۸۵۷۷	۰/۸۵۹۹	۰/۸۶۲۱
۱/۱	۰/۸۶۴۳	۰/۸۶۶۵	۰/۸۶۸۶	۰/۸۷۰۸	۰/۸۷۲۹	۰/۸۷۴۹	۰/۸۷۷۰	۰/۸۷۹۰	۰/۸۸۱۰	۰/۸۸۳۰
۱/۲	۰/۸۸۴۹	۰/۸۸۶۹	۰/۸۸۸۸	۰/۸۹۰۷	۰/۸۹۲۵	۰/۸۹۴۴	۰/۸۹۶۲	۰/۸۹۸۰	۰/۸۹۹۷	۰/۹۰۱۵
۱/۳	۰/۹۰۳۲	۰/۹۰۴۹	۰/۹۰۶۶	۰/۹۰۸۲	۰/۹۰۹۹	۰/۹۱۱۵	۰/۹۱۳۱	۰/۹۱۴۷	۰/۹۱۶۲	۰/۹۱۷۷
۱/۴	۰/۹۱۹۲	۰/۹۲۰۷	۰/۹۲۲۲	۰/۹۲۳۶	۰/۹۲۵۱	۰/۹۲۶۵	۰/۹۲۷۹	۰/۹۲۹۲	۰/۹۳۰۶	۰/۹۳۱۹
۱/۵	۰/۹۳۳۲	۰/۹۳۴۵	۰/۹۳۵۷	۰/۹۳۷۰	۰/۹۳۸۲	۰/۹۳۹۴	۰/۹۴۰۶	۰/۹۴۱۸	۰/۹۴۲۹	۰/۹۴۴۱
۱/۶	۰/۹۴۵۲	۰/۹۴۶۳	۰/۹۴۷۴	۰/۹۴۸۴	۰/۹۴۹۵	۰/۹۵۰۵	۰/۹۵۱۵	۰/۹۵۲۵	۰/۹۵۳۵	۰/۹۵۴۵
۱/۷	۰/۹۵۵۴	۰/۹۵۶۴	۰/۹۵۷۳	۰/۹۵۸۲	۰/۹۵۹۱	۰/۹۵۹۹	۰/۹۶۰۸	۰/۹۶۱۶	۰/۹۶۲۵	۰/۹۶۳۳
۱/۸	۰/۹۶۴۱	۰/۹۶۴۹	۰/۹۶۵۶	۰/۹۶۶۴	۰/۹۶۷۱	۰/۹۶۷۸	۰/۹۶۸۶	۰/۹۶۹۳	۰/۹۶۹۹	۰/۹۷۰۶
۱/۹	۰/۹۷۱۳	۰/۹۷۱۹	۰/۹۷۲۶	۰/۹۷۳۲	۰/۹۷۳۸	۰/۹۷۴۴	۰/۹۷۵۰	۰/۹۷۵۶	۰/۹۷۶۱	۰/۹۷۶۷
۲/۰	۰/۹۷۷۲	۰/۹۷۷۸	۰/۹۷۸۳	۰/۹۷۸۸	۰/۹۷۹۳	۰/۹۷۹۸	۰/۹۸۰۳	۰/۹۸۰۸	۰/۹۸۱۲	۰/۹۸۱۷
۲/۱	۰/۹۸۲۱	۰/۹۸۲۶	۰/۹۸۳۰	۰/۹۸۳۴	۰/۹۳۳۸	۰/۹۸۴۲	۰/۹۸۴۶	۰/۹۸۵۰	۰/۹۸۵۴	۰/۹۸۵۷
۲/۲	۰/۹۸۶۱	۰/۹۸۶۴	۰/۹۸۶۸	۰/۹۸۷۱	۰/۹۸۷۵	۰/۹۸۷۸	۰/۹۸۸۱	۰/۹۸۸۴	۰/۹۸۸۷	۰/۹۸۹۰
۲/۳	۰/۹۸۹۳	۰/۹۸۹۶	۰/۹۸۹۸	۰/۹۹۰۱	۰/۹۹۰۴	۰/۹۹۰۶	۰/۹۹۰۹	۰/۹۹۱۱	۰/۹۹۱۳	۰/۹۹۱۶
۲/۴	۰/۹۹۱۸	۰/۹۹۲۰	۰/۹۹۲۲	۰/۹۹۲۵	۰/۹۹۲۷	۰/۹۹۲۹	۰/۹۹۳۱	۰/۹۹۳۲	۰/۹۹۳۴	۰/۹۹۳۶
۲/۵	۰/۹۹۳۸	۰/۹۹۴۰	۰/۹۹۴۱	۰/۹۹۴۳	۰/۹۹۴۵	۰/۹۹۴۶	۰/۹۹۴۸	۰/۹۹۴۹	۰/۹۹۵۱	۰/۹۹۵۲
۲/۶	۰/۹۹۵۳	۰/۹۹۵۵	۰/۹۹۵۶	۰/۹۹۵۷	۰/۹۹۵۹	۰/۹۹۶۰	۰/۹۹۶۱	۰/۹۹۶۲	۰/۹۹۶۳	۰/۹۹۶۴
۲/۷	۰/۹۹۶۵	۰/۹۹۶۶	۰/۹۹۶۷	۰/۹۹۶۸	۰/۹۹۶۹	۰/۹۹۷۰	۰/۹۹۷۱	۰/۹۹۷۲	۰/۹۹۷۳	۰/۹۹۷۴
۲/۸	۰/۹۹۷۴	۰/۹۹۷۵	۰/۹۹۷۶	۰/۹۹۷۷	۰/۹۹۷۷	۰/۹۹۷۸	۰/۹۹۷۹	۰/۹۹۷۹	۰/۹۹۸۰	۰/۹۹۸۱
۲/۹	۰/۹۹۸۱	۰/۹۹۸۲	۰/۹۹۸۲	۰/۹۹۸۳	۰/۹۹۸۴	۰/۹۹۸۴	۰/۹۹۸۵	۰/۹۹۸۵	۰/۹۹۸۶	۰/۹۹۸۶
۳/۰	۰/۹۹۸۷	۰/۹۹۸۷	۰/۹۹۸۷	۰/۹۹۸۸	۰/۹۹۸۸	۰/۹۹۸۹	۰/۹۹۸۹	۰/۹۹۸۹	۰/۹۹۹۰	۰/۹۹۹۰
۳/۱	۰/۹۹۹۰	۰/۹۹۹۱	۰/۹۹۹۱	۰/۹۹۹۱	۰/۹۹۹۲	۰/۹۹۹۲	۰/۹۹۹۲	۰/۹۹۹۲	۰/۹۹۹۳	۰/۹۹۹۳
۳/۲	۰/۹۹۹۳	۰/۹۹۹۳	۰/۹۹۹۴	۰/۹۹۹۴	۰/۹۹۹۴	۰/۹۹۹۴	۰/۹۹۹۴	۰/۹۹۹۵	۰/۹۹۹۵	۰/۹۹۹۵
۳/۳	۰/۹۹۹۵	۰/۹۹۹۵	۰/۹۹۹۵	۰/۹۹۹۶	۰/۹۹۹۶	۰/۹۹۹۶	۰/۹۹۹۶	۰/۹۹۹۶	۰/۹۹۹۶	۰/۹۹۹۷
۳/۴	۰/۹۹۹۷	۰/۹۹۹۷	۰/۹۹۹۷	۰/۹۹۹۷	۰/۹۹۹۷	۰/۹۹۹۷	۰/۹۹۹۷	۰/۹۹۹۷	۰/۹۹۹۷	۰/۹۹۹۸
۳/۵	۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۸

توزیع نرمال به شکل معمول آن به دو دلیل زیر نمی‌تواند به عنوان یک مدل طول عمر مورد استفاده قرار گیرد. یکی اینکه متغیر تصادفی نرمال مقادیر منفی را نیز احتیار می‌کند در حالی که

۱۰۳ برش (Truncation) در متغیرهای تصادفی:

متغیرهای طول عمر نامنفی‌اند. اما اگر $\mu > ۳۵$ آنگاه دم منفی توزیع نرمال قابل چشم پوشی است و لذا [illegible] مقدار ثابت a، ثابت نرمال ساز است و باعث می‌شود که $f(t,\mu,\sigma)$ برای $t > ۰$ یک چگالی احتمال شود. اگر مقدار μ خیلی بزرگتر از ۳۵ شود آنگاه a مقداری نزدیک به ۱ خواهد داشت و در نتیجه $f(t,\mu,\sigma)$ همان توزیع معمولی نرمال خواهد شد. تابع قابلیت اعتماد در این حالت برابر است با،

$$R(t,\mu,\sigma)=\frac{۱-\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)}{a},\ t>۰$$

تابع چگالی $f(x)$، تابع توزیع $F(x)$

$$\begin{cases} X\mid X<t_1 \sim \dfrac{f(x)}{F(t_1)} & \text{برش راست} \\ X\mid X>t_2 \sim \dfrac{f(x)}{1-F(t_2)} & \text{برش چپ} \\ X\mid t_3<X<t_4 \sim \dfrac{f(x)}{F(t_4)-F(t_3)} \end{cases}$$

و در نتیجه تابع نرخ خطر توزیع نرمال بی‌سر مساوی خواهد شد،

$$h(t)=\frac{e^{-\frac{(t-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}}}{\sigma\sqrt{۲\pi}\left[۱-\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\right]},\ t>۰$$

ثابت نرمال ساز صورت و مخرج باهم ساده شده

قضیه زیر نشان می‌دهد که $h(t)$ تابعی صعودی از t است.

قضیه ۱۲.۵ توزیع نرمال بی‌سر شده یک توزیع IFR است.

اثبات.

برای اثبات این قضیه از این واقعیت استفاده می‌کنیم اگر توزیع احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته دارای چگالی احتمالی باشد که لگاریتم آن مقعر است، آنگاه آن توزیع IFR است. (برای اثبات به بارلو و پروشان (۱۹۸۱) مراجعه کنید). داریم

اگر $X\sim N(\mu,\sigma^2)$،

$$\log f(t,\mu,\sigma)=-\log(a\sigma\sqrt{۲\pi})-\frac{(t-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}$$

$$X\mid X>x_0 \sim \frac{f(x)}{P(X>x_0)};\ x>x_0$$

به راحتی ملاحظه می‌شود که سمت راست این تساوی یک تابع مقعر در فاصله $[۰,\infty)$ است و در نتیجه با توجه به مطالب فوق توزیع نرمال بی‌سر شده یک توزیع IFR است. ■

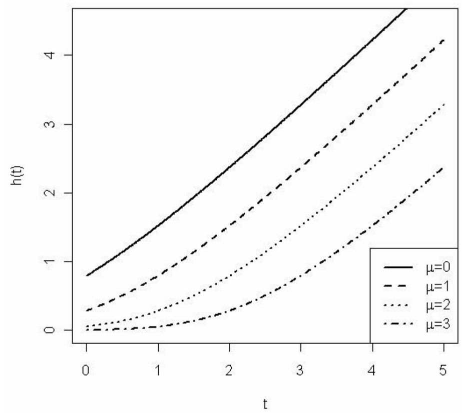
شکل ۹.۵ نمودار تابع نرخ خطر $h(t)$ را به ازای مقادیر مختلف μ نشان می‌دهد.

$$f(t)=\frac{\varphi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma\left(1-\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\right)};\ t>0$$

نرمال بریده شده چپ

تابع f مقعر (کاو): $\dfrac{\partial^2 \log f(x)}{\partial x^2}=-1/\sigma^2<0$

تذکر: مشتق دوم تابع مقعر (کاو) همواره منفی $\left(f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\geq \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)\right)$ و مشتق دوم تابع محدب (کوژ) همواره نامنفی است $\left(f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leq \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)\right)$.



شکل ۹.۵ تابع نرخ خطر توزیع نرمال به ازای مقادیر مختلف μ

۵.۵ توزیع لُگ‌نرمال

یکی دیگر از توزیع‌های مهم در قابلیت اعتماد توزیع لگ نرمال[1] است. متغیر تصادفی T دارای توزیع لُگ نرمال است و با نماد $T \sim LN(\mu,\sigma^۲)$ نمایش می‌دهیم اگر $Y=\ln T$ دارای توزیع نرمال باشد. بنابراین تابع توزیع $LN(\mu,\sigma^۲)$ برابر است با،

$$F(t,\mu,\sigma)=\Phi\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right), t>۰, \mu\in(-\infty,+\infty), \sigma>۰$$

$$F(t;\mu,\sigma)=\int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,x\sigma}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

در نتیجه تابع چگالی $LN(\mu,\sigma^۲)$ عبارت است از،

$$f(t,\mu,\sigma)=\frac{۱}{\sigma t\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{(\ln t-\mu)^2}{۲\sigma^۲}}, t>۰$$

$$=\int_{-\infty}^{\ln t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}du$$

توزیع لگ نرمال کاربردهای وسیعی در قابلیت اعتماد، مقاومت مواد به طور کلی پدیده‌های تصادفی که توزیع احتمال آن‌ها دارای چولگی زیاد است دارد.

$$=\int_{-\infty}^{\frac{\ln t-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}du=\Phi\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)$$

[1] Log-normal distribution

۱۰۵

$T \sim LN(\mu, \sigma^2)$

$\Rightarrow y = \ln T \sim N(\mu, \sigma^2)$

اگرچه μ و σ همان پارامترهای توزیع نرمال هستند. اما بر خلاف توزیع نرمال، پارامتر μ میانگین و پارامتر $\sigma^۲$ واریانس توزیع نیست. می‌توان نشان داد که میانگین و واریانس توزیع $LN(\mu,\sigma^۲)$ به ترتیب برابرند با

$$E(T) = e^{\left(\mu + \frac{۱}{۲}\sigma^۲\right)}$$

$E(T) = E(e^y) = e^{\mu + \sigma^2/2}$

تابع مولد گشتاور توزیع نرمال با $t=1$

و

$$V(T) = e^{\left(۲\mu + \sigma^۲\right)}\left(e^{\sigma^۲} - ۱\right)$$

$ET^2 = E(e^{2y}) = e^{2\mu + 2\sigma^2}$

تابع مولد گشتاور توزیع نرمال با $t=2$

$\Rightarrow Var(T) = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2}$

(صحت درستی روابط اخیر به دانشجو واگذار می‌شود.)

در نتیجه ضریب تغییرات توزیع برابر خواهد شد با،

$$C.V. = \frac{\sqrt{V(T)}}{E(T)}$$

$= \sqrt{\frac{e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2}}{e^{\mu+\sigma^2}}}$

$$= \left(e^{\sigma^۲} - ۱\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\simeq \sigma$$

برای $\sigma < ۰/۵$،

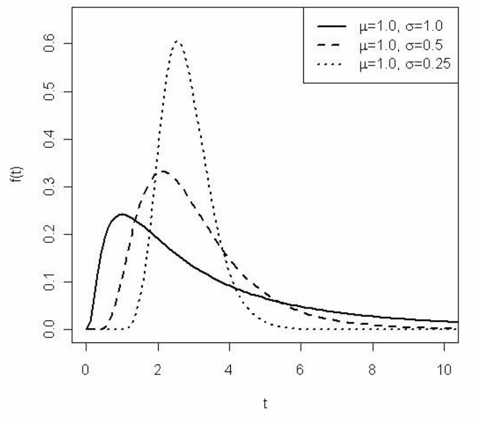
در توزیع $LN(\mu,\sigma^۲)$ اگر $\sigma \geq ۱$ آنگاه درصد خرابی‌ها در ابتدای بازه زمان زیاد است و سپس با گذشت زمان شروع به کاهش می‌کند. مقادیر کم σ، $(\sigma \leq ۰/۵)$، نشان‌دهنده افزایش نرخ شکست با گذشت زمان است و توزیع شبیه توزیع نرمال خواهد بود. برای مقادیر σ نزدیک به ۱ تابع نرخ خطر به صورت تقریباً یکنواخت عمل می‌کند.

جدول ۸.۵ مقدار ضریب تغییرات را به ازای مقادیر مختلف σ نشان می‌دهد.

جدول ۷.۵ ضریب تغییرات توزیع لگ نرمال

σ	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲	۰/۲۵	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷
$C.V.$	۰/۱	۰/۱۵۱	۰/۲۰۲	۰/۲۵۴	۰/۳۰۷	۰/۴۱۶	۰/۵۳۳	۰/۶۵۸	۰/۷۹۵

شکل ۱۰.۵ نمودار تابع چگالی لگ نرمال را به ازای $\mu = ۱$ و مقادیر مختلف σ نشان می‌دهد.



شکل ۱۰.۵ نمودار چگالی $LN(\mu,\sigma^{۲})$ برای $\mu=۱$ و مقادیر مختلف σ

می‌توان نشان داد صدک $۱۰۰p$ام توزیع برابر است با،

$$t_p = e^{(\mu+z_p\sigma)}$$

که در آن z_p صدک $۱۰۰p$ام توزیع نرمال استاندارد است. بنابراین با توجه به اینکه در توزیع نرمال استاندارد $z_{۰/۵}=۰$ میانه توزیع لگ نرمال برابر است با،

$$t_{۰/۵} = e^{\mu}$$

جدول ۸.۵ مقدار میانگین، واریانس و میانه توزیع $LN(\mu,\sigma^{۲})$ را به ازای مقادیر مختلف μ و σ ارائه می‌کند.

جدول ۸.۵ میانگین، واریانس و میانه توزیع لگ نرمال به ازای مقادیر مختلف μ و σ

	$\sigma=۰/۵$		$\sigma=۱$		$\sigma=۲$	
	$\mu=۰$	$\mu=۱$	$\mu=۰$	$\mu=۱$	$\mu=۰$	$\mu=۱$
میانگین	۱/۱۳	۳/۰۸	۱/۶۵	۴/۴۸	۷/۳۹	۲۰/۰۹
واریانس	۰/۳۶	۲/۶۹	۴/۶۷	۳۴/۵۱	۲۹۲۶/۳۶	۲۱۶۲۳/۰۴
میانه	۱/۰۰	۲/۷۲	۱/۰۰	۲/۷۲	۱/۰۰	۲/۷۲

اگر $h(t)$ تابع نرخ خطر توزیع لگ نرمال باشد، آنگاه

$$h(t) = \frac{\varphi}{\sigma t\left[۱-\Phi\right]} = \frac{\exp\left\{-\frac{۱}{۲}\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)^{۲}\right\}}{\sqrt{۲\pi\sigma^{۲}}\, t\left[۱-\Phi\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)\right]}$$

$$\lim_{t\to ۰} h(t) \le \lim_{t\to ۰} \frac{\exp\left\{-\frac{(\ln t-\mu)^{۲}}{۲\sigma^{۲}}\right\}}{۱-\cancel{\Phi\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)}} = \frac{۰}{۱} = ۰$$

$$\lim_{t\to\infty} h(t) \le \lim \frac{\exp\left\{-\frac{(\ln t-\mu)^{۲}}{۲\sigma^{۲}}\right\}}{۱-\Phi\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)} \propto \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln t-\mu)}{t}$$

هوپیتال

لـــ مشتق گیری جدا از صورت و مخرج نسبت به t

۱۰۷

که در آن φ و Φ به ترتیب تابع چگالی و تابع توزیع نرمال هستند که آرگومان آن‌ها $\frac{\ln t-\mu}{\sigma}$ است. با یک بررسی نه چندان پیچیده می‌توان نشان داد که $h(t)\to 0$ هنگامی که $t\to 0$ و $t\to\infty$. بنابراین توزیع $LN(\mu,\sigma^2)$ یک توزیع IFR یا DFR نیست. می‌توان نشان داد که تابع $h(t)$ دارای یک ماکزیمم t^* است که از معاده مشتق زیر به دست می‌آید،

$= \lim_{t\to\infty} 1/t = 0$

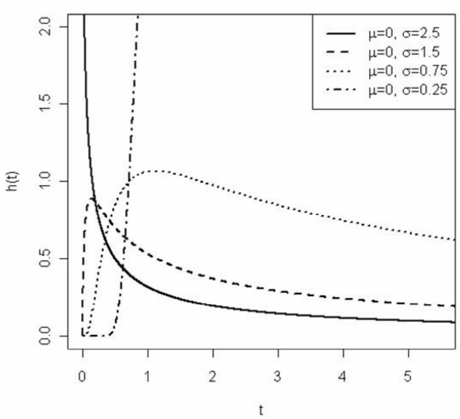
در بالا اثبات شد

$$\frac{\ln t-\mu}{\sigma}+\sigma-\frac{\varphi}{1-\Phi}=0$$

با مشتق‌گیری از $\ln h(t)$ نسبت به t و مساوی صفر قرار دادن آن

قبل از مقدار t^* تابع $h(t)$ صعودی و بعد از t^* تابع $h(t)$ نزولی است. مقدار مقدار t^* را به فرم بسته نمی‌توان تعیین کرد و برای محاسبه کردن آن باید از روش‌های عددی استفاده کرد. شکل ۱۱.۵ نمودار تابع نرخ خطر توزیع $LN(\mu,\sigma^2)$ را به ازای مقدار $\mu=0$ و مقادیر مختلف σ نشان می‌دهد.

با توجه به رفتار تابع نرخ خطر $h(t)$، بدیهی است که توزیع لگ نرمال به عنوان یک مدل طول عمر هنگامی مفید واقع می‌شود که به مقادیر بزرگ t علاقه‌مند نیستیم. به عبارت دیگر مدل لگ نرمال برای سیستم‌هایی که طول عمر آن‌ها در یک فاصله محدود از زمان قرار می‌گیرد و یعنی بر اثر نقص یا فرسودگی از کار می‌افتند مدلی مناسب خواهد بود. به عنوان مثال تعداد کیلومترهایی که یک اتومبیل قبل از اولین خرابی کار می‌کند می‌تواند با توزیع لگ نرمال مدل سازی شود. مثال زیر را در نظر بگیرید.



شکل ۱۱.۵ نمودار تابع نرخ خطر توزیع $LN(\mu,\sigma^2)$ برای $\mu=0$ و مقادیر مختلف σ

مثال ۵.۵ یک شرکت تولید کننده اتومبیل محصولات خود را به مدت ۳۶ ماه یا ۳۶ هزار کیلومتر، هر کدام زودتر اتفاق بیافتد، گارانتی می‌کند. مسافتی که هر خودرو برحسب ماه کار می‌کند یک متغیر تصادفی T است که دارای توزیع لگ نرمال با پارامتر $\mu = ۶/۵ + \ln t$ و پارامتر $\sigma = ۰/۶۸$ است که در آن t تعداد ماه‌هایی است که خودرو مورد استفاده قرار می‌گیرد. درصد خودروهایی که ۳۶ هزار کیلومتر را در ۳۶ ماه طی می‌کنند چقدر است؟

حل. داریم

$$P(T > ۳۶۰۰۰) = ۱ - \Phi\left[\frac{\ln(۳۶۰۰۰) - ۶/۵ - \ln(۳۶)}{۰/۶۸}\right]$$
$$= ۰/۴۳۷$$

بنابراین، در آخر زمان گارانتی، ۴۳/۷٪ از اتومبیل‌ها دوره گارانتی را بدون نقص می‌گذرانند. جدول ۹.۵ خلاصه نتایج مربوط به توزیع لگ نرمال را ارائه می‌کند.

