فصل ۳

احتمال پیشامدهای فازی

مقدمه

در فصل حاضر، مفهوم احتمال یک پیشامد را به حالتی که پیشامدها نادقیق باشند، تعمیم می‌دهیم. در بخش نخست، برای یادآوری، مفاهیم اساسی احتمال را مرور می‌کنیم. این مرور به ویژه برای درک این نکته که مفهوم پیشامد فازی و احتمال پیشامدهای فازی، تعمیم‌هایی طبیعی از مفهوم معمولی پیشامد و احتمال آن است، حائز اهمیت می‌باشد. در بخش‌های دوم و سوم، پیشامدهای فازی و احتمال پیشامدهای فازی مطالعه می‌شوند. استقلال دو پیشامد فازی و احتمال شرطی آنها در بخش چهارم مورد بررسی قرار می‌گیرند. سرانجام، در بخش پنجم احتمال پیشامدهای فازی را بر پایه‌ی تابع احتمال و تابع چگالی احتمال مطالعه می‌کنیم. ازین فصل به بعد، برای تمایز با مجموعه‌های معمولی، مجموعه‌های فازی را همراه با علامت ~ نشان می‌دهیم و، برای نمونه، می‌نویسیم $\tilde{A}$.

۱.۳ یادآوری

یک آزمایش تصادفی به آزمایشی گفته می‌شود که نتیجه‌ی آن به‌طور دقیق، قبل از آزمایش مشخص نباشد. مجموعه‌ی تمام حالت‌های ممکن را در یک آزمایش تصادفی فضای نمونه نامیده و با Ω نشان می‌دهیم. تحت شرایطی کلی، هر زیرمجموعه از فضای نمونه را یک پیشامد گوییم. در یک آزمایش تصادفی اگر نتیجه‌ی آزمایش، عضو یک پیشامد باشد گوییم آن پیشامد رخ داده است. چون پیشامدها در واقع همان مجموعه‌ها هستند لذا می‌توان درباره‌ی متمم یک پیشامد، اجتماع چند پیشامد، اشتراک چند پیشامد و ... به‌عنوان پیشامدهای جدید صحبت نمود. بدیهی است که تمام ویژگی‌های مربوط به عملگرهای مجموعه‌ای (مانند جابه‌جایی اجتماع، جابه‌جایی اشتراک، شرکت‌پذیری

اجتماع، ...) برای پیشامدها برقرار است.

مثال ۱.۳ یک تاس را پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ی آزمایش عبارت است از

$$\Omega = \{۱, ۲, \ldots, ۶\}$$

دو پیشامد A: عدد رو شده زوج باشد، و B: عدد رو شده کوچک‌تر از ۴ باشد را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$A = \{۲, ۴, ۶\} \quad , \quad B = \{۱, ۲, ۳\}$$

در اینجا A^c، $A \cup B$ و $A \cap B$ یعنی پیشامدهای: عدد زوج رو نشود؛ عدد زوج یا کوچکتر از ۴ رو شود، و عدد زوج و کوچک‌تر از ۴ رو شود؛ عبارت‌اند از

$$A^c = \{۱, ۳, ۵\} \quad , \quad A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۶\} \quad , \quad A \cap B = \{۲\}$$

مثال ۲.۳ زمان کارکرد یک ترانزیستور را بررسی می‌کنیم. فضای نمونه‌ی آزمایش عبارت است از

$$\Omega = \{t; ۰ \leq t < \infty\}$$

دو پیشامد از فضای نمونه‌ی فوق، عبارت‌اند از A: ترانزیستور پیش از ۱۰۰ ساعت از کار بیفتد، و B: ترانزیستور دست کم ۱۵۰ ساعت کار کند، یعنی

$$A = \{t; ۰ \leq t < ۱۰۰\} \quad , \quad B = \{t; ۱۵۰ \leq t\}$$

تعریف ۱.۳ فرض کنید Ω فضای نمونه‌ی مربوط به یک آزمایش تصادفی باشد. تابع مجموعه‌ای P یک اندازه احتمال بر Ω نامیده می‌شود اگر در سه اصل زیر صدق کند (اصل سوم، اصل جمع پذیری نام دارد)

۱) $P(A) \geq ۰, \ \forall A \subseteq \Omega$

۲) $P(\Omega) = ۱$

۳) $P(\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i) = \sum_{i=۱}^{\infty} P(A_i)$ (برای دنباله شمارا از پیشامدهای جدا از هم از Ω)

گزاره ۱.۳ بر پایه‌ی اصول سه‌گانه احتمال، نتایج زیر را می‌توان ثابت کرد

۱) $P(\varnothing) = ۰$

۲) $P(A) \leq ۱$

۳) $P(A^c) = ۱ - P(A)$

۴) $P(A \cap B) \leq \min[P(A), P(B)]$

۵) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

۶) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

۷) $P(\bigcup_{i=۱}^{n} A_i) \leq \sum_{i=۱}^{n} P(A_i)$ (نامساوی بول)

فضای نمونه متناهی یا نامتناهی شمارا

اگر فضای نمونه متناهی یعنی به‌صورت $\Omega = \{w_۱, w_۲, \ldots, w_N\}$ باشد، یا نامتناهی شمارا یعنی به‌صورت $\Omega = \{w_۱, w_۲, \ldots\}$ باشد، آنگاه احتمال رخ دادن هر پیشامد A از فضای نمونه عبارت است از مجموع احتمال‌های منسوب به اعضای آن پیشامد، یعنی

$$P(A) = P(\{w; w \in A\}) = \sum_{w \in A} P(\{w\})$$

فرض کنید A یک پیشامد از فضای نمونه Ω باشد. می‌دانیم که تابع نشانگر مجموعه A به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$I_A(w) = \begin{cases} ۱ & w \in A \\ ۰ & w \neq A \end{cases}$$

با استفاده از تابع نشانگر پیشامد A می‌توانیم احتمال رخ دادن پیشامد A را به‌صورت زیر بنویسیم

$$P(A) = \sum_{w \in A} P(\{w\}) = \sum_{w \in \Omega} I_A(w) P(\{w\})$$

در بخش آینده از این نوع نمایش استفاده کرده و تعریف احتمال یک پیشامد را برای پیشامدهای فازی تعمیم می‌دهیم.

مثال ۳.۳ در مثال ۱.۳، فرض کنید تاس، سالم باشد یعنی $P(\{۱\}) = \cdots = P(\{۶\}) = \frac{۱}{۶}$. در این صورت احتمال رخ دادن پیشامد $A = \{۲, ۴, ۶\}$ عبارت است از

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{w \in \Omega} I_A(w) P(\{w\}) \\ &= I_A(۱)P(\{۱\}) + I_A(۲)P(\{۲\}) + \cdots + I_A(۶)P(\{۶\}) \\ &= (۰ \times \tfrac{۱}{۶}) + (۱ \times \tfrac{۱}{۶}) + \cdots + (۱ \times \tfrac{۱}{۶}) = \tfrac{۱}{۲} \end{aligned}$$

فضای نمونه پیوسته

در حالتی که فضای نمونه Ω پیوسته و P یک اندازه احتمال بر Ω باشد، با استفاده از نماد تابع نشانگر، احتمال هر پیشامد مانند A را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$P(A) = \int_{w\in\Omega} I_A(w)dP(w)$$

متغیر تصادفی، تابع توزیع، تابع احتمال، تابع چگالی احتمال

تعریف ۲.۳ تحت شرایطی کلی، یک متغیر تصادفی X عبارت است از یک تابع که فضای نمونه را به مجموعه اعداد حقیقی می‌نگارد، یعنی برای هر $\omega \in \Omega$، $X(w)$ یک عدد حقیقی است.

مثال ۴.۳ آزمایشی را در نظر بگیرید که در آن یک سکه سالم مکرراً پرتاب می‌شود تا آن که شیر رو شود. فضای نمونه عبارت است از

$$\Omega = \{H, TH, TTH, TTTH, \ldots\}$$

فرض کنید متغیر تصادفی X تعداد پرتاب‌های لازم تا رو شدن اولین شیر باشد، در این صورت

$$X(H) = ۱, \quad X(TH) = ۲, \quad X(TTH) = ۳, \quad \ldots .$$

در اینجا متغیر تصادفی X، فضای نمونه را به مجموعه $\{۱, ۲, ۳, \ldots\}$، که زیرمجموعه‌ای از R است، می‌نگارد.

تعریف ۳.۳ فرض کنید X یک متغیر تصادفی، تعریف شده بر یک فضای نمونه مانند Ω باشد. تابع توزیع X به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$F(x) = P(X \le x) = P(\{\omega \in \Omega; X(w) \le x\}$$

تعریف ۴.۳ در صورتی که حوزه‌ی مقادیر متغیر تصادفی X متناهی یا نامتناهی شمارا باشد، X را یک متغیر تصادفی گسسته می‌نامیم. در این حالت تابع (جرم) احتمال X به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$P(x) = P(X = x)$$

تعریف ۵.۳ در صورتی که تابع توزیع X در هر نقطه از R پیوسته باشد آنگاه X را یک متغیر تصادفی پیوسته می‌نامیم. در این حالت تابع $f(x)$ را که در رابطه زیر صدق کند تابع چگالی احتمال X می‌نامیم

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

نکته ۱.۳ فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از R باشد. در این‌صورت $P(X \in A)$، یعنی احتمال این که مقدار متغیر تصادفی X در مجموعه A قرار گیرد، را می‌توان این گونه نوشت

$$\begin{aligned} P(X \in A) &= P(\{\omega \in \Omega; X(w) \in A\}) \\ &= \begin{cases} \sum_{x\in A} P(x) & \text{حالت گسسته} \\ \int_A f(x)dx & \text{حالت پیوسته} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sum_{x\in R} I_A(x)P(x) & \text{حالت گسسته} \quad (۱.۳) \\ \int_{-\infty}^{\infty} I_A(x)f(x)dx & \text{حالت پیوسته} \quad (۲.۳) \end{cases} \end{aligned}$$

که در آن، $I_A(x)$ تابع نشانگر مجموعه A است.

تعریف ۶.۳ فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته (پیوسته) باشد. اگر $\sum_{x\in R} |x|P(x)$ $\left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx\right)$ همگرا باشد، گوییم امید ریاضی X وجود دارد و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{x\in R} xP(x) & \text{حالت گسسته} \\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx & \text{حالت پیوسته} \end{cases}$$

اگر X یک متغیر تصادفی باشد و $y = g(x)$، آنگاه (تحت شرایط کلی) Y خود یک متغیر تصادفی است و ثابت می‌شود که امید ریاضی $Y = g(X)$، در صورت وجود، عبارت است از

$$Eg(X) = \begin{cases} \sum_{x\in R} g(x)P(x) & \text{حالت گسسته} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx & \text{حالت پیوسته} \end{cases}$$

نکته ۲.۳ براساس تعریف ۶.۳ و نکته ۱.۳، می‌توان احتمال هر پیشامد مانند A را به‌صورت امید ریاضی تابع نشانگر پیشامد A این‌گونه نوشت

$$P(X \in A) = \begin{cases} \sum_{x \in R} I_A(x)P(x) & \text{حالت گسسته} \\ \int_{-\infty}^{\infty} I_A(x)f(x)dx & \text{حالت پیوسته} \end{cases}$$
$$= EI_A(X)$$

۲.۳ پیشامدهای فازی

تعریف ۷.۳ فرض کنید Ω یک فضای نمونه باشد. تحت شرایط کلی، هر مجموعه فازی $\tilde{A}$ از Ω را یک پیشامد فازی از Ω گوییم.

مثال ۵.۳ در پرتاب یک تاس که فضای نمونه عبارت است از $\Omega = \{۱, ۲, \cdots, ۶\}$، پیشامدهای $\tilde{A}$ عدد رو شده کوچک باشد، و $\tilde{B}$ عدد رو شده تقریباً ۵ باشد را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت

$$\tilde{A} = \left\{\frac{۱}{۱}, \frac{۰/۷}{۲}, \frac{۰/۴}{۳}, \frac{۰/۱}{۴}\right\}$$
$$\tilde{B} = \left\{\frac{۰/۲}{۳}, \frac{۰/۶}{۴}, \frac{۱}{۵}, \frac{۰/۶}{۶}\right\}$$

مثال ۶.۳ در بررسی زمان کارکرد یک ترانزیستور که فضای نمونه آن عبارت است از

$$\Omega = \{t; ۰ \leq t < \infty\}$$

زمان کارکرد «حدوداً ۱۰۰ ساعت» را می‌توان با پیشامد فازی زیر توصیف کرد

$$\tilde{A}(t) = \begin{cases} \frac{t - ۹۰}{۱۰} & ۹۰ \leq t < ۱۰۰ \\ \frac{۱۱۰ - t}{۱۰} & ۱۰۰ \leq t < ۱۱۰ \end{cases}$$

چون پیشامدهای فازی، در واقع همان مجموعه‌های فازی از یک فضای نمونه هستند، لذا می‌توان از متمم یک پیشامد فازی، اجتماع چند پیشامد فازی، و ... صحبت نمود. بدیهی است که تمام ویژگی‌های مربوط به عملگرهای مجموعه‌ای در مورد مجموعه‌های فازی، برای پیشامدهای فازی نیز برقرار است.

۳.۳ احتمال پیشامدهای فازی

تعریف ۸.۳ فرض کنید Ω یک فضای نمونه و P یک اندازه احتمال بر Ω باشد. اگر $\tilde{A}$ یک پیشامد فازی از Ω باشد، آنگاه احتمال پیشامد فازی $\tilde{A}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$P(\tilde{A}) = \int_{\Omega} \tilde{A}(w)dP = \begin{cases} \sum_{\omega \in \Omega} \tilde{A}(w)P(w) & \text{اگر } \Omega \text{ گسسته باشد} \\ \int_{\Omega} \tilde{A}(w)dP(w) & \text{اگر } \Omega \text{ پیوسته باشد} \end{cases}$$

دقت کنید که تعریف بالا مشابه روابط ۱.۳ و ۲.۳ است. با این تفاوت که به جای $I_A(w)$، تابع نشانگر پیشامد معمولی A، از $\tilde{A}(w)$ یعنی تابع عضویت پیشامد فازی $\tilde{A}$ استفاده نموده‌ایم. پس تعریف ۸.۳ یک تعمیم طبیعی برای تعریف احتمال رخ دادن یک پیشامد است.

مثال ۷.۳ در مثال ۵.۳، فرض کنید که تاس، سالم است یعنی $P(\{۱\}) = \cdots = P(\{۶\}) = \frac{۱}{۶}$. در این حالت احتمال رخ دادن پیشامد فازی $\tilde{A}$ برابر است با

$$\begin{aligned} P(\tilde{A}) &= \sum_{\omega \in \Omega} \tilde{A}(w)P(w) \\ &= \tilde{A}(۱)P(\{۱\}) + \tilde{A}(۲)P(\{۲\}) + \cdots + \tilde{A}(۶)P(\{۶\}) \\ &= (۱ \times \frac{۱}{۶}) + (۰/۷ \times \frac{۱}{۶}) + (۰/۴ \times \frac{۱}{۶}) + (۰/۱ \times \frac{۱}{۶}) \\ &= \frac{۲/۲}{۶} = ۰/۳۷ \end{aligned}$$

پس در پرتاب یک تاس سالم، احتمال رو شدن یک عدد کوچک، برابر ۰/۳۷ است.

تعبیر $P(\tilde{A})$

فرض کنید $\tilde{A}$ یک پیشامد فازی از فضای نمونه‌ای Ω باشد. چون هر عضو از فضای نمونه با درجه‌ای متعلق به $\tilde{A}$ است، بنابراین $P(\tilde{A})$ را می‌توان این گونه تعبیر کرد:

اگر، بر پایه‌ی اندازه احتمال P، یک عنصر از Ω انتخاب کنیم، آنگاه مقدار مورد انتظار برای درجه عضویت آن عنصر در $\tilde{A}$، برابر $P(\tilde{A})$ است. برای نمونه مقدار $P(\tilde{A}) = ۰/۳۷$ در مثال ۷.۳ بدین معنی است که در پرتاب یک تاس سالم، انتظار داریم که عدد رو شده با درجه عضویت ۰/۳۷ کوچک باشد.

بسیاری از روابطی که برای تابع احتمال در حالت معمولی برقرار است، برای تابع احتمال پیشامدهای فازی که در تعریف ۸.۳ بیان شد نیز برقرار است.

گزاره ۲.۳ فرض کنید Ω یک فضای نمونه و P یک اندازه احتمال بر Ω باشد. همچنین $\tilde{A}$، $\tilde{B}$ و $\tilde{A}_i$، $i = ۱, ۲, \ldots$ پیشامدهای فازی از Ω باشند. آنگاه

۱) $P(\tilde{A}) \leq ۱$

۲) $P(\tilde{A}^c) = ۱ - P(\tilde{A})$

۳) $P(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \leq \min[P(\tilde{A}), P(\tilde{B})]$

۴) $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Rightarrow P(\tilde{A}) \leq P(\tilde{B})$

۵) $P(\tilde{A} \cup \tilde{B}) = P(\tilde{A}) + P(\tilde{B}) - P(\tilde{A} \cap \tilde{B})$

۶) $P(\bigcup_{i=۱}^{n} \tilde{A}_i) = \sum_i P(\tilde{A}_i) - \sum_{i<j} P(\tilde{A}_i \cap \tilde{A}_j) + \cdots + (-۱)^{n+۱} P(\bigcap_{i=۱}^{n} \tilde{A}_i)$

۷) $P(\bigcup_{i=۱}^{n} \tilde{A}_i) \leq \sum_{i=۱}^{n} P(\tilde{A}_i)$ (نامساوی بول)

گزاره ۳.۳ با مفروضات گزاره ۲.۳، داریم

۱) $P(\tilde{A} + \tilde{B}) = P(\tilde{A}) + P(\tilde{B}) - P(\tilde{A} \cdot \tilde{B})$

۲) $P(\tilde{A}_۱ + \cdots + \tilde{A}_n) = \sum_i P(\tilde{A}_i) - \sum_{i<j} P(\tilde{A}_i \cdot \tilde{A}_j) + \cdots + (-۱)^{n+۱} P(\tilde{A}_i \cdot \ldots \cdot \tilde{A}_n)$

۳) $P(\tilde{A}_۱ + \cdots + \tilde{A}_n) \leq \sum_{i=۱}^{n} P(\tilde{A}_i)$

که در آن‌ها، $\tilde{A} \cdot \tilde{B}$ و $\tilde{A} + \tilde{B}$ به‌ترتیب ضرب جبری و جمع احتمالی دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ است، یعنی

$$\begin{aligned} (\tilde{A} \cdot \tilde{B})(x) &= \tilde{A}(x)\tilde{B}(x) \\ (\tilde{A} + \tilde{B})(x) &= \tilde{A}(x) + \tilde{B}(x) - \tilde{A}(x)\tilde{B}(x) \end{aligned}$$

مثال ۸.۳ مجدداً مثال ۵.۳ (پرتاب یک تاس سالم)، و دو پیشامد فازی $\tilde{A}$ (کوچک) و $\tilde{B}$ (تقریباً ۵) را در نظر بگیرید. برای این پیشامدها داریم

$$P(\tilde{A}) = ۰/۳۷, \quad P(\tilde{A}^c) = ۰/۶۳ \quad , \quad P(\tilde{B}) = ۰/۴, \quad P(\tilde{B}^c) = ۰/۶$$

$$P(\tilde{A} \cup \tilde{B}) = ۰/۷۲ \quad , \quad P(\tilde{A} \cdot \tilde{B}) = ۰/۰۲$$

$$P(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = ۰/۰۵ \quad , \quad P(\tilde{A} + \tilde{B}) = ۰/۷۵$$

۴.۳ استقلال دو پیشامد فازی و احتمال شرطی آنها

تعریف ۹.۳ دو پیشامد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را مستقل از هم گوییم اگر

$$P(\tilde{A} \cdot \tilde{B}) = P(\tilde{A}) \cdot P(\tilde{B})$$

تعریف ۱۰.۳ اگر $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو پیشامد فازی باشند، آنگاه احتمال شرطی $\tilde{A}$ به شرط $\tilde{B}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$P(\tilde{A}|\tilde{B}) = \begin{cases} \dfrac{P(\tilde{A} \cdot \tilde{B})}{P(\tilde{B})} & P(\tilde{B}) > ۰ \quad \text{اگر} \\ ۰ & P(\tilde{B}) = ۰ \quad \text{اگر} \end{cases}$$

آشکار است که، مانند حالت پیشامدهای معمولی، اگر $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو پیشامد فازی مستقل از هم باشند آنگاه $P(\tilde{A}|\tilde{B}) = P(\tilde{A})$ و $P(\tilde{B}|\tilde{A}) = P(\tilde{B})$.

مثال ۹.۳ در مثال ۸.۳ مقادیر زیر را به‌دست آوردیم

$$P(\tilde{A}) = ۰/۳۷ \quad , \quad P(\tilde{B}) = ۰/۴ \quad , \quad P(\tilde{A} \cdot \tilde{B}) = ۰/۰۲$$

چون $P(\tilde{A} \cdot \tilde{B}) \neq P(\tilde{A})P(\tilde{B})$ پس دو پیشامد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ مستقل از هم نیستند. هم‌چنین

$$P(\tilde{A}|\tilde{B}) = \frac{P(\tilde{A} \cdot \tilde{B})}{P(\tilde{B})} = \frac{۰/۰۲}{۰/۴} = ۰/۰۵$$

یعنی اگر بدانیم که عدد روشده تقریباً ۵ است، احتمال آن که این عدد کوچک باشد، برابر ۰/۰۵ است. از سوی دیگر $P(\tilde{B}|\tilde{A}) = ۰/۰۵۴$، یعنی چنان چه بدانیم عدد رو شده، کوچک است، آنگاه احتمال این که تقریباً ۵ باشد برابر ۰/۰۵۴ است.

۵.۳ احتمال پیشامدهای فازی بر پایه‌ی تابع احتمال و تابع چگالی احتمال

تعریف ۱۱.۳ فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال $P(x)$ یا یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد. به‌علاوه $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی

از R باشد (که در اینجا آن را پیشامد فازی می‌نامیم). در این‌صورت $P(X \in \tilde{A})$ را به‌صورت امید ریاضی تابع عضویت پیشامد فازی $\tilde{A}$ تعریف می‌کنیم[1]، یعنی

$$P(X \in \tilde{A}) = E\tilde{A}(X) = \begin{cases} \sum_{x \in R} \tilde{A}(x)P(x) & \text{حالت گسسته} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(x)f(x)dx & \text{حالت پیوسته} \end{cases}$$

دقت کنید که تعریف فوق یک تعمیم طبیعی از رابطه‌ی مربوط به $P(X \in A)$ است که در نکته ۲.۳ بیان نمودیم.

مثال ۱۰.۳ تجربه نشان داده است که ۸۰٪ از قطعات تولیدی یک کارخانه سالم‌اند و ۲۰٪ بقیه دارای عیب هستند. در یک بررسی نمونه‌ای، تعداد ۱۰ قطعه به تصادف انتخاب و بررسی می‌شوند. می‌خواهیم احتمال پیشامد فازی $\tilde{A}$: «تعداد قطعات سالم نمونه، زیاد باشد» را بیابیم، که در آن $\tilde{A}$ به‌صورت زیر تعریف شده است

$$\tilde{A} = \{\frac{۰/۱}{۶}, \frac{۰/۳}{۷}, \frac{۰/۵}{۸}, \frac{۰/۸}{۹}, \frac{۱}{۱۰}\}$$

طبق تعریف ۱۱.۳، و با توجه به این که متغیر تصادفی X: «تعداد قطعات سالم در نمونه» دارای توزیع دوجمله‌ای $b(n = ۱۰, p = ۰/۸۰)$ است، داریم

$$\begin{aligned} P(X \in \tilde{A}) &= \sum \tilde{A}(x)P(x) \\ &= \sum_{x=۰}^{۱۰} \tilde{A}(x)\binom{۱۰}{x}(۰/۸)^x(۰/۲)^{۱۰-x} \\ &= \tilde{A}(۶)\binom{۱۰}{۶}(۰/۸)^۶(۰/۲)^۴ + \cdots + \tilde{A}(۱۰)\binom{۱۰}{۶}(۰/۸)^{۱۰} \\ &= ۰/۵۴ \end{aligned}$$

مثال ۱۱.۳ زمان کارکرد یک ترانزیستور دارای تابع چگالی احتمال زیر است

$$f(x;\lambda) = \frac{۱}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad x > ۰$$

[1] در اینجا و از این پس، علامت $\in$ برای عضویت در یک مجموعه فازی مانند $\tilde{A}$، با تسامح به‌کار می‌رود. می‌توان به جای $P(X \in \tilde{A})$ از عبارت P (به‌صورت X $\tilde{A}$ باشد) استفاده کرد. ولی برای همسانی با حالت معمولی از نماد $P(X \in \tilde{A})$ استفاده می‌کنیم.

احتمال این که این ترانزیستور حدوداً ۵۰ ساعت کار کند چقدر است؟ منظور از حدوداً ۵۰ (ساعت)، یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر است

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} \frac{x-۴۵}{۵} & ۴۵ \le x < ۵۰ \\ \frac{۵۵-x}{۵} & ۵۰ \le x < ۵۵ \end{cases}$$

حل: با توجه به تعریف ۱۱.۳،

$$\begin{aligned} P(\tilde{A}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(x)f(x;\lambda)dx \\ &= \int_{۴۵}^{۵۰} (\frac{x-۴۵}{۵})\frac{۱}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}dx + \int_{۵۰}^{۵۵} (\frac{۵۵-x}{۵})\frac{۱}{\lambda} e^{-\frac{۱}{\lambda}x}dx \\ &= \left[\frac{\lambda}{۵} e^{-\frac{۴۵}{\lambda}} - (۱+\frac{\lambda}{۵}) e^{-\frac{۵۰}{\lambda}}\right] + \left[\frac{\lambda}{۵} e^{-\frac{۵۵}{\lambda}} + (۱-\frac{\lambda}{۵}) e^{-\frac{۵۰}{\lambda}}\right] \end{aligned}$$

برای نمونه، اگر $\lambda = ۴۰$ آنگاه $P(\tilde{A}) = ۰/۰۴$ به‌دست می‌آید.