جدول ۹.۵ خلاصه نتایج مربوط به توزیع نرمال

نام	فرمول یا خاصیت
تابع چگالی احتمال	$f(t,\mu,\sigma) = \frac{۱}{\sigma t\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\ln t-\mu)}{۲\sigma^۲}}$
تابع توزیع	$F(t,\mu,\sigma) = \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)$
تابع قابلیت اعتماد	$R(t,\mu,\sigma) = ۱ - \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)$
تابع نرخ خطر	$h(t) = \frac{f(t,\mu,\sigma)}{F(t,\mu,\sigma)}$ تابع نرخ خطر ابتدا صعود و سپس نزول می‌کند.
میانه	e^{μ}
میانگین	$E(T) = e^{\left(\mu + \frac{۱}{۲}\sigma^۲\right)} = \text{میانه} \times e^{\frac{\sigma^۲}{۲}}$
واریانس	$V(T) = e^{\left(۲\mu + \sigma^۲\right)}\left(e^{\sigma^۲} - ۱\right)$ $= (\text{میانه})^{۲} \times e^{\sigma^۲}\left(e^{\sigma^۲} - ۱\right)$

۱۰۹

در پایان این بخش به این نکته اشاره می‌کنیم که توزیع لگ نرمال می‌تواند یک پارامتر مکان نیز داشته باشد در این حالت تابع چگالی احتمال متغیر به صورت زیر خواهد بود،

$$f(t,\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma(t-\theta)\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(\ln(t-\theta)-\mu)}{\sigma^2}},t>\theta,\ \mu\in(-\infty,+\infty),\sigma>0$$

برای متغیری با چنین توزیع احتمال، در فاصله $(0,\theta)$ شکست نخواهیم داشت.

۶.۵ چند توزیع پیوسته دیگر

توزیع‌های دیگری نیز وجود دارند که می‌توانند در مبحث قابلیت اعتماد و مطالعات بقا به کار روند. یکی از این توزیع‌ها توزیع لجستیک[1] است. متغیر تصادفی T دارای توزیع لجستیک با پارامتر مکان μ و پارامتر مقیاس σ است اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد،

جزء توزیع های معروف شده در نرم افزار R

$$f(t,\mu,\sigma)=\frac{\frac{1}{\sigma}e^{\frac{(t-\mu)}{\sigma}}}{\left(1+e^{\frac{(t-\mu)}{\sigma}}\right)^2},-\infty<t<+\infty$$

$$F(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{\frac{1}{\sigma}e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}}{\left(1+e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\right)^2}dx=\left.\frac{-1}{1+e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}}\right|_{-\infty}^{t}=1-\frac{1}{1+e^{\frac{t-\mu}{\sigma}}}$$

این توزیع مانند توزیع نرمال متقارن است با این تفاوت که دم‌های طویل‌تر است. تابع قابلیت اعتماد آن برابر است با،

$$R(t,\mu,\sigma)=\frac{1}{1+e^{\frac{(t-\mu)}{\sigma}}}$$

و بنابراین تابع نرخ خطر آن به فرم بسته زیر ارائه می‌شود،

$$h(t)=\frac{1}{\sigma}\frac{e^{\frac{(t-\mu)}{\sigma}}}{1+e^{\frac{(t-\mu)}{\sigma}}},-\infty<t<+\infty \qquad (۱.۵)$$

$$h'(t)=\frac{1}{\sigma^2}\frac{e^{\frac{t-\mu}{\sigma}}}{\left[1+e^{\frac{t-\mu}{\sigma}}\right]^2}>0$$

که همواره تابعی صعودی از t است.

اگر فرض کنیم متغیر تصادفی طول عمر T طوری باشد که لگاریتم آن دارای توزیع لجستیک به شکل رابطه (۱.۵) است آنگاه T دارای توزیعی خواهد بود که تابع چگالی آن برابر است با

[1] Logistic distribution

$$f(t,\alpha,\beta)=\frac{\alpha\beta^{\alpha}t^{\alpha-1}}{(1+(\beta t)^{\alpha})^{2}}$$

که در آن $\alpha=\sigma^{-1}$ و $\beta=e^{-\mu}$. این توزیع را لگ لجستیک گویند. می‌توان نشان داد که تابع قابلیت اعتماد و تابع نرخ خطر آن به ترتیب برابرند با

$$R(t,\alpha,\beta)=\frac{1}{1+(\beta t)^{\alpha}}$$

و

$$h(t)=\frac{\alpha\beta^{\alpha}t^{\alpha-1}}{1+(\beta t)^{\alpha}}$$

تابع نرخ خطر $h(t)$ در اینجا به ازای $\alpha>1$ دارای یک ماکزیمم است و به ازای $\alpha\leq 1$ تابع نرخ خطر همواره نزولی است. (صحت این مطلب به دانشجویان واگذار می‌شود.)

تمرین کوئیز ۲: اثبات کنید

نقطه قوت توزیع‌های لجستیک نسبت به توزیع‌های نرمال و لگ نرمال، فرم محاسباتی ساده‌تر تابع چگالی و تابع قابلیت اعتماد و تابع نرخ خطر آن‌ها است.

یکی دیگر از توزیع‌هایی که در قابلیت اعتماد می‌تواند مفید واقع شود توزیع پارتو[1] است. در متون آماری توزیع پارتو به شکل‌های متنوعی ارائه شده است. ما در اینجا توزیع پارتو را به صورتی در نظر می‌گیریم که در آن یک پارامتر شکل و یک پارامتر مقیاس وجود دارد. متغیر تصادفی T را دارای توزیع پارتو با پارامتر مقیاس β و پارامتر شکل α گوییم اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد،

$$f(t,\alpha,\beta)=\frac{\alpha\beta^{\alpha}}{(\beta+t)^{\alpha+1}},\ t>0,\alpha>0,\beta>0$$

در این صورت تابع قابلیت اعتماد توزیع برابر است با،

$$R(t,\alpha,\beta)=\left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)^{\alpha},\ t>0$$

$$F(t)=\int_0^t \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{(\beta+x)^{-(\alpha+1)}}\,dx=1-\left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)^{\alpha}$$

در این توزیع اندازه‌های قابلیت اعتماد مانند تابع نرخ خطر و میانگین عمر باقیمانده شکل‌های بسیار ساده‌ای دارند. به راحتی ملاحظه می‌شود که تابع نرخ خطر آن مساوی است با،

[1] Pareto distribution

با تغییر متغیر $y=\beta+x$، به راحتی می‌توان به توزیع پارتو معرفی شده در کتاب مبانی آمار ریاضی دکتر پارسیان رسید.

111

$$h(t) = \frac{\alpha}{\beta + t}$$

که همواره تابعی نزولی از t است.

میانگین عمر باقیمانده این توزیع به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} m(t) &= \int_t^{\infty} \frac{R(x,\alpha,\beta)}{R(t,\alpha,\beta)} dx \\ &= \int_t^{\infty} \frac{(\beta + x)^{-\alpha}}{(\beta + t)^{-\alpha}} dx \\ &= \frac{(\beta + t)}{1-\alpha} \end{aligned}$$

بنابراین میانگین عمر باقیمانده توزیع پارتو تابعی خطی از زمان است.

یکی از حالاتی که توزیع پارتو در نظریه قابلیت مطرح می‌شود به صورت زیر است. فرض کنید یک متغیر تصادفی T دارای توزیع نمایی $E(\lambda)$ باشد. همچنین فرض کنید λ خود مقدار یک متغیر تصادفی باشد که دارای توزیع $G(\alpha,\beta)$ است. یعنی با فرض معلوم بودن λ توزیع T برابر است با،

$$f(t|\lambda) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0, \lambda > 0$$

و λ دارای تابع چگالی احتمال زیر است،

$$g(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^{\alpha} \lambda^{\alpha - 1} e^{-\beta\lambda}, \lambda > 0$$

که در آن α و β مقادیر معلوم‌اند. با این فرضیات اگر $f(t|\lambda)$ را تابع چگالی احتمال شرطی T به شرط λ بگیریم. آنگاه تابع چگالی احتمال توأم T و λ برابر خواهد شد با $f(t|\lambda)g(\lambda)$. بنابراین تابع چگالی احتمال غیر شرطی T برابر است با،

$$f(t) = \int_0^{\infty} f(t|\lambda) g(\lambda) d\lambda$$

که در واقع یک توزیع آمیزه است. داریم،

در روش بیزی برای پارامتر مجهول، توزیع قائل می‌شویم یعنی با پارامتر مجهول مانند یک متغیر تصادفی دارای توزیع برخورد می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-\lambda t}\beta^\alpha \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}}{\Gamma(\alpha)} d\lambda \\
&= \beta^\alpha \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha e^{-(\beta+t)\lambda}}{\Gamma(\alpha)} d\lambda \\
&= \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+t)^{\alpha+1}} \int_0^\infty \frac{(\beta+t)^{\alpha+1}\lambda^\alpha e^{-(\beta+t)\lambda}}{\Gamma(\alpha+1)} d\lambda \\
&= \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+t)^{\alpha+1}}, t>0
\end{aligned}
$$

بنابراین توزیع غیر شرطی T توزیع پارتو با پارامترهای α و λ است.

۷.۵ مسائل

۱. یکی سیستم رادار شامل ۳ ایستگاه است که دارای توزیع یکسان و مستقل از یکدیگرند. سیستم رادار فعال است اگر و تنها اگر حداقل دو ایستگاه آن فعال باشد. با فرض اینکه توزیع طول عمر ایستگاه‌ها نمایی $E(\lambda)$ باشد میانگین مدت زمانی که سیستم فعال است را پیدا کنید.

۲. طول عمر یک سیستم الکتریکی در صنعت هوا فضا را می‌توان با استفاده از توزیع نمایی که میانگین آن ۳۲۰۰۰ ساعت است مدل سازی کرد.

الف) تابع نرخ خطر سیستم چقدر است؟

ب) چقدر احتمال دارد که سیستم در ۱۶۰۰۰ ساعت دیگر از بین برود؟

ج) اگر سیستم در زمان ۸۰۰ فعال باشد چقدر احتمال دارد که ۱۰۰ ساعت دیگر از بین برود؟ اگر سیستم در زمان ۸۰۰۰ فعال باشد چقدر احتمال دارد که ۱۰۰ ساعت دیگر از بین برود؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۳. فرض کنید T_1 و T_2 دو متغیر تصادفی مستقل نمایی‌اند که میانگین‌های آن‌ها به ترتیب β_1 و β_2 است.

الف) فرض کنید $T=\min(T_1,T_2)$. نشان دهید که T دارای توزیع نمایی است با میانگین $\beta^* = \frac{\beta_h}{2}$ که در آن

$$\beta_h = \left[\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right)\right]^{-1}$$

میانگین همساز β_1 و β_2 است.

ب) یک سیستم شامل دو جزء مستقل است که به صورت متوالی به یکدیگر متصل شده‌اند. هر یک از اجزاء دارای توزیع نمایی و به ترتیب دارای میانگین‌های $\beta_1 = 500$ (ساعت) و $\beta_2 = 1000$ (ساعت) هستند. قابلیت اعتماد سیستم در $t = 300$ ساعت چقدر است؟

۴. فرض کنید $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_k$ یک مجموع تصادفی از متغیرهای تصادفی مستقل نمایی $E(\lambda)$ باشد که در آن k یک متغیر تصادفی مستقل از T_iها است و دارای تابع جرم احتمال هندسی به صورت زیر می‌باشد،

$$P(k = r) = p(1-p)^{r-1}, r = 1,2,\ldots$$

ثابت کنید $T \sim E(p\lambda)$.

۵. فرض کنید T_1 و T_2 دو متغیر تصادفی طول عمر باشند که مستقل از یکدیگر و به ترتیب دارای توزیع نمایی با پارامترهای λ_1 و λ_2 باشد به طوری که $\lambda_1 \neq \lambda_2$. قرار دهید $T = T_1 + T_2$

الف) نشان دهید که

$$R(t) = P(T > t) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\lambda_2 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 t}\right)$$

ب) تابع نرخ خطر T را به دست آورید و نمودار آن را به عنوان تابعی از زمان برای مقادیر مختلف λ_1 و λ_2 رسم کنید.

۶. سیستمی دارای نرخ خطر $h(t) = kt$ است که در آن $k > 0$ و زمان t برحسب ساعت می‌باشد.

الف) قابلیت اعتماد سیستم را در ساعت ۲۰۰ام کارکرد به دست آورید (فرض کنید $k = 2 \times 10^{-6}$)

ب) میانگین طول عمر سیستم را به ازای $k = 2 \times 10^{-6}$ به دست آورید.

ج) اگر سیستم پس از ۲۰۰ ساعت کارکرد هنوز فعال باشد، چقدر احتمال دارد که ۲۰۰ ساعت دیگر کار کند. مقدار k مانند حالت الف بگیرید.

۷. اگر $T \sim LN(\mu, \sigma^2)$، آنگاه نشان دهید که،

$$V(T) = (e^{2\mu+\sigma^2})(e^{\sigma^2} - 1), E(T) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

114

۸. فرض کنید T یک متغیر طول عمر با تابع قابلیت اعتماد $R(t)$ باشد که توزیع آن IFR است و میانگین آن μ می‌باشد. ثابت کنید برای $0 < t < \mu$،

$$R(t) \geq e^{-\frac{t}{\mu}}$$

۹. فرض کنید T_1 و T_2 دو متغیر تصادفی طول عمر مستقل و به ترتیب دارای نرخ خطر $h_1(t)$ و $h_2(t)$ باشند. ثابت کنید،

$$P(T_1 < T_2 \mid \min(T_1, T_2) = t) = \frac{h_1(t)}{h_1(t) + h_2(t)}$$

۱۰. قضیه ۴.۵ را اثبات کنید.

۱۱. قضیه ۵.۵ را اثبات کنید.

۱۲. یک سیستم موازی متشکل از دو جزءبا توزیع‌های نمایی $E(1)$ و $E(5)$ را در نظر بگیرید که در آن اجزاء مستقل از یکدیگرند. تابع نرخ خطر سیستم را به دست آورید و تحقیق کنید که آیا رفتار آن برحسب t یکنواست.

۱۳. فرض کنید $T \sim W(\lambda, \beta)$، $E(T) = 1$ و $V(T) = 0/16$. مقادیر λ و β را به دست آورید.

۱۴. فرض کنید جزء a به صورت متوالی به دو جزء b و c که موازی‌اند متصل شده است. اگر $T_a \sim W(1,2)$ و اجزای b و c دارای طول عمر نمایی با نرخ خطر مشترک ۲ باشند تابع نرخ خطر سیستم را به دست آورید. فرض کنید طول عمر اجزاء مستقل از یکدیگر باشند.

۱۵. تابع توزیع یک سیستم متوالی شامل دو جزء مستقل را به دست آورید که در آن طول عمر جزء اول دارای توزیع $E(\lambda_1)$ و طول عمر جزء دوم دارای توزیع $W(0/906, 4)$ است.

۱۶. پمپ آب یک نوع اتومبیل دارای طول عمری است که توزیع وایبل با پارامتر شکل ۱/۷ و پارامتر مقیاس ۲۶۵۰۰۰ دارد.
الف) اگر زمان گارانتی پمپ ۳۶۰۰۰ کیلومتر باشد، چند درصد از پمپ‌های مورد استفاده در این نوع اتومبیل دوره گارانتی را بدون شکست طی می‌کند.
ب) تابع نرخ خطر را به دست آورید.

ج) اگر پمپ اتومبیل در کیلومتر ۳۶۰۰۰ هنوز سالم باشد، چقدر احتمال دارد که بعد از ۱۰۰۰ کیلومتر از کار بیافتد؟

۱۷. طول عمر یک دستگاه الکتریکی توزیع وایبل $W(۲,۱۰۰۰)$ دارد.
الف) چقدر احتمال دارد که طول عمر دستگاه از ۱۰۰۰ ساعت بیشتر شود؟
ب) میانگین و واریانس طول عمر دستگاه را پیدا کنید.
ج) میانه طول عمر دستگاه چقدر است؟

۱۸. سیستمی را متشکل از دو جزءدر نظر بگیرید که به طور مستقل عمل می‌کنند و تابع نرخ خطر آن‌ها به ترتیب مقادیر ثابت $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ باشند. چقدر احتمال دارد که جزء اول قبل از جزءدوم در سیستم از کار بیافتد؟ این نتیجه را به حالتی که سیستم دارای n جزء مستقل با توابع نرخ خطر ثابت $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، ... و λ_n است تعمیم دهید و احتمال آن را محاسبه کنید که جزء اول زودتر از بقیه در سیستم از بین برود.

۱۹. توزیع آمیخته زیر را در نظر بگیرید.

$$f(t)=\lambda_۱\alpha e^{-\lambda_۱ t}+\lambda_۲(۱-\alpha)e^{-\lambda_۲ t}, t>۰, ۰\leq\alpha\leq۱, \lambda_۱,\lambda_۲>۰$$

میانگین طول عمر سیستمی با این توزیع را به دست آورید. در مورد رفتار میانگین عمر باقیمانده سیستم چه می‌توان گفت؟

۲۰. کارخانه‌ای نوعی حس‌گر گاز تولید می‌کند که تجربه نشان داده است که توزیع طول عمر این حس‌گرها نمایی با نرخ خطر λ می‌باشد که در آن λ خود مقدار یک متغیر تصادفی Λ است که دارای توزیع گاما با میانگین $E(\Lambda)=۱/۱۵\times۱۰^{-۵}$ (برحسب معکوس ساعت) و واریانس $V(\Lambda)=۱۶\times۱۰^{-۱۲}$ است. متوسط زمان از کار افتادن این محصول را برحسب سال محاسبه کنید.

۲۱. فرض کنید طول عمر یک سیستم برحسب ساعت دارای توزیع $W(۲/۲۵,۱/۱۵\times۱۰^{-۴})$ باشد.
الف) چقدر احتمال دارد که سیستم ۶ ماه بدون شکست فعال باشد؟
ب) میانگین طول عمر سیستم چقدر است؟
ج) میانه طول عمر سیستم چقدر است؟
د) اگر سیستم در آخر ماه ششم هنوز کار کند، چقدر احتمال دارد که ۶ ماه دیگر کار کند؟

ه) با استفاده از یک نرم افزار کامپیوتری، نمودار میانگین عمر باقیمانده سیستم را رسم کنید.

۲۲. زمان شکست یک نوع دیود الکتریکی دارای توزیع لگ نرمال با پارامترهای $\mu = ۱۲/۳$ و $\sigma = ۱/۲$ است.

الف) نمودار تابع نرخ خطر توزیع را رسم کنید.

ب) در چه نقطه‌ای از زمان تابع نرخ خطر شروع به نزول می‌کند.

ج) قابلیت اعتماد دیود را در زمان ۱۵۰۰۰۰ (ساعت) تعیین کنید.

د) چند درصد از چنین دیودهایی قبل از ۵۰۰۰۰ (ساعت) از کار می‌افتند؟

۲۳. مقاومت یک مفتول فلزی، T، دارای توزیع $LN(\mu,۳)$ است. مقدار μ چقدر باشد که $P(T \le ۱۵۸) = ۰/۵$.

۲۴. فرض کنید یک سیستم دارای توزیع نرمال بی‌سر شده با پارامترهای $\mu = ۵$ و $\sigma = ۲$ باشد. قابلیت اعتماد سیستم را در زمان $t = ۳$ تعیین کنید. تابع نرخ خطر در زمان $t = ۰$ چقدر است؟

۲۵. کارخانه تولید لاستیک اتومبیل،محصولاتی تولید می‌کند که به طور متوسط ۵۰۰۰۰ کیلومتر کار می‌کنند. فرض کنید۵ درصد محصولات بیش از ۷۰ هزار کیلومتر کار کنند. اگر توزیع طول عمر لاستیکی نرمال باشد،

الف) انحراف استاندارد محصولات را پیدا کنید.

ب) چقدر احتمال دارد که یک لاستیک تولیدی بیش از ۶۰ هزار کیلومتر کار کند.

ج) با فرضیات فوق چقدر احتمال دارد که یک محصول طول عمر منفی داشته باشد؟

۲۶. ثابت کنید اگر $T_۱,T_۲,\ldots,T_n$ متغیرهای تصادفی لگ نرمال باشند با پارامترهای μ_i و $\sigma_i^۲$، $i = ۱,۲,\ldots,n$، آنگاه $T = \prod_{i=۱}^{n} T_i$ دارای توزیع لگ نرمال است با پارامترهای $\sum_{i=۱}^{n}\mu_i$ و $\sum_{i=۱}^{n}\sigma_i^۲$.

۲۷. اگر $T \sim W(\lambda,\beta)$ نشان دهید،

$$E(T^k) = \frac{۱}{\lambda^k}\Gamma\left(۱+\frac{k}{\beta}\right), k = ۱,۲,\ldots$$

۵

روش‌های استنباط پارامتری در قابلیت اعتماد

۱.۶ مقدمه

در فصل‌های قبل تابع قابلیت اعتماد متناظر با یک متغیر تصادفی طول عمر را تعریف کرده و بعضی از شاخص‌های مهم سالخوردگی نظیر تابع خطر و میانگین عمر باقیمانده را معرفی کردیم. در مطالعه خواص متغیرهای طول عمر، اگر مدل احتمالی متغیر یعنی تابع چگالی احتمال آن، f، کاملاً معلوم باشد، آنگاه قادر خواهیم بود که قابلیت اعتماد آن، تابع نرخ خطر و سایر شاخص‌های آماری متناظر با آن را تعیین نموده و در مورد رفتار تصادفی آن بحث نماییم. این امر نه تنها باعث می‌شود که رفتار تصادفی یک سیستم با توزیع f را کاملاً شناخت بلکه باعث می‌شود که آن را با سیستم‌های دیگر مقایسه کرد.

در دنیای واقعی، در مطالعه خواص تصادفی طول عمر یک سیستم، ممکن است با وضعیت‌هایی روبرو شویم که در آن‌ها توزیع طول عمر سیستم کاملاً معلوم نباشد. در وضعیت متداول به صورت زیر است.

الف) اولین وضعیت هنگامی است که توزیع طول عمر کاملاً نامعلوم باشد. در این حالت نقش آماردان آن است که با گرفتن مشاهداتی در مورد نحوه عملکرد سیستم در طول زمان، توزیع طول عمر را تخمین زده و سپس در مورد رفتار تصادفی و خواص سالخوردگی آن بحث نمایید. این نوع استنباط آماری اصطلاحاً به استنباط ناپارامتری یا روش‌های ناپارامتری معروف است.

ب) وضعیت دیگری که اتفاق می‌افتد این است که آماردان ممکن است از قبل ساختار احتمالی (توزیعی) طول عمر سیستم را بداند. به عنوان مثال ممکن است، از تجربیات قبلی یا مطالعات دیگر بداند که توزیع طول عمر سیستم مورد بررسی وایبل است، اما پارامترهای توزیع برایش مجهول باشد. در این حالت با گرفتن مشاهداتی از آن توزیع باید پارامترهای مجهول توزیع را برآورد کند. چنین وضعیتی را اصطلاحاً، استنباط پارامتری یا روش‌های پارامتری گویند.

حالت‌های دیگری نیز اتفاق می‌افتد که در آن وضعیت موجود بین آمار پارامتری و ناپارامتری قرار می‌گیرد. در متون پیشرفته آماری روش‌هایی مطرح می‌شود که به آن‌ها شبه پارامتری می‌گویند. یکی از این روش‌ها که به ویژه در مطالعات طول عمر مهم است روش مدل رگرسیونی کاکس است که بحث در مورد آن از هدف این متن خارج است. اما در فصل‌های بعد یکی دیگر از روش‌های استنباط را مطرح می‌کنیم که به نوعی بین دو روش پارامتری و ناپارامتری قرار می‌گیرد. این روش که در فصل ۸ در مورد آن بحث می‌کنیم روش نمودار احتمال است.

در این فصل روش‌های پارامتری برآورد را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در بخش ۲.۶، ابتدا نگاهی اجمالی به مبحث برآورد پارامترها انداخته و دو روش برآورد نقطه‌ای و برآورد فاصله‌ای را مرور می‌کنیم. در بخش ۳.۶ خصوصیات داده‌های قابلیت اعتماد را معرفی کرده و سپس انواع شیوه‌های سانسور شدن داده را ارائه می‌کنیم. بخش ۴.۶ روش گشتاوری برآورد پارامتر را ارائه می‌کند. به ویژه نشان می‌دهیم که چگونه این روش را برای داده‌های سانسور در بعضی حالات خاص می‌توان به کار برد. در بخش ۵.۶ برآورد به روش ماکزیمم درستنمایی را ارائه می‌کنیم. این روش به دلیل ویژگی‌های منحصر به فرد خود یکی از متداول‌ترین روش‌ها در برآورد پارامتر است. به ویژه این روش برای شیوه‌های مختلف سانسور کارائی دارد. بخش ۶.۶ در مورد نحوه به دست آوردن فاصله‌های اطمینان تقریبی بحث می‌کند. در بخش‌های ۷.۶ تا ۹.۶ با ارائه مثال‌های متنوع نشان می‌دهیم که چگونه روش درستنمایی ماکزیمم را می‌توان در برآورد مدل‌های معروف مانند نمایی، وایبل، و لگ نرمال تحت شیوه‌های مختلف نمونه‌گیری به کار برد.

۲.۶ نگاهی اجمالی به برآورد پارامترها

همانطور که اشاره کردیم، توزیع طول عمر یک سیستم ممکن است به یک یا چند پارامتر مجهول بستگی داشته باشد. لذا جهت تعیین شاخص‌های طول عمر سیستم، لازم است که پارامترها را برآورد کنیم. بدین منظور ابتدا باید با استفاده از یک شیوه نمونه‌گیری، که معمول‌ترین نوع آن نمونه‌گیری تصادفی ساده است، داده‌هایی از توزیع مورد نظر استخراج

119

می‌کنیم. ارائه برآوردگرهایی با استفاده از داده‌های به دست آمده و مطالعه خواص آن‌ها یکی از اهداف استنباط آماری است. فرض کنید $f(x,\theta)$ توزیع طول عمر تحت بررسی باشد که در آن θ متعلق به فضای پارامتر Θ است. اگر $\mathbf{T}=(T_1,T_2,\dots,T_n)$ مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی باشد، گوییم تشکیل یک نمونه تصادفی می‌دهد هرگاه T_iها مستقل بوده و دارای توزیع یکسان باشند. فرض کنید بخواهیم تابعی از θ، مثلاً $g(\theta)$ را برآورد کنیم. بدین منظور تابعی از مشاهدات نمونه را که دارای سنخیت یکسان با $g(\theta)$ است به عنوان برآوردگر به کار می‌بریم. تعریف دقیق برآوردگر به صورت زیر است.

$2\theta\sum_{i=1}^{n} t_i \sim Ga(n,2)=\chi^2_{(2n)}$

$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i \sim Ga(n,n\theta)$

تعریف ۱.۶ فرض کنید $\hat{\theta}=\hat{\theta}(\mathbf{T})$ تابعی از نمونه تصادفی $\mathbf{T}=(T_1,T_2,\dots,T_n)$ باشد. گوییم $\hat{\theta}$ یک برآوردگر $g(\theta)$ است هر گاه مقادیر $\hat{\theta}$ در فضای مقادیر $g(\theta)$ باشد.

برای مثال فرض کنید هدف برآورد نسبت خرابی‌های یک دستگاه تولید نوعی قطعات صنعتی باشد. چون این نسبت مقدار بین صفر و یک را می‌گیرد، هر برآوردگر آن نیز باید طوری تعریف شود که مقداری در همین فاصله بگیرد.

$g(\hat{\theta})=\hat{g}(\theta)$

با توجه به اینکه $\mathbf{T}$ مقادیر تصادفی را در نمونه‌های مختلف می‌گیرد و $\hat{\theta}$ تابعی از $\mathbf{T}$، $\hat{\theta}$ خود نیز یک متغیر تصادفی خواهد بود. بنابراین $\hat{\theta}$ دارای یک توزیع احتمال است که به آن توزیع نمونه‌ای $\hat{\theta}$ می‌گوییم. برای مثال فرض کنید $\mathbf{T}=(T_1,T_2,\dots,T_n)$ نمونه تصادفی از توزیع $E(\theta)$ باشد که در آن θ مجهول است. آنگاه یک برآوردگر طبیعی برای میانگین جامعه، $g(\theta)=\frac{1}{\theta}$، میانگین نمونه $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T_i$ است. همانطور که در فصل ۵ دیدیم مجموع n متغیر تصادفی مستقل از توزیع نمایی $E(\theta)$، دارای توزیع گاما $G(n,\theta)$ است. بنابراین می‌توان نشان داد که توزیع نمونه‌ای $\hat{\theta}$، $G(n,n\theta)$ است. $\hat{\theta}$ از هر نمونه به نمونه دیگر مقداری متفاوت را اختیار می‌کند. متوسط مقداری که $\hat{\theta}$ در نمونه‌های مختلف می‌گیرد میانگین توزیع $G(n,n\theta)$ است. به عبارت دیگر، با توجه به میانگین توزیع گاما،

اگر $f(\underline{t})=\theta^{n}e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}t_i}$

$\frac{\partial \ln f(\underline{t})}{\partial\theta}=0 \Rightarrow$

$g(\hat{\theta})$

$$E(\hat{\theta})=n\frac{1}{n\theta}=\frac{1}{\theta},$$

$E(g(\hat{\theta}))$

$\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}t_i}=\frac{1}{\bar{t}}$

که همان میانگین T_iها است. اصطلاحاً در اینجا گوییم $\hat{\theta}$ برآوردگر نااریب $g(\theta)=\frac{1}{\theta}$ است. به طور کلی برآوردگر $\hat{\theta}(\mathbf{T})$ را یک برآوردگر نااریب $g(\theta)$ گوییم هر گاه،

$g(\hat{\theta})=\bar{t} \longrightarrow E(g(\hat{\theta}))=1/\theta$

پس $g(\hat{\theta})$ برای $1/\theta$ نااریب است.

اگر $f(\underline{t})=(1/\theta)^{n}e^{-\sum t_i/\theta}$

$\frac{\partial \ln f(\underline{t})}{\partial\theta}=0 \Rightarrow \hat{\theta}=1/n\sum_{i=1}^{n}t_i$

پس $\hat{\theta}$ برای θ نااریب است : $E\hat{\theta}=\theta$

۱۲۰

تفسیر نااریبی

$$E(T)=g(\theta)$$

معمولاً نااریبی یکی از مطلوبیت‌های یک برآوردگر می‌باشد. به طور شهودی مفهوم نااریبی بیان می‌کند متوسط مقادیری که یک برآوردگر در نمونه‌های مختلف می‌گیرد مساوی است با پارامتر مورد نظر. جهت اندازه‌گیری دقت یک برآورد کننده معیارهای مختلفی تعریف شده است. متداولترین معیار برای اندازه‌گیری دقت برآوردگر متوسط توان دوم خطاست. اگر $\hat{\theta}$ برآوردگر $g(\theta)$ باشد، آنگاه متوسط توان دوم خطای آن که با $MSE_\theta(\hat{\theta})$ نشان می‌دهیم برابر است با،

$$MSE_\theta(\hat{\theta})=E_\theta(\hat{\theta}-g(\theta))^2$$

هر چقدر که $MSE_\theta(\hat{\theta})$ مقدار کمتری داشته باشد برآوردگر $\hat{\theta}$ دقیق خواهد بود.

در حالتی که $\hat{\theta}$ برای $g(\theta)$ برآوردگری نااریب باشد، به راحتی نشان داده می‌شود که $MSE_\theta(\hat{\theta})$ همان واریانس برآوردگر $\hat{\theta}$ است. در مثال توزیع نمایی دیدیم که برآوردگر $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T_i$ نااریب است.

واریانس $\hat{\theta}$، با توجه به فرمول واریانس توزیع گاما، برابر است با:

$$V(\hat{\theta})=n\frac{1}{(n\theta)^2}$$
$$=\frac{1}{n\theta^2}$$

ملاحظه می‌شود که با افزایش حجم نمونه، $V(\hat{\theta})$ کاهش پیدا کرده و در نتیجه دقت برآوردگر $\hat{\theta}$ افزایش پیدا می‌کند.

۱ این روش برآورد $g(\theta)$ را برآورد نقطه‌ای گویند. در متون استنباط آماری روش‌های متنوعی برای برآورد نقطه‌ای پارامترهای مجهول توزیع ارائه شده است. دو روش متداول در آمار "روش گشتاوری" و روش "ماکزیمم درستنمایی" که ویژگی اولین روش سادگی به کار بردن آن و ۲ دومین روش از ویژگی‌های مهمی برخوردار است که در بخش‌های بعد به آن اشاره می‌کنیم.

روش دیگری از برآورد پارامترها برآورد فاصله‌ای است. در این روش از برآورد، به جای آن که تابعی از مشاهدات نمونه را محاسبه کرده و به عنوان برآوردگر در نظر بگیریم، مجموعه از مقادیر فضای پارامتر $g(\theta)$ را به دست آورده و ادعا می‌کنیم که $g(\theta)$ با ضریبی از اطمینان در آن فضا قرار می‌گیرد. تعریف دقیق یک فاصله اطمینان به صورت زیر است.

ه

تعریف دقیق فاصله اطمینان

تعریف ۲.۶ فرض کنید $\mathbf{T}=(T_1,T_2,\ldots,T_n)$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $f(x,\theta)$ باشد که $\theta\in\Theta\subseteq\mathbb{R}$. فرض کنید $\underline{\theta}(\mathbf{T})$ و $\bar{\theta}(\mathbf{T})$ دو تابع از $\mathbf{T}$ باشند که $\underline{\theta}(\mathbf{T})\le\bar{\theta}(\mathbf{T})$. آنگاه فاصله $\left(\underline{\theta}(\mathbf{T}),\bar{\theta}(\mathbf{T})\right)$ را یک فاصله اطمینان، با سطح اطمینان $(1-\alpha)100\%$، $0\le\alpha\le1$، برای $g(\theta)$ است هرگاه به ازای تمام مقادیر θ،

$$P\left(\underline{\theta}(\mathbf{T})\le g(\theta)\le\bar{\theta}(\mathbf{T})\right)\ge1-\alpha$$

یعنی با ضریب اطمینان حداقل $(1-\alpha)100\%$ فاصله $\left(\underline{\theta}(\mathbf{T}),\bar{\theta}(\mathbf{T})\right)$ مقدار $g(\theta)$ را در بر می‌گیرد.

$f_T(t)=\theta e^{-\theta t}\ ;\ t>0$

جهت تعیین فاصله اطمینان برای میانگین توزیع نمایی $E(\theta)$، به صورت زیر عمل می‌کنیم. دیدیم که $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T_i$ دارای توزیع $G(n,n\theta)$ است. بنابراین متغیر $2n\theta\hat{\theta}$ دارای توزیع کای دو با $2n$ درجه آزادی است. پس به ازای $0\le\alpha\le1$، می‌توان نوشت،

$2\theta\sum_{i=1}^{n}t_i\sim\chi^2_{(2n)}$

$$P\left(\chi^2_{2n,\frac{\alpha}{2}}\le2n\theta\hat{\theta}\le\chi^2_{2n,1-\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

روابط بین توزیع ها

کتاب

مبانی آمار ریاضی

دکتر پارسیان

که در آن $\chi_{2n,1-\frac{\alpha}{2}}$ و $\chi^2_{2n,\frac{\alpha}{2}}$ مقادیری هستند که به ازای آن‌ها $P\left(\chi^2\ge\chi^2_{2n,1-\frac{\alpha}{2}}\right)=\frac{\alpha}{2}$ و $P\left(\chi^2\le\chi^2_{2n,\frac{\alpha}{2}}\right)=\frac{\alpha}{2}$ در نتیجه داریم،

$$P\left(\frac{\chi^2_{2n,\frac{\alpha}{2}}}{2n\hat{\theta}}\le\theta\le\frac{\chi^2_{2n,1-\frac{\alpha}{2}}}{2n\hat{\theta}}\right)=1-\alpha$$

بنابراین بازه،

$$\left(\underline{\theta}(\mathbf{T}),\bar{\theta}(\mathbf{T})\right)=\left(\frac{\chi^2_{2n,\frac{\alpha}{2}}}{2n\hat{\theta}},\frac{\chi^2_{2n,1-\frac{\alpha}{2}}}{2n\hat{\theta}}\right)$$

یک فاصله اطمینان دقیق $(1-\alpha)100\%$ برای پارامتر θ (نرخ خطر) توزیع نمایی است. با معکوس کردن این فاصله می‌توان یک فاصله اطمینان برای میانگین توزیع نمایی به دست آورد.

پس از مشاهده مقادیر نمونه برآوردگر $\hat{\theta}$ را محاسبه کرده و با استفاده از جدول مقادیر توزیع χ^2، کران پایین و بالای فاصله اطمینان را محاسبه می‌کنیم. در بخش‌های بعد با ارائه مثال جزئیات بیشتر را توضیح می‌دهیم. روشی که در اینجا برای محاسبه فاصله اطمینان میانگین توزیع نمایی ارائه کردیم، حالت خاصی از روشی به نام "کمیت محوری" است. در این روش باید تابعی از برآوردگر $\hat{\theta}$ و پارامتر θ را طوری پیدا کنیم که توزیع آن به پارامتر بستگی نداشته باشد. سپس بر اساس آن تابع می‌توان امیدوار بود که فاصله اطمینان برای پارامتر مجهول را یافت. در بسیاری از حالات یافتن فاصله اطمینان دقیق برای پارامتر مجهول امکان پذیر نیست و لذا لازم است فاصله‌های اطمینان تقریبی برای پارامتر یافت. اساس یافتن فاصله اطمینان‌های تقریب استفاده از توزیع نرمال و قضیه حد مرکزی است. بر مبنای قضیه حد مرکزی در بسیاری از حالات منطقی است که توزیع تقریبی برآوردگرها را به ویژه هنگامیکه حجم نمونه بزرگ با توزیع نرمال تقریب زد. جزئیات بیشتر استفاده از فاصله‌های اطمینان تقریبی را به بخش ۷.۵ واگذار می‌کنیم.

۳.۶ داده‌های قابلیت اعتماد و انواع سانسور

هر نوع استنباط آماری مستلزم داشتن داده‌هایی از جامعه آماری است. در نظر قابلیت اعتماد نیز برای هر گونه نتیجه‌گیری در مورد قابلیت و چگونگی سالخوردگی محصولات نیاز به داشتن داده است. داده‌های قابلیت علاوه بر این در موارد زیر نیز می‌تواند مفید باشد.

۱) بررسی مشخصه‌های به کار رفته در موارد زیر نیز می‌تواند مفید باشد.

۲) پیش بینی قابلیت اعتماد و محصول در مرحله طراحی اولیه آن.

۳) بررسی اثر یک طراحی خاص در قابلیت اعتماد محصول.

۴) مقایسه بین دو یا چند تولید کننده یک محصول خاص.

۵) بررسی درست بودن یک ادعای تبلیغاتی.

۶) پیش‌بینی هزینه‌های گارانتی محصول توسط تولید کننده.

از متون تحلیل بقا و آزمون طول عمر، داده‌های قابلیت اعتماد به نام زیر معروفند.

۱) داده‌های عمر

۲) داده‌های زمان شکست

۳) داده‌های بقا

۴) داده‌های زمان پیشامد

۵) داده‌های فرسایشی (البته با کمی تفاوت در مقایسه با موارد فوق)

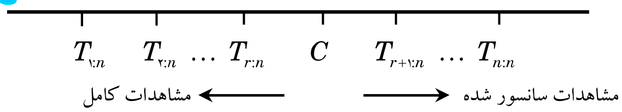
از خصوصیات متمایز داده‌های قابلیت اعتماد می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

۱) داده‌های قابلیت اعتماد نامنفی هستند. همانطور که در فصل قبل اشاره کردیم متغیرهای تصادفی طول عمر و یا توزیع‌های طول عمر آن‌ها دارای تکیه گاه مثبت هستند. بنابراین داده‌هایی که از این توزیع‌ها استخراج می‌شود مقادیر نامنفی هستند. مدل‌های معروف در مطالعات طول عمر عبارتند از توزیع نمایی، توزیع وایبل، توزیع لگ نرمال، توزیع گاما و ...
۲) ویژگی مهم و متمایز دیگر داده‌های طول عمر آن است که معمولاً شامل مشاهدات ناکامل هستند. این حالت زمانی اتفاق می‌افتد که مقدار دقیق طول عمر یک محصول که تحت آزمایش قرار می‌گیرد را مشاهده نمی‌کنیم، و تنها اطلاعاتی که در مورد آن داریم آن است که از یک مقدار معین مثلاً C بیشتر است. دلیل رخداد چنین پدیده‌ای در مطالعات طول عمر دو چیز است، یکی ۱ زمان‌بر بودن آزمایش و ۲ دیگری پرهزینه بودن آن. معمولاً هنگامی که یک محصول را وارد آزمایش می‌کنیم، جهت اندازه‌گیری طول عمر آن باید منتظر ماند تا از کار بیافتد. از آنجایی که ممکن است محصول دارای قابلیت بالا باشد، چهت مشاهده زمان شکست آن باید زمان بسیار زیادی صرف کرد که البته این امر معقولی نیست ازطرف دیگر محصول مورد آزمایش ممکن است بسیار گران قیمت باشد و شکست هر محصول هزینه زیادی را بر آزمایش تحمیل کند. بنابراین با وجود چنین ملاحظاتی هنگامیکه طول عمر محصول از یک مقدار ثابت از قبل تعیین شده بیشتر شد محصول را از آزمایش خارج می‌کنیم و اطلاعات حاصل را ثبت می‌کنیم. در این حالت اصطلاحاً گوییم که داده مورد نظر سانسور شده است. فرض کنید متغیر تصادفی T طول عمر محصول مورد آزمایش باشد و n، $(n>۱)$، محصول با طول عمر T را وارد آزمایش می‌کنیم. اگر $T_۱, T_۲, \ldots, T_n$ نشان‌دهنده طول عمر محصولات باشد آنگاه اگر برای متغیر T_i، $i=۱,۲,\ldots,n$، داشته باشیم $T_i = t_i$ (که در آن $۰<t_i$ مقداری معلوم است) آنگاه مشاهده iام، یک مشاهده کامل است. اگر برای محصول iام تنها بدانیم که $T_i > C$ که در آن C مقداری معلوم است آنگاه اصطلاحاً گوییم متغیر از سمت راست سانسور شده است. از طرفی اگر $T_i < C$ آنگاه متغیر مورد بررسی از سمت چپ سانسور شده است. نوع دیگر سانسور آن است که در زمان بازرسی $C_۱$ محصول هنوز فعال بوده است اما در زمان بازرسی $C_۲$، $(C_۱ < C_۲)$، از کار افتاده است. در این حالت گوییم سانسور فاصله‌ای اتفاق افتاده است.
دو نوع از شیوه‌های متداول سانسور از راست شیوه‌هایی هستند که به آن‌ها سانسور نوع I و سانسور نوع II گویند. سانسور نوع I را سانسور زمان و سانسور نوع II را سانسور شکست نیز می‌گویند. در زیر تعریف این دو نوع سانسور را تعریف می‌کنیم.

سانسور نوع I

فرض کنید n آزمودنی را در زمان $t=۰$ وارد آزمایش می‌کنیم. تا زمان ثابت C منتظر می‌مانیم و سپس آزمایش را خاتمه می‌دهیم. در این صورت نتیجه آزمایش این است که r

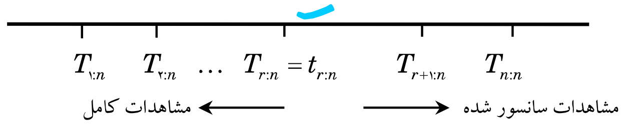
محصول $r = ۰,۱,\ldots,n$ قبل از زمان C از کار افتاده‌اند و زمان دقیق شکست آن‌ها معلوم است و تنها اطلاعی که در مورد $n-r$ محصول باقیمانده داریم آن است که طول عمرشان از C بیشتر است و اصطلاحاً سانسور شده‌اند. شکل ۱.۶ را ببینید. (۲ نمادین است)



شکل ۱.۶ نمایش سانسور نوع I

سانسور نوع II

در این روش n آزمودنی را در زمان $t=۰$ وارد آزمایش می‌کنیم. سپس منتظر می‌مانیم تا r از کار افتادگی را مشاهده کنیم، $r = ۱,۲,\ldots,n$، آنگاه آزمایش را خاتمه می‌دهیم. اگر $t_{r:n}$ مقدار مشاهده شده rامین از کار افتادگی باشد آنگاه تنها اطلاعی که در مورد $n-r$ محصول باقیمانده داریم آن است که طول عمرشان از $t_{r:n}$ بیشتر است و اصطلاحاً سانسور شده‌اند. شکل ۲.۶ را ببینید. (زمان آزمایش نمادین است)



شکل ۲.۶ نمایش سانسور نوع I

در اینجا ذکر چند نکته ضروری است. اول اینکه در کنار این شیوه‌ها از جمع‌آوری داده‌های سانسور شده، انواع دیگری از روش‌ها سانسور وجود دارد که جهت اطلاع در مورد آن‌ها می‌توان به کتب پیشرفته‌تر مراجعه کرد. نکته دوم اینکه صرفنظر از نوع سانسور، مادامی که شیوه سانسور مستقل از متغیر طول عمر باشد، با وجود کامپیوترهای پیشرفته مشکلی در تحلیل داده‌های قابلیت اعتماد نخواهیم داشت. نکته آخر اینکه داده‌های قابلیت اعتماد را علاوه بر روش‌های فوق می‌توان از طرق دیگر نیز جمع‌آوری کرد. دو نوع دیگر از این روش‌ها، مطالعات میدانی در محیط استفاده از محصولات و استفاده از پایگاه‌های داده‌های گارانتی است که معمولاً شرکت‌های مختلف در دست دارند. ها

قبل از آن که روش‌ها برآورد پارامتری را مورد بررسی قرار دهیم، در ادامه فصل فرض می‌کنیم متغیر تصادفی طول عمر T دارای توزیعی است با تابع چگالی احتمال $f(x,\boldsymbol{\theta})$ که در آن $\boldsymbol{\theta} = (\theta_۱,\theta_۲,\ldots,\theta_n)$ برداری از پارامترهای مجهول است که باید برآورد شوند. برآورد این

پارامترها باعث می‌شود که مدل $f(x,\boldsymbol{\theta})$ کاملاً معلوم باشد و لذا قابلیت اعتماد و دیگر شاخص‌های آماری متغیر طول عمر را می‌توان تخمین زد. فرض می‌کنیم $\boldsymbol{\theta}$ متعلق است به $\boldsymbol{\Theta}$ که در آن $\boldsymbol{\Theta} \subseteq \mathbb{R}^k$ و $\mathbb{R}^k$ فضای k بعدی اقلیدسی است. معمولاً در عمل مقدار k مساوی ۲ یا حداکثر ۳ است. اولین روش برآورد که مورد بررسی قرار می‌گیرد روش گشتاوری است که در ادامه به آن می‌پردازیم.