مثال ۱۲.۳ در مثال بالا، احتمال این پیشامد را بیابید که ترانزیستور بسیار کم عمر کند، که در آن پیشامد بسیار کم با تابع عضویت زیر تعریف شده است

$$\tilde{B}(x) = \begin{cases} ۱ & ۰ \le x < ۱۵ \\ \frac{۳۰-x}{۱۵} & ۱۵ \le x < ۳۰ \end{cases}$$

حل: با توجه به تعریف ۱۱.۳،

$$\begin{aligned} P(\tilde{B}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{B}(x)f(x;\lambda)dx \\ &= \int_{۰}^{۱۵} \frac{۱}{\lambda} e^{-\frac{۱}{\lambda}x}dx + \int_{۱۵}^{۳۰} (\frac{۳۰-x}{۱۵})\frac{۱}{\lambda} e^{-\frac{۱}{\lambda}x}dx \\ &= [۱-e^{-\frac{۱۵}{\lambda}}] + [(۱-\frac{\lambda}{۱۵}) e^{-\frac{۱۵}{\lambda}} + \frac{\lambda}{۱۵} e^{-\frac{۳۰}{\lambda}}] \\ &= ۱ - \frac{\lambda}{۱۵}(e^{-\frac{۱۵}{\lambda}} - e^{-\frac{۳۰}{\lambda}}) = ۰/۴۳ \qquad (\text{به‌ازای } \lambda = ۴۰) \end{aligned}$$

مثال ۱۳.۳ در مثال بالا، فرض کنید بدانیم زمان کارکرد یک ترانزیستور بسیار کم (به تعبیر $\tilde{B}$) بوده است. احتمال این را بیابید که ترانزیستور حدوداً ۵ ساعت (به تعبیر $\tilde{C}$)

کار کرده باشد، که

$$\tilde{C}(x) = \begin{cases} \frac{x-۳}{۲} & ۳ \leq x < ۵ \\ \frac{۷-x}{۲} & ۵ \leq x < ۷ \end{cases}$$

مقدار λ را برابر ۴۰ در نظر بگیرید.

حل: با توجه به تعریف ۱۰.۳،

$$P(\tilde{C}|\tilde{B}) = \frac{P(\tilde{C} \cdot \tilde{B})}{P(\tilde{B})}$$

در مثال بالا به‌دست آوردیم که $P(\tilde{B}) = ۰/۴۳$. کافی است مقدار $P(\tilde{C} \cdot \tilde{B})$ را بیابیم. دقت کنید که، با توجه به نوع تابع عضویت $\tilde{B}$، داریم $\tilde{C} \cdot \tilde{B} = \tilde{C}$. پس

$$\begin{aligned} P(\tilde{C} \cdot \tilde{B}) &= P(\tilde{C}) \\ &= \int_{۳}^{۵} (\frac{x-۳}{۲}) \frac{۱}{۴۰} e^{-\frac{۱}{۴۰}x} dx + \int_{۵}^{۷} (\frac{۷-x}{۲}) \frac{۱}{۴۰} e^{-\frac{۱}{۴۰}x} dx \\ &= ۰/۰۴۴۵ + ۰/۰۲۰۵ \end{aligned}$$

بنابراین

$$P(\tilde{C}|\tilde{B}) = \frac{۰/۰۶۵}{۰/۴۳۰} = ۰/۱۵۱ .$$

۶.۳ نکات تکمیلی

۱. مفهوم پیشامد فازی و شیوه‌ی محاسبه‌ی احتمال آن و بعضی از مطالب مرتبط با آنها، که در بخش‌های ۲.۳ تا ۴.۳ مطالعه شد، نخستین بار توسط زاده در سال ۱۹۶۸ مطرح گردید [۷]. از آن زمان، بیشتر مطالعاتی که در زمینه‌ی احتمال فازی صورت پذیرفته است، بر پایه‌ی همین رهیافت بوده است.

۲. احتمال یک پیشامد فازی مطابق رهیافت زاده (تعریف ۸.۳) یک عدد دقیق است. بیگر [۴]، کلمنت [۳] و بیگر [۵] متناوباً با تصحیح و بازسازی نتایج قبلی، شیوه‌هایی را برای محاسبه‌ی احتمال یک پیشامد فازی مطرح نموده‌اند طوری که احتمال هر پیشامد فازی به‌صورت یک مجموعه فازی از بازه [۰, ۱] تعریف می‌شود. برای مرور این شیوه‌ها می‌توان به [۱] یا مرجع [۱] فصل ۱ مراجعه نمود.

۳. استقلال دو پیشامد فازی و احتمال شرطی آنها را می‌توان بر پایه‌ی عملگرهایی به غیر

از عملگر ضرب هم تعریف کرد. خواننده علاقمند می‌تواند از عملگرهای دیگر، مانند عملگر مینیمم، در تعریف استقلال (و آنگاه در تعریف احتمال شرطی) استفاده کند و ویژگی‌های این تعاریف را بررسی نماید.

۴. فرض کنید $A_۱, \ldots, A_n$، دنباله‌ای از پیشامدهای فازی، برآمدهای n آزمایش تصادفی مرتبط با یک فضای نمونه باشند. سؤال این است: با توجه به n مشاهده فازی فوق، احتمال پیشامد فازی B چقدر است؟

برای مثال، فرض کنید یک تاس سالم پنج بار ریخته شده است و نتایج گزارش شده اینها بوده‌اند: خیلی بزرگ، تقریباً ۴، متوسط، تقریباً ۴، بزرگ (هر کدام متناظر با یک تابع عضویت). اکنون می‌خواهیم احتمال این را بیابیم که تاس در پرتاب بعدی تقریباً ۲ (با یک تابع عضویت معین) رو شود.

مسئله‌ی فوق موسوم به محاسبه‌ی احتمالات بر پایه‌ی مشاهدات فازی است. خوانندگان علاقمند می‌توانند در این باره به [۲ و ۶] مراجعه نمایند.

۵. رویکرد جدیدی به احتمال (چگونگی صورت‌بندی آن، چگونگی محاسبه آن، چگونگی تفسیر آن) در محیط مبهم (شرایط، وضعیت‌ها و اطلاعات نادقیق) توسط زاده مطرح شده است، که علاقمندان می‌توانند به مرجع [۸] و نیز مرجع [۱۱] فصل ۷ مراجعه کنند.

تمرین‌های فصل سوم

۱.۳ بهره هوشی کودکان ۷ ساله در یک جامعه خاص، توزیع نرمال با میانگین ۱۱۲ و انحراف معیار ۶/۵ دارد. فرض کنید ضریب هوشی بالا، با مجموعه فازی زیر تعریف شده باشد

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۱۱۵ \\ \frac{x-۱۱۵}{۱۵} & ۱۱۵ \leq x < ۱۳۰ \\ ۱ & ۱۳۰ \leq x \end{cases}$$

چند درصد از کودکان ۷ ساله‌ی جامعه، ضریب هوشی بالایی دارند؟ به بیان دیگر اگر از جامعه‌ی فوق یک فرد به تصادف انتخاب شود، احتمال این که ضریب هوشی بالایی داشته باشد، چقدر است؟

۲.۳ تعداد ۱۰ کودک از جامعه‌ی تمرین ۱.۳ به تصادف انتخاب می‌شوند. احتمال این که تعداد کمی از آنها ضریب هوشی بالا داشته باشند چقدر است؟ فرض کنید مفهوم

تعداد کم به‌صورت مجموعه فازی زیر تعریف شده باشد

$$\tilde{B} = \left\{ \frac{۱}{۰}, \frac{۰/۸}{۱}, \frac{۰/۶}{۲}, \frac{۰/۴}{۳}, \frac{۰/۲}{۴} \right\}$$

۳.۳ سکه‌ای سالم پیاپی پرتاب می‌شود تا آن که اولین شیر رو شود. احتمال آن را بیابید که برای مشاهده اولین شیر، تعداد کمی آزمایش لازم باشد. تعداد کم با مجموعه فازی زیر تعریف شده است

$$\tilde{C} = \left\{ \frac{۱}{۱}, \frac{۰/۸}{۲}, \frac{۰/۶}{۳}, \frac{۰/۴}{۴}, \frac{۰/۲}{۵} \right\}$$

۴.۳ با استفاده از نتایج مثال ۸.۳، درستی روابط ۱، ۲، ۴ و ۶ مربوط به گزاره ۲.۳ و همچنین درستی روابط ۱ و ۳ گزاره ۳.۳ را بررسی نمایید.

۵.۳ جعبه‌ای شامل ۵ مهره قرمز و ۷ مهره آبی است. تعداد ۶ مهره به تصادف و بدون جایگذاری از جعبه استخراج می‌کنیم. احتمال آن را بیابید که تعداد مهره‌های قرمز نمونه زیاد باشد. فرض کنید زیاد با مجموعه فازی زیر تعریف شده باشد

$$\tilde{E} = \left\{ \frac{۰/۲}{۲}, \frac{۰/۵}{۳}, \frac{۰/۸}{۴}, \frac{۱}{۵} \right\}$$

۶.۳ عددی به تصادف از بازه [۰, ۱] انتخاب می‌کنیم. احتمال پیشامد فازی $\tilde{A}$: عدد انتخاب شده حدوداً ۰/۷ باشد، را بیابید؛ که در آن

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - ۰/۶}{۰/۱} & ۰/۶ \le x < ۰/۷ \\[2ex] \dfrac{۰/۸ - x}{۰/۱} & ۰/۷ \le x < ۰/۸ \end{cases}$$

۷.۳ در تمرین ۶.۳، هشت عدد به تصادف از بازه [۰, ۱] انتخاب می‌کنیم. احتمال این که حدوداً نیمی از اعداد انتخاب شده، حدوداً ۰/۷ باشند، چقدر است؟ فرض کنید حدوداً چهار به‌صورت مجموعه فازی زیر تعریف شده باشد

$$\tilde{F} = \left\{ \frac{۰/۳}{۲}, \frac{۰/۶}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۰/۶}{۵}, \frac{۰/۳}{۶} \right\}$$

۸.۳ دو تاس سالم ریخته می‌شوند. پیشامدهای فازی $\tilde{A}$: مجموع حدوداً ۱۰ باشد، و $\tilde{B}$: مجموع زیاد باشد، را به‌صورت زیر در نظر بگیرید

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{۰/۱}{۷}, \frac{۰/۴}{۸}, \frac{۰/۷}{۹}, \frac{۱}{۱۰}, \frac{۰/۷}{۱۱}, \frac{۰/۴}{۱۲} \right\}$$

$$\tilde{B} = \left\{ \frac{۰/۲}{۸}, \frac{۰/۴}{۹}, \frac{۰/۶}{۱۰}, \frac{۰/۸}{۱۱}, \frac{۱}{۱۲} \right\}$$

اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده زیاد است، احتمال این که حدوداً ۱۰ باشد چقدر است؟

۹.۳ طول عمر یک لامپ الکترونیکی (برحسب ساعت) متغیری تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر است

$$f(t) = ۰/۱e^{-۰/۱t} \quad t > ۰$$

فرض کنید پیشامد فازی $\tilde{E}$: طول عمر حدوداً ۱۵ ساعت، با تابع عضویت زیر تعریف شده باشد

$$\tilde{E}(t) = \begin{cases} \dfrac{t - ۱۲}{۳} & ۱۲ \le t < ۱۵ \\[2ex] \dfrac{۱۸ - t}{۳} & ۱۵ \le t < ۱۸ \end{cases}$$

الف) احتمال این که یک لامپ از نوع فوق، حدوداً ۱۵ ساعت عمر کند، چقدر است؟
ب) ده لامپ از نوع فوق مورد استفاده قرار گرفته‌اند. احتمال این که دست کم ۳ تای آنها، حدوداً ۱۵ ساعت عمر کنند، چقدر است؟
پ) با توجه به بند ب، احتمال این که تقریباً سه لامپ، حدوداً ۱۵ ساعت عمر کنند، چقدر است؟ فرض کنید تقریباً سه با مجموعه فازی زیر تعریف شده باشد

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{۰/۴}{۱}, \frac{۰/۷}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۰/۷}{۴}, \frac{۰/۴}{۵} \right\}$$

۱۰.۳ در بررسی علت خرابی یک دستگاه که در آن از یک لامپ الکترونیکی از نوع بیان شده در تمرین ۹.۳ استفاده می‌شود، معلوم شده است که لامپ به‌کار رفته در دستگاه، حدوداً ۱۵ ساعت کار کرده است. احتمال آن که این لامپ،
الف) کمتر از ۱۴ ساعت کار کرده باشد، چقدر است؟

ب) بسیار نزدیک به ۱۵ ساعت کار کرده باشد، چقدر است؟ بسیار نزدیک به ۱۵ (ساعت)، با تابع عضویت زیر تعریف شده است

$$\tilde{D}(t) = \begin{cases} ۲(t - ۱۴/۵) & ۱۴/۵ \leq t < ۱۵ \\ ۲(۱۵/۵ - t) & ۱۵ \leq t < ۱۵/۵ \end{cases}$$

۱۱.۳ میزان بارندگی سالانه در منطقه شهداد، برحسب سانتی‌متر، متغیری تصادفی با تابع توزیع زیر است

$$F(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۱۰ \\ ۱ - \frac{۱۰۰}{x^۲} & x \geq ۱۰ \end{cases}$$

مطلوب است احتمال این که سال آینده، میزان بارندگی بسیار زیاد باشد. فرض کنید مفهوم بسیار زیاد به‌صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف شده باشد

$$\tilde{N}(x) = \begin{cases} ۰ & x \leq ۲۰ \\ ۱ - \frac{۲۰}{x} & x > ۲۰ \end{cases}$$

۱۲.۳ اثبات کنید یا، با مثال نقض، رد کنید:
دو پیشامد فازی A و B مستقل از هم‌اند، اگر و فقط اگر به‌ازای هر $\alpha \in (۰, ۱]$، پیشامدهای معمولی A_α و B_α مستقل از هم باشند.

۱۳.۳ احکام گزاره ۲.۳ را ثابت کنید.

۱۴.۳ احکام گزاره ۳.۳ را ثابت کنید.

منابع و مراجع

[۱] طاهری، سید محمود؛ ارقامی، ناصررضا (۱۳۷۱)؛ احتمال پیشامدهای فازی، گزارش نخستین کنفرانس آمار ایران، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۳۳۰–۲۹۷.

[۲] طاهری، سید محمود (۱۳۸۰)؛ محاسبه احتمال یک پیشامد بر پایه‌ی مشاهدات فازی، گزارش سومین سمینار احتمال و فرآیندهای تصادفی، دانشگاه اصفهان (واحد خوانسار)، ۱۷۶–۱۶۳.

[3] Klement, E.P. (1982); Some remarks on a paper by R.R. Yager, Information Sciences, 27: 121-220.

[4] Yager, R.R. (1979); A note on probabilities of fuzzy events, Information Sciences, 18: 113-129.

[5] Yager, R.R. (1984); A representation of the probability of a fuzzy subset, Fuzzy Sets and Systems, 13: 273-283.

[6] Yager. R.R. (1984); Probabilities from fuzzy observations, Information Sciences, 32: 1-31.

[7] Zadeh, L.A. (1968); Probability measures of fuzzy events, J. Math. Anal. Appl., 23: 421-427.

[8] Zadeh, L.A. (2005); From imprecise to granular probabilities, Fuzzy Sets and Systems, 154: 370-374.

فصل ۴

امکان و احتمال

مقدمه

در این فصل به مفهوم امکان و ارتباط آن با مفهوم احتمال می‌پردازیم. در بخش نخست، اندازه امکان و تابع امکان تعریف و توضیح داده می‌شوند. همچنین ارتباط بین تابع امکان و تابع عضویت را شرح می‌دهیم. در بخش دوم به موضوع امکان پیشامدهای فازی خواهیم پرداخت. در بخش سوم به مقایسه امکان و احتمال، به‌عنوان دو رهیافت به عدم اطمینان، می‌پردازیم، و تشابه‌ها و تفاوت‌های امکان و احتمال را برمی‌شمریم و با مثال توضیح می‌دهیم.

۱.۴ اندازه امکان و تابع امکان

تعریف ۱.۴ فرض کنید Ω یک مجموعه مرجع و $\mathcal{F}(\Omega)$ رده‌ای از زیرمجموعه‌های آن باشد که شامل Ω بوده و تحت اعمال متمم و اجتماع شمارا بسته باشد. تابع مجموعه‌ای $\Pi : \mathcal{F}(\Omega) \to [۰, ۱]$ یک اندازه امکان بر $\mathcal{F}$ نامیده می‌شود اگر در سه اصل زیر صدق کند

۱) $\Pi(A) \geq ۰, \quad \forall A \in \mathcal{F}$

۲) $\Pi(\Omega) = ۱$

۳) $\Pi(\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i) = \sup_i \Pi(A_i)$ (برای هر دنباله از A_i های عضو $\mathcal{F}$)

در تعریف فوق معمولاً Ω را فضای نمونه و هر عضو $\mathcal{F}$ مانند A را یک پیشامد در نظر می‌گیریم. در این‌صورت $\Pi(A)$ به‌عنوان امکان رخ دادن پیشامد A تعبیر می‌شود. همچنین $(\Omega, \mathcal{F}, \Pi)$ را یک فضای امکان گوییم.

به‌عنوان حالتی خاص، از اصل ۳ نتیجه می‌شود که برای هر A و B از $\mathcal{F}$،

$$\Pi(A \cup B) = \max[\Pi(A), \Pi(B)]$$

با توجه به اصل ۳، تفاوت اندازه امکان با اندازه احتمال معلوم می‌شود. نخست این که در اندازه امکان از عملگر sup به‌جای عملگر مجموع استفاده می‌شود. دیگر اینکه، در اصل ۳ فرض جدا بودن A_i ها منظور نشده است. شایان ذکر است که در برخی متون به‌جای $\Pi(A)$ از نماد $Poss(A)$ استفاده می‌شود.

گزاره ۱.۴ برای هر $A \in \mathcal{F}$،

الف) $\max[\Pi(A), \Pi(A^c)] = ۱$

ب) $\Pi(A) + \Pi(A^c) \geq ۱$

اثبات: الف) داریم

$$\Pi(\Omega) = \Pi(A \cup A^c) = \max[\Pi(A), \Pi(A^c)] \quad \text{(طبق اصل سوم)}$$

اما طبق اصل دوم $\Pi(\Omega) = ۱$، و لذا حکم برقرار است.

ب) با توجه به بند الف و اصل اول امکان، واضح است.

بند الف در گزاره بالا بیان می‌دارد که از دو پیشامد متمم، حداقل یکی کاملاً ممکن است. البته این که پیشامد A کاملاً ممکن باشد، مانع این نمی‌شود که پیشامد متمم آن نیز ممکن باشد و یا حتی از درجه امکان بالا برخوردار باشد. بند ب نیز با رابطه‌ی معروف اندازه‌های احتمال یعنی $P(A) + P(A^c) = ۱$ قابل مقایسه است. در مثال ۳.۴ این دو نکته را توضیح خواهیم داد.

تعریف ۲.۴ فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, \Pi)$ یک فضای امکان باشد. تابع $\pi(\cdot)$ را که برای هر $A \in \mathcal{F}$ در رابطه‌ی زیر صدق کند، تابع امکان متناظر با Π می‌نامیم

$$\Pi(A) = \sup_{x \in A} \pi(x) \tag{۱.۴}$$

دقت کنید که طبق این تعریف، $\pi(x) = \Pi(\{x\})$.

نکته ۱.۴ رابطه ۱.۴، با رابطه‌ی زیر درباره‌ی اندازه‌های احتمال و توابع احتمال قابل مقایسه است

$$P(A) = \sum_{x \in A} P(x)$$

نکته ۲.۴ مشابه با اندازه‌های احتمال و توابع احتمال، در اینجا نیز باید توجه کرد که اندازه امکان، یک تابع مجموعه‌ای است در حالی که تابع امکان، یک تابع عددی است.

تابع امکان و تابع عضویت

فرض کنید $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی از Ω باشد. چنان چه $\tilde{A}$ را به‌عنوان یک تحدید فازی برای مقادیری که یک متغیر، مانند X، می‌تواند اختیار کند تلقی کنیم؛ آنگاه تابع عضویت $\tilde{A}$ یک تابع امکان برای متغیر X القا می‌کند:

$$\pi_X(x) = \tilde{A}(x), \quad \forall x \in \Omega$$

در این حالت، به π_X تابع امکان تولید شده توسط گزاره «X، به‌صورت $\tilde{A}$ است»، گفته می‌شود. هم‌چنین امکان این که مقدار متغیر X، $\tilde{A}$ باشد را با نماد $\Pi_X(\tilde{A})$ نشان می‌دهیم.

ملاحظه می‌نمایید که تابع عضویت یک مجموعه فازی و تابع امکان یک متغیر، در واقع دو روی یک سکه هستند. هر تابع عضویت را می‌توان به‌عنوان یک تابع امکان (مربوط به یک متغیر) در نظر گرفت، و برعکس هر تابع امکان را می‌توان به‌عنوان یک تابع عضویت (مربوط به یک مجموعه فازی) تلقی کرد [۷ و ۹].

مثال ۱.۴ فرض کنید $\Omega = \{۰, ۱, \cdots, ۱۰\}$، و $\tilde{E}$ مجموعه فازی «اعداد حول و حوش ۵» به‌صورت زیر باشد

$$\tilde{E} = \left\{ \frac{۰/۲}{۲}, \frac{۰/۶}{۳}, \frac{۰/۸}{۴}, \frac{۱}{۵}, \frac{۰/۸}{۶}, \frac{۰/۶}{۷}, \frac{۰/۲}{۸} \right\}$$

در این‌صورت گزاره «X، حول و حوش ۵ است»، تابع امکان زیر را برای متغیر X القا می‌کند

$$\pi_X(x) = \begin{cases} ۰/۲ & x = ۲, ۸ \\ ۰/۶ & x = ۳, ۷ \\ ۰/۸ & x = ۴, ۶ \\ ۱ & x = ۵ \end{cases}$$

در این مثال اگر $B = \{۲, ۳, ۴\}$، آنگاه طبق تعریف ۲.۴،

$$\begin{aligned} \Pi_X(B) = Poss(X \in B) = Poss(B) &= \sup_{x \in B} \pi_X(x) \\ &= \sup\{\pi(۲), \pi(۳), \pi(۴)\} \\ &= \sup\{۰/۲, ۰/۶, ۰/۸\} \\ &= ۰/۸ \end{aligned}$$

بنابراین اگر بدانیم X یک عدد حول و حوش ۵ است، آنگاه امکان این که X برابر ۲ باشد، ۰/۲ است. هم‌چنین امکان این که X عضو مجموعه B، یعنی یکی از اعداد ۲، ۳ یا ۴ باشد، برابر ۰/۸ است.

مثال ۲.۴ در مثال ۱.۴، اگر $C = \{۲,۳,۷\}$، آنگاه

$$\Pi_X(B \cup C) = \max[\Pi_X(B), \Pi_X(C)] = \max[۰/۸, ۰/۶] = ۰/۸$$

مثال ۳.۴ فرض کنید $\Omega = [۰, ۲۰۰]$، و $\tilde{D}$ مجموعه فازی «جوان» با تابع عضویت زیر باشد

$$\tilde{D}(x) = \begin{cases} ۱ & x \leq ۳۰ \\ ۱ - ۲(\frac{x-۳۰}{۳۰})^۲ & ۳۰ < x \leq ۴۵ \\ ۲(\frac{۶۰-x}{۳۰})^۲ & ۴۵ < x \leq ۶۰ \\ ۰ & ۶۰ < x \end{cases}$$

در این‌صورت گزاره «(یک فرد با سن) X، جوان است»، تابع امکان $\pi_X(x) = \tilde{D}(x)$ را برای متغیر سن مشخص می‌کند. برای مثال اگر $A = [۴۵, ۵۰]$ آنگاه

$$\begin{aligned} \Pi_X(A) &= Poss((X\text{، به‌صورت } A \text{ باشد})) \\ &= Poss(۴۵ \leq X \leq ۵۰) \\ &= \sup_{۴۵ \leq x \leq ۵۰} \pi(x) = \frac{۱}{۲} \end{aligned}$$

در همین مثال، $\Pi_X(A^c)$ برابر یک است، و داریم

$$\Pi_X(A) + \Pi_X(A^c) = \frac{۳}{۲}$$

در اینجا می‌توان روابط گزاره ۱.۴ را توضیح داد: الف) امکان پیشامد A برابر $\frac{۱}{۲}$ است که کمتر از یک می‌باشد و بنابراین امکان پیشامد متمم A، برابر یک است. ب) مجموع امکان‌های پیشامد A و پیشامد A^c بزرگتر یا مساوی یک است.

در مثال زیر تعبیر تابع امکان و تعبیر تابع عضویت را توضیح داده‌ایم.

مثال ۴.۴ فرض کنید منظور از «جوانی» آن باشد که با تابع عضویت مثال ۳.۴ بیان شد. در این‌صورت، مثلاً، $\tilde{D}(۴۰) = \frac{۷}{۹} = ۰/۷۳$ بدین معنی است که یک فرد ۴۰ ساله به اندازه ۰/۷۳ جوان است. به بیان دیگر یک فرد ۴۰ ساله، به اندازه ۰/۷۳ به مجموعه «افراد جوان» تعلق دارد.

حال مجموعه فازی $\tilde{D}$ را به‌عنوان یک تحدید فازی برای سن یک فرد خاص، مثلاً فریدون، در نظر بگیرید؛ یعنی این که بدانیم «فریدون جوان است». چون $\pi(۴۰) = ۰/۷۳$ پس امکان این که فریدون ۴۰ ساله باشد، ۰/۷۳ است. هم‌چنین $Poss(۴۵ \leq X \leq ۵۰) = \frac{۱}{۲}$ و لذا چنان‌چه اطلاع داشته باشیم که فریدون جوان است، آنگاه امکان این که وی ۴۵ تا ۵۰ ساله باشد، برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

مثال ۵.۴ بر پایه‌ی اطلاعات گذشته، توانایی ۴ دانشجو را در امتحان ریاضی که پیش رو دارند ارزیابی می‌کنیم. این ارزیابی به‌صورت توابع امکان نمره‌ی هر دانشجو در جدول ۱.۴ تنظیم شده است.

جدول ۱.۴ توابع امکان نمره ۴ دانشجو در امتحان ریاضی

دانشجو	A	B	C	D	E	F
۱	۰/۷	۱	۰/۷۵	۰/۳	۰/۰۵	۰
۲	۰/۵	۰/۸	۱	۱	۰/۷	۰/۳
۳	۱	۰/۷	۰/۳	۰	۰	۰
۴	۰	۰	۰/۲	۰/۵	۱	۰/۶

بر پایه‌ی توابع امکان فوق، می‌توان به پرسش‌های مختلفی پاسخ داد. مثلاً:

الف) چه اندازه امکان دارد که دانشجوی شماره ۱، نمره A در امتحان ریاضی کسب کند؟

$$\Pi(A_۱) = ۰/۷$$

ب) چه اندازه امکان دارد که دانشجوی شماره ۲، نمره A یا B کسب کند؟

$$\Pi(A_۲ \cup B_۲) = \max[\Pi(A_۲), \Pi(B_۲)] = ۰/۸$$

پ) چه اندازه امکان دارد که دست کم یکی از دانشجویان از درس ریاضی رد شود، یعنی نمره‌ی F بگیرد؟

$$\Pi(F_۱ \cup F_۲ \cup F_۳ \cup F_۴) = \max[\Pi(F_۱), \ldots, \Pi(F_۴)] = ۰/۶$$

۲.۴ امکان پیشامدهای فازی

تعریف ۳.۴ فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, \Pi)$ یک فضای امکان باشد و π_X (مطابق رابطه ۱.۴) تابع امکان القا شده توسط متغیر X باشد. آنگاه امکان پیشامد فازی $\tilde{A}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Pi_X(\tilde{A}) = Poss(\text{به‌صورت } \tilde{A} \text{ باشد}, X) = \sup_{x\in\Omega}[\min(\tilde{A}(x), \pi_X(x))]$$

نکته ۳.۴ تعریف فوق، به‌طور ضمنی بیانگر یک امکان شرطی است: فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه فازی از Ω بوده و X یک متغیر باشد. آنگاه امکان پیشامد $\tilde{A}$ به شرط پیشامد $\tilde{B}$، که با $\Pi_{\tilde{A}|\tilde{B}}$ نشان داده می‌شود، این‌گونه تعریف می‌شود

$$Poss(\tilde{A}, X| \text{ است } \tilde{B}, X \text{ باشد}) = \sup_{x\in\Omega}[\min(\tilde{A}(x), \tilde{B}(x))] \qquad (۲.۴)$$

دقت کنید که رابطه‌ی اخیر چیزی نیست جز ارتفاع مجموعه فازی $\tilde{A} \cap \tilde{B}$.

مثال ۶.۴ در مثال ۵.۴، فرض کنید نمره عالی به‌صورت یک مجموعه فازی از $\Omega = \{A, B, \cdots, F\}$ و با تابع عضویت زیر تعریف شود

$$\tilde{U} = \{\frac{۱}{A}, \frac{۰/۶}{B}, \frac{۰/۲}{C}\}$$

در این صورت امکان این‌که دانشجوی شماره ۱، نمره عالی در امتحان ریاضی کسب کند برابر است با

$$\Pi(\tilde{U}) = \sup[\min(۱, ۰/۷), \min(۰/۶, ۱), \min(۰/۲, ۰/۷۵)] = ۰/۷$$

مثال ۷.۴ در مثال ۱.۴، با فرض این که بدانیم: «X حول و حوش ۵ است»، امکان این که X کوچک باشد چقدر است؟ فرض کنید که کوچک با مجموعه فازی زیر تعریف شده باشد

$$\tilde{A} = \left\{\frac{۱}{۰}, \frac{۰/۸}{۱}, \frac{۰/۶}{۲}, \frac{۰/۴}{۳}, \frac{۰/۲}{۴}\right\}$$

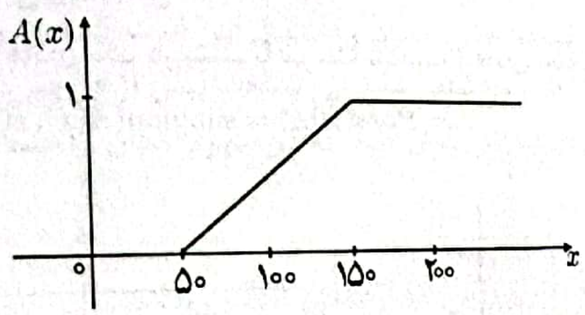
حل:

$$\begin{aligned}
\Pi_X(\tilde{A}) &= Poss(\text{کوچک باشد } X| \text{ است } ۵ \text{ حول و حوش } X) \\
&= \sup_{x\in\Omega}[\min(\tilde{A}(x), \pi_X(x))] \\
&= \sup[\min(۱, ۰), \min(۰/۸, ۰), \min(۰/۶, ۰/۲), \\
&\qquad \min(۰/۴, ۰/۶), \min(۰/۲, ۰/۸), \min(۰, ۱), \ldots] \\
&= ۰/۴
\end{aligned}$$

مثال ۸.۴ طبق نظر کارشناسان، سرعت بالا در تایپ به‌صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود (شکل ۱.۴)

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۵۰ \\ \dfrac{x-۵۰}{۱۰۰} & ۵۰ \le x < ۱۵۰ \\ ۱ & ۱۵۰ \le x \end{cases}$$

که در آن x، تعداد حروف یا علاماتی است که در دقیقه تایپ می‌شود. مثلاً اگر کسی در هر دقیقه ۱۲۰ حرف یا علامت تایپ کند، به اندازه $\tilde{A}(۱۲۰) = ۰/۷$ سرعت بالا در تایپ دارد و به بیان دیگر به اندازه ۰/۷ به مجموعه‌ی تایپیست‌های با سرعت بالا تعلق دارد.

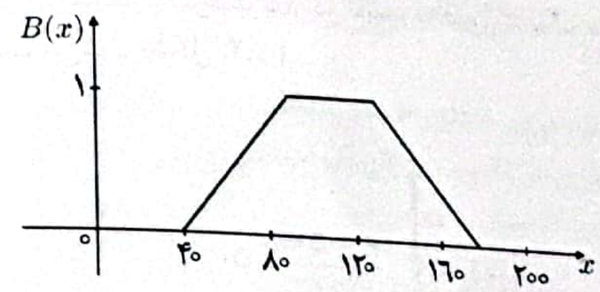


شکل ۱.۴ نمودار تابع عضویت مجموعه تایپیست‌های با سرعت بالا

فرض کنید شرکت بازرگانی کاروان در نظر دارد یک نفر تایپیست استخدام کند. از دیدگاه مدیریت، میزان مطلوبیت یک متقاضی (یعنی امکان استخدام وی) برحسب سرعت تایپ

وی و با تابع امکان زیر ارزیابی می‌شود (شکل ۲.۴)

$$\tilde{B}(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۴۰ \\ ۰/۰۲(x-۴) & ۴۰ \le x < ۹۰ \\ ۱ & ۹۰ \le x < ۱۳۰ \\ ۰/۰۲(۱۸۰-x) & ۱۳۰ \le x < ۱۸۰ \\ ۰ & ۱۸۰ \le x \end{cases}$$

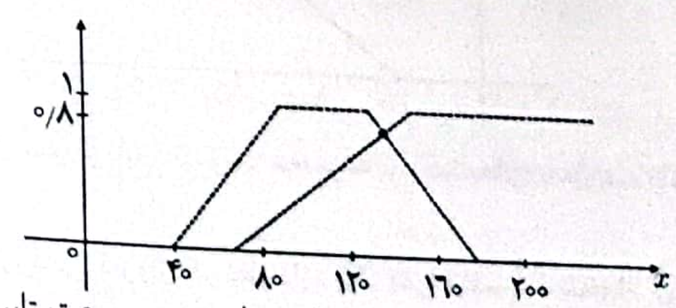


شکل ۲.۴ نمودار تابع امکان استخدام یک فرد به عنوان تایپیست

معیار فوق، این‌گونه توجیه می‌شود که یک متقاضی با سرعت تایپ بسیار کم، برای کار مناسب نیست. از طرف دیگر یک متقاضی با سرعت تایپ بسیار بالا، مسلماً خواهان دستمزد بالایی است که برای امور تایپی شرکت توجیه اقتصادی ندارد. حال فرض کنید هادی، که طبق اطلاعات موجود یک تایپیست با سرعت بالا تلقی می‌شود، متقاضی استخدام در شرکت بازرگانی کاروان است. با توجه به رابطه (۲.۴)، امکان استخدام هادی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید (شکل ۳.۴)

$Poss$(هادی یک تایپیست با سرعت بالاست | هادی استخدام شود)

$$= Poss(\tilde{B}|\tilde{A}) = \sup_x[\min(\tilde{A}(x), \tilde{B}(x))] = ۰/۸۷$$



شکل ۳.۴ امکان استخدام هادی با توجه به سرعت تایپ وی

۳.۴ مقایسه بین امکان و احتمال

پس از معرفی اندازه‌های امکان، این پرسش فرا روی قرار می‌گیرد که یک اندازه امکان چه تفاوتی با یک اندازه احتمال دارد، و اصولاً چه رابطه‌ای بین این اندازه‌ها برقرار است؟ در این‌باره، و به دلیل مشابهت صوری بین اندازه‌های امکان و احتمال، چه بسا مقایسه‌ها و استنتاج‌های نادرستی نیز صورت می‌گیرد.

در بخش حاضر، وجوه اشتراک بین اندازه‌های امکان و احتمال، و همچنین وجوه افتراق بین این دو اندازه تشریح می‌شوند.

۱.۳.۴ وجوه اشتراک بین اندازه‌های امکان و احتمال

۱) امکان و احتمال، دو وجه از عدم اطمینان (عدم قطعیت) هستند، و اندازه‌های امکان و احتمال دو نوع اندازه عدم اطمینان می‌باشند.

هر دوی این اندازه‌ها، برای اقدام در وضعیت‌های متضمن عدم اطمینان به کار می‌روند و لذا، از این دیدگاه، نقش مشترکی ایفا می‌کنند. در فصل آینده خواهیم دید که عدم اطمینان منحصر به دو نوع احتمالی و امکانی نیست، و این دو اندازه در واقع حالت‌های خاصی از رده‌ای بزرگ از اندازه‌های عدم اطمینان هستند.

۲) هم برای احتمال و هم برای امکان می‌توان جنبه‌های ذهنی و عینی را در نظر گرفت. هر چند باید اشاره کرد که مفهوم احتمال ذهنی (بر پایه‌ی باور شخصی) و مفهوم احتمال عینی (بر پایه‌ی فراوانی نسبی) دو مفهوم متفاوت‌اند [۱]. و همچنین اندازه‌های امکان که بر پایه‌ی تعبیرهای شخصی و ذهنی به دست می‌آیند و اندازه‌های امکان که بر ساخته از مشاهدات هستند، در زمینه‌های متفاوتی کاربرد دارند. اما در هر حال، امکان و احتمال از این دیدگاه که وجوه عینی و ذهنی، هر دو را، شامل می‌شوند شباهت دارند.

۳) برد توابع امکان و احتمال، بازه [۰, ۱] است.

یکی دیگر از شباهت‌های امکان و احتمال این است که هر دوی آنها مقادیری از بازه‌های [۰, ۱] را اختیار می‌کنند. شاید این شباهت بیش از هر چیز دیگری باعث می‌شود که بسیاری افراد، در بدو امر، گمان کنند که دو مفهوم امکان و احتمال مفاهیمی یکسان و همانند هستند.

۲.۳.۴ وجوه افتراق بین اندازه‌های امکان و احتمال

۱) اندازه احتمال با وجه تصادفی یک متغیر یا یک پدیده سروکار دارد. در حالی که اندازه امکان با وجه امکانی آن مرتبط است. مفهوم احتمال (به معنای رایج آن) با مفاهیم تکرار، فراوانی نسبی، شانس و تصادف مرتبط است و لذا اندازه‌های احتمال در مواردی قابل استفاده است که عدم اطمینان درباره‌ی یک پدیده یا مقدار یک متغیر، ناشی از تصادفی

بودن آن پدیده یا متغیر باشد. از سوی دیگر، مفهوم امکان با مفاهیمی مانند سازگاری و میزان تطابق و مانند آنها مرتبط است و لذا اندازه‌های امکان در مواردی قابل استفاده است که عدم اطمینان نسبت به یک پدیده یا مقدار یک متغیر، ناشی از ابهام و نادقیق بودن آن پدیده یا متغیر (یا درک مبهم ما از یک پدیده یا یک متغیر) باشد.

۲) گرچه احتمال و امکان شامل هر دو وجه عینی و ذهنی هستند، اما احتمال (به معنای رایج آن، یعنی بر پایه‌ی مفهوم فراوانی نسبی) یک مفهوم عینی است. ولی در امکان وجه غالب، وجه ذهنی است. در واقع می‌توان گفت که در بعضی کاربردها امکان صرفاً جنبه‌ای ذهنی و شخصی دارد و در بعضی موارد هر دو جنبه‌ی عینی و ذهنی در آن مؤثرند.

۳) جمع مقادیر هر تابع احتمال، روی کل فضای مورد بحث برابر یک است، در حالی که این محدودیت برای تابع امکان وجود ندارد.

توضیح آن که اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع جرم احتمال $P_X(x)$ باشد آنگاه $\sum_x P_X(x) = ۱$، و اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ باشد آنگاه $\int_x f_X(x)dx = ۱$. اما فرض کنید $\pi_X(x)$ تابع امکان متغیر X باشد، در این‌صورت لزومی ندارد که $\sum_x \pi_X(x) = ۱$ (و یا در حالت پیوسته $\int_x \pi_X(x)dx = ۱$).

۴) اندازه‌های احتمال دارای ویژگی جمع‌پذیری هستند. به این معنی که اگر A و B دو پیشامد جدا از هم باشند، آنگاه

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

اما اندازه‌های امکان فاقد ویژگی جمع‌پذیری هستند. البته اگر Π یک اندازه امکان باشد، آنگاه برای هر دو پیشامد (دلخواه، و نه لزوماً جدا از هم) A و B، داریم

$$\Pi(A \cup B) = \max[\Pi(A), \Pi(B)]$$

۵) برای یک اندازه احتمال، احتمال پیشامد متمم A را می‌توان با دانستن احتمال پیشامد A، و بر پایه‌ی رابطه $P(A^c) = ۱ - P(A)$ به‌دست آورد. در حالی که برای یک اندازه امکان چنین نیست. البته در مورد اندازه‌های امکان رابطه $\max[\Pi(A), \Pi(A^c)] = ۱$ برقرار است.

مثال ۹.۴ یک فرد بیمار به پزشک مراجعه می‌کند. پزشک پس از معاینه‌ها و آزمایش‌های لازم، نوع بیماری را یکی از سه نوع برونیشت (A)، حصبه (B) و آنفلونزا (C) تشخیص می‌دهد، اما در مورد نوع بیماری نمی‌تواند به‌طور قطعی اظهار نظر کند. وی دیدگاه خود را در مورد امکان وجود هر یک از سه نوع بیماری فوق، به‌صورت یک تابع امکان ارائه می‌دهد. همچنین ارزیابی خود را درباره‌ی احتمال وجود هر بیماری در

قالب یک تابع احتمال مطرح می‌کند. این دو تابع در جدول زیر درج شده‌اند

نوع بیماری	A	B	C
Poss(·)	۰/۶۵	۰/۴۰	۰/۹۰
Prob(·)	۰/۳۰	۰/۱۵	۰/۵۵

تابع امکان نوع بیماری این گونه به‌دست می‌آید: پزشک بر پایه‌ی معاینه‌ها و آزمایش‌های لازم در می‌یابد که بیمار ۰/۶۵ از نشانه‌ها و عوارض بیماری برونشیت را داراست. لذا نتیجه می‌گیرد که امکان ابتلای وی به برونشیت ۰/۶۵ است. همچنین متوجه می‌شود که وی ۰/۴۰ از علایم و آثار بیماری حصبه را نیز واجد است و نتیجه می‌گیرد که امکان ابتلای وی به حصبه ۰/۴۰ است. به‌علاوه بیمار دارای ۰/۹۰ از علایم و عوارض بیماری آنفلوآنزاست. بنابراین پزشک مقدار ۰/۹۰ را به‌عنوان درجه امکان ابتلای وی به آنفلوآنزا مطرح می‌کند.

استنباط پزشک درباره‌ی تابع احتمال نوع بیماری این گونه است: وی بر پایه‌ی تجربیات و مشاهدات فراوان قبلی، درمی‌یابد که ۰/۳۰ از بیمارانی که وضعیت آنها مشابه با وضعیت بیمار فعلی بوده است، پس از آزمایش‌های بیشتر یا گذشت زمان یا ...، معلوم گشته که مبتلا به برونشیت بوده‌اند. همچنین ۰/۱۵ و ۰/۵۵ از بیماران مشابه با وضعیت بیمار فعلی، به‌ترتیب مبتلا به حصبه و آنفلونزا بوده‌اند. بنابراین وی با تکیه بر این فراوانی‌های نسبی (از وضعیت‌های مشابه) احتمال وجود انواع بیماری‌ها را به‌دست می‌آورد.

در این مثال، تابع امکان نوع بیماری بر پایه‌ی میزان انطباق وضعیت بیمار با علایم و عوارض هر بیماری تعیین می‌شود. در حالی که در مورد تابع احتمال نوع بیماری، فراوانی نسبی حاصل از مشاهدات و تجربیات گذشته، ملاک ارزیابی است.

۴.۴ نکات تکمیلی

۱. در شرایط عدم اطمینان ممکن است صرفاً با وجه احتمالی عدم اطمینان روبرو باشیم و یا صرفاً با وجه امکانی. گاهی نیز (مانند مثال ۹.۴) عدم اطمینان مربوط به یک متغیر یا عدم اطمینان مرتبط با یک سیستم دارای هر دو جنبه‌ی احتمالی و امکانی است (نیز رجوع کنید به [۸ و ۱۱]). در این موارد یک سؤال پایه‌ای مطرح می‌شود: چه ارتباطی بین احتمال و امکان وجود دارد؟ در این رابطه اصل سازگاری امکان — احتمال بدین صورت توسط زاده [۱۲] مطرح شده است:

یک درجه بالای امکان مستلزم یک درجه‌ی بالای احتمال نیست، ولی یک درجه بالای احتمال مستلزم یک درجه بالای امکان است. به سخن دیگر در هر مورد، امکان دست کم به بزرگی احتمال است.

درباره‌ی این اصل ملاحظاتی وجود دارد. در این جا تنها این را می‌افزاییم که اصل سازگاری زاده را می‌توان به‌صورت زیر تصحیح کرد:

یک درجه بالای امکان برای یک پیشامد، مستلزم یک درجه بالای احتمال برای آن پیشامد نیست، ولی یک درجه بالای احتمال مستلزم یک درجه بالای امکان است. به علاوه برای دو پیشامد، آن که ممکن‌تر است محتمل‌تر است.

هم‌چنین معیارهایی برای اندازه سازگاری توزیع‌های امکان و احتمال توسط برخی از محققین پیشنهاد شده است [۵ و ۱۲].

۲. در بخش ۳.۴ گفته شد که امکان هم جنبه‌ی عینی و هم ذهنی دارد. در مواردی که با وجه عینی روبرو هستیم، چگونگی استفاده از داده‌های تجربی در ساختن تابع امکان مهم است. در مواردی که با وجه ذهنی روبرو هستیم، صورت بندی و مدل‌سازی دیدگاه‌های شخصی حائز اهمیت است. برای مطالعه درباره‌ی ساختن تابع امکان (و به سخن دیگر: تابع عضویت) می‌توان مراجع [۲ و ۳ و ٦ و ۱۰ و ۱۱] را مطالعه کرد. برخی از مطالعات نیز در این باره انجام شده است که توابع امکان به صورت احتمال‌های شرطی منظور شوند. در این باره مرجع [۴] را ببینید.

۳. مباحث بسیاری در نظریه امکان وجود دارد. از جمله توزیع‌های امکان چند متغیره، توزیع‌های امکان حاشیه‌ای و شرطی، متغیرهای امکانی مؤثر بر هم و غیر مؤثر بر هم و .... برای مطالعه درباره‌ی این مباحث می‌توان به [۷ و ۱۲] مراجعه نمود.

۴. همان گونه که از مطالب بخش اول روشن شد، نظریه امکان و نظریه مجموعه‌های فازی ارتباط تنگاتنگی با یکدیگر دارند. برای رسیدن به این ارتباط دو رهیافت وجود دارد. نخستین رهیافت این گونه است که در ابتدا مجموعه‌های فازی و مباحث مربوط به آن مطرح و تشریح می‌شوند و آنگاه تابع امکان به‌صورت یک تحدید فازی (و تابع توزیع امکان به‌صورت یک تابع عضویت) تعریف می‌شود [۱۲]. در رهیافت دوم، ابتدا اندازه‌های فازی به‌عنوان رده‌ای از اندازه‌های عدم اطمینان معرفی می‌شوند و سپس حالت خاص آنها از جمله اندازه‌های امکان مورد بحث قرار می‌گیرند. در این رهیافت، هر تابع توزیع امکان به یک تابع به نام عضویت متناظر می‌شود که مشخص کننده‌ی مفهومی به نام مجموعه فازی است [۹].

رهیافت اول مستقیماً از نظریه مجموعه‌های فازی به نظریه امکان می‌پردازد و از لحاظ شهودی مزیت دارد. از طرف دیگر، رهیافت دوم صورت بندی ریاضی دقیق‌تر و روشن‌تر دارد. در فصلی که گذشت سعی کردیم یک رهیافت میانه را ارائه کنیم که شامل مزیت‌های

هر دو روش بوده و در عین حال هماهنگ و سازگار با هر دو شیوه باشد.

۵. از دیدگاه نظریه اطلاع، الگوهای احتمالی برای پردازش و تفسیر اطلاعاتی مناسب هستند که به‌طور دقیق اما متباین با یکدیگر بیان شده‌اند. در حالی که اندازه‌های امکان برای پردازش و تفسیر اطلاعاتی که نادقیق اما مرتبط با یکدیگر هستند، مفید می‌باشند. مثال ۹.۴ را از این دیدگاه نیز می‌توان مورد توجه قرار داد. برای مطالعه بیشتر در این باره به [۷ و ۹] مراجعه کنید.

تمرین‌های فصل چهارم

۱.۴ تابع امکان زیر را بر $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ در نظر بگیرید

$$\pi_X(x) = \begin{cases} 0/2 & x = x_1 \\ 0/9 & x = x_2 \\ 1 & x = x_3 \\ 0/7 & x = x_4 \end{cases}$$

برای هر زیرمجموعه A از X، مقدار $\Pi_X(A)$ را بیابید.

۲.۴ فرض‌کنید $\Omega = \{0, 1, \ldots, 10\}$، و $\tilde{B}$ مجموعه فازی «اعداد بزرگ» به‌صورت زیر باشد

$$\tilde{B} = \left\{\frac{0/1}{1}, \frac{0/2}{2}, \ldots, \frac{1}{10}\right\}$$

الف) تابع امکان تولید شده توسط گزاره «X عدد بزرگی است» را بنویسید.

ب) اگر $E_1 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ و $E_2 = \{4, 5, 6\}$، مقادیر $\Pi_X(E_1)$ و $\Pi_X(E_2)$ را بیابید.

۳.۴ در تمرین ۲.۴، فرض کنید مجموعه فازی اعداد «حول و حوش ٦» به‌صورت زیر تعریف شده باشد

$$\tilde{M} = \left\{\frac{0/3}{4}, \frac{0/7}{5}, \frac{1}{6}, \frac{0/7}{7}\ \frac{0/3}{8}\right\}$$

اگر بدانیم X یک عدد بزرگ است، امکان این که حول و حوش ٦ باشد، چقدر است؟

۴.۴ در هر مورد، مشخص کنید عدم اطمینان جنبه‌ی امکانی دارد یا احتمالی؟

الف) عدم اطمینان نسبت به تعداد قطعات معیوب از محصولات یک کارخانه، در یک محموله‌ی ۱۰۰ تایی.

ب) عدم اطمینان نسبت به این که هر یک از ۵ خودروی پیشنهاد شده تا چه اندازه برای این که به‌عنوان تاکسی شهری انتخاب شود، مناسب هستند.

پ) عدم اطمینان نسبت به میزان ضریب هوشی یک دانش‌آموز که از بین دانش‌آموزان دختر سال اول دبستان‌های شهر کاشان انتخاب می‌شود.

ت) عدم اطمینان نسبت به میزان سن یک فرد که تازه با وی روبرو می‌شویم.

۵.۴ فرض کنید $\Omega = R$. تابع امکان مرتبط با گزاره «X یک عدد بزرگ است» به‌صورت زیر داده شده است

$$\pi_X(x) = \begin{cases} ۰ & x \leq ۱۰ \\ \dfrac{۱}{۱ + ۱۰(x - ۱۰)^{-۱}} & x > ۱۰ \end{cases}$$

مجموعه‌های فازی $\tilde{A}$: «اعداد نزدیک به ۲۵»، و $\tilde{B}$: «اعداد بسیار نزدیک به ۳۰» به‌صورت زیر تعریف شده‌اند

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - ۱۵}{۱۰} & ۱۵ \leq x < ۲۵ \\ \dfrac{۳۵ - x}{۱۰} & ۲۵ \leq x < ۳۵ \end{cases} \qquad \tilde{B}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - ۲۸}{۲} & ۲۸ \leq x < ۳۰ \\ \dfrac{۳۲ - x}{۲} & ۳۰ \leq x < ۳۲ \end{cases}$$

الف) اگر بدانیم X یک عدد بزرگ است، امکان این که نزدیک به ۲۵ باشد، چقدر است؟

ب) چنان چه بدانیم X یک عدد بزرگ است، امکان این که بسیار نزدیک به ۳۰ باشد، چقدر است؟

پ) چنان چه بدانیم X یک عدد بزرگ است، امکان این که نزدیک به ۲۵ یا بسیار نزدیک به ۳۰ (یا هر دو) باشد، چقدر است؟

ت) اگر بدانیم X یک عدد بزرگ است، امکان این که بسیار نزدیک به ۳۰ نباشد، چقدر است؟

ث) اگر بدانیم X یک عدد بزرگ است، امکان این که نزدیک به ۲۵ نباشد ولی بسیار نزدیک به ۳۰ باشد، چقدر است؟

۶.۴ در بررسی یک نوع خاک، به این نتیجه رسیده‌ایم که هدایت الکتریکی آن «حدوداً ۶ دسی‌زیمنس بر متر» است. به‌علاوه مطمئن هستیم که هدایت الکتریکی قطعاً از $۴(\frac{ds}{m})$ بیشتر و از $۷(\frac{ds}{m})$ کمتر است. بر این پایه، تابع امکان X: «میزان هدایت الکتریکی خاک»

به‌صورت زیر ارائه شده است

$$\pi_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x - ۴}{۲} & ۴ \leq x < ۶ \\ ۷ - x & ۶ \leq x < ۷ \end{cases}$$

پیشامدهای $A = [۴/۵, ۵/۵]$ و $B = [۴, ۵]$ و $C = [۶, ۷]$ را در نظر بگیرید.

الف) $\Pi_X(A)$ و $\Pi_X(B)$ و $\Pi_X(C)$ را بیابید.

ب) $\Pi_X(A \cup B)$ و $\Pi_X(A \cup C)$ را به‌دست آورید.