۴.۶ روش گشتاوری

روش گشتاوری برآورد پارامترهای یک توزیع، از قدیمی‌ترین روش‌های آماری که در عین حال ساده‌ترین نوع روش برآورده بوده و مبتنی است بر یک ایده کاملاً شهودی. فرض کنید $T_1,T_2,\ldots,T_n$ نمونه‌ای تصادفی از $f(x,\boldsymbol{\theta})$ باشد و $t_1,t_2,\ldots,t_n$ را به ترتیب مقادیر مشاهده شده آن‌ها در نظر بگیرید. گشتاور مرتبه j ام جامعه و گشتاور مرتبه j ام نمونه، به ترتیب برابرند با $\mu_j(\boldsymbol{\theta}) = E_\theta(T^j)$ و $m_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i^j$. در روش گشتاوری پارامتر $\boldsymbol{\theta}$ را از حل معادلات زیر (در صورت وجود) به دست می‌آوریم. j

$$\mu_j(\boldsymbol{\theta}) = m_j,\ j = 1,2,\ldots,k.$$

برای توضیح بیشتر مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۱.۶ فرض کنید $t_1,t_2,\ldots,t_n$ مقادیر مشاهده شده یک نمونه تصادفی از توزیع $W(\lambda,\beta)$ باشند. در اینجا $\boldsymbol{\theta} = (\lambda,\beta)$ که در آن فرض می‌کنیم هر دو پارامتر λ و β مجهول‌اند. از تمرین ۲۷ فصل قبل داریم،

$$\begin{aligned}\mu_j(\boldsymbol{\theta}) &= E(T^j)\\ &= \frac{1}{\lambda^j}\Gamma\left(1+\frac{j}{\beta}\right),\ j=1,2,\ldots\end{aligned}$$

بنابراین λ و β باید از معادلات زیر برآورد شوند،

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{1}{\lambda}\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \tag{۱.۶}$$

و

$$m_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^2=\frac{1}{\lambda^2}\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)$$

از این دو معادله با حذف λ به دست می‌آوریم.

$$\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}=\frac{m_2}{m_1^2}$$

بسته به مقادیر مشاهده شده t_i، $i=1,2,\ldots$، با محاسبه مقدار سمت راست مقدار β را با استفاده از روش عددی از معادله فوق تعیین می‌کنیم. اگر $\hat{\beta}$ مقدار برآورد β باشد، با استفاده از معادله ۱.۶ برآورد λ را که با $\hat{\lambda}$ نشان می‌دهیم تعیین می‌کنیم.

مثال:

برای توضیح بیشتر فرض کنید جدول ۱.۶ مقادیر ۲۵ مشاهده از طول عمر مرتب شده یک نوع باطری برحسب روز است که بر اساس تجربه می‌دانیم دارای توزیع وایبل می‌باشد. علاقه‌مندیم با استفاده از روش گشتاوری مقدار λ و β توزیع وایبل را برآورد کنیم.

جدول ۱.۶ طول عمر باطری‌ها با توزیع وایبل

i	t_i	i	t_i	i	t_i	i	t_i	i	t_i
۱	۳۹۱	۶	۶۲۶	۱۱	۷۴۶	۱۶	۹۸۴	۲۱	۱۲۲۳
۲	۵۱۰	۷	۶۸۰	۱۲	۷۶۳	۱۷	۱۰۰۳	۲۲	۱۲۷۹
۳	۵۴۱	۸	۶۹۴	۱۳	۷۷۵	۱۸	۱۰۱۹	۲۳	۱۲۸۵
۴	۵۹۵	۹	۷۱۰	۱۴	۹۳۲	۱۹	۱۰۳۱	۲۴	۱۳۹۳
۵	۶۲۲	۱۰	۷۱۵	۱۵	۹۵۷	۲۰	۱۰۸۳	۲۵	۱۵۷۷

از جدول ۱.۶ به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که $m_1=885/36$ و $m_2=874849/07$. بنابراین،

$$\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}=\frac{874849/07}{(885/36)^2}=1/116$$

۱۲۷

با استفاده از جدول ۱.۵ فصل پنجم، یک بررسی ساده نشان می‌دهد که معادله اخیر به ازای $\beta = ۳/۲۵$ برقرار است. در نتیجه برآورد λ برابر خواهد شد با

$$\hat{\lambda} = \frac{\Gamma\left(۱+\frac{۱}{\beta}\right)}{m_۱} = \frac{۰/۸۹۶۳۳}{۸۸۵/۳۶} = ۰/۰۰۱۰۱$$

اکنون با داشتن مقادیر $\hat{\beta}$ و $\hat{\lambda}$ می‌تواند عبارات احتمالی در مورد طول عمر T را محاسبه کرد. برای مثال قابلیت اعتماد باطری در زمان ۲ سال بعد از استفاده برابرا است با

$$R(۷۳۰) = e^{-(۰/۰۰۱۰۱\times ۷۳۰)^{۳/۲۵}} = ۰/۶۹$$

۲ سال = ۷۳۰ روز

مثال ۲.۶ فرض کنید $t_۱, t_۲, \ldots, t_n$ مقادیر مشاهده شده یک متغیر طول عمر باشد که توزیع $G(\beta, \lambda)$ دارد. مطلوبست تعیین برآورد λ و β با استفاده از روش گشتاوری.

حل. به راحتی می‌توان نشان داد که گشتاور مرتبه kام توزیع گاما برابر است با،

$$E(T^k) = \frac{۱}{\lambda^k}\prod_{i=۰}^{k-۱}(\beta+i)$$

بنابراین مقادیر λ و β را می‌توان با استفاده از معادلات زیر برآوردگر

$$m_۱ = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} t_i = \frac{\beta}{\lambda} \qquad (۲.۶)$$

و

$$\frac{\partial^k \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\beta}}{\partial t^k}\Bigg|_{t=0} = ET^k$$

$$m_۲ = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} t_i^۲ = \frac{\beta(\beta+۱)}{\lambda^۲}$$

از دو معادله اخیر به دست می‌آوریم،

$$\frac{m_۲}{m_۱^۲} = \frac{\beta+۱}{\beta}$$

بنابراین

$$\hat{\beta} = \frac{m_۱^۲}{m_۲ - m_۱^۲},$$

$$ET^k = \int_0^\infty \frac{t^k\, t^{\beta-1}\, e^{-t\lambda}\cdot \lambda^\beta}{\Gamma(\beta)}\,dt = \int_0^\infty \frac{t^{\beta+k-1}\, e^{-t\lambda}\, \lambda^\beta}{\Gamma(\beta)}\,dt$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+k)\ \lambda^\beta}{\Gamma(\beta)\ \lambda^{\beta+k}} = \frac{1}{\lambda^k}\frac{(\beta+k-1)!}{(\beta-1)!} = \frac{1}{\lambda^k}\prod_{i=0}(\beta+i)$$

$$\Gamma(\beta+k) = (\beta+k-1)!$$

k عدد صحیح

و لذا از رابطه (۲.۶)

$$\hat{\lambda}=\frac{m_۱}{m_۲-m_۱^۲},$$

که در آن $m_۲-m_۱^۲=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(t_i-m_۱)^۲$

فرض کنید طول عمر یک نوع لامپ الکتریکی برحسب روز دارای توزیع $G(\lambda,\beta)$ است. از این نوع لامپ نمونه‌ای به حجم ۲۰ را وارد آزمایش کرده و طول عمر مرتب شده آن‌ها را در جدول زیر ثبت کرده‌ایم.

جدول ۲.۶ طول عمر لامپ‌های الکتریکی با توزیع گاما

i	t_i	i	t_i	i	t_i	i	t_i
۱	۴۶/۷۴	۶	۱۰۲/۰۲	۱۱	۱۶۴/۹۹	۱۶	۲۶۸/۴۰
۲	۵۰/۵۸	۷	۱۲۶/۱۵	۱۲	۱۹۰/۳۴	۱۷	۲۹۴/۹۳
۳	۹۰/۰۶	۸	۱۵۲/۵۷	۱۳	۲۱۲/۹۱	۱۸	۲۹۹/۴۳
۴	۹۹/۸۶	۹	۱۵۵/۲۱	۱۴	۲۴۱/۰۶	۱۹	۳۷۴/۳
۵	۱۰۲/۰۱	۱۰	۱۶۲/۹۳	۱۵	۲۴۳/۳۵	۲۰	۳۷۹/۸۴

با محاسبات ساده می‌توان نشان داد که $m_۱=۱۸۶/۵۹۱$ و $m_۲=۴۴۰۴۴/۱۴$ بنابراین برآوردهای $\hat{\beta}$ و $\hat{\lambda}$ به ترتیب برابرند با،

$$\hat{\beta}=\frac{(۱۸۶/۵۹۱)^۲}{۹۲۲۷/۷۴}, \\ =۳/۷۷۳$$

و

$$\hat{\lambda}=\frac{۱۸۶/۵۹۱}{۹۲۲۷/۷۴}, \\ =۰/۰۲$$

و در نتیجه تابع چگالی احتمال برآورد شده به صورت زیر است،

۱۲۹

$$f(t)=\frac{1}{\Gamma(3/772)}(0/02)^{3/772}t^{2/772}e^{-0/02t},\ t>0$$

با استفاده از این تابع، قابلیت اعتماد لامپ را در هر لحظه از زمان می‌توان محاسبه کرد.

همانطور که ملاحظه شد، روش گشتاوری برای داده‌های کامل منجر به برآوردگرهایی می‌شود که به طور شهودی قابل قبول هستند و به کار بردن این روش چندان پیچیده به نظر نمی‌رسد. در مباحث پیشرفته‌تر آمار ثابت می‌شود که تحت وجود بعضی شرایط نظم در خانواده توزیع مورد بررسی، اینگونه برآوردگرها دارای خواص حدی مطلوبی هستند.

هنگامیکه داده‌های جمع آوری شده ناکامل باشند، استفاده از روش گشتاوری معمولاً امکان پذیر نمی‌باشد و تنها تحت بعضی از شیوه‌های ساده سانسور می‌توان برآورد پارامترها را به روش گشتاوری به دست آورد. در این جا به ذکر یک مثال اکتفا می‌کنیم. فرض کنید داده‌ها بر اساس سانسور نوع II به دست آمده باشند. یعنی از n آزمودنی، r زمان شکست به دست آمده و $(n-r)$ تای بقیه سانسور شده‌اند. در این صورت میانگین مشاهدات برابر است با،

$$\bar{t}=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{r}t_i+(n-r)(t_r+E(Y))\right] \qquad (۳.۶)$$

که در آن Y عمر باقیمانده آنهایی است که در آزمون هنوز شکست نخورده‌اند. ثابت می‌شود که اگر μ و σ^2 به ترتیب میانگین واریانس مدل تحت بررسی باشد آنگاه،

$$E(Y)=\frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu} \qquad (۴.۶)$$

صفحه ۲۴ کتاب Renewal Theory تألیف R.D. Cox

(کاکس (۱۹۶۲)).

برای مثال اگر توزیع تحت بررسی نمایی $E(Y)$ باشد آنگاه $E(Y)=\frac{1}{\lambda}$. بنابراین از تساوی (۳.۶) به دست می‌آوریم:

در این حالت داریم $m(t)=\bar{\lambda}^{-1}$

$E(Y)$ با $m(t)$، میانگین باقی‌مانده عمر متفاوت است.

$$\bar{t}=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{r}t_i+(n-r)(t_r+\frac{1}{\hat{\lambda}})\right]$$

در روش گشتاوری عبارت اخیر را مساوی میانگین جامعه قرار می‌دهیم. اگر چنین کنیم به دست می‌آوریم،

که (صفحه ۷۶ کتاب) توزیع نمایی نشان داده شده است. در حالت کلی باید EY از رابطه ۴.۶ محاسبه گردد.

$$\frac{1}{\hat{\lambda}}=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{r}t_i+(n-r)(t_r+\frac{1}{\hat{\lambda}})\right] \Rightarrow \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{r}t_i+(n-r)t_r\right]+\frac{(n-r)}{n}\frac{1}{\hat{\lambda}}=\frac{1}{\hat{\lambda}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{r}t_i+(n-r)t_r\right]=\frac{r}{n}\frac{1}{\hat{\lambda}}$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda}=\frac{r}{\sum_{i=1}^{r}t_i+(n-r)t_r}$$

* دقت کنید $t_1,\dots,t_r$ آماره‌های مرتب شده (به ترتیب صعودی) هستند.

اگر این معادله را برحسب $\hat{\lambda}$ حل کنیم برآوردگر منطقی زیر را برای λ خواهیم داشت،

$$\hat{\lambda}=\left(\frac{1}{r}\left[\sum_{i=1}^{r}t_i+(n-r)t_r\right]\right)^{-1} \quad (5.6)$$
$$=\left(\frac{TTT}{r}\right)^{-1}$$

$$\sum_{i=1}^{r} t_i+(n-r)t_r = \sum_{i=1}^{r}(n-i+1)(t_i-t_{i-1}) = TTT \sim Ga(r,\lambda)$$

(صفحه ۸۲ کتاب)

که در آن TTT زمان کل آزمایش است که در فصل ۴ معرفی کردیم.

تحت سانسور نوع II این روش را می‌توان برای انواع توزیع‌های طول عمر دیگر مانند توزیع وایبل و یا گاما باشد نیز به کار برد. جزئیات آن را به عنوان تمرین به دانشجویان واگذار می‌کنیم.

مثال ۳.۶ فرض کنید توزیع طول عمر یک قطعه دارای توزیع نمایی $E(\lambda)$ باشد. جهت برآورد قابلیت اعتماد این قطعه ۲۰ نوع از آن‌ها را در زمان $t=0$ وارد آزمایش کرده و در زمان هفتمین از کار افتادگی آزمایش را خاتمه داده‌ایم. زمان شکست این کار افتادگی‌ها برحسب ساعت عبارتند از،

۲، ۳/۲۵، ۴/۵، ۵/۱، ۹/۳، ۱۱، ۱۴ $= t_r$

۲, ۳٫۲۵, ۴٫۵, ۵٫۱, ۹٫۳, ۱۱, ۱۴

مطلوبست تعیین برآورد λ.

حل. در این جا ۷ مشاهده کامل داریم و ۱۳ مشاهده سانسور شده وجود دارد. با توجه به رابطه (۵.۶) برآورد λ عبارتست از،

$$\hat{\lambda}=\left(\frac{7}{\sum_{i=1}^{7}t_i+13\times t_7}\right)=\frac{7}{231.15}=0.03$$

بنابراین متوسط طول عمر قطعات حدود ۳۳ ساعت است.

۵.۶ روش ماکزیمم درستنمایی

در تحلیل داده‌های قابلیت اعتماد روش ماکزیمم درستنمایی (ML) و استنباط آماری بر مبنای ML (حتی در آمار ناپارامتری) نقش محوری ایفاء می‌کند. فرض کنید توزیع یک متغیر طول عمر T دارای تابع چگالی احتمال $f(\mathbf{t},\boldsymbol{\theta})$ باشد که در آن $\boldsymbol{\theta}$ یک بردار k بعدی مجهول است. فرض کنید یک نمونه تصادفی از $f(\mathbf{t},\boldsymbol{\theta})$ استخراج کنیم و نمونه منتج به مشاهدات

مستقل $t_1, t_2, \ldots, t_n$ شود (t_iها زمان دقیق شکست را نشان می‌دهد). طبق تعریف تابع درستنمایی که با $L(\boldsymbol{\theta})$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر خواهد بود،

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i, \boldsymbol{\theta}) \tag{۶.۶}$$

توجه داشته باشید که پس از مشاهده مقادیر t_i، تابع درستنمایی تنها تابعی از پارامتر $\boldsymbol{\theta}$ است. از نقطه نظر محاسباتی معمولاً بهتر است از لگاریتم تابع درستنمایی استفاده کنیم. در این صورت تساوی (۶.۶) به تساوی زیر تبدیل می‌شود،

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left[f(t_i, \boldsymbol{\theta})\right]$$

که در آن $l(\boldsymbol{\theta}) = \ln L(\boldsymbol{\theta})$ لُگ درستنمایی است. بنابر تعریف، برآوردگر ماکزیمم درستنمای (MLE) پارامتر $\boldsymbol{\theta}$ از حل معادلات زیر به دست می‌آید که به آن معادله درستنمایی می‌گویند.

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} l(\boldsymbol{\theta}), \; j = 1, 2, \ldots, k.$$

واضح است که $\hat{\theta}$ MLE θ، تابعی از $t_1, t_2, \ldots, t_n$ است. در اغلب موارد به ویژه در آزمون‌های طول عمر، برآورد $\hat{\theta}$ به صورت تحلیلی قابل حصول نیست و باید آن‌ها را با استفاده از روش‌های عددی محاسبه کرد. بسیاری از نرم افزارهای موجود قابلیت حل معادلات درستنمایی به روش عددی را دارند.

MLE نه تنها از پشتوانه شهودی بسیار قوی برخوردار است، بلکه ویژگی‌های منحصر به فرد دیگری نیز دارد که آن‌ها را از دیگر برآوردگرها متمایز می‌کند. از جمله ویژگی‌های برجسته MLEها عبارتند از:

۱) برآوردگر MLE پایاست. یعنی اگر $\hat{\theta}$، MLE θ باشد آنگاه $\varphi(\hat{\theta})$، MLE $\varphi(\theta)$ است. بنابراین اگر MLE پارامترهای یک توزیع طول عمر را به دست آوریم با جایگذاری در تابع قابلیت اعتماد، مقدار حاصل MLE تابع قابلیت اعتماد را به دست می‌دهد.

۲) تحت بعضی شرایط نظم، برای حجم نمونه‌های بزرگ، توزیع برآوردگرهای MLE نرمال است.

۳) تحت شرایط نظم، برآوردگرهای MLE در حد دارای خاصیت بهینگی هستند، بدین معنی که برای حجم نمونه‌های بزرگ MLE تقریباً نااریب و دارای کمترین واریانس می‌باشند.

ویژگی‌های MLE

۴) روش درستنمایی را می‌توان برای شیوه‌های مختلف جمع‌آوری داده‌ها، مانند انواع روش‌های سانسور به کار برد. لذا برآورد MLE را می‌توان بر اساس مکانیزم‌های مختلف جمع‌آوری داده‌ها به دست آورد.

ویژگی‌های MLE

۱.۵.۶ تابع درستنمایی بر اساس داده‌های ناکامل

در ادامه تابع درستنمایی را بر اساس شیوه‌های مختلف جمع‌آوری داده ارائه می‌کنیم.

مشاهدات کامل

در این حالت تابع درستنمایی بر اساس مشاهدات کامل $t_1, t_2, \ldots, t_n$ برابر خواهد شد با،

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i, \boldsymbol{\theta})$$

و در نتیجه لگ تابع درستنمایی مساوی است با،

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left[f(t_i, \boldsymbol{\theta})\right]$$

سانسورهای نوع I و II

در سانسور نوع I، n واحد را در زمان $t = 0$ وارد آزمایش می‌کنیم و در زمان C آزمایش را خاتمه می‌دهیم. اگر $t_1, t_2, \ldots, t_r$ زمان‌های شکست دقیق واحدها قبل از زمان C باشند و $(n-r)$ واحد دیگر در زمان C سانسور شده باشند آنگاه تابع درستنمایی برابر خواهد شد با،

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}) &= \prod_{i=1}^{r} f(t_i, \boldsymbol{\theta}) \prod_{i=r+1}^{n} R(C, \boldsymbol{\theta}) \\ &= \prod_{i=1}^{r} f(t_i, \boldsymbol{\theta}) \left(R(C, \boldsymbol{\theta})\right)^{n-r} \end{aligned}$$

که در آن $R(C, \boldsymbol{\theta})$ تابع قابلیت اعتماد متناظر با $f(t, \boldsymbol{\theta})$ است. در این صورت لگ درستنمایی عبارتست از،

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{r} \ln f(t_i, \boldsymbol{\theta}) + (n-r) \ln R(C, \boldsymbol{\theta})$$

در اینجا ذکر این نکته ضروری است که مقدار r خود مقدار یک متغیر تصادفی است، چرا که قبل از زمان ثابت مشخص نیست چه تعداد شکست خواهیم داشت این مقدار می‌تواند ۰، ۱، ... یا n باشد. به راحتی می‌توان استدلال کرد که توزیع r دو جمله‌ای خواهد بود با پارامترهای n

$r \sim Bin(n, F(t))$

و $F(t,\theta)$ که در آن $F(t,\theta)$ تابع توزیع متناظر با $f(t,\theta)$ است. باید توجه داشت که برای داشتن MLE، حداقل یک شکست باید مشاهده شود.