۷.۴ شرکت بازرگانی طوس با دو پیشنهاد سرمایه‌گذاری تجاری برای سال آینده روبروست. پیشنهاد نخست مربوط به یک فعالیت تجاری در قشم است که پیش‌بینی می‌شود حدوداً ۴۲ (میلیون تومان) سود داشته باشد. پیشنهاد دوم مربوط به یک فعالیت تجاری در رامسر است که پیش‌بینی می‌شود حدوداً ۳۵ (میلیون تومان) سود در بر داشته باشد. مجموعه‌های فازی مربوط به پیش‌بینی سودها عبارت‌اند از

$$\tilde{A}_{\text{ق}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - ۳۸}{۴} & ۳۸ \leq x < ۴۲ \\ \dfrac{۴۶ - x}{۴} & ۴۲ \leq x < ۴۶ \end{cases} \qquad \tilde{A}_{\text{ر}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - ۳۰}{۵} & ۳۰ \leq x < ۳۵ \\ \dfrac{۴۰ - x}{۵} & ۳۵ \leq x < ۴۰ \end{cases}$$

با توجه به وضعیت آب و هوایی قشم و رامسر، میزان مطلوبیت اقامت در این مناطق، برحسب سود حاصل از فعالیت تجاری، با توابع امکان زیر داده شده‌اند

$$\pi_{\text{ق}}(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۴۰ \\ \dfrac{x - ۴۰}{۱۰} & ۴۰ \leq x < ۵۰ \\ ۱ & ۵۰ \leq x \end{cases}$$

$$\pi_{\text{ر}}(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۳۰ \\ \dfrac{x - ۳۰}{۱۵} & ۳۰ \leq x < ۴۵ \\ ۱ & ۴۵ \leq x \end{cases}$$

سرمایه‌گذاری در کدام منطقه مطلوبیت بیشتری دارد؟

منابع و مراجع

[۱] طاهری، سید محمود(۱۳۸۱)؛ یگانگی و چندگانگی احتمال، نامه فرهنگستان علوم، شماره ۱۹: ۱۲۵–۹۳.

[2] Aliev, R.A. (1993); Fuzzy Set Theory and Applications, Tabriz University Press.

[3] Civanlar, M.R., Trussell, H.J. (1986); Constructing membership functions using statistical data, Fuzzy Sets and Systems, 18: 1-13.

[4] Coletti, G., Scozzafava, R. (2004); Conditional probability, fuzzy sets, and possibility: a unifying view, Fuzzy Sets and Systems, 144: 227-249.

[5] Delgado, M., Moral, S. (1987); On the concept of possibility - probability consistency, Fuzzy Sets and Systems, 21: 311-318.

[6] Dubois, D., Prade, H. (1983); Unfair coins and necessity measures: Tawards a possiblitistic interpretation of histograms, Fuzzy Sets and Systems, 10: 15-20.

[7] Dubois, D., Prade, H. (1988); Possibility Theory, Plenum Press.

[8] Goodman, I.R., Nguyen, H.T. (2002); Fuzziness and randomness, In: Bertol- uzza et al. (Eds.), Statistical Modeling, Analysis and Management of Fuzzy Data, Springer, pp. 3-21.

[9] Klir, G.J., Folger, T.A. (1988); Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information, Prentice-Hall.

[10] Masson, M.H., Denoeux, T. (2006); Inferring a possibility distribution from empirical data, Fuzzy Sets and Systems, 157: 319-340.

[11] Novak, V. (1986); Fuzzy Sets and Their Applications, Adam Hilger.

[12] Zadeh. L.A. (1978); Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy Sets and Systems, 1: 3-28.

فصل ۵

اندازه‌های فازی

مقدمه

از دیرباز تنها رهیافت تکامل یافته‌ی ریاضی برای اقدام در شرایط عدم اطمینان، نظریه احتمال بوده است. اما از چند دهه‌ی گذشته به این سو، نظریه‌های گوناگون دیگری برای بررسی متغیرها و سیستم‌هایی که اطلاع نسبت به آنها کافی و دقیق نیست، ارائه شده‌اند. بسیاری از این نظریه‌ها در یک رده‌ی کلی موسوم به اندازه‌های فازی قرار می‌گیرند. برای مثال، اندازه‌های احتمال و اندازه‌های امکان، که در فصل پیش به‌طور مقدماتی با آن‌ها آشنا شدیم، هر دو حالت‌های خاصی از اندازه‌های فازی هستند. در این فصل اندازه‌های فازی را معرفی و بررسی می‌کنیم.

در بخش اول مفهوم اندازه فازی تعریف می‌شود و با مثال‌های عددی تشریح می‌گردد. در بخش دوم، دو نوع خاص از اندازه‌های فازی، موسوم به اندازه‌های باور و موجه‌نمایی بررسی می‌گردند. در بخش سوم، مفهوم تابع تخصیص‌پایه، که یک مفهوم کلیدی است، معرفی و بررسی می‌شود. در بخش چهارم اندازه‌های احتمال، و در بخش پنجم اندازه‌های امکان و لزوم، که حالت‌های خاصی از اندازه‌های فازی هستند، مورد توجه قرار می‌گیرند. مطالب این فصل مبتنی بر مرجع [۳] و بخش‌هایی از آن برگرفته از مرجع [۹] فصل ۴ است.

۱.۵ اندازه‌های فازی

در این بخش و در بخش‌های آینده فرض می‌کنیم که X یک مجموعه مرجع و $\mathcal{P}(X)$ مجموعه توانی آن و $\mathcal{B}(X)$ (به کوتاهی: $\mathcal{B}$) یک میدان سیگمایی از زیرمجموعه‌های X است.

تعریف ۱.۵ تابع مجموعه‌ای $g : \mathcal{B} \to [0, 1]$ را یک اندازه فازی بر $(X, \mathcal{B})$ گوییم اگر در سه اصل زیر صدق کند

g_1: (شرایط مرزی)

$$g(\phi) = 0, \quad g(X) = 1$$

g_2: (یکنوایی)

$$A \subseteq B \Rightarrow g(A) \leq g(B), \quad \forall A, B \in \mathcal{B}$$

g_3: (پیوستگی) برای هر دنباله یکنوا از زیرمجموعه‌های X، یعنی برای هر دنباله $\{A_i \in \mathcal{B}\ ,\ i \in N\}$ که

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \quad \text{یا} \quad A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$$

داشته باشیم

$$\lim_{i\to\infty} g(A_i) = g(\lim_{i\to\infty} A_i)$$

در تعریف بالا هر عضو $\mathcal{B}$ یک پیشامد نام دارد و مجموعه مرجع X فضایی است شامل پیشامدهایی که با دسته‌ای اطلاعات نادقیق و نامطمئن درباره‌ی عناصر X مرتبط هستند، و $g(A)$ درجه اطمینان نسبت به رخ دادن پیشامد A است.

اصل اول بیان می‌کند که، صرف نظر از اطلاعات و شواهدی که در اختیار داریم، هر عنصر مورد بررسی مطمئناً در X قرار دارد و مطمئناً در مجموعه تهی قرار ندارد.

اصل دوم بیانگر این احساس شهودی است که اگر پیشامد A پیشامد B را نتیجه دهد $(A \subseteq B)$، آنگاه حداقل همان اطمینان را که به رخ دادن A داریم، به رخ دادن B داریم. به سخن دیگر، اصل دوم نتیجه می‌دهد که اطلاعات و شواهد مربوط به عضویت یک عنصر در مجموعه B باید دست کم به اندازه شواهد عضویت آن عنصر به هر زیرمجموعه از B باشد.

اصل سوم، که فقط برای حالتی کاربرد دارد که X نامتناهی است، لزوم پیوسته بودن تابع g را بیان می‌کند. به سخن دیگر این اصل نوعی سازگاری را تضمین می‌کند: محاسبه $g(A)$ $(A = \lim_{i\to\infty} A_i)$ چه به‌صورت حد $g(A_i)$ ها و چه با به کارگیری g برای حد A_i ها به یک نتیجه منجر شود.

مثال ۱.۵ می‌خواهیم نوع بیماری یک مریض را تشخیص دهیم. برای سادگی، فرض کنید می‌خواهیم بدانیم که مریض فعلی واجد کدام یک از بیماری‌های برونشیت، سرماخوردگی یا سینه‌پهلوست. آزمایش‌های پزشکی و عوارض بیماری اطلاعاتی در اختیار می‌گذارند که به تشخیص بیماری کمک می‌کند. این اطلاعات آن اندازه دقیق و مطمئن

و کامل نیستند که بتوان نوع بیماری را به‌طور قطعی تعیین کرد. اما می‌توان بر پایه‌ی این اطلاعات درجه‌ی اطمینان نسبت به وجود هر بیماری را مشخص نمود. مثلاً ممکن است، طبق اطلاعات و شواهد موجود، به اندازه ۷۰ درصد مطمئن شویم که مریض عضو مجموعه انسان‌هایی است که برونشیت دارند، و ۵۰ درصد مطمئن شویم که وی عضو مجموعه افرادی است که سرماخوردگی دارند و ۲۰ درصد مطمئن شویم که وی سینه‌پهلو دارد. این مقادیر تشکیل یک اندازه فازی را می‌دهند که توصیف کننده‌ی عدم اطمینان نسبت به نوع بیماری فرد مورد نظر است.

مثال ۲.۵ دادگاهی را در نظر بگیرید که برای یک محاکمه جنایی درباره‌ی بی‌گناهی یا مجرم بودن تعدادی متهم تشکیل شده است. دادگاه برای قضاوت درباره‌ی این افراد متوسل به اطلاعات، شواهد و گواه‌هایی می‌شود. دادگاه نمی‌تواند به‌طور قطع مجرمیت یا بی‌گناهی هر متهم را تعیین کند. اما می‌تواند، طبق شواهد و گواه‌های موجود، تعیین کند که با چه اندازه اطمینان هر متهم عضو مجموعه‌ی مجرمین است. این نوع عدم اطمینان را می‌توان در قالب اندازه‌های فازی توصیف و تبیین کرد.

نکته ۱.۵ از تعریف ۱.۵ و مثال‌های بالا آشکار است که نوع عدم اطمینانی که با اندازه‌های فازی تبیین می‌شود با نوع عدم اطمینانی که توسط مجموعه‌های فازی بیان می‌شود، متفاوت است. در حالت اخیر، با یک مجموعه فازی روبرو هستیم یعنی مجموعه‌ای با کران‌های نادقیق (مثلاً مجموعه افراد بلند قد، مجموعه اعداد طبیعی کوچک، مجموعه اعداد حدوداً ۱۰، ...) آنگاه به هر شی درجه‌ای نسبت می‌دهیم که بیانگر درجه عضویت آن شی در مجموعه فازی مورد نظر است. اما در مبحث اندازه‌های فازی با مجموعه‌هایی دقیق (غیرفازی) روبرو هستیم. در این‌جا عدم اطمینان به این موضوع باز می‌گردد که، طبق اطلاعات و شواهد موجود، چه اندازه مطمئن هستیم که یک فرد (شی) خاص عضو هر مجموعه است. برای نمونه در مثال تشخیص پزشکی مجموعه افراد دارای برونشیت یک مجموعه مشخص و غیرفازی فرض می‌شود. حال بر پایه‌ی اطلاعات و شواهد موجود، به اندازه ۷۰ درصد اطمینان داریم که مریض فعلی عضو مجموعه افراد واجد برونشیت است. همچنین در مثال محاکمه جنایی، مجموعه افراد مجرم و مجموعه افراد بی‌گناه دو مجموعه دقیق و غیرفازی هستند. در اینجا عدم اطمینان به این باز می‌گردد که تا چه اندازه مطمئن هستیم که یک فرد خاص عضو مجموعه افراد مجرم است.

پس در حالت مجموعه‌های فازی، تابع عضویت تابعی از مجموعه مرجع X به بازه $[0, 1]$ است. در حالی که در مبحث اندازه‌های فازی، هر اندازه فازی تابعی از $\mathcal{B}$ (یک میدان سیگمایی از X) به بازه $[0, 1]$ است.

نکته ۲.۵ دقت نمایید که، اصول موضوعه‌ای که در تعریف ۱.۵ بیان شده است، ضعیف‌تر از اصول موضوعه احتمال است. بدین ترتیب می‌توان گفت که اندازه‌های احتمال حالت خاصی از اندازه‌های فازی هستند. تفاوت اساسی به اصل جمع‌پذیری احتمال باز می‌گردد. این اصل بیان می‌دارد که برای هر رده از پیشامدهای جدا از هم A_i

$$P(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} P(A_i)$$

که در آن I یک مجموعه شمارای اندیس‌گذار است. از همین اصل نتیجه می‌شود که $P(A^C) = 1 - P(A)$. به سخن دیگر اندازه احتمال متمم هر پیشامد را می‌توان برحسب اندازه احتمال آن پیشامد به‌دست آورد. اما در اندازه‌های فازی با دانستن $g(A)$ (درجه اطمینان نسبت به رخ دادن پیشامد A) نمی‌توان مقدار $g(A^C)$ (درجه اطمینان نسبت به رخ ندادن A) را دقیقاً تعیین کرد.

نتیجه ۱.۵ از اصل یکنوایی (g_2) نتیجه می‌شود که برای هر $A, B \in \mathcal{B}$،

$$g(A \cap B) \le \min[g(A), g(B)] \qquad \text{(۱.۵.الف)}$$

$$g(A \cup B) \ge \max[g(A), g(B)] \qquad \text{(۱.۵.ب)}$$

۲.۵ اندازه‌های باور و اندازه‌های موجه‌نمایی

تعریف ۲.۵ تابع مجموعه‌ای $Bel : \mathcal{B} \to [0, 1]$ را یک اندازه باور (اندازه اعتقاد) بر $(X, \mathcal{B})$ گوییم اگر در اصول g_1 و g_3 صدق کرده و افزون بر این برای هر $n \in N$ و هر رده از زیرمجموعه‌های $A_1, A_2, \ldots, A_n$ از $\mathcal{B}$،

$$Bel(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \ge \sum_i Bel(A_i) - \sum_{i<j} Bel(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n+1} Bel(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \qquad (۲.۵)$$

برای نمونه در حالت $n = 2$ رابطه فوق به این صورت در می‌آید

$$Bel(A_1 \cup A_2) \ge Bel(A_1) + Bel(A_2) - Bel(A_1 \cap A_2) \qquad (۳.۵)$$

مقدار $Bel(A)$ درجه اعتقادی است که، بر پایه‌ی اطلاعات و گواه‌ها و شواهد موجود، به رخ دادن پیشامد A داریم (تعبیر دقیق‌تر را به زودی خواهیم گفت). اصل ممیزه‌ی اندازه‌های اعتقاد، رابطه ۲.۵، بیان می‌دارد که درجه اعتقاد مرتبط با اجتماع چند پیشامد جدا از هم از مجموع درجات اعتقاد تک‌تک پیشامدها کمتر نباشد. این اصل حالت ضعیف‌تری از اصل جمع‌پذیری احتمال است و لذا اندازه‌های احتمال حالت خاصی از اندازه‌های باور هستند: در اندازه‌های احتمال نامساوی ۲.۵ تبدیل به تساوی می‌شود.

دقت دارید که شرط ۳.۵ یک شرط قوی‌تر از اصل g_2 است (تمرین ۴.۵).

نتیجه ۲.۵ اگر در رابطه ۲.۵ قرار دهیم $n = 2$ و $A_1 = A$ و $A_2 = A^C$، خواهیم داشت

$$Bel(A) + Bel(A^C) \le 1$$

به هر اندازه اعتقاد، یک اندازه موسوم به اندازه موجه‌نمایی مرتبط است که برای هر مجموعه A از $\mathcal{B}$ به‌صورت زیر نیز تعریف می‌شود

$$Pl(A) = 1 - Bel(A^C)$$

و به‌طور مشابه

$$Bel(A) = 1 - Pl(A^c)$$

بنابراین اندازه‌های باور و موجه‌نمایی، دوگان یکدیگرند. اندازه‌های موجه‌نمایی را می‌توان مستقلاً و به‌صورت زیر تعریف نمود.

تعریف ۳.۵ تابع مجموعه‌ای $Pl : \mathcal{B} \to [0, 1]$ را یک اندازه موجه‌نمایی بر $(X, \mathcal{B})$ گوییم اگر در اصول g_1 و g_3 صدق کرده و به علاوه برای هر $n \in N$ و هر رده از زیرمجموعه‌های $A_1, A_2, \ldots, A_n$ از $\mathcal{B}$،

$$Pl(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \le \sum_i Pl(A_i) - \sum_{i<j} Pl(A_i \cup A_j) + \cdots + (-1)^{n+1} Pl(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \qquad (۴.۵)$$

برای نمونه در حالت $n = 2$ رابطه فوق به این‌صورت در می‌آید

$$Pl(A_1 \cap A_2) \le Pl(A_1) + Pl(A_2) - Pl(A_1 \cup A_2) \qquad (۵.۵)$$

که برای مقایسه با رابطه ۳.۵ می‌توان آن را چنین نوشت

$$Pl(A_1 \cup A_2) \le Pl(A_1) + Pl(A_2) - Pl(A_1 \cap A_2)$$

اصل ممیزه‌ی اندازه‌های موجه‌نمایی (رابطه ۴.۵) حالت ضعیف‌تری از اصل جمع‌پذیری احتمال است. بنابراین اندازه‌های احتمال حالت خاصی از اندازه‌های موجه‌نمایی هستند: در اندازه‌های احتمال نامساوی ۴.۵ تبدیل به تساوی می‌شود.

دقت دارید که شرط ۵.۵ یک شرط قوی‌تر از اصل g_2 است (تمرین ۴.۵).

نتیجه ۳.۵ اگر در رابطه ۴.۵ قرار دهیم $n = 2$ و $A_1 = A$ و $A_2 = A^C$، خواهیم داشت

$$Pl(A) + Pl(A^C) \ge 1$$

۳.۵ تابع تخصیص پایه

تعریف ۴.۵ تابع مجموعه‌ای $m : \mathcal{B} \to [0, 1]$ را یک تابع تخصیص پایه بر $(X, \mathcal{B})$ گوییم اگر

$$m(\phi) = 0,$$

$$\sum_{A \in \mathcal{B}} m(A) = 1 \qquad (6.5)$$

مقدار $m(A)$ درجه‌ای از اطمینان است که به رخ دادن دقیقاً پیشامد A (و نه هیچ زیرمجموعه‌ی مشخص از آن) داریم.

نکته ۳.۵ معادله ۶.۵ شبیه به معادله مربوط به توابع جرم احتمال، $\sum_{x \in X} P(x) = 1$، است. اما تفاوتی اساسی بین توابع جرم احتمال و توابع تخصیص پایه وجود دارد. توابع جرم احتمال بر X تعریف می‌شوند و توابعی عددی هستند، در حالی که تخصیص‌های پایه بر عناصر $\mathcal{B}$ تعریف می‌شوند و توابعی مجموعه‌ای هستند. خاطر نشان می‌شود که در بعضی منابع از عبارت تخصیص احتمال پایه استفاده شده است. ما، به ویژه برای تمایز با تابع احتمال، از عبارت تابع تخصیص پایه استفاده می‌کنیم.

تعریف ۵.۵ هر مجموعه $A \in \mathcal{B}$ که برای آن $m(A) > 0$، یک عنصر کانونی m نامیده می‌شود.

عناصر کانونی، زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع X هستند که اطلاعات و شواهد و گواه‌های موجود، بر آن‌ها تمرکز دارند. به ویژه هنگامی که X متناهی باشد، می‌توانیم تابع m را با فهرست عناصر کانونی و اندازه‌های آن‌ها مشخص کنیم.

نکته ۴.۵ با توجه به تعریف تابع تخصیص پایه، درمی‌یابیم که اولاً لزومی ندارد که $m(X) = 1$، و دوم آن که تابع تخصیص پایه یک تابع یکنوا نیست یعنی لزومی ندارد که اگر $A \subset B$ آنگاه $m(A) \leq m(B)$، و سوم آن که رابطه‌ای خاص بین $m(A)$ و $m(A^C)$ وجود ندارد.

گرچه تخصیص‌های پایه، اندازه‌های فازی نیستند اما نکته اساسی و مهم این است که هر تابع تخصیص پایه m بر $(X, \mathcal{B})$، به‌طور یکتا یک اندازه باور و یک اندازه موجه‌نمایی بر $(X, \mathcal{B})$ به‌صورت زیر تعیین می‌کند

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B) \qquad (7.5)$$

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \phi} m(B) \qquad (8.5)$$

بنابراین اگر در یک مسئله مقادیر تابع تخصیص پایه (یا صرفاً عناصر کانونی و مقادیر تابع تخصیص پایه به‌ازای آن‌ها) را بدانیم، می‌توانیم درجه‌های اعتقاد و موجه‌نمایی هر پیشامد را محاسبه کنیم.

برای حالت عکس، یعنی هنگامی که یک اندازه باور یا یک اندازه موجه‌نمایی داده شده باشند، تخصیص پایه‌ی متناظر طبق قضیه زیر به‌دست می‌آید.

قضیه ۱.۵ (قضیه وارون موبیوس) اگر یک اندازه باور $Bel(\cdot)$ یا یک اندازه موجه‌نمایی $Pl(\cdot)$ داده شده باشد، تخصیص‌های پایه‌ی متناظر این گونه به‌دست می‌آیند

$$m(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A-B|} Bel(B) \qquad (9.5)$$

$$m(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A-B|} (1 - Pl(B^C)) \qquad (10.5)$$

که در آن $|A - B|$ عدد اصلی مجموعه $A - B$ است.

اثبات: رابطه ۹.۵ را ثابت می‌کنیم. از رابطه ۷.۵ داریم

$$\begin{aligned}
\sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A-B|} Bel(B) &= \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A-B|} \sum_{C \subseteq B} m(C) \\
&= \sum_{C \subseteq A} m(C) + \sum_{B \subset A} (-1)^{|A-B|} \sum_{C \subseteq B} m(C) \\
&= m(A) + \sum_{C \subset A} m(C) + \sum_{B \subset A} (-1)^{|A-B|} \sum_{C \subseteq B} m(C)
\end{aligned}$$

اما

$$\sum_{C \subset A} m(C) + \sum_{B \subset A} (-1)^{|A-B|} \sum_{C \subseteq B} m(C) = 0$$

زیرا همه‌ی جمله‌های عبارت $\sum_{C \subset A} m(C)$ با علامت منفی در عبارت بعد ظاهر می‌شود. به‌علاوه جملات باقیمانده در عبارت دوم نیز به‌طور دوتایی با علامت‌های منفی و مثبت ظاهر می‌شوند. دقت کنید که $m(\phi) = 0$. بدین ترتیب رابطه ۹.۵ ثابت می‌شود. رابطه ۱۰.۵ نیز با جایگذاری از رابطه $Bel(B) = 1 - Pl(B^C)$ به‌دست می‌آید.

مقایسه اندازه باور، اندازه موجه‌نمایی و مقدار تخصیص پایه

با توجه به تعریف تابع تخصیص پایه و روابط ۷.۵ و ۸.۵، بر پایه‌ی مجموعه‌ای از اطلاعات و شواهد درباره‌ی مجموعه مرجع X و زیرمجموعه‌های آن، می‌توان گفت که

$m(A)$ درجه اطمینانی است که به رخ دادن دقیقاً پیشامد A (و نه هیچ زیرمجموعه‌ی مشخصی از آن) داریم.

$Bel(A)$ درجه اطمینانی است که به رخ دادن دقیقاً پیشامد A و یا هر زیرمجموعه‌ای از آن داریم.

$Pl(A)$ درجه اطمینانی است که به رخ دادن دقیقاً پیشامد A و یا هر پیشامد دیگری که با A اشتراکی دارد، قائل هستیم (واضح است که پیشامدهایی که با A اشتراک دارند شامل تمام زیر مجموعه‌های A هم می‌شوند).

تعبیرهای فوق را می‌توان از دیدگاه نظریه اطلاع نیز بیان کرد. فرض کنید براساس اطلاعات موجود می‌خواهیم درباره‌ی عضویت یک شی (فرد) مشخص از X در مجموعه A نظر دهیم. در این حالت

$m(A)$ بیانگر درجه گواهی اطلاعات موجود بر عضویت آن شی در دقیقاً مجموعه A است.

$Bel(A)$ بیانگر درجه گواهی اطلاعات موجود بر عضویت آن شی در مجموعه A و یا هر زیرمجموعه از A است.

$Pl(A)$ درجه گواهی اطلاعات موجود بر عضویت آن شی در مجموعه A و یا هر مجموعه دیگری که با A اشتراک دارد، می‌باشد.

مثال ۳.۵ یک فرد بیمار به پزشک مراجعه می‌کند. پزشک بعد از معاینه و آزمایش‌های لازم نوع بیماری را یکی از سه نوع برونشیت (A)، سرماخوردگی (B) و سینه‌پهلو (C) تشخیص می‌دهد و براساس نتایج به‌دست آمده، تخصیص پایه m مندرج در جدول ۱.۵ را ارائه می‌دهد. براساس تخصیص پایه m و با استفاده از رابطه‌های (۷.۵) و (۸.۵) اندازه‌های باور و موجه‌نمایی متناظر را نیز می‌توانیم به‌دست آوریم.

توضیح. پزشک پس از معاینات و آزمایش‌های لازم، ملاحظه می‌کند که ۱۵ درصد از علائم و آثار بیماری، مختص بیماری برونشیت، A، است و هیچ علامتی که مختص بیماری سرماخوردگی، B، باشد وجود ندارد و به‌علاوه ۱۰ درصد از علائم بیماری نیز مختص بیماری سینه‌پهلو، C، می‌باشد. همچنین ۱۰ درصد از آثار بیماری، از علائم مشترک بین بیماری‌های A و B است (و نه هر کدام از آن‌ها به‌طور خاص) و ... و همچنین تا آخر یعنی ۴۰ درصد از علائم بیمار، از علائم مشترک بین هر سه بیماری است. به سخن دیگر ۴۰ درصد از اطلاعات موجود صرفاً گواهی بر این دارند که بیمار در

مجموعه‌ی بیماران مبتلا به برونشیت یا سرماخوردگی و یا سینه‌پهلو قرار دارد و از این ۴۰ درصد اطلاعات هیچ نتیجه‌ی دیگری عاید نمی‌شود. همچنین، مثلاً، مقدار ۲۵ درصد برای $Bel(A \cup C)$ این گونه تفسیر می‌شود که درجه اعتقاد ما به این که بیمار مبتلا به برونشیت و یا مبتلا به سینه‌پهلوست برابر ۲۵ درصد است. و همچنین مقدار ۸۵ درصد برای $Pl(B \cup C)$ به این معنی است که ۸۵ درصد علائم بیماری، متعلق به سرماخوردگی و یا سینه‌پهلو و یا از علائم مشترک این دو بیماری و یا از علائمی است که مشترک با علائم سرماخوردگی و یا سینه پهلو و بیماری دیگر است.

جدول ۱.۵ تخصیص پایه و اندازه‌های باور و موجه‌نمایی نوع بیماری در مثال ۳.۵

عناصر کانونی	m	Bel	Pl
A	۰/۱۵	۰/۱۵	۰/۸۵
B	۰	۰	۰/۵۵
C	۰/۱۰	۰/۱۰	۰/۷۵
$A \cup B$	۰/۱۰	۰/۲۵	۰/۹۰
$A \cup C$	۰/۲۰	۰/۴۵	۱
$B \cup C$	۰/۰۵	۰/۱۵	۰/۸۵
$A \cup B \cup C$	۰/۴۰	۱	۱

۴.۵ اندازه‌های احتمال

اگر اصل ممیزه اندازه‌های باور یعنی رابطه ۲.۵ با اصل قوی‌تر زیر جایگزین شود، حالت خاصی از اندازه‌های باور که همان اندازه‌های احتمال است به‌دست می‌آید

$$Bel(A \cup B) = Bel(A) + Bel(B), \quad A \cap B = \phi \qquad (۱۱.۵)$$

قضیه زیر اساسی‌ترین ویژگی اندازه‌های احتمال را به‌عنوان حالت خاصی از اندازه‌های باور بیان می‌دارد (مرجع [۹] فصل ۴).

قضیه ۲.۵ یک اندازه باور $Bel(\cdot)$ بر $(X, \mathcal{P}(X))$، که در آن $\mathcal{P}(X)$ متناهی است، یک اندازه احتمال است اگر و تنها اگر تخصیص پایه‌ی متناظر آن، برای مجموعه‌های تک

عضوی برابر اندازه باور آن‌ها باشد و برای هر مجموعه غیر تک عضوی A، $m(A) = 0$، یعنی

$$m(A) = \begin{cases} Bel(A) & A = \{x\}, x \in X \\ 0 & \text{سایر موارد} \end{cases}$$

از قضیه بالا نتیجه می‌شود که اندازه‌های احتمال بر مجموعه‌های مرجع متناهی، به وسیله یک تابع به‌صورت $P : X \to [0, 1]$ تعریف می‌شوند به‌قسمی که $P(x) = m(\{x\})$. همان طور که می‌دانید در نوشتارهای آماری، این تابع، تابع جرم احتمال نام دارد. شایان ذکر است که می‌توان مشابه قضیه بالا را بر اساس اندازه‌های موجه‌نمایی نیز بیان کرد.

نتیجه ۴.۵ اگر تخصیص پایه فقط بر مجموعه‌های تک عضوی متمرکز شود، داریم $\sum_{x \in X} m(\{x\}) = 1$. در این‌صورت طرف‌های راست معادله‌های ۷.۵ و ۸.۵ برابر می‌شوند و خواهیم داشت

$$Bel(A) = Pl(A) = \sum_{x \in A} m(\{x\}) = \sum_{x \in A} P(x) = P(A), \quad A \in \mathcal{P}(X)$$

این بدان معنی است که اندازه‌های دوگان اعتقاد و موجه‌نمایی تحت اصل ۱۱.۵ به اندازه‌های احتمال تبدیل می‌شوند.

همان طور که گفته شد، اندازه‌های احتمال هنگامی دقیقاً تعیین می‌شوند که عناصر کانونی m، مجموعه‌های تک عضوی باشند. در حالت کلی ممکن است چنین نباشد. در این حالت گرچه نمی‌توان احتمال هر پیشامد را دقیقاً مشخص کرد اما می‌توان آن را به‌طور نادقیق و به‌صورت یک بازه بیان نمود. کران بالای این بازه اندازه موجه‌نمایی و کران پایین آن اندازه باور مربوط به آن پیشامد است (نیز رک به نکته تکمیلی ۵ همین فصل).

نکته ۵.۵ با توجه به رابطه ۱۱.۵ آشکار است که اندازه‌های احتمال ویژگی جمع‌پذیری دارند، در حالی که اندازه‌های فازی در حالت کلی لزوماً جمع‌پذیر نیستند. در واقع جمع‌پذیری یک ویژگی کلیدی در تعریف اندازه احتمال است که با تعریف کلاسیک، تعبیر فراوانی نسبی، برخی از تعابیر ذهنی و نیز با تعریف اصل موضوعی رایج برای احتمال همخوانی و سازگاری دارد، (برای مرور این تعریف‌ها و تعبیرها رک به مرجع [۱] فصل ۴). البته ویژگی جمع‌پذیری موضوع مورد بحث و چالش برانگیز، و از دید برخی در بعضی موارد، یک ویژگی محدود کننده است [۱۰ و ۱۶].

۵.۵ اندازه‌های امکان و اندازه‌های لزوم

هنگامی که عناصر کانونی تو در تو (یعنی زیرمجموعه‌های یکدیگر) باشند آنگاه اندازه‌های باور و موجه‌نمایی مربوطه، هماهنگ نامیده می‌شوند. این بدان معنی است که اطلاعات و شواهد مربوط به یک مسئله، با یکدیگر در تزاحم نیستند. در این حالت روابط خاصی برای اندازه‌های باور و موجه‌نمایی برقرار می‌شوند که در قضیه زیر ارائه شده‌اند.

قضیه ۳.۵ فرض کنید m یک تابع تخصیص پایه بر $(X, \mathcal{B})$ باشد. اگر عناصر کانونی m تو در تو باشند آنگاه برای هر $A, B \in \mathcal{B}$،

$$Bel(A \cap B) = \min[Bel(A), Bel(B)] \qquad (۱۲.۵.الف)$$

$$Pl(A \cup B) = \max[Pl(A), Pl(B)] \qquad (۱۲.۵.ب)$$

در این حالت خاص، اندازه‌های باور و موجه‌نمایی به‌ترتیب اندازه‌های لزوم و امکان نامیده می‌شوند. این اندازه‌ها را می‌توان مستقیماً به‌عنوان دو نوع خاص از اندازه‌های فازی نیز تعریف کرد، (نیز رک به [۱۰]).

تعریف ۶.۵ تابع مجموعه‌ای $N : \mathcal{B} \to [0, 1]$ را یک اندازه لزوم (حتمیت) بر $(X, \mathcal{B})$ گوییم اگر در اصول g_1 و g_3 صدق کرده و به‌علاوه برای هر $A, B \in \mathcal{B}$،

$$N(A \cap B) = \min[N(A), N(B)] \qquad (۱۳.۵)$$

ملاحظه می‌کنید که اندازه‌های لزوم از تحمیل تساوی در رابطه ۱.۵.الف حاصل می‌شود، و لذا شرط ۱۳.۵ یک شرط قوی تر از اصل g_2 (در تعریف ۱.۵) است. با نگاهی دیگر، شرط ۱۳.۵ یک شرط قوی تر از اصل ۲.۵ است و یعنی اندازه‌های لزوم حالت خاصی از اندازه‌های باور هستند.

حالت حدی دیگر از تحمیل تساوی در رابطه ۱.۵.ب به‌دست می‌آید.

تعریف ۷.۵ تابع مجموعه‌ای $\Pi : \mathcal{B} \to [0, 1]$ را یک اندازه امکان بر $(X, \mathcal{B})$ گوییم اگر در اصول g_1 و g_3 صدق کرده و به‌علاوه برای هر $A, B \in \mathcal{B}$،

$$\Pi(A \cup B) = \max[\Pi(A), \Pi(B)] \qquad (۱۴.۵)$$

ملاحظه می‌کنید که اندازه‌های موجه‌نمایی از تحمیل تساوی در رابطه ۱.۵.ب حاصل می‌شود، و لذا شرط ۱۴.۵ یک شرط قوی تر از اصل g_2 (در تعریف ۱.۵) است. با نگاهی دیگر، شرط ۱۴.۵ یک شرط قوی تر از اصل ۴.۵ است و یعنی اندازه‌های امکان حالت خاصی از اندازه‌های موجه‌نمایی هستند.

توضیح آنکه، بر پایه‌ی اطلاعات و شواهد موجود، $N(A)$ درجه حتمیت و لزوم رخ دادن پیشامد A است. همچنین $\Pi(A)$ درجه سازگاری اطلاعات و شواهد موجود با پیشامد A است. توجه دارید که برای هر $A \in \mathcal{B}$،

$$\Pi(A) \geq N(A)$$

رابطه اخیر با این درک شهودی منطبق است که یک پیشامد قبل از آن که لازم و حتمی شود، ممکن می‌شود.

واضح است که اندازه‌های لزوم و امکان دوگان یکدیگر هستند و به‌طور یکتا توسط رابطه‌ی زیر از هم حاصل می‌شوند

$$\Pi(A) = 1 - N(A^C) \qquad \text{(۱۵.۵.الف)}$$

$$N(A) = 1 - \Pi(A^C) \qquad \text{(۱۵.۵.ب)}$$

به سخن دیگر، امکان یک پیشامد برابر است با یک منهای اندازه لزوم متمم آن پیشامد، و اندازه لزوم یک پیشامد برابر با یک منهای اندازه امکان متمم آن پیشامد است.

نتیجه ۵.۵ برای هر اندازه لزوم و امکان روابط زیر برقرار هستند

$$\min[N(A), N(A^C)] = 0 \qquad \text{(۱۶.۵.الف)}$$

$$\max[\Pi(A), \Pi(A^C)] = 1 \qquad \text{(۱۶.۵.ب)}$$

اثبات: رابطه ۱۶.۵.الف براساس رابطه ۱۳.۵ و با توجه به اصل g_1 حاصل می‌شود. رابطه ۱۶.۵.ب نیز بر پایه‌ی رابطه ۱۴.۵ و با توجه به اصل g_1 به‌دست می آید.

رابطه ۱۶.۵.الف بیان می‌کند که هیچ‌گاه، از دو پیشامد متناقض، هر دو اندازه‌های لزوم مثبت ندارند. رابطه ۱۶.۵.ب بیان می‌دارد که از بین دو پیشامد A و پیشامد متمم A دست کم یکی کاملاً ممکن است رخ دهد.

نتیجه ۶.۵ برای هر اندازه لزوم و اندازه امکان دوگان آن، روابط زیر برقرار هستند

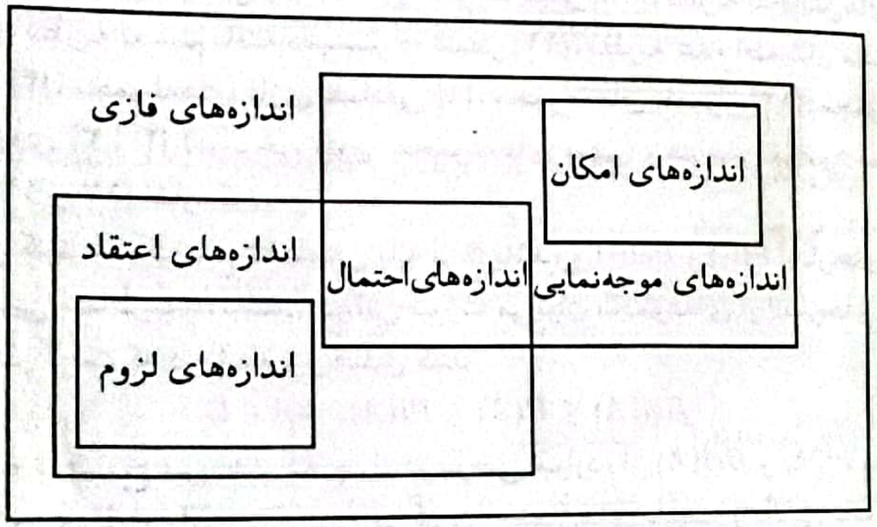
$$N(A) > 0 \Rightarrow \Pi(A) = 1 \qquad \text{(۱۷.۵.الف)}$$

$$\Pi(A) < 1 \Rightarrow N(A) = 0 \qquad \text{(۱۷.۵.ب)}$$

بر پایه‌ی آنچه گفته شد می‌توان روابط مربوط به اندازه‌های امکان و اندازه‌های لزوم را به‌صورتی که در جدول زیر درج شده است خلاصه کرد.

روابط مربوط به اندازه‌های لزوم	روابط مربوط به اندازه‌های امکان
$N(A \cap B) = \min[N(A), N(B)]$	$\Pi(A \cup B) = \max[\Pi(A), \Pi(B)]$
$N(A) = 1 - \Pi(A^c)$	$\Pi(A) = 1 - N(A^c)$
$\min[N(A), N(A^c)] = 0$	$\max[\Pi(A), \Pi(A^c)] = 1$
$N(A) + N(A^c) \leq 1$	$\Pi(A) + \Pi(A^c) \geq 1$
$N(A) > 0 \Rightarrow \Pi(A) = 1$	$\Pi(A) < 1 \Rightarrow N(A) = 0$
$\Pi(A) \geq N(A)$	

نکته ۶.۵ از مطالب این فصل روشن شد که اندازه‌های فازی رده‌ی بزرگی از انواع اندازه‌های عدم اطمینان هستند که شامل دو رده‌ی اصلی اندازه‌های باور (اعتقاد) و اندازه‌های موجه‌نمایی می‌باشند. به‌علاوه اندازه‌های لزوم و امکان، به‌ترتیب زیرمجموعه‌هایی از این دو نوع رده از اندازه‌های فازی هستند که در حالت خاص به اندازه‌های احتمال تبدیل می‌شوند. این تقسیم‌بندی را می‌توان در نموداری مانند آنچه در شکل ۱.۵ آمده است خلاصه کرد.



شکل ۱.۵ روابط بین اندازه‌های فازی معرفی شده در این فصل

۶.۵ نکات تکمیلی

۱. اندازه‌های باور را می‌توان مستقیماً، بدون توسل به اندازه‌های فازی، نیز تعریف کرد. درواقع اندازه باور یک تابع مجموعه‌ای است که در اصول g_1 و g_3 (در تعریف ۱.۵) و

رابطه ۱.۵ (در تعریف ۲.۵) صدق کند. به همین ترتیب می‌توان اندازه‌های موجه‌نمایی، امکان، لزوم و احتمال را نیز مستقیماً تعریف کرد. اما تعریف این اندازه‌ها در چارچوب اندازه‌های فازی این مزیت را دارد که دیدگاهی جامع و منسجم درباره‌ی چند نوع مهم از اندازه‌های عدم اطمینان فراهم می‌آورد.

۲. برای مطالعه اندازه‌های عدم اطمینان، و به ویژه اندازه‌های فازی، و همچنین ارتباط بین این اندازه‌ها و زمینه‌های کاربردی آن‌ها، منابع متعددی وجود دارد. برای نمونه می‌توان به مراجع [۹ و ۱۲ و ۲۰] اشاره کرد. در مرجع [۲] فهرست کامل‌تری از این مراجع، همراه با تاریخچه‌ای از اندازه‌های فازی، ارائه شده است.

۳. مفهوم اندازه فازی (تعریف ۱.۵) را می توان به دامنه‌ی مجموعه‌های فازی از یک مجموعه مرجع تعمیم داد. در این حالت، یک اندازه فازی تعمیم یافته به صورت تابعی از $\mathcal{F}(X)$ (رده‌ای از مجموعه‌های فازی از X) به بازه [۰و۱] تعریف می‌شود. در این باره می‌توانید مرجع [٦] و مرجع [۷] فصل ۴ را مطالعه کنید. شایان ذکر است که امکان پیشامدهای فازی (موضوع بخش ۲.۴) را می‌توان با این دیدگاه نیز بررسی کرد.

۴. مفاهیم مرتبط با عدم اطمینان و عدم حتمیت، منحصر به اندازه‌های فازی نیست. انواع دیگر از عدم اطمینان معرفی و بررسی شده‌اند که هر کدام در زمینه‌هایی خاص کاربرد دارند. در این باره می‌توان به نظریه شواهد شیفر [١٦]، نظریه گنجایش‌های شوکه [۷ و ۲۰]، نظریه تعمیم یافته دمپستر – شیفر [۱۲]، نظریه عدم اطمینان مشتمل بر مطلوبیت [۴]، مجموعه‌های فازی تصادفی [۱]، مجموعه‌های ناهموار [۱۳]، مجموعه‌های فازی شهودی [۳ و ۴] (در برخی متون: مجموعه‌های مبهم) و هم‌چنین موضوع محاسبات گرانولار [۱۴ و ۱۷] اشاره کرد.

۵. فرض کنید m یک تابع تخصیص پایه بر $\mathcal{B}$ باشد، و $Bel(\cdot)$ و $Pl(\cdot)$ اندازه‌های اعتقاد و موجه‌نمایی متناظر با m باشند. در این‌صورت می‌توان مجموعه‌ای از اندازه‌های احتمال بر $\mathcal{B}$ در نظر گرفت که در رابطه زیر صدق کنند

$$Bel(A) \leq P(A) \leq Pl(A), \quad \forall A \in \mathcal{B}$$

این رابطه توضیح می‌دهد که چرا، در برخی موارد، از $Bel(A)$ و $Pl(A)$ به‌عنوان احتمال‌های پایینی و بالایی نام برده می‌شود. احتمال‌های پایینی و بالایی نخستین بار توسط دمپستر [۸] در سال ۱۹٦۷، و البته مستقل از مفهوم اندازه‌های باور و موجه‌نمایی، معرفی شد. برای مطالعه این رویکرد به احتمال به [۸ و ۲۱] مراجعه کنید.

٦. در برخی از تعاریف برای اندازه‌های عدم اطمینان، به مجموعه تهی جرم مثبتی تخصیص می‌یابد. این نوع اندازه‌ها در مواردی کاربرد دارند که شواهد موجود کامل نیستند و با نوعی نقصان در اطلاعات مواجه هستیم. برای آگاهی بیشتر می‌توانید [۱۸] را ببینید.

تمرین‌های فصل پنجم

۱.۵ فرض کنید $X = \{a, b, c, d\}$ و تابع تخصیص پایه به‌صورت زیر باشد

$$m(\{b, c\}) = ۰/۴ \ , \ m(\{a, b, d\}) = ۰/۳ \ , \ m(\{a, b, c\}) = ۰/۳$$

اندازه‌های باور و موجه‌نمایی متناظر با m را بیابید.

۲.۵ فرض کنید $X = \{a, b, c, d\}$ و اندازه باور $Bel(\cdot)$ بر $(X, \mathcal{P}(X))$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد

$$Bel(a) = Bel(b) = Bel(d) = ۰ \ , \ Bel(c) = ۰/۱$$
$$Bel(\{a, c\}) = ۰/۲ \ , \ Bel(\{b, c\}) = ۰/۳ \ , \ Bel(\{c, d\}) = ۰/۱$$
$$Bel(\{a, b, c\}) = ۰/۴ \ , \ Bel(\{a, c, d\}) = ۰/۲ \ , \ Bel(\{b, c, d\}) = ۰/٦$$

تابع تخصیص متناظر را به‌دست آورید.

۳.۵ ثابت کنید از هر یک از شرط‌های ۳.۵ و ۵.۵، اصل $g_۲$ را می‌توان نتیجه گرفت.

۴.۵ ثابت کنید برای هر پیشامد A،

$$m(A) \leq Bel(A) \leq Pl(A)$$

۵.۵ فرض کنید $A = \{x_۱, x_۲, x_۳\}$. درستی رابطه زیر را، که در اثبات قضیه ۱.۵ استفاده شد، بررسی کنید

$$\sum_{C \subset A} m(C) + \sum_{B \subset A} (-۱)^{|A-B|} \sum_{C \subseteq B} m(C) = ۰$$

٦.۵ احکام نتیجه ٦.۵ را اثبات کنید.

۷.۵ تابع مجموعه‌ای $G_\lambda : \mathcal{B} \to [۰, ۱]$ بر $(X, \mathcal{B})$ را با دو شرط زیر در نظر بگیرید

۱) $G_\lambda(\Omega) = ۱$

۲) اگر $A \cap B = \phi$ آنگاه

$$G_\lambda(A \cup B) = G_\lambda(A) + G_\lambda(B) + \lambda G_\lambda(A) G_\lambda(B)$$

که در آن $\lambda \in (-۱, \infty)$. (تابع G_λ، λ– اندازه سوگینو نام دارد). ثابت کنید

۱) $G_\lambda(\phi) = ۰$

۲) اگر $A \subseteq B$ آنگاه $G_\lambda(A) \leq G_\lambda(B)$.

۸.۵ فرض کنید G_λ یک λ- اندازه سوگینو باشد. تابع مجموعه‌ای P_λ را بر $(X,\mathcal{B})$ به‌صورت زیر در نظر بگیرید

$$P_\lambda(A) = \frac{\log(1+\lambda G_\lambda(A))}{\log(1+\lambda)} \ , \ \forall A \in \mathcal{B} \ , \ \lambda \neq 0.$$

ثابت کنید P_λ یک اندازه احتمال بر $(X,\mathcal{B})$ است.

منابع و مراجع

[۱] امینی، محمد؛ بزرگ‌نیا، ابوالقاسم (۱۳۸۱)؛ از عناصر تصادفی تا مجموعه‌های تصادفی فازی، گزارش سومین سمینار مجموعه‌های فازی و کاربردهای آن، دانشگاه سیستان و بلوچستان، ۲۱-۱۱.

[۲] طاهری، سید محمود (۱۳۸۶)؛ اندازه‌های عدم اطمینان، فرهنگ و اندیشه ریاضی (در دست چاپ).

[۳] طاهری، سید محمود؛ زارعی، رضا (۱۳۸۷)؛ مجموعه‌های مبهم (فازی شهودی)، سیستم‌های هوشمند و محاسبات نرم (مجموعه مقالات)، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان (در دست چاپ).

[4] Alvargonzalez, M., Lopez, A.J., Perez, R. (2004); The double quadratic uncertainty measures and their economic applications, In: Lopez, M., et al. (Eds.), Soft Methodology and Random Information Systems, Springer, pp. 677-684.

[5] Atanassov, K. (1986); Intuitionstic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 20: 87-96.

[6] Biacino, L. (2007); Fuzzy subsethood and belief functions of fuzzy events, Fuzzy Sets and Systems, 157: 38-49.

[7] Choquet, G. (1953); Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier, 5: 131-295.

[8] Dempster, A.P. (1967); Upper and lower probabilities by multivalued mappings, Ann. Math. Stat, 38: 325-339.

[9] Dennenberg, D. (2000); Non-additive measure and integral, basic concepts and their role for applications, In: Grabisch, M. et al. (Eds.), Fuzzy Measures and Integrasls, Physical-Verlag, pp. 42-69.

[10] Grabisch, M., Nguyen, H.T., Walker, E.A. (1995); Fundamentals of Uncertainty Calculi with Applications to Fuzzy Inference, Kluwer.

[11] Klir, G.J. (1987); Where do we stand on measures of uncertainty, ambiguity, fuzziness, and the like?, Fuzzy Sets and Systems, 24: 141-160.

[12] Lucas, C., Araabi, B.N. (1999); Generalization of the Dempster-Shafer theory: a fuzzy-valued measure, IEEE Trans. Fuzzy Systems, 7: 255-270.

[13] Pawlak, Z. (1982); Rough sets, J. Inf. Comput. Sci., 11: 341-356.

[14] Pedrycz, W.(2001); Granular Computing: An Emerging Paradigm, Springer.

[15] Savage, L.J. (1972); The Fundations of Statistics, Sec. Ed., Dover.

[16] Shafer, G. (1976); A Mathematical Theory of Evidence, Princeton Univ. Press.

[17] Skowron, A., Stepaniuk, J. (2001); Information granules: towards fundations of granular computing, Inter. J. Intelligent Systems, 16: 57-85.

[18] Smets, P., Kennes, R. (1994); The transfrable belief model, Artificial Intelligence, 66: 191-234.

[19] Sugeno, M. (1977); Fuzzy measures and fuzzy inegrals- a survey, in: Gupta, M.M., Saridis, G.N., Gaines, B.R. (Eds.), Fuzzy Automata and Decision Processes, North-Holland, pp. 89-102.

[20] Takahagi, E. (2005); Logical Choquet integrals and identification of fuzzy measures, Proc. of the 11th IFSA Congress, Beijing, China, pp. 114-120.

[21] Walley, P. (1991); Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities, Chapman and Hall.

فصل ٦

توزیع‌های احتمال فازی

مقدمه

در فصل حاضر، شیوه‌ی تعریف و محاسبه‌ی پیشامدهای معمولی در حالتی که احتمال مربوط به نقاط فضای نمونه به‌صورت اعداد فازی هستند، بررسی می‌شود.

برای توضیح مسئله، فرض کنید P یک اندازه احتمال تعریف شده روی میدان شامل زیر مجموعه‌های $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ باشد، به‌طوری که

$$P(\{x_i\}) = a_i \quad , \quad 1 \leq i \leq n \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 1$$

اگر مقادیر a_i ها به‌طور دقیق معلوم باشند، آنگاه می‌توان احتمال مربوط به هر پیشامد از X را به‌طور دقیق به‌دست آورد. اما ممکن است همه یا تعدادی از مقادیر a_i ها به‌طور دقیق معلوم نباشند، بلکه به‌صورت نادقیق و مبهم بیان شده باشند. سوال این است که چگونه می‌توان در این حالات احتمال پیشامدهای مربوط به X را تعریف و محاسبه کرد. چون اعداد فازی مثلثی مدل مناسبی برای صورت‌بندی اعداد نادقیق هستند، در این فصل فرض می‌کنیم a_i ها به‌صورت اعداد فازی مثلثی باشند. بنابراین در فصل حاضر فرض می‌شود که

$$\tilde{P}(\{x_i\}) = \tilde{a}_i \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

که در آن $\tilde{a}_i$ ها اعداد فازی مثلثی از $[0, 1]$ هستند.

این فصل شامل چهار بخش است. در بخش اول مفاهیم و تعاریف اولیه، از جمله تعریف توزیع احتمال گسسته فازی ارائه می‌شود. در بخش‌های دوم و سوم، احتمال یک پیشامد براساس توزیع احتمال فازی تعریف می‌شود و مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش چهارم میانگین و واریانس توزیع احتمال گسسته فازی تعریف و تشریح می‌شوند.

۱.۶ تعاریف و مفاهیم

نخست تعریفی را درباره حساب بازه‌ای ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱.۶ فرض کنید $I = [a, b]$ و $J = [c, d]$ دو بازه‌ی بسته باشند. اگر $*$ نشان دهنده‌ی یکی از عمل‌های $\times$ و $-$ و $+$ و $\div$ باشد، آنگاه مجموعه $I * J$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$I * J = \{x * y | x \in I \ , \ y \in J\}$$

البته برای حالت تقسیم فرض می‌شود $0 \notin J$.