اگر مشاهدات بر اساس سانسور نوع II حاصل شود آنگاه آزمایش در زمان rامین شکست (r ثابت) خاتمه می‌یابد. در این حالت اگر $t_1,t_2,\dots,t_r$ زمان‌های شکست دقیق r واحد باشند آنگاه با توجه به اینکه $(n-r)$ واحد طول عمرشان بیشتر از t_r است تابع درستنمایی برابر خواهد شد با،

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}) &= \prod_{i=1}^{r} f(t_i,\boldsymbol{\theta}) \prod_{i=r+1}^{n} R(\overset{t_r}{\cancel{C}},\boldsymbol{\theta}) \\ &= \prod_{i=1}^{r} f(t_i,\boldsymbol{\theta}) \left(R(\underset{t_r}{\cancel{C}},\boldsymbol{\theta})\right)^{n-r} \end{aligned} \tag{۷.۶}$$

و در نتیجه لگاریتم تابع درستنمایی برابر خواهد شد با

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{r} \ln f(t_i,\boldsymbol{\theta}) + (n-r)\ln R(\underset{t_r}{\cancel{C}},\boldsymbol{\theta})$$

توجه کنید که، اگر چه ظاهراً $l(\boldsymbol{\theta})$ در هر دو نوع سانسور I و II مشابه هستند اما باید دقت نمود که تفاوت عمده‌ای با هم دارند. در اولی C ثابت ولی مقدار r تصادفی است اما در دومی مقدار r ثابت و زمان t_r مقداری تصادفی است. معمولاً در عمل استفاده از روش سانسور نوع II بر سانسور نوع I ترجیح دارد چرا که دارای ویژگی‌های توزیعی ساده‌تری است.

داده‌های گروهی (سانسور فاصله‌ای)

گاهی اوقات واحدهای مورد بررسی، هنگامیکه وارد آزمایش می‌شوند به دلایل مختلف مثلاً محدودیت‌های تکنیکی و اقتصادی به صورت پیوسته مورد بازرسی قرار نمی‌گیرند.بلکه آزمایش بدین صورت انجام می‌شود که n واحد را وارد آزمایش کرده و در زمان‌های از قبل تعیین شده آن‌ها را مورد بازرسی قرار داده و مقدار شکست را ثبت می‌کنیم. داده‌هایی که بدین صورت به دست می‌آید را داده‌های گروهی گویند. به عبارت دقیق‌تر، فرض کنید در زمان $t_0=0$، n واحد را وارد آزمایش کنیم و در زمان‌های t_i، $i=1,2,\dots,k$، واحدها را مورد بازرسی قرار می‌دهیم. در این حالت فاصله زمانی بین بازرسی‌ها به صورت $(t_0,t_1]$، $(t_1,t_2]$، ...، $(t_{k-1},t_k]$ خواهد بود. اگر r_i تعداد شکست‌ها در بازه iام باشد آنگاه $0\le r_i\le n$ و $\sum_{i=1}^{k} r_i=n$. با این فرضیات، با توجه به این که احتمال r_i شکست در فاصله $(t_{i-1},t_i]$ برابر است با $\left(F(t_i,\boldsymbol{\theta})-F(t_{i-1},\boldsymbol{\theta})\right)^{r_i}$ تابع درستنمایی به صورت زیر خواهد بود،

بازه iام

شرط

فاصله زمانی بین بازرسی

iام (k+1) و iام k

$$L(\boldsymbol{\theta})=\prod_{i=1}^{k}\left(F(t_i,\boldsymbol{\theta})-F(t_{i-1},\boldsymbol{\theta})\right)^{r_i}$$

و در نتیجه تابع لگ درستنمایی عبارتست از،

$$l(\boldsymbol{\theta})=\sum_{i=1}^{k}r_i\ln\left(F(t_i,\boldsymbol{\theta})-F(t_{i-1},\boldsymbol{\theta})\right) \tag{۸.۶}$$

معمولاً در عمل فاصله‌های زمانی بازرسی یکسان هستند. اگر در زمان بازرسی iام فرض کنیم m_i واحد را از آزمایش خارج کنیم آنگاه زمان t_i در واقع زمان سانسور m_i واحدی هستند که بدون شکست از آزمایش خارج شده‌اند. تعداد کل واحدهای سانسور شده برابر است با $\sum_{i=1}^{k}m_i=n-\sum_{i=1}^{k}r_i$. در این حالت تابع درستنمایی برابر خواهد شد با،

یعنی r_i شکست در فاصله $(t_{i-1},t_i]$ رخ داده و m_i واحد را زودتر از آزمایش خارج کرده‌ام.

$$l(\boldsymbol{\theta})=\sum_{i=1}^{m}r_i\ln\left(F(t_i,\boldsymbol{\theta})-F(t_{i-1},\boldsymbol{\theta})\right)+\sum_{i=1}^{m}m_i\ln\left(1-F(t_i,\boldsymbol{\theta})\right)$$

یک حالت خاص مهم زمانی اتفاق می‌افتد که $m_i=0$، $i=0,1,\dots,k-1$ و $m_k\geq 1$. در این حالت m_k را می‌توان شکست‌ها در فاصله (t_k,∞) در نظر گرفت و تابع درستنمایی (۸.۶) را به کار برد. هنگامیکه، با داده‌ها گروهی سر و کار داریم، با توجه به این که زمان واقعی شکست در فاصله $(t_{i-1},t_i]$ نامعلوم است، علاقه‌مندیم زمان شکست را در این فاصله تقریب بزنیم. اگر فرض کنیم که واحدهای شکست خورده در فاصله $(t_{i-1},t_i]$ به صورت یکنواخت در هر لحظه از زمان در این فاصله شکست خورده‌اند آنگاه زمان تقریبی شکست jامین واحد $j=1,2,\dots,r_i$ در فاصله iام به صورت زیر تقریب می‌زنیم،

$$t_j=t_{i-1}+j\frac{t_i-t_{i-1}}{r_i+1},\ i=1,2,\dots,k$$

$r_i \leq 1 \rightarrow j=1$

اگر تنها یک شکست در هر فاصله اتفاق بیافتد، آنگاه زمان شکست تقریبی آن مساوی با میانگین طول فاصله است.

$t_j=\dfrac{t_{i-1}+t_i}{2}$

۶.۶ فاصله‌های اطمینان تقریبی

فاصله اطمینان دقیق را می‌توان برای پارامترهای بعضی از توزیع‌ها مانند توزیع نرمال و توزیع نمایی تعیین نمود. در بسیاری از توزیع‌ها مانند توزیع وایبل جهت تعیین فاصله اطمینان برای پارامترهای آن باید از فواصل اطمینان تقریبی استفاده کرد.

۱۳۵

در بخش قبل دیدیم که با روش ML چگونه می‌توان، تحت انواع شیوه‌های نمونه‌گیری، پارامترهای مجهول یک مدل آماری را برآورد کرد. اشاره کردیم که برآوردگرهای حاصل از روش ML دارای این خاصیت هستند که به طور مجانبی (یعنی برای حجم نمونه‌های بزرگ) دارای توزیع تقریبی نرمال هستند. از این واقعیت استفاده می‌کنیم و فاصله‌های اطمینان تقریبی برای پارامترهای مجهول توزیع را ارائه می‌کنیم.

در ادامه فرض می‌کنیم که مدل تحت بررسی حداکثر دو پارامتر دارد که آن‌ها را به α و β نمایش می‌دهیم. یعنی فرض می‌کنیم تابع چگالی مورد نظر $f(x,\alpha,\beta)$ باشد. اگر $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ به ترتیب برآوردهای ML، α و β باشند برای تشکیل فاصله اطمینان تقریبی برای α و β به صورت مراحل زیر انجام می‌دهیم.

۱) تابع درستنمایی را تشکیل داده و لگ درستنمایی $l(\alpha,\beta)$ را به دست می‌آوریم.

۲) مشتقات مرتبه دوم تابع درستنمایی را برحسب α و β به دست می‌آوریم.

۳) ماتریس متقارن زیر را تشکیل دهیم که در آن عناصر ماتریس مشتقات جزئی مرتبه دوم لگ درستنمایی با علامت منفی هستند،

$$\mathbf{I}(\alpha,\beta)=\begin{bmatrix} E\left(-\frac{\partial^2 l(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^2}\right) & E\left(-\frac{\partial^2 l(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\partial\beta}\right) \\ E\left(-\frac{\partial^2 l(\alpha,\beta)}{\partial\beta\partial\alpha}\right) & E\left(-\frac{\partial^2 l(\alpha,\beta)}{\partial\beta^2}\right) \end{bmatrix}$$

امید ریاضی باید گرفته شود تا $I(\alpha,\beta)$ به دست آید.

در مباحث استنباط آماری، امید ریاضی ماتریس $\mathbf{I}(\alpha,\beta)$ به ماتریس اطلاع فیشر معروف است.

۴) ماتریس $\mathbf{I}(\alpha,\beta)$ را به ازای $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ محاسبه می‌کنیم و حاصل را $\hat{\mathbf{I}}$ می‌نامیم. ماتریس $\hat{\mathbf{I}}$ را ماتریس اطلاع موضعی می‌گویند.

۵) معکوس ماتریس اطلاع موضعی $\hat{\mathbf{I}}$ را به دست می‌آوریم. اگر این معکوس را با $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ نمایش دهیم آنگاه $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ به شکل زیر خواهد بود،

$$\hat{\mathbf{\Sigma}}=\begin{bmatrix} \hat{V}(\hat{\alpha}) & C\hat{o}v(\hat{\alpha},\hat{\beta}) \\ C\hat{o}v(\hat{\alpha},\hat{\beta}) & \hat{V}(\hat{\beta}) \end{bmatrix}$$

در واقع $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ برآورد ماتریس واریانس-کواریانس برآوردگر ML $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ را ارائه می‌کند که روی قطر اصلی آن برآورد واریانس هر یک از $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ قرار دارد.

حال با داشتن $\hat{V}(\hat{\alpha})$ و $\hat{V}(\hat{\beta})$ قادر خواهیم بود یک فاصله اطمینان تقریبی برای $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ به دست آوریم. بدین منظور از تقریب‌های زیر استفاده می‌کنیم.

صفحه ۶۳۶ کتاب
Statistical models & methods for Lifetime Data
تألیف Lawless

$$\hat{\alpha} \sim N(\alpha, \hat{V}(\hat{\alpha}))$$

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \hat{V}(\hat{\beta}))$$

بنابراین به ازای $۰ < \alpha < ۱$، فاصله اطمینان $(۱-\alpha)۱۰۰\%$ برای α و β به ترتیب عبارت است از،

$$\left(\hat{\alpha} - z_{\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\hat{V}(\hat{\alpha})}\,,\, \hat{\alpha} + z_{\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\hat{V}(\hat{\alpha})}\right)$$

و

$$\left(\hat{\beta} - z_{\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta})}\,,\, \hat{\beta} + z_{\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta})}\right)$$

$$g' = \left[\frac{\partial g}{\partial \alpha}, \frac{\partial g}{\partial \beta}\right]$$

که در آن $z_{\alpha/۲}$ مقداری است که $P(Z > z_{\alpha/۲}) = \alpha/۲$، فرض کنید Z متغیر نرمال استاندارد است. گاهی اوقات، علاوه بر تعیین فاصله اطمینان برای پارامترهای توزیع، علاقه‌مندیم فاصله اطمینان برای توابعی از $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)$ مانند قابلیت اعتماد، تابع نرخ خطر، صدک‌ها و دیگر شاخص‌های توزیع به دست آوریم. فرض کنید $g = g(\boldsymbol{\theta})$ تابعی از $\boldsymbol{\theta}$ باشد. آنگاه اگر $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ برآوردهای ML α و β باشند، $\hat{g} = g(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ برآورد ML g است. در متون پیشرفته‌تر از روش بسط تیلور نشان داده می‌شود که $\hat{g}$، به عنوان یک متغیر تصادفی، دارای میانگین تقریبی g و واریانس تقریبی زیر است،

صفحه ۱۸۹ کتاب

$g' \Sigma [g']^T$

$$\hat{V}(\hat{g}) \cong \left(\frac{\partial g}{\partial \alpha}\right)^۲ \hat{V}(\hat{\alpha}) + \left(\frac{\partial g}{\partial \beta}\right)^۲ \hat{V}(\hat{\beta}) + ۲\left(\frac{\partial g}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial \beta}\right) C\hat{o}v(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$$

→ Statistical methods for Reliability Data

Meeker & Escobar تألیف

ماتریس واریانس کوواریانس

که در آن $\frac{\partial g}{\partial \alpha}$ و $\frac{\partial g}{\partial \beta}$ به ترتیب در $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ محاسبه می‌شوند. اگر همبستگی بین $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ کم باشد از عبارت دوم می‌توان صرفنظر کرد. با این توضیحات یک فاصله اطمینان تقریبی برای g به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\left(\hat{g} - z_{\frac{\alpha}{۲}}\hat{V}(\hat{g})\,,\, \hat{g} + z_{\frac{\alpha}{۲}}\hat{V}(\hat{g})\right) \tag{۹.۶}$$

لازم است به این نکته اشاره کنیم که اگر بیش از دو پارامتر در توزیع وجود داشته باشد، به راحتی روش فوق برای تعیین فاصله اطمینان تقریبی برای پارامترها قابل تعمیم است.

قبل از آن که این بخش را به پایان برسانیم این نکته را نیز متذکر می‌شویم که اگر g تابعی مثبت باشد گاهی اوقات برای تعیین فاصله اطمینان برای g، بهتر است از این تقریب استفاده کنیم که $\ln\hat{g}$ دارای توزیع تقریبی نرمال با میانگین $\ln g$ و واریانس تقریبی $\left(\frac{1}{\hat{g}}\right)^{2} V(\hat{g})$ است. اگر از این واقعیت استفاده کنیم آنگاه فاصله اطمینان تقریبی برای g به صورت زیر خواهد بود.

$$\left(g(\hat{\boldsymbol\theta})e^{-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{\hat{V}(g(\hat{\boldsymbol\theta}))}}{g(\hat{\boldsymbol\theta})}}\ ,\ g(\hat{\boldsymbol\theta})e^{z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{\hat{V}(g(\hat{\boldsymbol\theta}))}}{g(\hat{\boldsymbol\theta})}}\right) \qquad (۱۰.۶)$$

$\ln\hat{g}(\theta) \sim N\left(\ln g, \left(\frac{1}{g}\right)^{2} V(\hat{g})\right)$

$\Rightarrow -z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{V(\hat{g})}}{\hat{g}} < \ln\left(\frac{\hat{g}(\theta)}{g(\theta)}\right) < z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{V(\hat{g})}}{\hat{g}}$

$\Rightarrow$ (۱۰.۶)

فاصله اطمینان (۱۰.۶) معمولاً تقریب بهتری برای $g(\boldsymbol\theta)$ نسبت به فاصله (۹.۶) ارائه می‌کند. علاوه بر آن هنگامی‌که g مثبت است کران پایین فاصله (۹.۶) ممکن است منفی باشد در صورتیکه این اتفاق برای فاصله (۱۰.۶) نمی‌افتد.

۷.۶ استنباط در مورد توزیع نمایی

اکنون آماده‌ایم روش درستنمایی ماکزیمم را، تحت شیوه‌های مختلف جمع‌آوری داده‌ها، برای برآورد در توزیع نمایی به کار بریم. خاطر نشان می‌کنیم که متغیر تصادفی T دارای توزیع نمایی $E(\lambda)$ با پارامتر λ است اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد،

$$f(t,\lambda)=\lambda e^{-\lambda t}, t>0, \lambda>0.$$

در اینجا λ مقدار نرخ خطر را نشان می‌دهد.

برآورد تحت داده‌های کامل

اگر $t_1,t_2,\ldots,t_n$ مقادیر مشاهده شده یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی $E(\lambda)$ باشد آنگاه لگ درستنمایی برابر است با،

$$l(\lambda)=n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}t_i$$

به راحتی از معاده $\frac{\partial l(\lambda)}{\partial\lambda}$ نتیجه می‌شود که برآوردگر MLE λ برابر است با،

بنا به خاصیت پایایی MLE

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i} = \frac{1}{\bar{t}}$$

بنابراین MLE میانگین جامعه $\theta = \frac{1}{\lambda}$ برابر خواهد شد با $\hat{\theta} = \frac{1}{\hat{\lambda}} = \bar{t}$. همچنین برآورد MLE تابع قابلیت اعتماد در یک زمان مفروض $t_.$ برابر است با،

$$\hat{R}(t_.) = e^{-\hat{\lambda} t_.}$$

میانگین توزیع نمایی (θ)

همانطور که در بخش ۲.۶ دیدیم فاصله اطمینان دقیق $(1-\alpha)100\%$ برای پارامتر توزیع نمایی $E(\lambda)$ برابر است با،

$$\left(\frac{\chi^2_{2n,\frac{\alpha}{2}}}{2n\hat{\theta}}, \frac{\chi^2_{2n,1-\frac{\alpha}{2}}}{2n\hat{\theta}} \right)$$

که در آن $\hat{\theta}$ میانگین نمونه است.

برآورد واریانس $\hat{\lambda}$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\hat{V}(\hat{\lambda}) = \left(-E\frac{\partial^2 l(\lambda)}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=\hat{\lambda}} \right)^{-1} = \frac{\hat{\lambda}^2}{n}$$

$$\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 l(\lambda)}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2}$$

بنابراین فاصله اطمینان تقریبی $(1-\alpha)100\%$ برای λ عبارت است از،

$$\left(\hat{\lambda} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\lambda}}{\sqrt{n}}, \hat{\lambda} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\lambda}}{\sqrt{n}} \right) \quad (11.6)$$

مثال ۴.۶ تولید کننده یک نوع لامپ کم مصرف معتقد است که محصولات آن‌ها دارای توزیع نمایی $E(\lambda)$ است و با توجه به این که محصولات دچار سالخوردگی نمی‌شوند قرار است برای مدت معینی آن‌ها را گارانتی نمایند. مهندسین شرکت یک نمونه ۲۰تایی از لامپ‌ها را انتخاب کرده و آن‌ها جهت برآورد متوسط طول عمر و سایر شاخص‌های مورد آزمایش قرار

می‌دهند. معمولاً آزمایش بدین صورت انجام می‌شود که آن‌ها را تحت شرایط شتابنده قرار می‌دهند. بدین معنی که اگر لامپ قرار است در شرایط محیطی با ولتاژ ۲۲۰ مورد استفاده قرار گیرد آن‌ها را در شرایط آزمایشگاهی با ولتاژ بالاتر مورد آزمایش قرار می‌دهند. این امر باعث می‌شود که طول عمر لامپ‌ها تحت این شرایط کمتر شده و داده‌های لازم سریع‌تر حاصل شوند. سپس با استفاده از یک تابع مناسب نتایج به دست آمده را به شرایط طبیعی تبدیل می‌کنند. این روش به "آزمون‌های شتابنده" معروف است. فرض کنید داده‌های به دست آمده از آزمایش ۱۵ لامپ برحسب ماه به صورت جدول ۳.۶ باشد که پس از تبدیل نتایج آزمایشگاه به دست آمده‌اند.

جدول ۳.۶ طول عمر لامپ‌ها برحسب ماه

i	t_i	i	t_i
۱	۲	۹	۲۹
۲	۳	۱۰	۴۰
۳	۴	۱۱	۴۵
۴	۷	۱۲	۵۵
۵	۱۱	۱۳	۶۷
۶	۱۷	۱۴	۷۶
۷	۱۸	۱۵	۹۴
۸	۲۱		

یک بررسی ساده نشان می‌دهد که برآورد MLE پارامتر توزیع نمایی، $\hat{\lambda}$، برابر است:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=۱}^{n} t_i} = \frac{۱۵}{(۲+۳+\cdots+۹۴)}$$
$$= ۰/۰۳۱$$

بنابراین برآورد MLE میانگین طول عمر لامپ‌های تولیدی، $\hat{\theta}$، مساوی است:

$$\hat{\theta} = \frac{۱}{۰/۰۳۱} = ۳۲/۶ \text{ (برحسب ماه)}$$

فاصله اطمینان دقیق با ضریب ۹۵٪ به صورت زیر حاصل می‌شود. با توجه به این که $n = ۱۵$، از جدول توزیع $\chi^۲$، داریم $\chi^۲_{۳۰,۰/۰۲۵} = ۱۶/۸$ و $\chi^۲_{۳۰,۰/۹۷۵} = ۴۷$. در نتیجه کران پایین و بالای فاصله اطمینان به ترتیب برابرند با،

$$\frac{\chi^۲_{۳۰,۰/۰۲۵}}{۲n\hat{\theta}} = \frac{۱۶/۸}{۳۰ \times ۳۲/۶} = ۰/۰۱۷$$

و

$$\frac{\chi^۲_{۳۰,۰/۹۷۵}}{۲n\hat{\theta}} = \frac{۴۷}{۳۰ \times ۳۲/۶} = ۰/۰۴۸$$

میانگین طول عمر لامپ‌ها (θ)

بنابراین فاصله اطمینان ۹۵٪ برای ~~نرخ خطر لامپ‌ها λ~~، برابر است با (۰/۰۴۸ , ۰/۰۱۷). با معکوس کردن این فاصله، یک بازه اطمینان ۹۵٪ برای ~~میانگین طول عمر لامپ‌ها~~ برحسب ماه حاصل می‌شود که عبارت است از (۵۸/۸ , ۲۰/۸۳). فاصله اطمینان تقریبی برای λ از (۱۰.۶) برابر خواهد شد با (۰/۰۴۲ , ۰/۰۱۸).