در این فصل بیشتر از روابط زیر استفاده خواهد شد

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$$
$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$$

چون در این فصل و فصل آینده از اعداد فازی LR به ویژه اعداد فازی مثلثی استفاده می‌کنیم، تعریف این نوع اعداد را، به ویژه برای خوانندگانی که از مطالعه‌ی فصل‌های ۱ و ۲ چشم‌پوشی کرده‌اند، یادآور می‌شویم. اگر عدد فازی $\tilde{A}$ دارای تابع عضویت به‌صورت زیر باشد

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} L(\frac{a - x}{s^L}) & x \leq a \\ R(\frac{x - a}{s^R}) & x > a \end{cases}$$

که در آن L و R توابعی غیرصعودی از R^+ به $[0, 1]$ هستند و $L(0) = R(0) = 1$، آنگاه $\tilde{A}$ را یک عدد فازی LR نامیده و با نماد $\tilde{A} = (a, s^L, s^R)_{LR}$ نمایش می‌دهیم. a را مقدار نما (میانه) و s^L و s^R را به‌ترتیب پهنای چپ و پهنای راست عدد فازی $\tilde{A}$ می‌نامیم. L و R توابع مرجع (توابع شکل) نامیده می‌شوند.

در حالت خاص، اگر $\tilde{A} = (a, s^L, s^R)_{LR}$، و $L = R$ به‌صورت زیر باشند

$$L(x) = R(x) = \begin{cases} 1 - x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

آنگاه عدد فازی $\tilde{A}$ را مثلثی می‌نامیم و آن را با نماد $\tilde{A} = (a, s^L, s^R)_T$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۶ فرض کنید $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ یک فضای نمونه و F میدان شامل تمام زیر مجموعه‌های X باشد. یک توزیع احتمال فازی گسسته بر F توسط مقادیر

$$\tilde{P}(\{x_i\}) = \tilde{a}_i \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

تعریف می‌شود که در آن $\tilde{a}_i$ ها اعداد فازی از $[0, 1]$ هستند.

در این فصل همواره فرض می‌شود که $\tilde{a}_i$ ها اعداد فازی مثلثی به‌صورت $\tilde{a}_i = (a_i, s_i^L, s_i^R)_T$ هستند و $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.

۲.۶ احتمال یک پیشامد در توزیع‌های احتمال فازی

در این بخش روش محاسبه‌ی احتمال فازی مجموعه معمولی A، $\tilde{P}(A)$، را در حالتی که با یک توزیع احتمال گسسته فازی روبرو هستیم، بیان می‌کنیم.

تعریف ۳.۶ فرض کنید $1 \leq k \leq n$، $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ عضوی از F باشد. در این‌صورت احتمال فازی پیشامد A را به‌صورت یک مجموعه فازی با α-برش‌های زیر تعریف می‌کنیم

$$\tilde{P}(A)[\alpha] = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i | (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in S_\alpha \right\} \quad , \quad \forall \alpha \in [0, 1] \qquad (1.6)$$

که در آن

$$S_\alpha = \left\{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in \tilde{a}_i[\alpha] \ , \ 1 \leq i \leq n \ , \ \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \right\}$$

مثال ۱.۶ فضای نمونه $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم احتمال پیشامد $A = \{x_1, x_4\}$ را به‌دست آوریم. فرض کنید احتمال پیشامدهای ساده با اعداد فازی زیر داده شده باشند

$$\tilde{a}_1 = (0/2, 0/1, 0/1)_T \quad , \quad \tilde{a}_2 = (0/2, 0/05, 0/05)_T$$
$$\tilde{a}_3 = (0/3, 0/1, 0/1)_T \quad , \quad \tilde{a}_4 = (0/3, 0/1, 0/1)_T$$

α- برش‌های این اعداد فازی به‌صورت زیر هستند

$$\tilde{a}_1[\alpha] = [0/1 + 0/1\alpha, 0/3 - 0/1\alpha] \quad , \quad \tilde{a}_2[\alpha] = [0/15 + 0/05\alpha, 0/25 - 0/05\alpha]$$
$$\tilde{a}_3[\alpha] = [0/2 + 0/1\alpha, 0/4 - 0/1\alpha] \quad , \quad \tilde{a}_4[\alpha] = [0/2 + 0/1\alpha, 0/4 - 0/1\alpha]$$

با توجه به رابطه ۱.۶، تعدادی از α- برش‌های $\tilde{P}(A)$ عبارتند از

$$\tilde{P}(A)[0] = [0/35, 0/65], \tilde{P}(A)[0/3] = [0/395, 0/605],$$
$$\tilde{P}(A)[0/4] = [0/41, 0/59], \tilde{P}(A)[0/5] = [0/425, 0/575],$$
$$\tilde{P}(A)[0/7] = [0/455, 0/545], \tilde{P}(A)[1] = [0/5, 0/5]$$

مثلاً $\tilde{P}(A)[0/7] = [0/455, 0/545]$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید. نخست برای $\tilde{a}_1$ تا $\tilde{a}_4$ برش ۰/۷ را می‌یابیم. داریم

$$\tilde{a}_1[0/7] = [0/170, 0/230] \quad , \quad \tilde{a}_2[0/7] = [0/185, 0/215]$$
$$\tilde{a}_3[0/7] = [0/270, 0/330] \quad , \quad \tilde{a}_4[0/7] = [0/270, 0/330]$$

حال برای محاسبه $\tilde{P}(A)[0/7]$ کافی است کران پایین و کران بالای بازه‌ی مربوطه را به‌دست آوریم. برای کران پایین چون $A = \{x_1, x_4\}$، بنابراین $A^c = \{x_2, x_3\}$. بنابه شرط

$$S_{0/7} = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) | a_i \in \tilde{a}_i[0/7] \ , \ 1 \le i \le 4 \ , \ \sum_{i=1}^{4} a_i = 1\}$$

لازم است کران‌های بالای $\tilde{a}_2[0/7]$ و $\tilde{a}_3[0/7]$ را در نظر بگیریم. تفاضل حاصل جمع این کران‌ها از یک ۰/۴۵۵ است که بدین صورت کران پایین $\tilde{P}(A)[0/7]$ به‌دست می‌آید. بدین ترتیب مینیمم مقدار $a_1 + a_4$ در عبارت $\sum_{i=}^{4} a_i = 1$ تحت این شرط که $a_3 + a_2$ ماکزیمم مقدار خود را بگیرد حاصل می‌شود. به طریق مشابه برای کران بالای $\tilde{P}(A)[0/7]$ بدین صورت عمل می‌کنیم که: کران پایین $\tilde{a}_2[0/7]$ و $\tilde{a}_3[0/7]$ (یعنی مقادیر ۰/۲۷ و ۰/۱۸۵) را جمع می‌کنیم و از عدد یک کم می‌کنیم، که عدد ۰/۵۴۵ حاصل می‌شود.

۳.۶ ویژگی‌های احتمال پیشامدها در توزیع‌های احتمال فازی

در این بخش ویژگی‌های $\tilde{P}(A)$، که در تعریف ۳.۶ ارائه شد، مورد بررسی قرار می‌گیرد. اولین پرسش در مورد $\tilde{P}(A)$ این است که آیا $\tilde{P}(A)$ در هر حالت یک عدد فازی است؟ پاسخ مثبت است.

لم ۱.۶ مجموعه فازی $\tilde{P}(A)$ در تعریف ۳.۶، یک عدد فازی است.

اثبات: نخست ثابت می‌کنیم که $\tilde{P}(A)$ یک مجموعه فازی است. طبق رابطه ۱.۶، $\tilde{P}(A)[0] = [0, 1]$. پس، طبق قضیه نمایش (مرجع [۵] فصل ۱)، کافی است ثابت کنیم

$$\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow \tilde{P}(A)[\alpha_2] \subseteq \tilde{P}(A)[\alpha_1]$$

اما با توجه به رابطه ۱.۶،

$$\tilde{P}(A)[\alpha_2] = \left\{\sum_{i=1}^{k} a_i | S_{\alpha_2}\right\},$$
$$S_{\alpha_2} = \left\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in \tilde{a}_i[\alpha_2], \ 1 \le i \le n, \ \sum_{i=1}^{n} a_i = 1\right\}$$

چون $\tilde{a}_i$ هااعداد فازی هستند، بنابراین اگر $\alpha_1 < \alpha_2$ آنگاه برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ داریم $\tilde{a}_i[\alpha_2] \subseteq \tilde{a}_i[\alpha_1]$ و لذا

$$a_i \in \tilde{a}_i[\alpha_2] \Rightarrow a_i \in \tilde{a}_i[\alpha_1]$$

بنا بر این

$$S_{\alpha_2} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in \tilde{a}_i[\alpha_2]\} \subseteq S_{\alpha_1} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in \tilde{a}_i[\alpha_1]\}$$

و در نتیجه

$$\tilde{P}(A)[\alpha_2] = \left\{\sum_{i=1}^{k} a_i | S_{\alpha_2}\right\} \subseteq \tilde{P}(A)[\alpha_1] = \left\{\sum_{i=1}^{k} a_i | S_{\alpha_1}\right\}$$

حال ثابت می‌کنیم که $\tilde{P}(A)$ یک عدد فازی است. کافی است ثابت کنیم که $\tilde{P}(A)[1] \neq \phi$، و هر $\alpha-$ برش $\tilde{P}(A)$ یک بازه‌ی بسته و کراندار است (مرجع [۸] فصل ۱ و [۱۰] فصل ۲). فرض کنید

$$S = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \ge 0 \ , \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\} \tag{۲.۶}$$

$$Dom[\alpha] = (\prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_i[\alpha]) \cap S \quad , \quad \forall \alpha \in [0, 1] \tag{۳.۶}$$

تابع f را با دامنه $Dom[\alpha]$ و برد اعداد حقیقی به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in Dom[\alpha]$$

$Dom[\alpha]$ یک مجموعه بسته و کراندار و f نیز تابعی پیوسته است. بنا بر این برد f نیز بازه‌ای بسته و کراندار از اعداد حقیقی می‌باشد. حال اگر برد f را به‌صورت زیر در نظر بگیریم

$$\Gamma[\alpha] = f(Dom[\alpha]) \quad , \quad \alpha \in [0, 1]$$

با توجه به رابطه (۱.۶) خواهیم داشت

$$\Gamma[\alpha] = \tilde{P}(A)[\alpha] \ , \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

پس هر α- برش $\tilde{P}(A)$ یک بازه‌ی بسته و کراندار است.

در این فصل و از این پس از نماد $\tilde{P}(A) \leq \tilde{P}(B)$ در حالتی که $\tilde{P}(A)$ زیرمجموعه $\tilde{P}(B)$ باشد استفاده می‌کنیم، یعنی حالتی که برای هر α، $\tilde{P}(A)[\alpha] \subseteq \tilde{P}(B)[\alpha]$.

قضیه ۱.۶ فرض کنید A و B دو پیشامد از X باشند.

۱) اگر $A \cap B = \phi$ آنگاه

$$\tilde{P}(A) + \tilde{P}(B) \geq \tilde{P}(A \cup B)$$

۲) اگر $A \cap B \neq \phi$ آنگاه

$$\tilde{P}(A) + \tilde{P}(B) - \tilde{P}(A \cap B) \geq \tilde{P}(A \cup B)$$

۳) اگر $A \subset B$ و $\tilde{P}(A)[\alpha] = [p_{a_1}(\alpha), p_{a_2}(\alpha)]$ و $\tilde{P}(B)[\alpha] = [p_{b_1}(\alpha), p_{b_2}(\alpha)]$ آنگاه

$$p_{a_i}(\alpha) \leq p_{b_i}(\alpha) \ , \ i = 1,2 \ , \ \forall \alpha \in [0,1]$$

۴) $\tilde{P}(\phi) = 0, \tilde{P}(X) = 1, \tilde{P}(A) \leq 1$.

۵) اگر A^c مکمل مجموعه A باشد، آنگاه

$$\tilde{P}(A) + \tilde{P}(A^c) \geq 1$$

اثبات: بندهای ۱ و ۲ را اثبات می‌کنیم و اثبات سایر بندها را به خواننده واگذار می‌کنیم.

۱) نخست توجه کنید که $(\tilde{P}(A) + \tilde{P}(B))[\alpha] = \tilde{P}(A)[\alpha] + \tilde{P}(B)[\alpha]$ (مرجع [۹] فصل ۱ و مرجع [۱۰] فصل ۲ را ببینید). برای اثبات بند ۱ کافی است نشان دهیم

$$\tilde{P}(A \cup B)[\alpha] \subseteq \tilde{P}(A)[\alpha] + \tilde{P}(B)[\alpha] \ , \ \forall \alpha \in [0,1]$$

برای سادگی اثبات فرض کنید $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ و $B = \{x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m\}$ که $1 \leq k < l \leq m \leq n$، همچنین

$$S_\alpha = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in \tilde{a}_i[\alpha] \ , \ 1 \leq i \leq n \ , \ \sum_{i=1}^{n} a_i = 1\}$$

با توجه به رابطه (۱.۶) کافی است نشان دهیم

$$\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=l}^{m} a_i | S_\alpha\right\} \subseteq \left\{\sum_{i=1}^{k} a_i | S_\alpha\right\} + \left\{\sum_{i=l}^{m} a_i | S_\alpha\right\} \qquad (۴.۶)$$

فرض کنید $s = \sum_{i=1}^{k} a_i$، $t = \sum_{i=l}^{m} a_i$ و $r = s + t$. اگر $r \in \{\sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=l}^{m} a_i | S_\alpha\}$، چون $s \in \{\sum_{i=1}^{k} a_i | S_\alpha\}$ و $t \in \{\sum_{i=l}^{m} a_i | S_\alpha\}$ بنا بر این $r \in (\{\sum_{i=1}^{k} a_i | S_\alpha\} + \{\sum_{i=l}^{m} a_i | S_\alpha\})$ پس رابطه (۴.۶) صحیح است.

۲) فرض کنید $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ و $B = \{x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m\}$ که $1 \leq l \leq k \leq m \leq n$. کافی است نشان دهیم

$$\left\{\sum_{i=1}^{m} a_i | S_\alpha\right\} \subseteq \left\{\sum_{i=1}^{k} a_i | S_\alpha\right\} + \left\{\sum_{i=l}^{m} a_i | S_\alpha\right\} - \left\{\sum_{i=l}^{k} a_i | S_\alpha\right\} \qquad (۵.۶)$$

مقادیر $s = \sum_{i=1}^{k} a_i$، $t = \sum_{i=l}^{m} a_i$، $u = \sum_{i=l}^{k} a_i$ و $r = s + t - u$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $r \in \{\sum_{i=1}^{m} a_i | S_\alpha\}$. چون $s \in \{\sum_{i=1}^{k} a_i | S_\alpha\}$، $t \in \{\sum_{i=l}^{m} a_i | S_\alpha\}$ و $u \in \{\sum_{i=l}^{k} a_i | S_\alpha\}$، بنا بر این

$$r \in \left(\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i | S_\alpha\right\} + \left\{\sum_{i=l}^{m} a_i | S_\alpha\right\} - \left\{\sum_{i=l}^{k} a_i | S_\alpha\right\}\right)$$

و لذا رابطه (۵.۶) برقرار است.

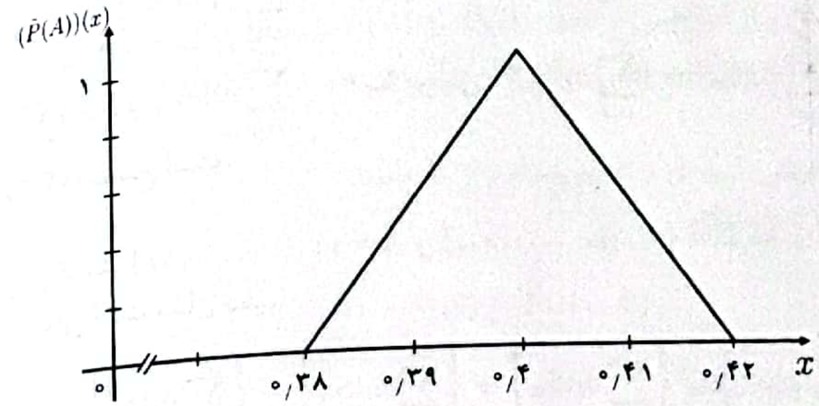
مثال ۲.۶ فضای نمونه $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ و پیشامدهای $A = \{x_1, x_2\}$ و $B = \{x_4, x_5\}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید احتمال پیشامد ساده $\{x_3\}$ به‌صورت دقیق $P(\{x_3\}) = 0/2$ داده شده است، ولی سایر احتمالات پیشامدهای ساده فضای نمونه، مبهم هستند و با اعداد فازی زیر داده شده‌اند

$$\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2 = (0/2, 0/1, 0/1)_T \quad \tilde{a}_4 = \tilde{a}_5 = (0/2, 0/01, 0/01)_T$$

α- برش‌های این اعداد فازی به‌صورت زیر هستند

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1[\alpha] = \tilde{a}_2[\alpha] &= [0/1 + 0/1\alpha, 0/3 - 0/1\alpha] \\ \tilde{a}_4[\alpha] = \tilde{a}_5[\alpha] &= [0/19 + 0/01\alpha, 0/21 - 0/01\alpha] \end{aligned}$$

طبق تعریف ۲.۶، α- برش‌های احتمال‌های فازی $\tilde{P}(A)$، $\tilde{P}(B)$، $\tilde{P}(A \cup B)$، $\tilde{P}(A) + \tilde{P}(B)$، $\tilde{P}(A^c)$ و $\tilde{P}(A) + \tilde{P}(A^c)$، برای چند مقدار α، محاسبه و در جدول ۱.۶ درج شده‌اند. نمودار تابع عضویت $\tilde{P}(A)$ نیز در شکل ۱.۶ رسم شده است.



شکل ۱.۶ نمودار تابع عضویت $\tilde{P}(A)$ در مثال ۲.۶

جدول ۱.۶ نتایج مربوط به مثال ۲.۶

α	$\tilde{P}(A)[\alpha]$	$\tilde{P}(B)[\alpha]$	$(\tilde{P}(A \cup B))[\alpha]$
۰/۰۰	[۰/۳۸۰۰, ۰/۴۲۰۰]	[۰/۳۸۰۰, ۰/۴۲۰۰]	[۰/۸, ۰/۸]
۰/۰۴	[۰/۳۸۰۸, ۰/۴۱۹۲]	[۰/۳۸۰۸, ۰/۴۱۹۲]	[۰/۸, ۰/۸]
۰/۱۲	[۰/۳۸۲۴, ۰/۴۱۷۶]	[۰/۳۸۲۴, ۰/۴۱۷۶]	[۰/۸, ۰/۸]
۰/۲۰	[۰/۳۸۴۰, ۰/۴۱۶۰]	[۰/۳۸۴۰, ۰/۴۱۶۰]	[۰/۸, ۰/۸]
۰/۳۰	[۰/۳۸۶۰, ۰/۴۱۴۰]	[۰/۳۸۶۰, ۰/۴۱۴۰]	[۰/۸, ۰/۸]
۰/۳۹	[۰/۳۸۷۸, ۰/۴۱۲۲]	[۰/۳۸۷۸, ۰/۴۱۲۲]	[۰/۸, ۰/۸]
۰/۴۳	[۰/۳۸۸۶, ۰/۴۱۱۴]	[۰/۳۸۸۶, ۰/۴۱۱۴]	[۰/۸, ۰/۸]
۰/۴۸	[۰/۳۸۹۶, ۰/۴۱۰۴]	[۰/۳۸۹۶, ۰/۴۱۰۴]	[۰/۸, ۰/۸]
۰/۵۰	[۰/۳۹۰۰, ۰/۴۱۰۰]	[۰/۳۹۰۰, ۰/۴۱۰۰]	[۰/۸, ۰/۸]
۰/۵۴	[۰/۳۹۰۸, ۰/۴۰۹۲]	[۰/۳۹۰۸, ۰/۴۰۹۲]	[۰/۸, ۰/۸]
۰/۶۰	[۰/۳۹۲۰, ۰/۴۰۸۰]	[۰/۳۹۲۰, ۰/۴۰۸۰]	[۰/۸, ۰/۸]
۰/۶۸	[۰/۳۹۳۶, ۰/۴۰۶۴]	[۰/۳۹۳۶, ۰/۴۰۶۴]	[۰/۸, ۰/۸]
۰/۷۵	[۰/۳۹۵۰, ۰/۴۰۵۰]	[۰/۳۹۵۰, ۰/۴۰۵۰]	[۰/۸, ۰/۸]
۰/۸۰	[۰/۳۹۶۰, ۰/۴۰۴۰]	[۰/۳۹۶۰, ۰/۴۰۴۰]	[۰/۸, ۰/۸]
۰/۸۵	[۰/۳۹۷۰, ۰/۴۰۳۰]	[۰/۳۹۷۰, ۰/۴۰۳۰]	[۰/۸, ۰/۸]
۰/۹۰	[۰/۳۹۸۰, ۰/۴۰۲۰]	[۰/۳۹۸۰, ۰/۴۰۲۰]	[۰/۸, ۰/۸]
۰/۹۳	[۰/۳۹۸۶, ۰/۴۰۱۴]	[۰/۳۹۸۶, ۰/۴۰۱۴]	[۰/۸, ۰/۸]
۰/۹۶	[۰/۳۹۹۲, ۰/۴۰۰۸]	[۰/۳۹۹۲, ۰/۴۰۰۸]	[۰/۸, ۰/۸]
۱/۰۰	[۰/۴۰۰۰, ۰/۴۰۰۰]	[۰/۴۰۰۰, ۰/۴۰۰۰]	[۰/۸, ۰/۸]

ادامه جدول ۱.۶

α	$(\tilde{P}(A)+\tilde{P}(B))[\alpha]$	$\tilde{P}(A^c)[\alpha]$	$\tilde{P}(A)[\alpha]+\tilde{P}(A^c)[\alpha]$
۰/۰۰	[۰/۷۶۰۰, ۰/۸۴۰۰]	[۰/۵۸۰۰, ۰/۶۲۰۰]	[۰/۹۶۰۰, ۱/۰۴۰۰]
۰/۰۴	[۰/۷۶۱۶, ۰/۸۳۸۴]	[۰/۵۸۰۸, ۰/۶۱۹۲]	[۰/۹۶۱۶, ۱/۰۳۸۰]
۰/۱۲	[۰/۷۶۴۸, ۰/۸۳۵۲]	[۰/۵۸۲۴, ۰/۶۱۷۶]	[۰/۹۶۴۸, ۱/۰۳۵۲]
۰/۲۰	[۰/۷۶۸۰, ۰/۸۳۲۰]	[۰/۵۸۴۰, ۰/۶۱۶۰]	[۰/۹۶۸۰, ۱/۰۳۲۰]
۰/۳۰	[۰/۷۷۲۰, ۰/۸۲۸۰]	[۰/۵۸۶۰, ۰/۶۱۴۰]	[۰/۹۷۲۰, ۱/۰۲۸۰]
۰/۳۹	[۰/۷۷۵۶, ۰/۸۲۴۴]	[۰/۵۸۷۸, ۰/۶۱۲۲]	[۰/۹۷۵۶, ۱/۰۲۴۴]
۰/۴۳	[۰/۷۷۷۲, ۰/۸۲۲۸]	[۰/۵۸۸۶, ۰/۶۱۱۳]	[۰/۹۷۷۲, ۱/۰۲۲۸]
۰/۴۸	[۰/۷۷۹۲, ۰/۸۲۰۸]	[۰/۵۸۹۶, ۰/۶۱۰۴]	[۰/۹۷۹۲, ۱/۰۲۰۸]
۰/۵۰	[۰/۷۸۰۰, ۰/۸۲۰۰]	[۰/۵۹۰۰, ۰/۶۱۰۰]	[۰/۹۸۰۰, ۱/۰۲۰۰]
۰/۵۴	[۰/۷۸۱۶, ۰/۸۱۸۴]	[۰/۵۹۰۸, ۰/۶۰۹۲]	[۰/۹۸۱۹, ۱/۰۱۸۴]
۰/۶۰	[۰/۷۸۴۰, ۰/۸۱۶۰]	[۰/۵۹۲۰, ۰/۶۰۸۰]	[۰/۹۸۴۰, ۱/۰۱۶۰]
۰/۶۸	[۰/۷۸۷۲, ۰/۸۱۲۸]	[۰/۵۹۳۶, ۰/۶۰۶۴]	[۰/۹۸۷۲, ۱/۰۱۲۸]
۰/۷۵	[۰/۷۹۰۰, ۰/۸۱۰۰]	[۰/۵۹۵۰, ۰/۶۰۵۰]	[۰/۹۹۰۰, ۱/۰۱۰۰]
۰/۸۰	[۰/۷۹۲۰, ۰/۸۰۸۰]	[۰/۵۹۶۰, ۰/۶۰۴۰]	[۰/۹۹۲۰, ۱/۰۰۸۰]
۰/۸۵	[۰/۷۹۴۰, ۰/۸۰۶۰]	[۰/۵۹۷۰, ۰/۶۰۳۰]	[۰/۹۹۴۰, ۱/۰۰۶۰]
۰/۹۰	[۰/۷۹۶۰, ۰/۸۰۴۰]	[۰/۵۹۸۰, ۰/۶۰۲۰]	[۰/۹۹۶۰, ۱/۰۰۴۰]
۰/۹۳	[۰/۷۹۷۲, ۰/۸۰۲۸]	[۰/۵۹۸۶, ۰/۶۰۱۴]	[۰/۹۹۷۲, ۱/۰۰۲۸]
۰/۹۶	[۰/۷۹۸۴, ۰/۸۰۱۶]	[۰/۵۹۹۲, ۰/۶۰۰۸]	[۰/۹۹۸۴, ۱/۰۰۱۶]
۱/۰۰	[۰/۸۰۰۰, ۰/۸۰۰۰]	[۰/۶۰۰۰, ۰/۶۰۰۰]	[۱/۰۰۰۰, ۱/۰۰۰۰]

۴.۶ میانگین و واریانس توزیع‌های احتمال فازی

تعریف ۴.۶ مفروضات تعریف‌های ۲.۶ و ۳.۶ را در نظر بگیرید. میانگین و واریانس توزیع احتمال گسسته فازی $\tilde{P}$، به‌صورت مجموعه‌های فازی با α-برش‌های زیر تعریف می‌شوند

$$\tilde{\mu}[\alpha]=\left\{\sum_{i=1}^{n}x_i a_i | S_\alpha\right\} \tag{۶.۶}$$

$$\tilde{\sigma}^2[\alpha]=\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 a_i | S_\alpha, \mu=\sum_{i=1}^{n}x_i a_i\right\} \tag{۷.۶}$$

که در آن‌ها

$$S_\alpha=\{(a_1,a_2,\ldots,a_n)|a_i\in\tilde{a}_i[\alpha]\ ,\ 1\le i\le n,\ \sum_{i=1}^{n}a_i=1\}$$

مثال ۳.۶ فضای نمونه $X=\{0,1\}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید توزیع احتمال گسسته فازی به‌صورت زیر داده شده باشد

$$\tilde{a}_1=\tilde{P}(\{1\})=(0/4,0/1,0/1)_T\ ,\ \tilde{a}_2=\tilde{P}(\{0\})=(0/6,0/1,0/1)_T$$

α- برش‌های این اعداد فازی به‌صورت زیر هستند

$$\tilde{a}_1[\alpha]=[0/3+0/1\alpha,0/5-0/1\alpha]\ ,\ \tilde{a}_2[\alpha]=[0/5+0/1\alpha,0/7-0/1\alpha]$$

طبق تعریف ۴.۶، α- برش‌های میانگین و واریانس فازی $\tilde{P}$ محاسبه شده‌اند و نتایج در جدول ۲.۶ برای چند مقدار α درج شده‌اند.