نرخ خطر طول عمر لامپ‌ها (λ) (۵۱ , ۸)

با داشتن برآورد نرخ خطر، $\hat{\lambda}$، می‌توان قابلیت اعتماد لامپ‌ها را در هر نقطه از زمان محاسبه کرد. برای مثال، قابلیت اعتماد در زمان ۲۵ ماه عبارت است از،

$$\hat{R}(۲۵) = e^{-۰/۰۳۱ \times ۲۵} = ۰/۴۶$$

برآورد تحت داده‌های سانسور شده

فرض کنید n واحد، از توزیع نمایی $E(\lambda)$، را وارد آزمایش می‌کنیم. آزمایش را پس از rامین شکست $(r \le n)$ خاتمه می‌دهیم (سانسور نوع II). در این صورت $(n-r)$ واحد از آزمودنی سانسور خواهند شد. در این صورت تابع درستنمایی از رابطه (۷.۶)

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{r}\lambda e^{-\lambda t_i}\prod_{i=r+1}^{n}\lambda e^{-\lambda t_r}$$
$$=\lambda^r e^{-\lambda\sum_{i=1}^{r}t_i}e^{-(n-r)\lambda t_r}$$
$$=\lambda^r e^{-\lambda\left[\sum_{i=1}^{r}t_i+(n-r)t_r\right]}$$

که در آن $t_1,t_2,\ldots,t_r$ مقادیر مرتب شده زمان شکست r از کارافتادگی اول هستند. لگ درستنمایی برابر است با،

$$l(\lambda)=r\ln\lambda-\lambda\ln\left[\sum_{i=1}^{r}t_i+(n-r)t_r\right]$$

با استفاده از $l(\lambda)$، برآوردگر MLE λ برابر خواهد شد با

$$\hat{\lambda}=\frac{r}{\sum_{i=1}^{r}t_i+(n-r)t_r}$$

که در آن،

$$r\hat{\theta}=\sum_{i=1}^{r}t_i+(n-r)t_r=\sum_{i=1}^{r}(n-i+1)(T_i-T_{i-1})\sim Ga(r,\lambda)\rightarrow\frac{TTT}{r}\sim Ga(r,r\lambda)$$
$$=TTT$$

که در آن T_i، $i=1,2,\ldots,r$، مقادیر مرتب شده زمان شکست را نشان می‌دهد و TTT زمان کل آزمایش می‌باشد. همانطور که دیدیم، $\frac{TTT}{r}$ دارای توزیع گاما $G(r,r\lambda)$ می‌باشد. بنابراین یک فاصله اطمینان دقیق برای λ عبارت است از،

$$2r\lambda\hat{\theta}\sim\chi^2_{(2r)}$$

$$\left(\frac{\chi^2_{2r,\frac{\alpha}{2}}}{2r\hat{\theta}},\frac{\chi^2_{2r,1-\frac{\alpha}{2}}}{2r\hat{\theta}}\right)$$

که در آن، $\hat{\theta}=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}t_i+\underset{r}{\underline{(n-r)}}t_r$ برآورد MLE متوسط طول عمر توزیع است و فاصله اطمینان تقریبی برای λ به صورت زیر است،

$$\left(\hat{\lambda}-z_{\frac{\alpha}{۲}}\frac{\hat{\lambda}}{\sqrt{r}}\,,\,\hat{\lambda}+z_{\frac{\alpha}{۲}}\frac{\hat{\lambda}}{\sqrt{r}}\right)$$

اگر داده‌ها از طرح سانسور نوع I استخراج شده باشند آنگاه $l(\lambda)$ برابر خواهد شد با،

$$l(\lambda)=r\ln\lambda-\lambda\ln\left[\sum_{i=۱}^{r}t_i+(n-r)C\right]$$

که در آن r تعداد شکست‌ها قبل از زمان ثابت C است. در این حالت، مشابه سانسور نوع II برآوردگر MLE برابر خواهد شد با،

$$\hat{\lambda}=\frac{r}{\sum_{i=۱}^{r}t_i+(n-r)C}$$

اما باید توجه داشت که در اینجا، فاصله اطمینان دقیق برای λ، مشابه سانسور نوع II، وجود ندارد زیرا با توجه به این که مقدار r نیز تصادفی است، توزیع $\sum_{i=۱}^{r}t_i+(n-r)C$ توزیع شناخته شده‌ای نیست. بنابراین باید از فاصله اطمینان تقریبی برای برآورد فاصله‌ای $\hat{\lambda}$ استفاده کرد.

مثال ۵.۶ یک قطعه الکتریکی جهت کارکرد صحیح لازم است که در دمای ۴۰° به طور متوسط ۱۵۰۰۰ ساعت کار می‌کند. از این نوع قطعه، جهت تحقیق در مورد چگونگی کارکرد، ۱۵ عدد را وارد آزمایش کرده و برای اینکه زمان شکست را زودتر به دست آوریم آن‌ها را در زمان شتابنده ۱۲۵° قرار می‌دهیم. فرض کنید توزیع طول عمر قطعات نمایی با پارامتر λ باشد و فاکتور تبدیل شتابنده بین دو دمای ۴۰° و ۱۲۵°، ۲۲/۷ است. اگر آزمایش را در زمان ۹امین شکست خاتمه داده و نتایج زیر حاصل شده باشد،

۸۸,۱۰۵,۱۴۱,۳۴۴,۴۳۰,۵۱۶,۹۳۷,۱۰۵۷,۱۱۰۰

آیا با اطمینان ۹۵٪ می‌توان ادعا کرد که قطعات کارکرد صحیح دارند؟

حل. در اینجا $n=۱۵$ و $r=۹$. بنابراین برآوردگر MLE λ عبارت است از،

۱۴۳

$$\hat{\lambda}' = \frac{۹}{\sum_{i=۱}^{۹} t_i + ۶ \times t_۹}$$

$$= \frac{۹}{(۸۸ + ۱۰۵ + \cdots + ۱۱۰۰) + ۶ \times ۱۱۰۰}$$

$$= ۷/۹۵ \times ۱۰^{-۴}$$

بنابراین برآورد متوسط طول عمر قطعات در دمای ۱۲۵° مساوی است،

$$\hat{\theta}' = \frac{۱}{\hat{\lambda}'} = ۱۲۵۷ \text{ ساعت}$$

فاصله اطمینان ٪۹۵ دقیق برای متوسط طول عمر قطعات دارای کران پایین اطمینان $\hat{\theta}_L = \frac{۲r\hat{\theta}'}{\chi^۲_{۲r,۱-\frac{\alpha}{۲}}}$ و کران بالای اطمینان $\hat{\theta}_U = \frac{۲r\hat{\theta}'}{\chi^۲_{۲r,\frac{\alpha}{۲}}}$ است. در این مثال با توجه به این که $r = ۹$ و $\alpha = ۰/۱$ از نتایج فوق داریم

$$\hat{\theta}'_L = \frac{۲ \times ۹ \times ۱۲۵۷}{۲۸/۹} = ۷۸۲/۹ \text{ ساعت}$$

$$\hat{\theta}'_U = \frac{۲ \times ۹ \times ۱۲۵۷}{۹/۳۹} = ۲۴۰۹ \text{ ساعت}$$

بنابراین کران‌های پایین و بالای متوسط کارکرد قطعات در دمای ۴۰° برابر خواهند شد با،

$$\hat{\theta}_L = ۷۸۲/۹ \times ۲۲/۷ = ۱۷۷۷۱/۸ \text{ ساعت}$$

$$\hat{\theta}_U = ۲۴۰۹ \times ۲۲/۷ = ۵۴۶۸۴/۳ \text{ ساعت}$$

فصل هشتم کتاب

$t_N = a \times t_S$

زمان شکست واحد در شرایط نرمال

زمان شکست واحد در شرایط غیرنرمال

در نتیجه چون کران پایین فاصله اطمینان ٪۹۰ از ۱۵۰۰۰ بیشتر است، می‌توان با اطمینان ٪۹۰ ادعا کرد که قطعات کارکرد صحیح دارند.

در دمای ۴۰°

قابلیت اعتماد قطعات در ۱۵۰۰۰ ساعت کارکرد برابر است با،

$$R(۱۵۰۰۰) = e^{-(۳/۵\times۱۰^{-۵})۱۵۰۰۰}$$

$$= ۰/۵۹$$

$$\frac{\hat{\lambda}'}{\hat{\lambda}} = ۲۲/۷ \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{\hat{\lambda}'}{۲۲/۷} = \frac{۷/۹۵ \times ۱۰^{-۴}}{۲۲/۷} = ۳/۵ \times ۱۰^{-۵}$$

بنا به جدول 1.9 فصل هشتم کتاب.

که در آن $3/5\times 10^{-5}$ مقدار نرخ خطر در دمای 40° است.

برآورد تحت داده‌های گروهی

اگر فاصله زمانی بین بازرسی‌ها به صورت $(t_0, t_1]$، $(t_1, t_2]$، ...، $(t_{k-1}, t_k]$ باشد آنگاه تابع لگ درستنمایی، با فرض این که توزیع تحت بررسی نمایی باشد، به صورت زیر خواهد بود،

$$l(\lambda)=\sum_{i=1}^{k} r_i \ln\left[e^{-(\lambda t_{i-1})}-e^{-(\lambda t_i)}\right]$$

معادله درستنمایی $\frac{\partial}{\partial\lambda}l(\lambda)$ در اینجا یک جواب بسته برحسب λ به دست نمی‌دهد و باید آن را به روش عددی حل کرد. یکی از روش‌های متداول در پیدا کردن ماکزیمم توابعی مانند $l(\lambda)$ استفاده از الگوریتم نیوتن–رافسون است. همچنین اغلب نرم افزارهای آماری دارای امکاناتی هستند که ماکزیمم توابعی مانند $l(\lambda)$ را محاسبه می‌کنند.

در حالتی که در فاصله $(t_{i-1}, t_i]$، m_i واحد از راست سانسور شوند. آنگاه لگاریتم تابع درستنمایی برابر خواهد شد با،

$$l(\lambda)=\sum_{i=1}^{n} r_i \ln\left[e^{-\lambda t_{i-1}}-e^{-\lambda t_i}\right]-\lambda\sum_{i=1}^{n} m_i t_i$$

در اینجا نیز برای تعیین برآورد MLE λ باید از روش‌های عددی استفاده کرد. فاصله اطمینان دقیق برای λ در این حالت وجود ندارد و باید از فواصل اطمینان تقریبی استفاده کرد.

۸.۶ استنباط در مورد توزیع وایبل

در این بخش در مورد برآورد MLE در توابع وایبل تحت روش‌های مختلف جمع‌آوری داده‌ها بحث می‌کنیم. خاطر نشان می‌کنیم که تابع چگالی احتمال وایبل به صورت زیر می‌باشد،

$$f(t,\lambda,\beta)=\beta\lambda^{\beta}t^{\beta-1}e^{-(\lambda t)^{\beta}}, t>0$$

که در آن $\lambda>0$ پارامتر مقیاس و $\beta>0$ پارامتر شکل توزیع می‌باشد.

برآورد تحت داده‌های کامل

فرض کنید n واحد با توزیع وایبل را در زمان $t=0$ وارد آزمایش می‌کنیم، اگر $t_1, t_2, \ldots, t_n$ زمان شکست‌های مرتب شده باشند آنگاه لگ درستنمایی برابر خواهد شد با،

$$l(\lambda,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\left[\ln\beta+\beta\ln\lambda+(\beta-1)\ln t_i-(\lambda t_i)^{\beta}\right]$$

برآوردگرهای MLE λ و β را نمی‌توان به فرم بسته پیدا کرد و لذا باید از روش‌های عددی بهره جست. تابع $l(\lambda,\beta)$ را می‌توان مستقیماً با استفاده از نرم افزارهای آماری ماکزیمم سازی کرد یا می‌توان برآورد λ و β را از معادلات زیر به روش تکراری به دست آورد.

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}l(\lambda,\beta)=\frac{n\beta}{\lambda}-\beta\lambda^{\beta-1}\sum_{i=1}^{n}t_i^{\beta}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}l(\lambda,\beta)=\frac{n}{\beta}+n\ln\lambda+\sum_{i=1}^{n}\ln t_i-\lambda^{\beta}\sum_{i=1}^{n}t_i^{\beta}\ln(\lambda t_i)=0$$

معادله اول نتیجه می‌دهد،

$$\lambda=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^{\beta}\right)^{-\frac{1}{\beta}} \qquad (۱۲.۶)$$

اگر این مقدار در معادله دوم به جای λ جایگذاری کنیم آنگاه،

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i^{\beta}\ln(t_i)}{\sum_{i=1}^{n}t_i^{\beta}}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln t_i=0 \qquad (۱۳.۶)$$

معادله اخیر باید از طریق عددی محاسبه شود. معمولاً این معادله دارای یک جواب منحصر به فرد است که مساوی MLE β یعنی $\hat{\beta}$ خواهد شد. از معادله (۱۳.۶) داریم،

$$\hat{\beta}=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i^{\hat{\beta}}\ln(t_i)}{\sum_{i=1}^{n}t_i^{\hat{\beta}}}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln t_i\right)^{-1}$$

این معادله را می‌توان به روش تکراری با یک نقطه شروع مثلاً $\beta_0=1$

$$\hat{\beta}_{n+1} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\hat{\beta}_n} \ln(t_i)}{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\hat{\beta}_n}} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln t_i \right)^{-1}$$

نکته:

اگر جواب معادله را در معادله (۱۲.۶) قرار دهیم برآورد MLE λ، $\hat{\lambda}$، به دست می‌آید. معمولاً اگر تعداد مشاهدات کم باشد برآوردگرهایی به دست آورد بسیار اریب خواهند بود. یعنی از محاسبه $\hat{\lambda}$ و $\hat{\beta}$ می‌توان کمیت دیگر مانند قابلیت اعتماد، صدک‌های مختلف، میانگین و واریانس مدل و غیره را محاسبه کرد.

فاصله اطمینان تقریبی برای λ و β از به صورت زیر خواهد بود،

$$(\lambda_L, \lambda_U) = \hat{\lambda} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{V}(\hat{\lambda})}$$

$$(\beta_L, \beta_U) = \hat{\beta} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta})}$$

و یا با تقریبی بهتر به صورت زیر خواهد بود.

$$(\lambda_L, \lambda_U) = \left(\hat{\lambda} e^{-z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\hat{V}(\hat{\lambda})}}{\hat{\lambda}}}, \hat{\lambda} e^{z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\hat{V}(\hat{\lambda})}}{\hat{\lambda}}} \right)$$

$$(\beta_L, \beta_U) = \left(\hat{\beta} e^{-z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta})}}{\hat{\beta}}}, \hat{\beta} e^{z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta})}}{\hat{\beta}}} \right)$$

یک تقریب ساده برای $\sqrt{\hat{V}(\hat{\lambda})}$ و $\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta})}$ از روابط زیر به دست می‌آید.

$$\hat{V}(\hat{\lambda}) \cong \frac{1/1087\hat{\lambda}^2}{n\hat{\beta}^2} \quad (14.6)$$

$$\hat{V}(\hat{\beta}) \cong \frac{0/6079\hat{\beta}^2}{n} \quad (15.6)$$

فاصله اطمینان تقریبی برای قابلیت اعتماد، در هر لحظه از زمان، با استفاده از (۱۰.۶) با قرار دادن $g = R(t, \lambda, \beta)$ حاصل می‌شود.

$$\left(\hat{R} e^{-z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{V(\hat{R})}}{\hat{R}}}, \hat{R} e^{z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{V(\hat{R})}}{\hat{R}}} \right)$$

۱۴۷

مثال ۶.۶ فرض کنید داده‌های جدول ۴.۶ طول عمر $n=۲۰$ قطعه الکتریکی برحسب ساعت باشند که از یک روش آزمون شتابنده به دست آمده‌اند. با فرض اینکه طول عمر قطعات دارای توزیع $W(\lambda,\beta)$ باشد،

الف) پارامترهای توزیع را برآورد کنید.

ب) قابلیت اعتماد قطعات در زمان $t=۹۰$ چقدر است؟

جدول ۴.۶ داده‌های طول عمر قطعات الکتریکی

i	t_i	i	t_i	i	t_i	i	t_i
۱	۲۵	۶	۵۸	۱۱	۸۷	۱۶	۱۳۹
۲	۲۸	۷	۶۳	۱۲	۹۳	۱۷	۱۵۷
۳	۲۹	۸	۶۴	۱۳	۱۱۱	۱۸	۱۶۸
۴	۴۴	۹	۶۴	۱۴	۱۲۶	۱۹	۱۸۹
۵	۵۷	۱۰	۷۶	۱۵	۱۳۶	۲۰	۲۱۲

حل. الف) اگر از نقطه $\beta_0=۱$ شروع کنیم، پس از چند مرحله تکرار به حل $\hat{\beta}=۱/۸۷۶$ می‌رسیم. اگر این مقدار را در معادله (۱۲.۶) قرار دهیم برآورد MLE، λ برابر خواهد شد با $\lambda=\cancel{۰/۰۰۹}$. ۰/۰۰۹۱۸

با استفاده از مقادیر فوق برآورد فاصله‌ای تقریبی برای λ و β را به دست می‌آوریم. از روابط (۱۴.۶) و (۱۵.۶) به ترتیب داریم،

$$\hat{V}(\hat{\lambda})\cong ۱/۲۷۶\times ۱۰^{-۶}$$

$$\hat{V}(\hat{\beta})\cong ۰/۱۰۷$$

بنابراین فاصله اطمینان تقریبی ۹۰٪ برای λ برابر خواهد شد با،

$$(\cancel{۸/۹۹۲\times ۱۰^{-۳}}, \cancel{۹/۳۶۸\times ۱۰^{-۳}})$$

(۰/۰۰۷۱ و ۰/۰۱۰۸)

و فاصله اطمینان تقریبی برای β برابر است با،

$$(۱/۳۳۹, ۲/۴۱۴)$$

ب) قابلیت اعتماد قطعه در زمان $t=۹۰$ ساعت برابر است با،

$$R(۹۰) = e^{-(۰/۰۰۹ \times ۹۰)^{۱/۸۷۶}}$$
$$= ۰/[illegible]۱ \quad ۰/۹۹$$

برآورد تحت داده‌های سانسور شده

فرض کنید n واحد از توزیع $W(\lambda,\beta)$ را در زمان $t=۰$ وارد آزمایش کنیم و بعد از مشاهده r شکست $(r \le n)$ آزمایش را خاتمه می‌دهیم، (سانسور نوع II). از $t_۱, t_۲, \ldots, t_r$ زمان شکست r مشاهده اول باشند آنگاه بقیه مشاهدات سانسور شده دارای طول عمر بیشتر از t_r هستند و لذا تابع لگ درستنمایی برابر است با،

$$L(\lambda,\beta) = \sum_{i=۱}^{r}\left[\ln\beta + \beta\ln\lambda + (\beta-۱)\ln t_i - (\lambda t_i)^{\beta}\right] - (n-r)(\lambda t_r)^{\beta}$$

این تابع را می‌توان با استفاده از نرم افزار ماکزیمم کرد و برآوردهای MLE λ و β را تعیین نمود. همچنین می‌توان معادلات درستنمایی را تشکیل داده و برآوردهای درستنمایی را محاسبه کرد. اگر چنین کنیم، برآوردهای MLE λ و β از معادلات زیر به دست می‌آیند.

$$\lambda = \left(\frac{۱}{r}\sum_{i=۱}^{n} t_i^{\beta}\right)^{-\frac{۱}{\beta}} \quad (۱۶.۶) \quad ; t_{r+1} = \cdots = t_n = t_r$$

$$\lambda = \left(\frac{r}{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\beta} + (n-r) t_r^{\beta}}\right)^{1/\beta}$$

و

$$\frac{\sum_{i=۱}^{n} t_i^{\beta}\ln t_i}{\sum_{i=۱}^{n} t_i^{\beta}} - \frac{۱}{\beta} - \frac{۱}{r}\sum_{i=۱}^{r}\ln t_i = ۰ \qquad (۱۷.۶)$$

که در اینجا در مجموع‌هایی که اندیس آنها از ۱ تا n است مشاهدات $t_{r+۱}, \ldots, t_n$ مساوی t_r هستند. واضح است که اگر $r=n$ آنگاه معادلات فوق به معادلات درستنمایی در حالت داده‌های کامل تبدیل می‌شوند. تعیین فاصله اطمینان برای λ و β مشابه حالتی است که داده‌ها کامل‌اند و پس از برآورد λ و β می‌توان آن‌ها به کار برد.

اگر داده‌ها از سانسور نوع I به دست آمده باشند.، به طور مشابه با سانسور نوع II، می‌توان معادلات درستنمایی را به دست آورد. در این حالت نیز برآورد MLE λ و β از معادلات (۱۶.۶) و (۱۷.۶) به دست می‌آیند با این تفاوت که در مجموع‌هایی که در این معادلات که اندیس آن‌ها از ۱ تا n تغییر می‌کند، باید به جای مقادیر $t_{r+۱}, \ldots, t_n$ که مقادیر سانسور هستند، مقدار ثابت C (یعنی زمان سانسور در سانسور نوع I) را قرار داد.

مثال ۷.۶ فرض کنید توزیع طول عمر یک نوع خازن دارای توزیع $W(\lambda,\beta)$ است. ۲۵ نوع از این خازن‌ها را برای برآورد پارامترها مورد آزمایش قرار می‌دهیم. فرض کنید آزمایش در زمان $t=0$ شروع و پس از دهمین شکست آزمایش را خاتمه می‌دهیم. اگر زمان‌های شکست برحسب ساعت به صورت زیر باشد

۳۱۰/۵، ۳۰۹/۸، ۳۰۵/۱، ۳۰۴/۲، ۲۷۲/۸، ۲۶۴/۴، ۱۸۷/۸، ۱۲۹/۴، ۵۲/۷، ۰/۷

پارامترهای λ و β را به روش ML برآورد کنید و فاصله‌های اطمینان تقریبی ۹۵٪ برای آن‌ها ارائه دهید.

حل. حل سوال!

برآورد تحت داده‌های گروهی

فرض کنید در اینجا نیز n واحد را در زمان $t=0$ وارد آزمایش می‌کنیم، اگر فاصله زمانی بین بازرسی‌ها به صورت $[t_0,t_1]$، $(t_1,t_2]$، ...، $(t_{k-1},t_k]$ باشد و r_i تعداد شکست‌ها در بازه iام، $i=1,2,\dots,k$، آنگاه لگ تابع درستنمایی برابر است با،

$$l(\lambda,\beta)=\sum_{i=1}^{k} r_i \ln\left[e^{-(\lambda t_{i-1})^{\beta}}-e^{-(\lambda t_i)^{\beta}}\right]$$

همانطور که ملاحظه می‌شود تابع درستنمایی در اینجا فرم پیچیده‌ای دارد و لذا نباید انتظار داشت که معادلات درستنمایی منجر به جواب‌های بسته‌ای برای λ و β شوند. بنابراین برآوردهای MLE باید از طریق عددی و با استفاده از نرم افزارهای موجود محاسبه شوند. درحالتی که داده‌های سانسور شده از راست در بازه‌های بازرسی وجود داشته باشند آنگاه تابع درستنمایی برابر خواهد شد با،

$$l(\lambda,\beta)=\sum_{i=1}^{k} r_i \ln\left[e^{-(\lambda t_{i-1})^{\beta}}-e^{-(\lambda t_i)^{\beta}}\right]-\sum_{i=1}^{k} m_i(\lambda t_i)^{\beta}$$

که در آن m_i تعداد داده‌های سانسور شده در بازه iام است.

فاصله‌های اطمینان تقریبی برای پارامترهای λ و β را می‌توان با استفاده از روش‌هایی که برای داده‌های کامل بیان کردیم به دست آورد.

مثال ۸.۶ فرض کنید نمونه‌ای به حجم ۱۲ واحد از نقطه‌ای در جعبه دنده نوعی اتومبیل تحت یک فشار معین مورد آزمایش قرار گرفته است. قطعات در فواصل ۲۰۰۰۰ چرخه کارکرد مورد بازرسی قرار می‌گیرند و در هر فاصله قطعات از کار افتاده از آزمایش خارج می‌شوند. آزمایش پس از انجام یک مقدار معین چرخه به اتمام می‌رسد. بازه‌های زمانی حاصل از آزمایش و نتایج

مربوطه در جدول ۵.۶ قرار گرفته است. با فرض این که طول عمر قطعات دارای توزیع $W(\lambda,\beta)$ باشد، برآوردگر MLE پارامترهای λ و β را به دست آورید.

جدول ۵.۶ داده‌های طول عمر قطعات جعبه دنده

طول عمر	واحد	طول عمر	واحد
(۶/۲ , ۶/۴]	۷	* (۲/۴ , ۲/۶]	۱
(۷/۶ , ۷/۸]	۸	* (۳/۲ , ۳/۴]	۲
(۸/۴ , ۸/۶]	۹	(۳/۸ , ۴/۰]	۳
(۸/۴ , ۸/۶]	۱۰	(۴/۲ , ۴/۴]	۴
* (۸/۸ , ∞]	۱۱	(۵/۰ , ۵/۲]	۵
* (۸/۸ , ∞]	۱۲	(۵/۰ , ۵/۲]	۶

* در این فواصل داده‌ها سانسور شده‌اند.

صفحه ۶۴ کتاب Reliability Theory Gertsbakh تألیف را ببینید

حل. در اینجا واحدهای شماره ۱، ۲، ۱۱ و ۱۲ در طول فواصل بازرسی سانسور شده‌اند. بنابراین ۸ واحد در بازه‌های بازرسی مربوط مربوطه شکست خورده‌اند و ۴ واحد سانسور شده‌اند. اگر معادله درستنمایی را تشکیل با استفاده از یکی از نرم افزارهای موجود $\hat{\beta}=2/59$ و $\hat{\lambda}=0/139$ به دست می‌آید.

$\sum_{i=1}^{12} m_i = 4$; $\sum_{i=1}^{12} r_i = 8$

; $i=1,\ldots,12$; $n=12$

۹.۶ استنباط در مورد توزیع‌های نرمال و لگ نرمال

در این بخش برآورد MLE پارامترهای توزیع نرمال و لگ نرمال را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای استنباط به روش ML در مورد پارامترهای توزیع لگ نرمال فقط کافی است، روش‌های استنباط در مورد توزیع نرمال را بدانیم. همانطور که در فصل پنجم دیدیم، اگر متغیر تصادفی T دارای توزیع لگ نرمال با پارامترهای μ و σ^2 باشد آنگاه $\log T$ دارای توزیع نرمال با تابع چگالی احتمال زیر است،

$$f(t,\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

پس اگر داده‌ها دارای توزیع لگ نرمال باشند ابتدا از آن‌ها لگاریتم گرفته و برآورد μ و σ^2 را از توزیع نرمال انجام می‌دهیم. بنابراین در ادامه تنها معادلات درستنمایی را برای توزیع نرمال در حالت‌های مختلف تشکیل می‌دهیم.

برآورد تحت داده‌های کامل

اگر $t_1, t_2, \ldots, t_n$ مشاهدات یک نمونه کامل از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد آنگاه لگاریتم تابع درستنمایی برابر است با،

$$l(\mu,\sigma) = \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{2}\ln 2\pi - \ln\sigma - \frac{(t_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

اگر از معادله فوق برحسب μ و σ مشتق بگیریم و مساوی صفر قرار دهیم، برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم μ و σ^2 به ترتیب برابر خواهند شد با،

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$$

و

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \hat{\mu})^2$$

خاطر نشان می‌کنیم که برآوردگر ML $\hat{\sigma}^2$ برای σ^2 نااریب نیست و برآورد نااریب آن،

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \hat{\mu})^2$$

است.

از مباحث مقدماتی آمار می‌دانیم که برآوردگر $\hat{\mu}$ خود دارای توزیع $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ است و $\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ دارای توزیع χ^2 با $n-1$ درجه آزادی است. با استفاده از این واقعیت می‌توان فاصله اطمینان‌های دقیق برای μ و σ^2 به دست آورد. فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای μ عبارت است از،

$\sim \chi^2_{(n-1)}$

$$\left(\hat{\mu} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \qquad (18.6)$$

و فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای σ^2 برابر است با،

$$\left(\frac{n\hat{\sigma}^{۲}}{\chi^{۲}_{n-۱,۱-\frac{\alpha}{۲}}},\frac{n\hat{\sigma}^{۲}}{\chi^{۲}_{n-۱,\frac{\alpha}{۲}}}\right)$$

اگر در تعیین فاصله (۱۸.۶) اگر $\sigma^{۲}$ مجهول باشد به جای $\sigma^{۲}$ باید $\hat{\sigma}^{۲}$ را قرار دهیم. اگر حجم نمونه کم باشد معمولاً بهتر است از $s^{۲}$ به جای $\hat{\sigma}^{۲}$ استفاده کنیم.

برآورد تحت داده‌های سانسور شده

فرض کنید n واحد با توزیع $N(\mu,\sigma^{۲})$ را در زمان $t=۰$ وارد آزمایش کنیم. اگر مشاهدات مورد نیاز را برای مثال بر اساس شیوه سانسور نوع II به دست آوریم آنگاه تابع لگ درستنمایی برابر خواهد شد با،

$$\begin{aligned} l(\mu,\sigma)=&\sum_{i=۱}^{r}\left[-\frac{۱}{۲}\ln ۲\pi-\ln\sigma-\frac{(t_i-\mu)^{۲}}{۲\sigma^{۲}}\right]\\ &+(n-r)\ln\left[۱-\Phi\left(\frac{t_r-\mu}{\sigma}\right)\right]\end{aligned} \qquad (۱۹.۶)$$

سانسور نوع یک نیز دارای همین لگاریتم تابع درستنمایی است با یک تفاوت که به جای t_r ، C را قرار دهیم.

که در آن $t_۱,t_۲,\dots,t_r$ مقادیر مشاهده شده‌اند. و $\Phi(\bullet)$ تابع توزیع نرمال استاندارد است. برآوردهای ML μ و $\sigma^{۲}$ را در این حالت می‌توان با ماکزیمم کردن $l(\mu,\sigma)$ و با استفاده از نرم افزار به دست آورد.

اگر داده‌ها بر اساس سانسور نوع I به دست آمده باشند تابع لگ درستنمایی مشابه $l(\mu,\sigma)$ در (۱۹.۶) خواهد بود. با این تفاوت که در عبارت دوم در سمت راست تساوی به جای t_r مقدار C (زمان سانسور) را قرار می‌دهیم.

مثال ۹.۶ فرض کنید یک کارخانه تولید کننده قطعات، می‌خواهد برای تأمین نیازهای خود یک حسگر اکسیژن را از بین یکی از دو تأمین کننده اینگونه حسگرها انتخاب کند. برای یک تصمیم درست، باید قابلیت اعتماد این دو نوع محصول را اندازه گیری کند. بدین منظور ۱۵ حسگر را به تصادف از هر یک از دو تأمین کننده انتخاب کرده و آن‌ها در یک دمای بالا (آزمون شتابنده) مورد آزمایش ~~مورد آزمایش~~ قرار دهد. آزمایش بدین صورت انجام می گیرد که به طور همزمان ۳۰ حسگر را مورد استفاده قرار داد و منتظر می‌ماند تا محصولات یکی از دو تأمین کننده از کار بیافتد و سپس آزمایش را خاتمه می‌دهد. در این صورت زمان آخرین از کار افتادگی زمان سانسور برای دیگر تأمین کننده خواهد بود. با این توصیف فرض کنید، برای

۱۵۳

تولید کننده اول هر ۱۵ حسگر از کار افتاده و برای تولید کننده دوم ۱۰ حسگر شکست خورده و زمان سانسور باقیمانده حسگرها ۷۰۱ ساعت باشد. داده‌های حاصل در جدول ۶.۶ آمده است.

جدول ۶.۶ داده‌های زمان شکست حسگرهای اکسیژن

	زمان‌های شکست
تأمین کننده ۱	۱۷۰, ۲۰۵, ۲۷۰, ۲۴۰, ۲۷۵, ۲۸۵, ۳۲۴, ۳۲۸, ۳۳۴, ۳۵۲, ۳۸۵, ۴۷۹, ۵۰۰, ۶۰۷, ۷۰۱
تأمین کننده ۲	۲۲۰, ۲۶۴, ۲۶۹, ۳۱۰, ۴۰۸, ۴۵۱, ۴۸۹, ۵۳۷, ۵۷۵, ۶۶۳

با فرض اینکه داده‌ها از توزیع لگ نرمال آمده باشند، تولید کننده کدام یک از این دو تأمین کننده را باید انتخاب کند؟

حل. در اینجا شاخص‌های توزیع را برای هر یک از دو تأمین کننده به دست می‌آوریم. سپس مقایسه را انجام می‌دهیم. برای محاسبات می‌توان از نرم افزارهای مختلف آماری استفاده کرد. با توجه به این که داده‌ها از توزیع لگ نرمال آمده‌اند، ابتدا لگاریتم آن‌ها را به دست آورده و سپس از نتایج به دست آمده برای توزیع نرمال استفاده می‌کنیم. فرض کنیم محصولات تأمین کننده اول $LN(\mu_۱,\sigma_۱^۲)$ و محصولات تأمین کننده دوم $LN(\mu_۲,\sigma_۲^۲)$ باشد. ابتدا شاخص‌های توزیع اول را محاسبه می‌کنیم. برآورد ML، $\mu_۱$ برابر است با،

$$\hat{\mu}_۱ = \frac{۱}{۱۵}\left[\ln(۱۷۰)+\ln(۲۰۵)+\cdots+\ln(۷۰۱)\right]$$
$$= \cancel{۵/۸۰۶}\ ۵/۸۲۳$$

برآورد $\sigma_۱^۲$ برابر است با

$$\hat{\sigma}^۲ = \frac{۱}{۱۵}\left[(\ln(۱۷۰)-\cancel{۵/۸۰۶}\ ۵/۸۲۳)^۲+\cdots+(\ln(۷۰۱)-\cancel{۵/۸۰۶}\ ۵/۸۲۳)^۲\right]$$
$$= \cancel{۰/۱۵۵}\ ۰/۱۱۴۲$$

برآورد واریانس‌های $\hat{\mu}_۱$ برابر است با $\hat{V}(\hat{\mu}_۱) = \frac{\cancel{۰/۱۵۵}\ ۰/۱۱۴۲}{۱۵} = \cancel{۰/۰۱۰۳}\ ۰/۰۰۹$. بنابراین فاصله اطمینان ۹۰٪ برای $\mu_۱$ برابر خواهد شد با،

$$\left(\cancel{۵/۸۰۶}\ ۵/۸۲۳ - ۱/۶۴\sqrt{\cancel{۰/۰۱۰۳}\ ۰/۰۰۹},\ \cancel{۵/۸۰۶}\ ۵/۸۲۳ + ۱/۶۴\sqrt{\cancel{۰/۰۱۰۳}\ ۰/۰۰۹}\right)$$

که مساوی است با،

$$\overset{۵/۶۴۷}{\cancel{۵/۶۳۹}},\ \overset{۵/۹۷۸}{\cancel{۵/۹۷۳}}$$

$$\left(\cancel{۵/۶۳۹},\cancel{۵/۹۷۳}\right)$$

از طرفی فاصله اطمینان ۹۰٪ برای $\sigma_۱^۲$، با توجه به اینکه $\chi^۲_{۱۴,۰/۹۵}=۲۳/۷$ و $\chi^۲_{۱۴,۰/۰۵}=۶/۵۷$ عبارت است از،

$$\left(\frac{۱۵\times \overset{۰/۱۴۲}{\cancel{۰/۱۵۵}}}{۲۳/۷},\frac{۱۵\times \overset{۰/۱۴۲}{\cancel{۰/۱۵۵}}}{۶/۵۷}\right)$$

که مساوی است با،

$$\left(۰/۰\overset{۸۹}{\cancel{۹۸}},\ ۰/۳\overset{۲۴}{\cancel{۵۴}}\right)$$

میانه توزیع لگ نرمال برابر است با $t_{۰/۵}=e^{\mu_۱}$، بنابراین برآورد ML، $t_{۰/۵}$ مساوی است با،

$$\hat{t}_{۰/۵}=e^{\hat{\mu}_۱}=e^{\cancel{۵/۸۰۶}}=۳۳۲\ \text{ساعت} \xrightarrow{} ۵/۸۲۳$$

و یک فاصله اطمینان تقریبی برای میانه توزیع به صورت زیر است،

$$\left(e^{\overset{۵/۶۴۷}{\cancel{۵/۶۳۹}}},e^{\cancel{۵/۹۷۳}}\right)=\left(۲۸۱,۳۹۳\right) \xrightarrow{} ۵/۹۷۸$$

با داشتن برآوردهای ML $\mu_۱$ و $\sigma_۱^۲$ می‌توانیم قابلیت اعتماد محصول را در هر لحظه از زمان تعیین کنیم. برای مثال قابلیت اعتماد در لحظه $t=۲۰۰$ ساعت برابر است با،

$$\hat{R}(۲۰۰)=۱-\Phi\left(\frac{\ln(۲۰۰)-۵/۸\overset{۲۳}{\cancel{۰۶}}}{۰/۳\overset{۷۶}{\cancel{۹۴}}}\right)=۰/۹۱۸$$

$$۰/۳۷۶ = \sqrt{۰/۱۴۲}$$

برآوردهای $\mu_۲$ و $\sigma_۲^۲$ را به صورت تحلیلی نمی‌توان به دست آورد. برای انجام این کار، باید داده‌های مربوط به تأمین کننده ۲ را در تابع لگ درستنمایی (۱۹.۶) قرار داده و با استفاده از نرم افزار، تابع را ماکزیمم کرد. اگر چنین کنیم نتایج به دست آمده به صورت زیر خواهد بود. برآورد ML $\mu_۲$ برابر است با،

$$\hat{\mu}_۲=۶/۲۸۷$$

و برآورد ML $\sigma_۲^۲$ برابر خواهد شد با

$$\hat{\sigma}^۲=۰/۳۰۸$$

با استفاده از این نتایج فاصله اطمینان ۹۰٪ برای $\mu_۲$ برابر است با،

$$(۶/۰۳۲,۶/۵۴۳)$$

و فاصله اطمینان ۹۰٪ برای $\sigma_۲^۲$ عبارت است از،

$$(۰/۱۹۴,۰/۷۰۳)$$

برآورد ML میانه توزیع در اینجا مساوی است با،

$$\hat{t}_{۰/۵} = e^{\hat{\mu}_۱} = e^{۶/۲۸۷} = ۵۳۸ \text{ ساعت}$$

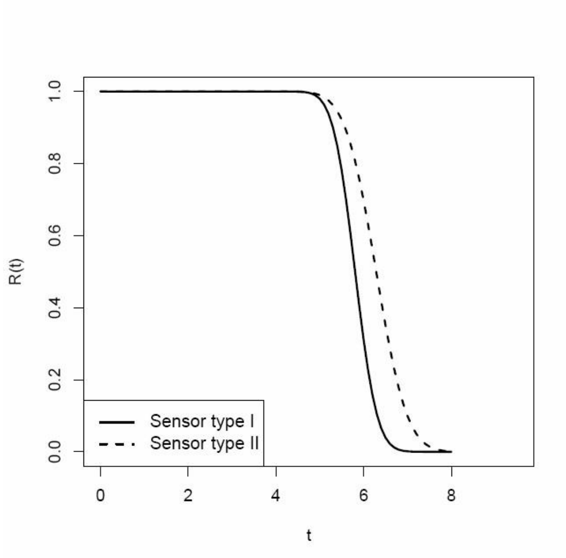
و یک فاصله اطمینان برای آن عبارت است از،

$$(۴۱۷,۶۹۴) = (e^{۶/۰۳۲}, e^{۶/۵۴۳})$$

قابلیت اعتماد حسگرهای نوع دوم در زمان $t = ۲۰۰$

$$\hat{R}(۲۰۰) = ۱ - \Phi\left(\frac{\ln(۲۰۰) - ۶/۲۸۷}{۰/۵۵۵}\right) = ۰/۹۶$$

با توجه به شاخص‌های مختلف، ملاحظه می‌شود که تأمین کننده دوم محصولاتی با قابلیت بیشتر تولید می‌کند. برای مثال میانه حسگرهای نوع دوم بیشتر از نوع اول هستند (فاصله اطمینان‌های مربوطه نقطه اشتراک ندارند) این واقعیت در مورد میانگین‌ها نیز صادق است. شکل ۳.۶ نمودار تابع قابلیت اعتماد برآورد شده دو محصول را ارائه می‌کند. همانطور که در شکل مشخص است قابلیت اعتماد حسگرهای تأمین کننده ۲ همواره، در هر لحظه از زمان، بیشتر از قابلیت اعتماد حسگرهای تأمین کننده اول است. بنابراین کارخانه باید تأمین کننده دوم را ترجیح دهد.



شکل ۳.۶ قابلیت اعتماد برآورد شده حسگرهای نوع اول و دوم

برآورد تحت داده‌های گروهی

در این حالت، لگ تابع درستنمایی برای بازه‌های کامل عبارت است از،

$$l(\mu,\sigma)=\sum_{i=1}^{k} r_i \ln\left[\Phi\left(\frac{t_i-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{t_{i-1}-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

که در آن r_i تعداد شکست‌ها در بازه iام یعنی در بازه $(t_{i-1},t_i]$ است و k نشان‌دهنده تعداد بازه‌ها می‌باشد. در اینجا نیز معادلات درستنمایی جواب‌های بسته ارائه نمی‌دهد و باید از روش‌های عددی بهره جست.

اگر داده‌ها در هر بازه توأم با سانسور باشند آنگاه تابع درستنمایی به صورت زیر خواهد شد که در این حالت نیز برای حل معادلات باید از روش‌های عددی استفاده کرد،

$$l(\mu,\sigma)=\sum_{i=1}^{k} r_i \ln\left[\Phi\left(\frac{t_i-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{t_{i-1}-\mu}{\sigma}\right)\right] + \sum_{i=1}^{k} d_i \ln\left[1-\Phi\left(\frac{t_i-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

که در آن r_i و d_i به ترتیب تعداد شکست‌ها و تعداد سانسورها در بازه iام بازرسی است و k تعداد بازه‌ها می‌باشد.

شکست‌ها

158

از اینجا به بعد
حذف شده است

۱۰.۶ تعیین حجم نمونه در آزمون‌های طول عمر

در بخش‌های قبل دیدیم که چگونه می‌توان با داشتن یک نمونه با حجم ثابت، پارامترهای توابع طول عمر را بر اساس شیوه‌های مختلف جمع آوری داده برآورد کرد. یکی از مسائل مهم در مطالعات طول عمر و البته در سایر بخش‌های آمار، تعیین اندازه نمونه است. واضح است که به طور شهودی هر چه قدر اندازه نمونه بیشتر باشد پارامترهای توزیع را با دقت بیشتری می‌توان برآورد کرد. اما از آنجایی که هزینه هر واحد که در آزمون طول عمر قرار می‌گیرد، ممکن است زیاد باشد (توجه کنید که برای داشتن یک مشاهده واحد مورد بررسی باید شکست بخورد) افزایش حجم نمونه باعث بالا رفتن هزینه می‌شود. همچنین با توجه به این که مشاهدات طول عمر در طول زمان به دست می‌آیند، افزایش حجم نمونه ممکن است باعث بالا رفتن زمان انجام مطالعه شود. بنابراین ملاحظات، در تعیین اندازه نمونه باید کاملاً دقت نمود.

یکی از راه‌های ساده تعیین حجم نمونه، استفاده از توزیع تقریبی برآوردگرهای ML است. در ادامه به طور مختصر این روش را با ارائه چند مثال توضیح می‌دهیم. همانطور که در بخش ۶.۶ اشاره کردیم، اگر $\hat{\theta}$ برآوردگر ML θ باشد آنگاه برای تابع g، $g(\hat{\theta})$ برآورد ML $g(\theta)$ است. و

$$g(\hat{\theta}) \sim N\left(g(\theta), V(g(\hat{\theta}))\right)$$

که در آن با استفاده از روش دلتا،

$$V(g(\hat{\theta})) = \left(g'(\theta)\right)^{۲} V(\hat{\theta})$$

که در آن $V(\hat{\theta}) = \frac{۱}{I(\theta)}$ و $I(\theta)$ اندازه اطلاع نمونه است.

در بسیاری از حالات برای متغیرهای مستقل و هم توزیع، تجربه نشان می‌دهد که $V(\hat{\theta}) = \frac{V(\theta)}{n}$ که در آن $V(\theta)$ تنها تابعی از θ است و به n بستگی ندارد. بنابراین یک فاصله اطمینان تقریبی $(۱-\alpha)۱۰۰\%$ برای $g(\theta)$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\left(g(\hat{\theta}) - z_{\frac{\alpha}{۲}} \frac{۱}{\sqrt{n}} \sqrt{V^*(\theta)}, g(\hat{\theta}) + z_{\frac{\alpha}{۲}} \frac{۱}{\sqrt{n}} \sqrt{V^*(\theta)}\right)$$

که در آن،

$$V^*(\theta)=\frac{V(\theta)}{\left(g(\theta)\right)^{۲}}$$

طول این فاصله برابر است با،

$$L=۲z_{\frac{\alpha}{۲}}\frac{۱}{\sqrt{n}}\sqrt{V^*(\theta)} \qquad (۲۰.۶)$$

از نقطه نظر آماری، طول فاصله L را می‌توان معیار معقولی برای دقت برآورد فاصله‌ای θ باشد. بنابراین معیار تعیین حجم n را روی این دقت معطوف می‌کنیم. به عبارت دیگر، مسئله را اینطور مطرح می‌کنیم که اگر بخواهیم در برآورد θ، طول فاصله اطمینان $(۱-\alpha)۱۰۰\%$ برای θ از L_T بیشتر نباشد حداقل حجم نمونه لازم چقدر است؟ با جایگذاری L_T در (۲۰.۶) به دست می‌آوریم،

$$n=\frac{۴z^{۲}_{\frac{\alpha}{۲}}V^*(\theta)}{(L_T)^{۲}}$$

اما باید توجه داشت که هنوز مسئله تمام نشده است. زیرا در سمت راست تساوی θ مجهول است. معمولاً در عمل مقدار θ را باید از طریقی، مثلاً از تجربیات قبلی، مطالعات مشابه، مشخصه‌های طراحی و غیره تعیین نمود. اگر این مقدار تعیین شده اولیه را $\theta_.$ بنامیم آنگاه حجم نمونه لازم برابر خواهد شد با،

$$n=\frac{۴z^{۲}_{\frac{\alpha}{۲}}V^*(\theta_.)}{(L_T)^{۲}}$$

با داشتن نمونه‌ای به حجم n، اطمینان $(۱-\alpha)۱۰۰\%$ خواهیم داشت که فاصله به دست آمده پارامتر مجهول θ را در بر دارد. مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۱۰.۶ فرض کنید طول عمر یک لامپ الکتریکی یک کارخانه تولید کننده لامپ دارای توزیع نرمال $N(\theta,\sigma)$ باشد. تجربیات قبل نشان می‌دهد که متوسط طول عمر لامپ‌ها ۱۲۰۰ ساعت با انحراف ۲۰۰ ساعت می‌باشد. جهت بالا بردن رضایت مشتریان، یک طراحی جدید توسط کارخانه برای تولید لامپ ارائه شده است. برای برآورد متوسط طول عمر لامپ‌های جدید فرض کنید یک آزمون طول عمر انجام می‌دهیم. اگر بخواهیم متوسط طول عمر لامپ‌ها

را طوری برآورد کنیم که با اطمینان ۹۵٪ طول فاصله اطمینان از ۸۰ ساعت بیشتر نباشد حجم نمونه لازم چقدر است؟

حل. در اینجا برآوردگر ML ،θ ،$\overline{x}$ است با واریانس $\sigma_{\overline{x}}^{۲}=\frac{\sigma^{۲}}{n}$. بنابراین $V^{*}(\theta)=\sigma^{۲}$ که از تجربیات قبل داریم $V^{*}(\theta)=(۲۰۰)^{۲}$. همچنین $L_T=۸۰$ و $z_{۰/۰۵}=۱/۹۶$ پس حجم نمونه لازم برابر خواهد شد با،

$$n=\frac{۴(۱/۹۶)^{۲}(۲۰۰)^{۲}}{(۸۰)^{۲}}=۹۶/۰٤ \sim ۹۷$$

بنابراین باید ۹۷ لامپ را وارد آزمایش کرد.