جدول ۲.۶ نتایج مربوط به مثال ۳.۶

α	$\tilde{\mu}[\alpha]$	$\tilde{\sigma}^2[\alpha]$
۰/۰	[۰/۳۰, ۰/۵۰]	[۰/۲۱۰۰, ۰/۲۵۰۰]
۰/۱	[۰/۳۱, ۰/۴۹]	[۰/۲۱۳۹, ۰/۲۴۹۹]
۰/۲	[۰/۳۲, ۰/۴۸]	[۰/۲۱۷۶, ۰/۲۴۹۶]
۰/۳	[۰/۳۳, ۰/۴۷]	[۰/۲۲۱۱, ۰/۲۴۹۱]
۰/۴	[۰/۳۴, ۰/۴۶]	[۰/۲۲۴۴, ۰/۲۴۸۴]
۰/۵	[۰/۳۵, ۰/۴۵]	[۰/۲۲۷۵, ۰/۲۴۷۵]
۰/۶	[۰/۳۶, ۰/۴۴]	[۰/۲۳۰۴, ۰/۲۴۶۴]
۰/۷	[۰/۳۷, ۰/۴۳]	[۰/۲۳۳۱, ۰/۲۴۵۱]
۰/۸	[۰/۳۸, ۰/۴۲]	[۰/۲۳۵۶, ۰/۲۴۳۶]
۰/۹	[۰/۳۹, ۰/۴۱]	[۰/۲۳۷۹, ۰/۲۴۱۹]
۱/۰	[۰/۴۰, ۰/۴۰]	[۰/۲۴۰۰, ۰/۲۴۰۰]

با توجه به نتایج جدول ۲.۶ می‌توان گفت که میانگین توزیع احتمال گسسته فازی فوق حدوداً ۰/۴ و به‌صورت $(۰/۴, ۰/۱, ۰/۱)_T$ است. همچنین واریانس این توزیع نیز حدوداً ۰/۲۴ و تقریباً به‌صورت عدد فازی مثلثی $(۰/۲۴, ۰/۰۳, ۰/۰۱)_T$ است.

لم ۲.۶ مجموعه‌های فازی $\tilde{\mu}$ و $\tilde{\sigma}^2$ تعریف شده توسط معادلات (۶.۶) و (۷.۶) اعداد فازی هستند.

اثبات: اثبات کاملاً مشابه اثبات لم ۱.۶ است. با این تفاوت که برای اثبات این که $\tilde{\mu}$ و $\tilde{\sigma}^2$ اعداد فازی هستند، کافی است تابع f را، به‌ترتیب، به‌صورت زیر در نظر گرفت

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$$

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 a_i$$

مثال ۴.۶ فرض کنید فضای نمونه به‌صورت $X = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}$ باشد. توزیع احتمال زیر را در نظر بگیرید

$$P(\{x_0\}) = P(\{x_4\}) = \frac{1}{16}, \quad P(\{x_2\}) = \frac{3}{8}, \quad P(\{x_1\}) = P(\{x_3\}) = \frac{1}{4}$$

واضح است که $\mu = ۲$ و $\sigma^2 = ۱$. اکنون فرض کنید که $P(\{x_1\})$ و $P(\{x_3\})$ به‌صورت مبهم و با اعداد فازی مثلثی زیر بیان شده باشند

$$\tilde{a}_1 = \tilde{a}_3 = (۰/۲۵, ۰/۰۵, ۰/۰۵)_T$$

می‌خواهیم مقادیر میانگین و واریانس توزیع احتمال فازی فوق را محاسبه کنیم. α-برش‌های $\tilde{a}_1$ و $\tilde{a}_3$ عبارتند از

$$\tilde{a}_1[\alpha] = \tilde{a}_3[\alpha] = [۰/۲ + ۰/۰۵\alpha, ۰/۳ - ۰/۰۵\alpha]$$

با انتخاب $a_1 \in \tilde{a}_1[\alpha]$، کافی است a_3 را طوری انتخاب کرد که $\sum_{i=0}^{4} a_i = ۱$ $(a_3 = ۰/۵ - a_1, a_3 \in \tilde{a}_3[\alpha])$. بنا بر این $\mu = f_1(a_1) = ۲/۵ - ۲a_1$ تابعی فقط از a_1 است. با جایگذاری کران‌های $\tilde{a}_1[\alpha]$ در $f_1(a_1)$ به‌دست می‌آوریم

$$\tilde{\mu}[\alpha] = [۱/۹ + ۰/۱\alpha, ۲/۱ - ۰/۱\alpha]$$

که α-برش عدد فازی مثلثی $\tilde{\mu} = (۲, ۰/۱, ۰/۱)_T$ است.

برای محاسبه $\tilde{\sigma}^2[\alpha]$، بر اساس تعریف ۴.۶ و به‌طور مشابه با بحث بالا، داریم

$$\sigma^2 = f_2(a_1) = -4a_1^2 + 2a_1 + ۰/۷۵ \quad , \quad \forall a_1 \in \tilde{a}_1[\alpha]$$

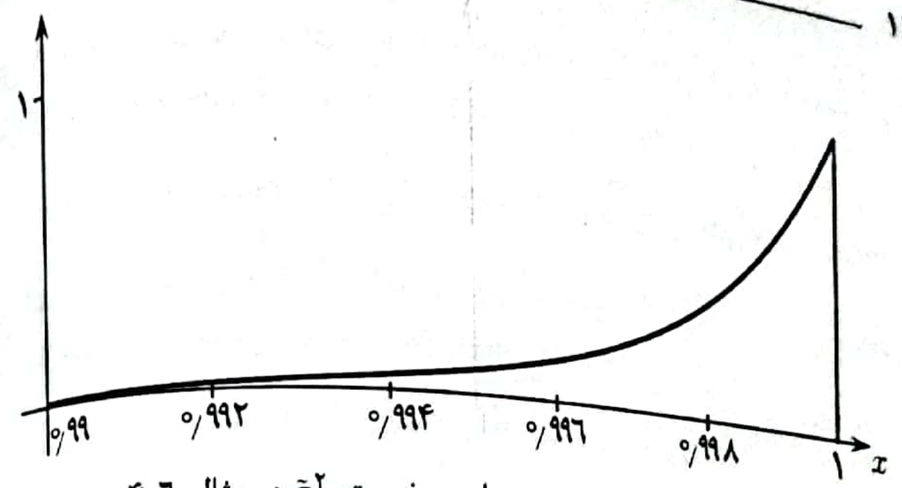
بنا بر این

$$\tilde{\sigma}^2[\alpha] = [f_2(۰/۲ + ۰/۰۵\alpha), ۱]$$

و لذا

$$\tilde{\sigma}^2[\alpha] = [۰/۹۹ + ۰/۰۲\alpha - ۰/۰۱\alpha^2, ۱]$$

دقت کنید با توجه به فرم α- برش‌های $\tilde{\sigma}^2$ و نمودار تقریبی $\tilde{\sigma}^2$، می‌توان گفت که واریانس فازی توزیع احتمال فوق، تقریباً یک است که در این عبارت، تقریباً یک، عدد فازی است که نمودار تقریبی آن در شکل ۲.۶ رسم شده است.



شکل ۲.۶ نمودار تقریبی تابع عضویت $\tilde{\sigma}^2$ در مثال ۴.۶

تذکر ۱.۶ برای محاسبه‌ی میانگین و واریانس یک توزیع احتمال فازی، باید مسائلی از نوع مینیمم سازی و ماکزیمم سازی را به‌صورت زیر حل کنیم

$$\begin{cases} \mu_1(\alpha) = \min\{\sum_{i=1}^{n} x_i a_i | S_\alpha\} \\ \mu_2(\alpha) = \max\{\sum_{i=1}^{n} x_i a_i | S_\alpha\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1^2(\alpha) = \min\{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 a_i | S_\alpha, \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i\} \\ \sigma_2^2(\alpha) = \max\{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 a_i | S_\alpha, \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i\} \end{cases}$$

که در آن‌ها S_α مجموعه‌ای است که در تعریف ۴.۶ ذکر شد. در حالت کلی حل این نوع مسائل، پیچیده است و در هر زمینه باید برنامه کامپیوتری مناسب تدوین شود.

۵.۶ نکات تکمیلی

۱. رویکرد مطالب فصلی که گذشت، مبتنی بر اثر باکلی درباره‌ی توزیع‌های احتمال فازی [۲] و نیز مراجع [۷–۴ و ۱] و [۱۳] بوده است.

۲. رویکردهای دیگری نیز به توزیع‌های احتمال فازی وجود دارد. از آن جمله می‌توان به شیوه‌ای برای به‌دست آوردن یک توزیع احتمال، با استفاده از اصل ماکزیمم آنتروپی،

بر اساس اطلاعات نادقیق [۱۱] اشاره کرد. رویکرد دیگر، محاسبه احتمالات بر پایه‌ی مشاهدات فازی است که در نکته تکمیلی ۴ فصل ۳ به آن اشاره شد. رالسکو [۱۲] شیوه‌ای را برای تعریف احتمال فازی یک پیشامد فازی پیشنهاد نموده که مبتنی بر مفهوم چندک است. وی به کاربردهایی از این شیوه، به ویژه در زمینه‌ی آزمون فرض‌های فازی، نیز اشاره نموده است.

۳. محاسبات مربوط به توزیع‌های احتمال فازی مستلزم تدوین برنامه‌های کامپیوتری مناسب است. محاسبات مربوط به مثال‌های این فصل (و نیز مثال‌های فصل آینده در مورد توزیع‌های احتمال با پارامترهای فازی) با به کارگیری نرم افزارهای Matlab انجام شده است (نیز رک به [۷]).

۴. باکلی در دو اثر دیگر خود [۴ و ۳] شیوه‌هایی را برای استنباط آماری (براورد و آزمون فرضیه)، سازگار و مشابه با شیوه‌ای که برای تعریف توزیع احتمال فازی ارائه داده، مطرح نموده است.

۵. کومن [۹] یک مدل سلسله مراتبی برای توصیف احتمال‌های مبهم و استنباط بر اساس آن‌ها ارائه داده است. چیانگ و یائو [۸] احتمال فازی را بر اساس تعریفی از میدان سیگمایی فازی مطالعه کرده‌اند. کراشمر [۱۰] نیز مباحثی از احتمال را مبتنی بر فضای نمونه‌ای فازی بررسی نموده است.

تمرین‌های فصل ششم

۱.۶ فرض کنید $I = [2,5]$ و $J = [1,3]$ و $K = [-2,2]$. مطلوب است
الف) $I + J$، ب) $I - J$، پ) $J - I$، ت) $I \times J$، ث) $J \times K$.

۲.۶ در مثال ۱.۶، پنج نمونه از عناصر $S_{0/7}$ را بنویسید.

۳.۶ در مثال ۱.۶، برش‌های ۰/۸ اعداد فازی $\tilde{a}_1$ تا $\tilde{a}_4$ را به‌دست آورید و چگونگی محاسبه $\tilde{P}(A)[0/8]$ را شرح دهید.

۴.۶ بندهای ۳ تا ۵ قضیه ۱.۶ را اثبات کنید.

۵.۶ فرض کنید $X = \{x_1, x_2, x_3\}$، و احتمال پیشامدهای ساده به‌صورت اعداد فازی مثلثی زیر باشند

$$\tilde{a}_1 = (0/3, 0/05, 0/05)_T \ , \ \tilde{a}_2 = (0/3, 0/10, 0/10)_T \ , \ \tilde{a}_3 = (0/4, 0/10, 0/10)_T$$

احتمال پیشامد $A = \{x_1, x_2\}$ را به‌دست آورید.

منابع و مراجع

[۱] عزیزی، رحیم؛ طاهری، سید محمود (۱۳۸۴)؛ توزیع احتمال گسسته فازی، گزارش پنجمین سمینار احتمال و فرآیندهای تصادفی، دانشگاه بیرجند، ۲۲۳–۲۳۴.

[2] Buckley, J.J. (2003); Fuzzy Probabilities: New Approach and Applications, Springer.

[3] Buckley, J.J. (2004); Fuzzy Statistics, Springer.

[4] Buckley, J.J. (2006); Fuzzy Probability and Statistics, Springer.

[5] Buckley, J.J., Eslami, E. (2003); Uncertain probabilities I: the discrete case, Soft Computing, 7: 500-505.

[6] Buckley, J.J., Eslami, E. (2004); Uncertain probabilities II: the continuous case, Soft Computing, 8: 193-199.

[7] Buckley, J.J., Reilly, K.D., Jowers, L.J. (2005); Simulating continuous fuzzy systems, Iranian J. Fuzzy Systems, 2: 1-17.

[8] Chiang, J., Yao, J.S. (2000); Fuzzy probability over fuzzy σ-field with fuzzy topological spaces, Fuzzy Sets and Systems, 116:201-223.

[9] Cooman, G. (2005); A behavioural model for vague probability assessments, Fuzzy Sets and Systems, 154:305-358.

[10] Kratschmer, V. (2004); Probability theory in fuzzy sample spaces, Metrika, 60: 167-189.

[11] Moral, S. (1986); Construction of probability distribution from a fuzzy information, In: Jones, A., et al., (Eds.); Fuzzy Sets Theory and Applications, Reidel, pp. 51-60.

[12] Ralescu, D.A. (2004); Fuzzy probability and some applications, In: Lopez-Diaz, M., et al. (Eds); Soft Methodology and Random Information Systems, Springer, pp. 45-49.

[13] Trutschnig, W., Hareter, D. (2004); Fuzzy probability distributions, In: Lopez-Diaz, M., et al. (Eds.); Soft Methodology and Random Information Systems, Springer, pp. 399-406.

فصل ۷

توزیع‌های احتمال با پارامترهای فازی

مقدمه

در این فصل توزیع‌های احتمال، هنگامی که یک یا چند پارامتر آنها به‌صورت تقریبی بیان شده‌اند، بررسی می‌گردند. شیوه‌ی کار مطابق شیوه‌ای است که در فصل ٦ بیان شد.

در بخش اول توزیع دوجمله‌ای با پارامتر نسبت فازی (به کوتاهی: توزیع دوجمله‌ای فازی) مطالعه می‌شود. در این بخش میانگین و واریانس این توزیع و ویژگی‌های آن‌ها نیز بررسی می‌گردند. بخش دوم اختصاص به توزیع یکنواخت با پارامترهای فازی دارد. در بخش سوم توزیع نرمال با پارامترهای فازی معرفی و بررسی می‌شود. در بخش چهارم موضوع تقریب توزیع دوجمله‌ای فازی با توزیع نرمال فازی مطالعه می‌شود.

۱.۷ توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای فازی

آزمایش برنولی را با احتمال موفقیت p و شکست q در نظر بگیرید. فرض کنید این آزمایش در شرایط یکسان و به‌طور مستقل n بار تکرار می‌شود. اگر $P(r)$ نشان دهنده‌ی احتمال r موفقیت در n آزمایش باشد، آنگاه

$$P(r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r} \qquad r = ۰, ۱, \ldots, n$$

حال فرض کنید که p و q به‌طور دقیق معلوم نیستند بلکه به‌صورت مبهم و با اعداد فازی $\tilde{p}$ و $\tilde{q}$ از بازه $[۰, ۱]$ داده شده باشند (با این فرض که $\tilde{p}[۱] = ۱ - \tilde{q}[۱]$). در این حالت

$\tilde{P}(r)$، احتمال فازی r موفقیت در n آزمایش، طبق تعریف ۳.۶ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\tilde{P}(r)[\alpha] = \{\binom{n}{r} p^r q^{n-r} | S_\alpha\} \quad \forall \alpha \in [0,1] \tag{1.7}$$

که در آن

$$S_\alpha = \{(p,q) | p \in \tilde{p}[\alpha], q \in \tilde{q}[\alpha], p+q=1\}$$

اگر α- برش احتمال فازی $\tilde{P}(r)$ را به‌صورت بازه $\tilde{P}(r)[\alpha] = [p_{r_1}(\alpha), p_{r_2}(\alpha)]$ نشان دهیم، آنگاه

$$p_{r_1}(\alpha) = \min\{\binom{n}{r} p^r q^{n-r} | S_\alpha\}, \quad \alpha \in [0,1] \tag{2.7}$$

$$p_{r_2}(\alpha) = \max\{\binom{n}{r} p^r q^{n-r} | S_\alpha\}, \quad \alpha \in [0,1] \tag{3.7}$$

توجه دارید که محاسبه $p_{r_1}(\alpha)$ و $p_{r_2}(\alpha)$ و در نتیجه به‌دست آوردن $\tilde{P}(r)$ در حالت کلی پیچیده و مستلزم محاسبات بسیار است. با یک مثال شیوه‌ی کار را بیان می‌کنیم.

مثال ۱.۷ در یک آزمایش برنولی، احتمال‌های موفقیت و شکست، اعداد فازی مثلثی به‌صورت زیر هستند

$$\tilde{p} = (0/4, 0/1, 0/1)_T \ , \ \tilde{q} = (0/6, 0/1, 0/1)_T$$

این آزمایش را سه بار مستقلاً انجام می‌دهیم. می‌خواهیم احتمال وقوع دو موفقیت، $\tilde{P}(2)$، را به‌دست آوریم. با توجه به معادلات ۲.۷ و ۳.۷ داریم

$$p_{r_1}(\alpha) = \min\{3p^2q | S_\alpha\} \ , \ p_{r_2}(\alpha) = \max\{3p^2q | S_\alpha\}$$

چون $3p^2q$ در بازه $\tilde{p}[0]$ صعودی است، بنابراین

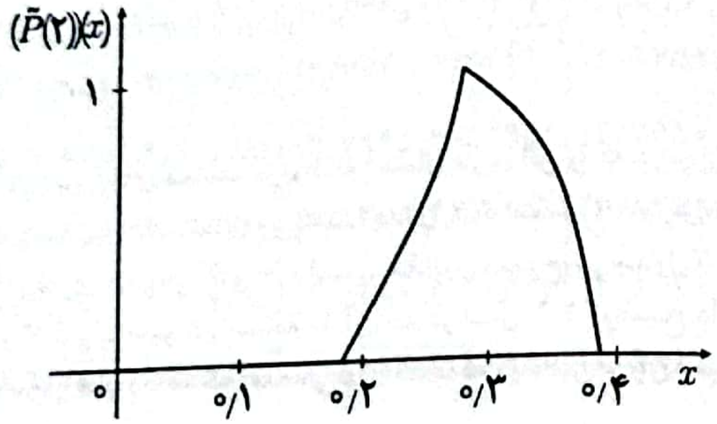
$$\tilde{P}(2)[\alpha] = [3(p_1(\alpha))^2(1-p_1(\alpha)), 3(p_2(\alpha))^2(1-p_2(\alpha))]$$

که در آن

$$\tilde{p}[\alpha] = [p_1(\alpha), p_2(\alpha)] = [0/3 + 0/1\alpha, 0/5 - 0/1\alpha]$$

پس، برای نمونه، $\tilde{P}(2)[0/7] = [0/2587, 0/3162]$ و این یعنی برای $\alpha = 0/7$، مینیمم مقدار $\tilde{P}(2)$ برابر ۰/۲۵۸۷ و ماکزیمم مقدار آن ۰/۳۱۶۲ است.

توجه کنید که با توجه به فرم α- برش‌های $\tilde{P}(2)$ و نمودار تقریبی $\tilde{P}(2)$ (شکل ۱.۷)، می‌توان گفت که احتمال وقوع دو موفقیت در سه آزمایش فوق، تقریباً ۰/۳ است. در این عبارت، تقریباً ۰/۳ یک مجموعه فازی است که نمودار آن در شکل ۱.۷ رسم شده است.



شکل ۱.۷ نمودار تقریبی تابع عضویت $\tilde{P}(2)$ در مثال ۱.۷

میانگین و واریانس توزیع دوجمله‌ای فازی

با توجه به تعریف ۴.۶ میانگین و واریانس توزیع دوجمله‌ای فازی، مجموعه‌های فازی با α- برش‌های زیر است

$$\tilde{\mu}[\alpha] = \{np | S_\alpha\} \tag{4.7}$$

$$\tilde{\sigma}^2[\alpha] = \{npq | S_\alpha\} \tag{5.7}$$

قضیه ۱.۷ اگر $\tilde{\mu}$ و $\tilde{\sigma}^2$ میانگین و واریانس توزیع دوجمله‌ای فازی باشند، آنگاه

$$\tilde{\mu} \le n\tilde{p}$$

$$\tilde{\sigma}^2 \le n\tilde{p}\tilde{q}$$

اثبات: اگر $s \in \tilde{\mu}[\alpha]$ آنگاه برای $p \in \tilde{p}[\alpha]$ و $q \in \tilde{q}[\alpha]$ که $p+q=1$، داریم $s = np$. بنا بر این $s \in n\tilde{p}[\alpha]$ و این نتیجه می‌دهد که $\tilde{\mu} \le n\tilde{p}$.
برای اثبات نامعادله دوم اگر $s \in \tilde{\sigma}^2[\alpha]$ آنگاه برای $p \in \tilde{p}[\alpha]$ و $q \in \tilde{q}[\alpha]$ که $p+q=1$، داریم $s = npq$. بنا بر این $s \in n\tilde{p}[\alpha]\tilde{q}[\alpha]$ و این نتیجه می‌دهد که $\tilde{\sigma}^2 \le n\tilde{p}\tilde{q}$.

مثال ۲.۷ فرض کنید در توزیع دوجمله‌ای $n = ۲۰$ و احتمال‌های موفقیت و شکست به‌صورت اعداد فازی زیر باشند

$$\tilde{q} = (۰/۷, ۰/۰۵, ۰/۰۵)_T \ , \ \tilde{p} = (۰/۳, ۰/۱, ۰/۱)_T$$

$$\tilde{P}[۶, ۱۱][\alpha] = \left\{ \sum_{i=۶}^{۱۱} \binom{۲۰}{i} p^i q^{n-i} | p \in \tilde{p}[\alpha],\ q \in \tilde{q}[\alpha],\ p+q = ۱ \right\}$$

جدول ۱.۷، α- برش‌های مختلف مربوط به احتمال فازی این را که در بین ۲۰ آزمایش ۶ تا ۱۱ موفقیت روی دهد نشان می‌دهد. جدول ۲.۷، شامل α- برش‌های مختلف مجموعه‌های فازی $\tilde{\mu}$، $n\tilde{p}$، $\tilde{\sigma}^۲$ و $n\tilde{p}\tilde{q}$ است. مقادیر مندرج در جدول ۲.۷ بر اساس روابط ۴.۷ و ۵.۷ و با شیوه‌ای مشابه با آن چه در مثال ۱.۶ توضیح دادیم به‌دست آمده‌اند. بر اساس نتایج به‌دست آمده می‌توان گفت که میانگین و واریانس توزیع فوق به‌ترتیب حدوداً ۶ و حدوداً ۴/۲ هستند.