نکته :

اگر تابع $g(\theta)$ تابعی مثبت از θ باشد آنگاه، همانطور که در بخش ۶.۶ دیدیم یک فاصله اطمینان مناسب‌تر برای $g(\theta)$ از تقریب زیر به دست می‌آید.

$$\ln g(\hat{\theta}) \sim N\left(\ln g(\theta), V(\ln g(\hat{\theta}))\right)$$

که در آن

$$V(\ln g(\hat{\theta}))=\left(\frac{\xrightarrow{} g'(\theta)}{\theta}\right)^{۲} V(\hat{\theta})$$

در این حالت فاصله اطمینان تقریبی $(۱-\alpha)۱۰۰$٪ برای $g(\theta)$ به صورت زیر خواهد شد،

$$\left(\frac{g(\hat{\theta})}{R}, g(\hat{\theta})R\right)$$

که در آن

$$R=e^{z_{\frac{\alpha}{۲}}\frac{\sqrt{V^{*}(\theta)}}{\sqrt{n}}} \qquad (۲۱.۶)$$

و

$$V^{*}(\theta)=\frac{V(\theta)}{\theta^{۲}}$$

کمیت R را می‌توان به عنوان یک معیار دقت برای فاصله اطمینان به دست آمده به کار برد. طبیعی است که هر چه قدر R به یک نزدیکتر باشد طول فاصله کمتر خواهد شد و لذا دقت

۱۶۱

برآورد بیشتر می‌شود. اما این مستلزم حجم نمونه بیشتر است. فرض کنید R_T را یک مقدار از قبل تعیین شده برای R بگیریم که معمولاً مقادیر متداول برای آن ۱/۲ یا ۱/۵ است. آنگاه حجم نمونه لازم برابر خواهد شد با،

$$n=\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}^{2}V^{*}(\theta_{0})}{(\ln R_T)^{2}}$$

که در آن θ_0 مقداری است که از اطلاعات قبلی برای θ در نظر گرفته‌ایم.

مثال ۱۱.۶ فرض کنید تولید کننده‌ای یک نوع قطعه الکتریکی طراحی جدیدی جهت تولید ارائه کرده است و علاقمند به برآورد متوسط طول عمر محصول جدید اشت. در این آزمون که به صورت شتابنده انجام می‌شود، تعدادی لامپ باید به طور همزمان وارد آزمون شود اما به دلیل محدودیت زمانی تنها ۴۵۰ ساعت برای انجام آزمون وجود دارد. مهندسین طراح از تجربیات قبلی پیشنهاد می‌کنند که توزیع طول عمر لامپ‌ها نمایی با نرخ خطر ۰/۰۰۱ ساعت است. اگر بخواهیم متوسط واقعی را تخمین بزنیم، چه تعداد لامپ را باید وارد آزمایش کرد که با اطمینان ۹۵٪ میانگین واقعی بین فاصله‌ای با $R_T=1/5$ قرار گیرد؟

چون زمان خاتمه داده
پس سانسور نوع I
است.

حل. توجه کنید که در اینجا آزمون بر اساس سانسور نوع I انجام می‌شود که در آن زمان خاتمه آزمون $C=450$ ساعت است. با فرض این که θ تابع نرخ خطر توزیع باشد علاقه‌مند به برآورد $g(\theta)=1/\theta$ هستیم. اگر $\hat{\theta}$ برآورد ML θ باشد آنگاه برآورد ML $g(\theta)$ عبارت است از $g(\hat{\theta})$. طبق روش دلتا،

$$V(\ln g(\hat{\theta}))=\frac{1}{\theta^{4}}V(\hat{\theta})$$

و

$$V(\hat{\theta})=\frac{1}{-E\left[\frac{\partial^{2}}{\partial\theta^{2}}l(\theta)\right]}$$

که در آن

$$l(\theta)=r\ln\theta-\left(\sum_{i=1}^{r}t_i+(n-r)C\right)\theta$$

که در آن $t_1, t_2, \ldots, t_r$ زمان شکست r مشاهده غیر سانسور هستند و C زمان سانسور می‌باشد. توجه کنید که r یک متغیر تصادفی است با توزیع دو جمله‌ای و پارامترهای $(n, 1-e^{-C\theta})$. بنابراین

Bin

$$-E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} l(\theta)\right] = E\left[\frac{r}{\theta^2}\right]$$
$$= \frac{n(1-e^{-C\theta})}{\theta^2}$$

در نتیجه

$$V(\hat{\theta}) = \frac{\theta^2}{n(1-e^{-C\theta})}$$

و

$$V^*(\theta) = \frac{1}{(1-e^{-C\theta})}$$

بنابراین با توجه به این که $C = 450$ و $\theta_0 = 0/001$،

$$V^*(\theta_0) = \frac{1}{(1-e^{-\frac{450}{100}})}$$
$$= 2/75$$

بنابراین حجم نمونه لازم برابر است با

$$n = \frac{(1/96)^2 (2/75)}{(\ln 1/5)^2} = 65$$

یکی دیگر از ملاحظاتی که در تعیین حجم نمونه مهم است، مسئله هزینه آزمایش است. به عنوان مثال فرض کنید مشاهدات بر مبنای سانسور نوع II به دست می‌آیند. فرض کنید در آزمایش طول عمر، علاقه‌مندیم r مشاهده داشته باشیم. آنگاه حجم نمونه چه مقدار باشد که هزینه آزمایش مینیمم مقدار بگیرد. در پاسخ به این سؤال لازم است ابتدا یک تابع هزینه تعریف کنیم. توجه کنید که اگر n واحد وارد آزمایش شوند، برای داشتن r شکست، زمان انجام آزمایش t_r خواهد بود که یک متغیر تصادفی است. اگر هزینه آزمایش، C، تابعی خطی از

زمان آزمایش یعنی t_r، و تعداد واحدهایی که وارد آزمایش می‌شوند یعنی n باشد آنگاه C را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$C_n = C_1 t_r + C_2 n + C_3$$

که در آن C_1، C_2 و C_3 مقادیر معلوم هستند. چون t_r یک متغیر تصادفی است، معمولاً متوسط تابع هزینه را مورد بررسی قرار می‌دهیم و آن را برحسب n مینیمم می‌کنیم. یعنی n را طوری تعیین می‌کنیم که

$$k(n) = E(C_n) = C_1 E(t_r) + C_2 n + C_3$$

مینیمم شود. بنابراین در حل این مسئله باید $E(t_r)$ را تعیین کنیم که بستگی به توزیع مورد بررسی دارد. همانطور که دیدیم، در حالتی که توزیع نمایی، $E(\lambda)$، باشد آنگاه

$$E(t_r) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n-i+1}$$

بنابراین

$$k(n) = \frac{C_1}{\lambda}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n-i+1} + C_2 n + C_3$$

به راحتی مشاهده می‌شود که اگر قرار دهیم $\Delta n = k(n) - k(n-1)$، آنگاه

$$\Delta(n) = \frac{-rC_1}{\lambda n(n-r)} + C_2$$ ← در واقع مشتق است

یک بررسی ساده $\Delta(n)$ نشان می‌دهد مقداری از n که $k(n)$ را ماکزیمم می‌کند برابر است با

$$n = \frac{r}{2}\left[1 + \left(1 + \frac{4C_1}{rC_2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

همانطور که ملاحظه می‌شود مقدار n به پارامتر مجهول λ بستگی دارد. لذا برای تعیین مقداری برای n ابتدا باید λ را از طریقی تقریب زده و سپس n را محاسبه نمود. مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۱۲.۶ در مثال ۱۱.۶ فرض کنید مهندیس به جای آن که آزمون را به مدت ۴۵۰ ساعت انجام دهند، تصمیم بگیرند که ۳۰ لامپ را وارد آزمایش کرده و n را طوری تعیین کنند که هزینه آزمایش مینیمم شود. اگر هزینه آزمون هر لامپ $C_1 = 4$ و هزینه مدت آزمون $C_2 = 40$ باشد، حجم نمونه لازم چقدر است.

حل. با توجه به این که $\lambda = 0/001$، مقدار n برابر خواهد شد با

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{30}{2}\left[1+\left(1+\frac{4\times 4}{30\times 40}\times 1000\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\simeq 72
\end{aligned}
$$

بنابراین با توجه به داده‌های فوق برای کاهش هزینه باید $n = 72$ لامپ را وارد آزمایش کرد. همچنین با اطلاعات مفروض در مسئله، متوسط دوره آزمایش برابر است با

$$
\begin{aligned}
E(t_{72}) &= \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{30}\frac{1}{73-i} \\
&= 1000\sum_{i=1}^{30}\frac{1}{73-i} \\
&= 541 \text{ ساعت}
\end{aligned}
$$

اگر از ابتدا فقط ۳۰ لامپ را وارد آزمایش کنند آنگاه متوسط دوره آزمایش برابر خواهد شد با

$$
\begin{aligned}
E(t_{30}) &= 1000\sum_{i=1}^{30}\frac{1}{31-i} \\
&= 4003 \text{ ساعت}
\end{aligned}
$$

بنابراین اگر ۷۲ لامپ وارد آزمایش شوند، مدت زمان آزمایش فقط ۱۳/۵٪ مدت زمان آزمایش برای حالتی است که فقط ۳۰ لامپ در آزمایش قرار بگیرند.

۱۱.۶ مسائل

۱. فرض کنید که داده‌های زیر از یک آزمون طول عمر تولید شده‌اند که توزیع تحت بررسی آن‌ها نمایی $E(\lambda)$ است.

۳۰	۳۴۳	۱۱۸	۱۱۷	۲۱

۶۰	۶۴	۴۲	۱۹۳	۶۸
۲۴۷	۲۰۵	۲۵۸	۲۰۰	۳۱۹
۱۰۳	۲۲۷	۵	۲۸۲	۱۳۵
۵۳۶	۱۵	۲۴۰	۶۲۶	۲۱۱
۲۶	۲۵۸	۷۹	۴۳۳	۴۲۵
۵۰	۲۷۲	۷۵	۸	۵۴۱
۲۱۱	۴۱۵	۲۲۰	۳۷۹	۲۴۸
۷۷	۶۷	۵۴	۳۲۴	۱۲۳
۲۳۷	۵۴۷	۱۰۴	۱۰۱۱	۶۱

الف) با استفاده از روش گشتاوری و روش ML برآورد λ را به دست آورید.
ب) فاصله اطمینان ۹۵٪ برای λ را به دو طریق دقیق و تقریبی به دست آورید.
ج) قابلیت اعتماد محصولی با چنین توزیع در نقطه ۱۰۰ چقدر است.

۲. در تمرین ۱ فرض کنید تنها ۲۰ زمان شکست اولیه را مشاهده کنیم و بقیه مشاهدات سانسور شوند. با این فرضیات قسمت‌های الف تا ج را دوباره محاسبه کنید.

۳. فرض کنید داده‌های زیر از یک آزمون طول عمر به دست آمده‌اند که توزیع تحت بررسی آن‌ها $W(\lambda,\beta)$ است.

۶۳۵/۶	۴۵۶/۷	۳۳۵/۵	۲۱۶/۲	۱۷۰/۰
۳۶۹/۰	۴۵۹/۵	۱۰۰/۸	۲۰۴/۰	۴۶۵/۰
۳۱۲/۰	۴۲۰/۹	۴۵۳/۵	۲۲۸/۲	۲۵۴/۶
۱۹۶/۱	۳۰۶/۱	۸۲/۸	۵۲۸/۹	۳۱۹/۸
۷۲/۴	۲۱۶/۳	۳۵۶/۰	۲۷۰/۲	۲۸۵/۰
۲۲/۱	۱۳۷/۷	۱۸۱/۵	۲۵۵/۰	۳۰۷/۳
۳۰۲/۲	۱۸۰/۶	۹۳/۷	۳۰۲/۲	۳۱۸/۵
۱۱۴/۴	۱۵۹/۸	۳۱۴/۶	۱۱۷/۵	۲۴۲/۷
۶۸/۴	۲۳۱/۴	۲۸۲/۰	۷۰/۳	۴۵۸/۰
۲۰۰/۹	۲۰۳/۱	۱۷۲/۹	۹۳/۱	۱۳۰/۹

الف) برآوردهای گشتاوری و ML پارامترهای λ و β را به دست آورید.

ب) فاصله اطمینان تقریبی برای λ و β را تعیین کنید.
ج) تابع قابلیت سیستمی با این توزیع طول عمر را در نقطه ۱۰۰ محاسبه کنید.

۴. در تمرین ۳ فرض کنید تنها ۲۰ زمان شکست اولیه را مشاهده می‌کنیم و بقیه داده‌ها سانسور می‌شوند. با این فرضیات برآورد ML پارامترها را تعیین کرده و فاصله‌های اطمینان تقریبی برای λ و β را به دست آورید.

۵. فرض کنید توزیع تحت بررسی گاما $G(\lambda, \beta)$ باشد.
الف) تحت داده‌های کامل به حجم n معادلات درستنمایی را برای برآورد λ و β تشکیل دهید.
ب) تحت سانسور نوع II، معادلات درستنمایی را تشکیل دهید.
ج) تحت داده‌های گروهی، معادلات درستنمایی را تشکیل دهید.

۶. فرض کنید در زمان $t=۰$، n واحد را وارد آزمایش می‌کنیم. اطلاعاتی که در مورد واحد iام داریم این است در بازه $(۰, t_i)$ دچار شکست شده یا طول عمر آن از t_i بیشتر است، که در آن t_i یک مقدار معلوم است و $i = i = ۱,۲,\ldots,n$.
الف) تابع درستنمایی متناظر با این آزمون را تشکیل دهید.
ب) اگر فرض کنیم که توزیع تحت بررسی $E(\lambda)$ است و به ازای هر i $t_i = t$، برآوردگر ML λ را با این شرط که قبل از t r شکست $(r < n)$ داریم به دست آورید.

۷. فرض کنید ۱۲ واحد با توزیع نمایی $E(\lambda)$ در زمان $t=۰$ را وارد آزمایش می‌کنیم. اگر پس از شکست هشتم آزمایش را خاتمه داده و مشاهدات زیر برحسب ساعت حاصل شود،

۶۷۲، ۴۹۷، ۴۷۰، ۳۰۰، ۱۸۵، ۱۵۷، ۵۸، ۳۱

الف) برآورد MLE λ را به دست آورید.
ب) یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای λ به دو طریق پیدا کنید.
ج) برآورد ML $t_{۰/۰۱}$ را به دست آورید.
د) اگر آزمایش به جای آن که در زمان ۶۷۲ خاتمه پیدا می‌کرد در زمان ۷۲۰ تمام می‌شد (یعنی زمان ۸امین شکست ۷۲۰ بود) چه تغییری در مقدار برآورد λ حاصل می‌شد؟ در این مورد بحث کنید.

۸. در آزمون‌های طول عمر گاهی اوقات ممکن است در زمان $t-h$ واحد مورد بررسی هنوز فعال باشد اما در زمان t از کار افتاده باشد. به عنوان مثال فرض کنید n واحد از توزیع نمایی $E(\lambda)$ را در زمان $t=۰$ وارد آزمایش کنیم. فرض کنید هنگامیکه طول عمر واحدها در

فاصله $(t_i - h, t_i)$، $i = ۱,۲,\ldots,r$، هستند زمان شکست را t_i ثبت می‌کنیم که در آن t_iها مقادیر مرتب شده زمان‌های شکست هستند با فرض این که بقیه $n-r$ واحد در زمان t_r سانسور شده باشند.

الف) تابع درستنمایی را تشکیل داده و نشان دهید ML λ برابر است با

$$\hat{\lambda} = \frac{۱}{h} \ln\left(\frac{T}{T - rh}\right)$$

ب) در تمرین ۴ اگر داده‌ها به نزدیکترین روز گرد شوند، برآورد ML λ را بر حسب روز به دست آورید.

۹. داده‌های زیر زمان شکست برحسب ساعت یک نوع سیستم می‌باشد که توزیع طول آن لگ نرمال می‌باشد.

۲/۷۳	۰/۵۶	۰/۲۸
۱/۲۵	۰/۵۶	۰/۸۳
۰/۴۷	۱/۹۵	۳/۴۳
۰/۷۵	۰/۶۶	۱/۱۴
۱/۸۴	۰/۹۰	۱/۸۸
۰/۷۲	۱/۶۷	۰/۶۲
۲/۷۱	۰/۵۱	۰/۲۸

برآورد پارامترهای توزیع را به روش گشتاوری و ML به دست آورید.

۱۰. ۱۳ قطعه خازن الکتریکی جهت برآورد متوسط طول عمر در زمان $t = ۰$ وارد آزمایش شده‌اند. آزمایش در زمان دهمین شکست خاتمه پیدا کرده و زمان‌های شکست زیر حاصل شده است (زمان‌ها برحسب هزار ساعت هستند).

۳/۰۰، ۲/۵۰، ۱/۷۶، ۱/۵۴، ۱/۳۳، ۱/۳۲، ۱/۰۰، ۰/۸۸، ۰/۵۰، ۰/۲۲

با فرض آن که طول عمر خازن‌ها دارای توزیع $W(\lambda, \beta)$ باشد

الف) برآورد ML λ و β را به دست آورید.

ب) قابلیت اعتماد خازن‌ها را در زمان ۶۰۰ ساعت تعیین کنید.

۱۱. ۱۵ ترانزیستور الکتریکی در زمان $t = ۰$ وارد آزمایش شدند. در یک آزمایش شتابنده فرض کنید پس از $t = ۲$ (روز) مورد بازرسی قرار گرفته و مشاهد شود ۵ تای آنها از کار افتاده

و بقیه هنوز کار می‌کنند. با فرض آن که از تجربیات قبلی بدانیم توزیع طول عمر ترانزیستورها وایبل $W(\lambda = ۰/۴, \beta)$ باشد برآورد ML β را به دست آورید.

۱۲. فرض کنید $t_۱, t_۲, \ldots, t_n$ طول عمر n قطعه در یک آزمایش طول عمر باشند که در آن توزیع طول عمر قطعات نمایی با چگالی احتمال زیر است.

$$f(t, \lambda, \theta) = \lambda e^{-\lambda(t-\theta)}, t > \theta$$

الف) برآوردگر ML λ و θ را به دست آورید.

ب) اگر $n = ۱۰$ واحد از قطعات دارای طول عمر با مقادیر زیر (برحسب روز) باشند

۲/۵۰، ۲/۳۱، ۲/۰۳، ۱/۸۹، ۱/۷۱، ۱/۵۳، ۱/۴۹، ۱/۳۷، ۱/۲۵، ۱/۱۱

برآوردهای λ و θ به روش گشتاوری و ML به دست آورید.

۱۳. فرض کنید یک دستگاه در زمان $t = ۰$ شروع به کار می‌کند. هنگامیکه از کار می‌افتد بلافاصله با یک دستگاه جدید تعویض می‌شود. فرض کنید تعویض‌ها در فاصله $[۰, T]$ صورت می‌گیرد. با فرض این که تعویض در زمان‌های $۰ < t_۱ < t_۲ < \cdots < t_k < T$ صورت گیرد و توزیع طول عمر دستگاه‌ها $f(t, \alpha, \beta)$ باشد،

الف) تابع درستنمایی را تشکیل دهید.

ب) اگر $f(t, \alpha, \beta)$، $W(۱, \beta)$ باشد و مشاهدات زیر به دست آمده باشد، MLE β را به دست آورید.

$$T = ۱۰,\ t_۱ = ۲,\ t_۲ = ۳/۳,\ t_۳ = ۵/۶,\ t_۴ = ۷/۲,\ t_۵ = ۸/۹$$

۱۴. طول عمر یک قطعه دارای تابع توزیع $F(t, \alpha, \beta)$ است. n واحد از این توزیع در زمان $t = ۰$ وارد آزمایش می‌شوند و در زمان‌های $t_۱ = T$، $t_۲ = ۲T$ و $t_۳ = ۳T$ مورد بازرسی قرار می‌گیرند و $k_۱$ واحد در فاصله $[۰, T]$ و $k_۲$ واحد در فاصله $[T, ۲T]$ و $n - k_۱ - k_۲$ واحد باقیمانده در فاصله $[۲T, ۳T]$ از کار افتاده‌اند. تابع درستنمایی را برای این آزمایش تشکیل دهید.

۱۵. فرض کنید n واحد در زمان $t = ۰$ وارد آزمایش می‌شوند و $t_۱, t_۲, \ldots, t_r$ زمان‌های شکست r واحد از n واحد باشند و $t_{r+۱}, t_{r+۲}, \ldots, t_n$ زمان‌های سانسور $n - r$ واحد باقیمانده باشند. با فرض آن که توزیع طول عمر واحدها $F(t, \theta)$ با تابع چگالی $f(t, \theta)$ باشند نشان دهید که تابع لگ درستنمایی برابر است با

$$l(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln\left[f(t_i,\theta)\right]+\sum_{i=r+1}^{n}\ln\left[1-F(t_i,\theta)\right]$$

توجه کنید که در اینجا لزوماً فرض مرتب بودن t_i را نیاز نداریم.

۱۶. فرض کنید در یک آزمون طول عمر شتابنده ۱۰ واحد از نوعی سوپاپ را وارد آزمایش کرده‌ایم و داده‌های زیر حاصل شده باشد (برحسب 10^3 چرخه)

۲۰۰*، ۲۰۰*، ۱۷۶/۲، ۱۷۰/۸، ۱۲۷/۵، ۱۱۹/۳، ۱۱۵/۳، ۱۰۵/۶، ۷۳/۶*

که در آن داده‌های با علامت * سانسور شده‌اند. با فرض اینکه داده‌ها از توزیع $W(\lambda,\beta)$ باشند با استفاده از تمرین ۹،

الف) λ و β را به روش ML به دست آورید.

ب) قابلیت اعتماد سوپاپ‌ها را در $t=120$ به دست آورید.

ج) میانه توزیع را به روش ML برآورد کنید.

د) یک فاصله اطمینان تقریبی ۹۵٪ برای λ و یک فاصله اطمینان تقریبی ۹۰٪ برای β به دست آورید.