جدول ۱.۷ α برش‌های احتمال فازی $\tilde{P}[۶, ۱۱]$ در مثال ۲.۷

α	$\tilde{P}[۶, ۱۱][\alpha]$	α	$\tilde{P}[۶, ۱۱][\alpha]$
۰/۰۰	[۰/۳۸۱۹, ۰/۷۳۵۰]	۰/۵۵	[۰/۴۹۲۲, ۰/۶۵۶۴]
۰/۰۵	[۰/۳۹۱۹, ۰/۷۲۸۷]	۰/۶۵	[۰/۵۰۲۱, ۰/۶۴۸۳]
۰/۱۵	[۰/۴۱۲۰, ۰/۷۱۴۰]	۰/۷۰	[۰/۵۱۱۹, ۰/۶۴۰۰]
۰/۲۰	[۰/۴۲۲۱, ۰/۷۰۸۸]	۰/۷۵	[۰/۵۲۱۶, ۰/۶۳۱۶]
۰/۲۵	[۰/۴۳۲۲, ۰/۷۰۱۸]	۰/۸۰	[۰/۵۳۱۳, ۰/۶۲۳۱]
۰/۳۰	[۰/۴۴۲۲, ۰/۶۹۴۴]	۰/۸۵	[۰/۵۴۰۹, ۰/۶۱۴۴]
۰/۳۵	[۰/۴۵۲۳, ۰/۶۸۷۳]	۰/۹۰	[۰/۵۵۰۴, ۰/۶۰۵۶]
۰/۴۰	[۰/۴۶۲۳, ۰/۶۷۹۸]	۰/۹۵	[۰/۵۵۹۹, ۰/۵۹۶۷]
۰/۴۵	[۰/۴۷۲۳, ۰/۶۷۲۲]	۱/۰۰	[۰/۵۷۸۵, ۰/۵۷۸۵]
۰/۵۰	[۰/۴۸۲۳, ۰/۶۶۴۴]		

جدول ۲.۷ نتایج مربوط به مثال ۲.۷

α	$\tilde{\mu}[\alpha]$	$n\tilde{p}[\alpha]$	$\tilde{\sigma}^۲[\alpha]$	$n\tilde{p}[\alpha]\tilde{q}[\alpha]$
۰/۰۰	[۵/۰۰, ۷/۰۰]	[۴/۰, ۸/۰]	[۳/۷۵۰۰, ۴/۵۵۰۰]	[۲/۶۰۰۰, ۶/۰۰۰۰]
۰/۰۵	[۵/۰۵, ۶/۹۵]	[۴/۱, ۷/۹]	[۳/۷۷۴۸, ۴/۵۳۴۷]	[۲/۶۷۵۲, ۵/۹۰۵۲]
۰/۱۰	[۵/۱۰, ۶/۹۰]	[۴/۲, ۷/۸]	[۳/۷۹۹۵, ۴/۵۱۹۵]	[۲/۷۵۱۰, ۵/۸۱۱۰]
۰/۱۵	[۵/۱۵, ۶/۸۵]	[۴/۳, ۷/۷]	[۳/۸۳۲۹, ۴/۵۰۳۹]	[۲/۸۲۷۲, ۵/۷۱۷۲]
۰/۲۰	[۵/۲۰, ۶/۸۰]	[۴/۴, ۷/۶]	[۳/۸۴۸۰, ۴/۴۸۸۰]	[۲/۹۰۴۰, ۵/۶۲۴۰]
۰/۲۵	[۵/۲۵, ۶/۷۵]	[۴/۵, ۷/۵]	[۳/۸۷۱۹, ۴/۴۷۱۸]	[۲/۹۸۱۲, ۵/۵۳۱۲]
۰/۳۰	[۵/۳۰, ۶/۷۰]	[۴/۶, ۷/۴]	[۳/۸۹۵۰, ۴/۴۵۵۵]	[۲/۰۵۹۰, ۵/۵۴۳۹]
۰/۳۵	[۵/۳۵, ۶/۶۵]	[۴/۷, ۷/۳]	[۳/۹۱۸۹, ۴/۴۳۸۹]	[۲/۱۳۷۲, ۵/۳۴۷۲]
۰/۴۰	[۵/۴۰, ۶/۶۰]	[۴/۸, ۷/۲]	[۳/۹۴۲۰, ۴/۴۲۲۰]	[۲/۲۱۶۰, ۵/۲۵۶۰]
۰/۴۵	[۵/۴۵, ۶/۵۵]	[۴/۹, ۷/۱]	[۳/۹۶۴۹, ۴/۴۰۴۹]	[۲/۲۹۵۲, ۵/۱۶۵۲]
۰/۵۰	[۵/۵۰, ۶/۵۰]	[۵/۰, ۷/۰]	[۳/۹۸۷۵, ۴/۳۸۷۵]	[۳/۳۷۵۰, ۵/۲۵۶۰]
۰/۵۵	[۵/۵۵, ۶/۴۵]	[۵/۱, ۶/۹]	[۴/۰۰۹۸, ۴/۳۶۹۶]	[۳/۴۵۵۲, ۴/۹۸۵۲]
۰/۶۰	[۵/۶۰, ۶/۴۰]	[۵/۲, ۶/۸]	[۴/۰۳۲۰, ۴/۳۵۲۰]	[۳/۵۳۶۰, ۴/۸۹۶۰]
۰/۶۵	[۵/۶۵, ۶/۳۵]	[۵/۳, ۶/۷]	[۴/۰۵۴۰, ۴/۳۳۳۹]	[۳/۶۱۷۲, ۴/۸۰۷۲]
۰/۷۰	[۵/۷۰, ۶/۳۰]	[۵/۴, ۶/۶]	[۴/۰۷۵۰, ۴/۳۱۵۵]	[۳/۶۹۹۰, ۴/۷۱۹۰]
۰/۷۵	[۵/۷۵, ۶/۲۵]	[۵/۵, ۶/۵]	[۴/۰۹۷۰, ۴/۲۹۶۹]	[۳/۷۸۱۲, ۴/۶۳۱۲]
۰/۸۰	[۵/۸۰, ۶/۲۰]	[۵/۶, ۶/۴]	[۴/۱۱۸۰, ۴/۲۷۸۰]	[۳/۸۶۴۰, ۴/۵۴۴۰]
۰/۸۵	[۵/۸۵, ۶/۱۵]	[۵/۷, ۶/۳]	[۴/۱۳۸۹, ۴/۲۵۸۹]	[۳/۹۴۷۲, ۴/۴۵۷۲]
۰/۹۰	[۵/۹۰, ۶/۱۰]	[۵/۸, ۶/۲]	[۴/۱۵۹۵, ۴/۲۳۹۵]	[۳/۰۳۱۰, ۴/۳۷۱۰]
۱/۰۰	[۶/۰۰, ۶/۰۰]	[۶/۰, ۶/۰]	[۴/۲۰۰۰, ۴/۲۰۰۰]	[۴/۲۰۰۰, ۴/۲۰۰۰]

۲.۷ توزیع یکنواخت با پارامترهای فازی

می‌دانیم که توزیع یکنواخت پیوسته روی بازه $[a,b]$ دارای تابع چگالی احتمال زیر است

$$f(x_i;a,b)=\frac{1}{b-a}\ ,\quad x\in[a,b]$$

حال فرض کنید پارامترهای مدل، اعداد فازی $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ هستند. می‌خواهیم شیوه‌ای برای محاسبه‌ی احتمال پیشامدهایی را به‌صورت $[c,d]$ بر اساس توزیع یکنواخت فازی ارائه دهیم. اگر $\tilde{a}[\alpha]$ و $\tilde{b}[\alpha]$ نشان دهنده‌ی $\alpha-$ برش‌های اعداد فازی $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ باشند، برای $s\in\tilde{a}[\alpha]$ و $t\in\tilde{b}[\alpha]$ تابع

$$f(x;s,t)=\frac{1}{t-s}\ ,\quad x\in[s,t]$$

نشان دهنده‌ی تابع چگالی احتمال یکنواخت بر بازه $[s,t]$ است. بر پایه‌ی این توابع چگالی احتمال می‌توانیم احتمال فازی پیشامدهایی را به‌صورت $[c,d]$ به‌دست آوریم. اگر $L(c,d;s,t)$ نشان دهنده‌ی طول بازه $[s,t]\cap[c,d]$ باشد، آنگاه $\alpha-$ برش‌های احتمال فازی بازه‌ی $[c,d]$ به‌صورت زیر خواهد بود

$$\tilde{P}[c,d][\alpha]=\left\{\frac{L(c,d;s,t)}{t-s}|s\in\tilde{a}[\alpha],t\in\tilde{b}[\alpha],s<t\right\},\quad \alpha\in[0,1]$$

اگر کران‌های پایین و بالای $\tilde{P}[c,d][\alpha]$ را به‌ترتیب با $p_1(\alpha)$ و $p_2(\alpha)$ نشان دهیم، مقادیر آن‌ها به وسیله‌ی معادلات زیر تعیین می‌شوند

$$p_1(\alpha)=\min\left\{\frac{L(c,d;s,t)}{t-s}|s\in\tilde{a}[\alpha],t\in\tilde{b}[\alpha],s<t\right\} \tag{۶.۷}$$

$$p_2(\alpha)=\max\left\{\frac{L(c,d;s,t)}{t-s}|s\in\tilde{a}[\alpha],t\in\tilde{b}[\alpha],s<t\right\} \tag{۷.۷}$$

میانگین و واریانس توزیع یکنواخت فازی

قضیه ۲.۷ اگر $\tilde{\mu}$ و $\tilde{\sigma}^2$ به‌ترتیب نشان دهنده‌ی میانگین و واریانس توزیع یکنواخت فازی باشند، مقادیر آن‌ها توسط معادلات زیر به‌دست می‌آیند

$$\tilde{\mu}=\frac{\tilde{a}+\tilde{b}}{2} \tag{۸.۷}$$

$$\tilde{\sigma}^2=\frac{(\tilde{b}-\tilde{a})^2}{12} \tag{۹.۷}$$

که در آن اعمال جبری بر پایه‌ی حساب اعداد فازی است (فصل ۲).

اثبات: بنا به تعریف ۴.۶ با توجه به تابع چگالی یکنواخت فازی، $\alpha-$ برش‌های میانگین فازی به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}[\alpha] &= \left\{\int_s^t \frac{x}{t-s}dx|s\in\tilde{a}[\alpha]\ ,\ t\in\tilde{b}[\alpha],\ s<t\right\}\\ &= \left\{\frac{t+s}{2}|s\in\tilde{a}[\alpha]\ ,\ t\in\tilde{b}[\alpha],\ s<t\right\}\end{aligned} \tag{۱۰.۷}$$

حال اگر فرض کنیم $\tilde{a}[0]=[s_1,s_2]$ و $\tilde{b}[0]=[t_1,t_2]$ به‌طوری که $s_2\le t_1$، آنگاه با توجه به معادله ۱۰.۷ درستی معادله ۸.۷ اثبات می‌شود. اثبات معادله ۹.۷ نیز به روشی مشابه انجام می‌شود.

بنا بر این، میانگین و واریانس فازی توزیع یکنواخت فازی، فازی شده‌ی میانگین و واریانس توزیع یکنواخت در حالت معمولی است.

مثال ۳.۷ فرض کنید در یک توزیع یکنواخت پیوسته

$$\tilde{a}=(1,1,1)_T\ ,\quad \tilde{b}=(4,1,1)_T$$

می‌خواهیم مقدار $\tilde{P}[1,4]$ را محاسبه کنیم. داریم

$$\tilde{a}[\alpha]=[\alpha,2-\alpha]\ ,\quad \tilde{b}[\alpha]=[3+\alpha,5-\alpha]$$

با توجه به معادلات ۶.۷ و ۷.۷ باید مقادیر زیر را محاسبه کنیم

$$\begin{aligned}p_1(\alpha) &= \min\left\{\frac{L(1,4;s,t)}{t-s}|s\in\tilde{a}[\alpha],t\in\tilde{b}[\alpha],s<t\right\}\\ p_2(\alpha) &= \max\left\{\frac{L(1,4;s,t)}{t-s}|s\in\tilde{a}[\alpha],t\in\tilde{b}[\alpha],s<t\right\}\end{aligned}$$

برای تعیین $p_1(\alpha)$ و $p_2(\alpha)$ باید حالت‌های زیر را در نظر گرفت

۱) $3+\alpha\le t\le 4,\quad \alpha\le s\le 1$،

۲) $4\le t\le 5-\alpha,\quad \alpha\le s\le 1$،

۳) $3+\alpha\le t\le 4,\quad 1\le s\le 2-\alpha$،

۴) $4\le t\le 5-\alpha,\quad 1\le s\le 2-\alpha$.

برای حالات بالا،

۱) $p_1^1(\alpha)=\frac{2+\alpha}{3}\ ,\quad p_2^1(\alpha)=1$

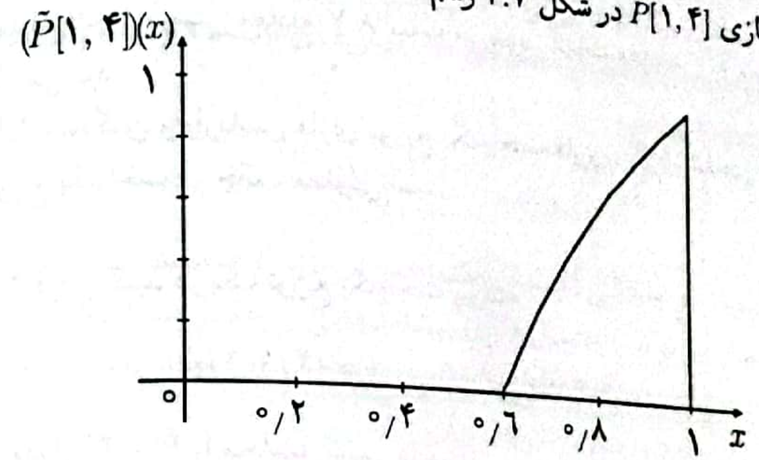
۲) $p_1^2(\alpha)=\frac{3}{5-2\alpha}\ ,\quad p_2^2(\alpha)=1$

۳) $p_1^3(\alpha)=p_2^3(\alpha)=1$

۴) $p_2^4(\alpha) = 1$ ، $p_1^4(\alpha) = \frac{2+\alpha}{3}$

پس $p_1(\alpha) = \frac{3}{5-2\alpha}$ و $p_2(\alpha) = 1$.

چون $\tilde{a}[0] = [0,2]$، $\tilde{b}[0] = [3,5]$، $s \in \tilde{a}[\alpha]$ و $t \in \tilde{b}[\alpha]$ بنا بر این واضح است که به‌ازای هر $\alpha \in [0,1]$، داریم $p_2(\alpha) = 1$. هم‌چنین واضح است که در تمامی حالات، $p_1(\alpha) = \frac{3}{5-2\alpha}$. بنا بر این $\tilde{P}[1,4][\alpha] = [\frac{3}{5-2\alpha}, 1]$. با توجه به $\alpha-$ برش‌های $\tilde{P}[1,4]$ می‌توان گفت که این عدد فازی توصیف کننده مفهوم تقریباً یک است. نمودار تقریبی مجموعه فازی $\tilde{P}[1,4]$ در شکل ۲.۷ رسم شده است.



شکل ۲.۷ نمودار تقریبی تابع عضویت $\tilde{P}[1,4]$ در مثال ۳.۷

مثال ۴.۷ زمان مراجعه مشتریان به گیشه‌ای در یک فروشگاه دارای توزیع یکنواخت بر بازه $[0,T]$ است (T بر حسب دقیقه). می خواهیم احتمال این را بیابیم که یک مشتری در بازه زمانی $[4,9]$ به گیشه مراجعه کند. اما مقدار T به‌طور دقیق معلوم نیست، بلکه آنچه می‌دانیم این است که T تقریباً ۱۰، و به صورت عدد فازی مثلثی $(10,2,2)_T$ است. بنا بر این احتمال مورد نظر نیز یک احتمال فازی است که آن را با $\tilde{P}[4,9]$ نشان می‌دهیم. برای محاسبه $\tilde{P}[4,9]$، $\alpha-$ برش‌های آن را، طبق مطالب ابتدای بخش، می‌یابیم. برای $0 \le \alpha \le 0/5$ داریم

$$\tilde{P}[4,9][\alpha] = \left\{ \frac{min\{t,9\}-4}{t} | t \in [8+2\alpha, 12-2\alpha] \right\}$$

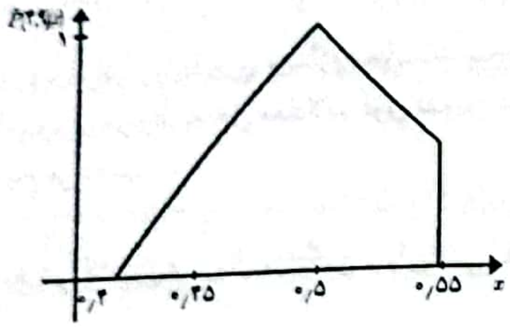
و برای $0/5 < \alpha \le 1$ داریم

$$\tilde{P}[4,9][\alpha] = \left\{ \frac{5}{t} | t \in [8+2\alpha, 12-2\alpha] \right\}$$

بنا بر این

$$\tilde{P}[4,9][\alpha] = \begin{cases} \left[\frac{2+2\alpha}{12-2\alpha}, \frac{5}{4}\right] & 0 \le \alpha \le 0/5 \\ \left[\frac{5}{12-2\alpha}, \frac{5}{8+2\alpha}\right] & 0/5 < \alpha \le 1 \end{cases}$$

نمودار تقریبی احتمال فازی $\tilde{P}[4,9]$ در شکل ۳.۷ رسم شده است.



شکل ۳.۷ نمودار تقریبی تابع عضویت $\tilde{P}[4,9]$ در مثال ۴.۷

۳.۷ توزیع نرمال فازی

می‌دانیم که یک متغیر تصادفی نرمال دارای تابع چگالی زیر است

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\} \quad x \in R \ , \ \mu \in R, \sigma > 0$$

که در آن μ و σ^2 پارامترهای توزیع هستند.

حال فرض کنید مقادیر μ و σ^2 به‌طور دقیق معلوم نباشند بلکه به‌طور نادقیق و به‌صورت اعداد فازی $\tilde{\mu}$ و $\tilde{\sigma}^2$ داده شده باشند (در این حالت از نماد $N(\tilde{\mu},\tilde{\sigma}^2)$ برای توزیع نرمال با پارامترهای فازی استفاده می‌کنیم). در این بخش هدف محاسبه‌ی احتمال پیشامدهایی به‌صورت فواصل بسته $[c,d]$ براساس یک توزیع نرمال فازی است. واضح است این احتمال‌ها، خود به‌صورت اعداد فازی هستند. همچنین در این بخش شیوه‌ی محاسبه میانگین و واریانس توزیع نرمال فازی را بیان می‌کنیم.

محاسبه احتمال پیشامدهای مربوط به توزیع نرمال فازی

فرض کنید $z_1 = \frac{c-\mu}{\sigma}$ و $z_2 = \frac{d-\mu}{\sigma}$ که $\mu \in \tilde{\mu}[\alpha]$ و $\sigma^2 \in \tilde{\sigma}^2[\alpha]$. آنگاه $\alpha-$ برش‌های احتمال فازی بازه $[c,d]$ به‌صورت زیر خواهند بود

$$\tilde{P}[c,d][\alpha] = \left\{ \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\} dx | \mu \in \tilde{\mu}[\alpha], \sigma \in \tilde{\sigma}[\alpha] \right\} \qquad (11.7)$$

اگر α- برش احتمال فازی پیشامد $[c,d]$ را با $\tilde{P}[c,d][\alpha]=[p_1(\alpha),p_2(\alpha)]$ نشان دهیم، آنگاه مقادیر $p_1(\alpha)$ و $p_2(\alpha)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند

$$p_1(\alpha)=\min\left\{\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-1}{2}x^2\right\}dx|\mu\in\tilde{\mu}[\alpha],\sigma\in\tilde{\sigma}[\alpha]\right\} \qquad (12.7)$$

$$p_2(\alpha)=\max\left\{\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-1}{2}x^2\right\}dx|\mu\in\tilde{\mu}[\alpha],\sigma\in\tilde{\sigma}[\alpha]\right\} \qquad (13.7)$$

محاسبه $p_1(\alpha)$ و $p_2(\alpha)$ بر اساس روابط فوق مستلزم محاسبات پیچیده و طولانی است و در عمل باید برنامه کامپیوتری مربوط به حل معادلات فوق تدوین شود. در ادامه شیوه‌ی کار را با یک مثال توضیح می‌دهیم.

مثال ۵.۷ فرض کنید در یک توزیع نرمال میانگین و واریانس به‌صورت اعداد فازی مثلثی زیر باشند

$$\tilde{\mu}=(10,2,2)_T \quad , \quad \tilde{\sigma}^2=(5,1,1)_T$$

می‌خواهیم احتمال این را که مشاهده‌ای از این توزیع در فاصله‌ی ۱۰ و ۱۵ قرار گیرد محاسبه کنیم، یعنی مقدار $\tilde{P}[10,15]$ را به‌دست آوریم.

با توجه به معادله ۱۱.۷ داریم $\tilde{P}[10,15][1]=0/4873$. برای محاسبه $\tilde{P}[10,15][0]$، تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$g(x,y^2)=\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{u^2}{2}\}du$$

که در آن $z_1=\frac{10-x}{y}$، $z_2=\frac{15-x}{y}$، $8\le x\le 12$ و $4\le y^2\le 6$. برای نمونه داریم

$$g(8,4) = 0/1584 \ , \ g(8,5)=0/1847 \ , \ g(8,6)=0/2050$$
$$g(12,4) = 0/7745 \ , \ g(12,6)=0/6826 \ , \ g(12,5)=0/7246$$

در نهایت به‌دست می‌آوریم

$$\tilde{P}[10,15][0]=[0/1584,0/7745]$$

لذا می‌توان گفت که $\tilde{P}[10,15]$ عدد فازی تقریباً ۰/۴۸۷۳ است، که تکیه‌گاه آن $[0/1584,0/7745]$ است و البته هر α- برش آن را نیز می‌توان بر اساس روابط ۱۲.۷ و ۱۳.۷ به‌دست آورد.

میانگین و واریانس توزیع نرمال فازی

اکنون نشان می‌دهیم که میانگین و واریانس توزیع نرمال فازی، فازی شده‌ی میانگین و واریانس توزیع نرمال در حالت معمولی است.

قضیه ۳.۷ میانگین و واریانس فازی توزیع نرمال فازی $N(\tilde{\mu},\tilde{\sigma}^2)$ به‌ترتیب $\tilde{\mu}$ و $\tilde{\sigma}^2$ است.

اثبات: فرض کنید $\tilde{M}$ میانگین فازی توزیع نرمال فازی $N(\tilde{\mu},\tilde{\sigma}^2)$ باشد. پس، طبق تعریف ۴.۶

$$\begin{aligned}\tilde{M}[\alpha] &= \left\{\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\}dx|\mu\in\tilde{\mu}[\alpha],\sigma^2\in\tilde{\sigma}^2[\alpha]\right\}\\ &= \{\mu|\mu\in\tilde{\mu}[\alpha]\ ,\ \sigma^2\in\tilde{\sigma}^2[\alpha]\}\\ &= \tilde{\mu}[\alpha]\end{aligned}$$

فرض کنید $\tilde{V}$ واریانس فازی توزیع نرمال فازی باشد. در این صورت، طبق تعریف ۴.۶

$$\begin{aligned}\tilde{V}[\alpha] &= \left\{\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\}dx|\mu\in\tilde{\mu}[\alpha],\sigma^2\in\tilde{\sigma}^2[\alpha]\right\}\\ &= \{\sigma^2|\mu\in\tilde{\mu}[\alpha]\ ,\ \sigma^2\in\tilde{\sigma}^2[\alpha]\}\\ &= \tilde{\sigma}^2[\alpha]\end{aligned}$$

مثال ۶.۷ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال فازی $N((5,2,2)_T,(3,1,1)_T)$ باشد. در این صورت، با توجه به قضیه فوق، میانگین و واریانس این توزیع اعداد فازی مثلثی زیر خواهند بود

$$\tilde{\mu}=(5,2,2)_T \quad , \quad \tilde{\sigma}^2=(3,1,1)_T$$

۴.۷ تقریب توزیع دوجمله‌ای فازی با توزیع نرمال فازی

در حالت کلاسیک اگر تعداد آزمایش‌های برنولی زیاد باشد (در عمل اگر $np>5$ و $n(1-p)>5$) آنگاه می‌توان از توزیع نرمال برای محاسبه‌ی احتمال‌های توزیع دوجمله‌ای استفاده کرد. اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که این تقریب برای حالت فازی نیز وقتی که $n\tilde{p}>5$ و $n(1-\tilde{p})>5$ کاملاً منطقی به نظر می‌رسد.

توزیع دوجمله‌ای فازی $B(n,\tilde{p})$ را در نظر بگیرید. هدف محاسبه‌ی احتمال فازی

$\tilde{P}[n_1, n_2]$ برای حالتی است که n بزرگ باشد. اگر به‌صورت مستقیم بخواهیم این احتمال را به‌دست آوریم، خواهیم داشت

$$\tilde{P}[n_1, n_2][\alpha] = \left\{ \sum_{i=n_1}^{n_2} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} | p \in \tilde{p}[\alpha] \right\}, \quad \alpha \in [0, 1]$$

اگر $f(x; 0, 1)$ نشان دهنده‌ی تابع چگالی نرمال استاندارد باشد و $z_1 = \frac{n_1 - 0/5 - \mu}{\sigma}$، $z_2 = \frac{n_2 + 0/5 - \mu}{\sigma}$ آن‌گاه

$$\tilde{P}[n_1, n_2][\alpha] \cong \left\{ \int_{z_1}^{z_2} f(x; 0, 1) | \mu \in \tilde{\mu}[\alpha], \sigma^2 \in \tilde{\sigma}^2[\alpha] \right\}$$

که در آن $\tilde{\mu}$ و $\tilde{\sigma}^2$ به‌ترتیب میانگین و واریانس توزیع دوجمله‌ای فازی هستند (مرجع [۶] فصل ۶).

مثال زیر نشان می‌دهد که تقریب بالا تقریب خوبی است.

مثال ۷.۷ فرض کنید $n = 100$، $n_1 = 40$، $n_2 = 60$ و $\tilde{p} = (0/6, 0/1, 0/1)_T$. مقدار α را ثابت در نظر می‌گیریم و w را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$w = \sum_{i=40}^{60} \binom{100}{i} p_0^i (1 - p_0)^{100-i}$$

که در آن $p_0 \in \tilde{p}[\alpha]$. بنابراین $w \in \tilde{P}[40, 60][\alpha]$. با فرض این‌که $p = 1 - q$ داریم

$$\tilde{\mu}[\alpha] = 100\tilde{p}[\alpha] \ , \ \tilde{\sigma}^2[\alpha] = \{100p(1-p) | p \in \tilde{p}[\alpha]\}$$

واضح است که تابع $h(p) = 100p(1-p)$ دارای خواص زیر است

۱) در بازه $[0, 0/5]$ تابعی صعودی برحسب p است،

۲) در بازه $[0/5, 1]$ تابعی نزولی برحسب p است.

چون p در بازه $[0/5, 1]$ قرار دارد، بنابراین $\alpha-$ برش‌های $\tilde{\sigma}^2[\alpha]$ به‌صورت

$$\tilde{\sigma}^2[\alpha] = [h(p_2(\alpha)), h(p_1(\alpha))]$$

خواهد بود که در آن $p_1(\alpha) = 0/5 + 0/1\alpha$ و $p_2(\alpha) = 0/7 - 0/1\alpha$. از این رو

$$\tilde{\sigma}^2[\alpha] = [21 + 4\alpha - \alpha^2, 25 - \alpha^2]$$

حال فرض کنید $\mu_0 = 100p_0 \in 100\tilde{p}[\alpha]$ و $\sigma_0 \in \tilde{\sigma}[\alpha]$. داریم

$$w \cong \int_{z_1}^{z_2} f(x; 0, 1) dx$$

که در آن $z_1 = \frac{39/5 - \mu_0}{\sigma_0}$ و $z_2 = \frac{60/5 - \mu_0}{\sigma_0}$. پس برای α های مختلف در بازه $[0, 1]$ مقدار w قابل محاسبه خواهد بود. برای محاسبه‌ی این مقادیر نیاز به برنامه کامپیوتری مناسب است. در جدول ۳.۷ مقدار $\tilde{P}[40, 60][\alpha]$ بر اساس محاسبه‌ی مستقیم و نیز بر اساس روش تقریبی برای چند α درج شده است.

جدول ۳.۷ نتایج مربوط به مثال ۷.۷

α	$\tilde{P}[40, 60][\alpha]$	تقریب نرمال
۰/۰	[۰/۰۲۱۱, ۰/۹۶۵۰]	[۰/۰۱۹۰, ۰/۹۷۸۳]
۰/۱	[۰/۰۳۵۳, ۰/۹۶۰۳]	[۰/۰۳۸۵, ۰/۹۶۲۸]
۰/۲	[۰/۰۵۶۰, ۰/۹۵۰۸]	[۰/۰۵۴۲, ۰/۹۶۱۶]
۰/۳	[۰/۰۸۳۹, ۰/۹۱۳۱]	[۰/۰۸۴۴, ۰/۹۱۰۸]
۰/۴	[۰/۱۲۳۸, ۰/۹۰۲۰]	[۰/۱۲۳۱, ۰/۹۱۳۶]
۰/۵	[۰/۱۸۹۳, ۰/۸۰۵۸]	[۰/۱۸۸۷, ۰/۸۰۶۲]
۰/۶	[۰/۲۳۲۱, ۰/۸۱۷۶]	[۰/۲۳۳۰, ۰/۸۲۵۸]
۰/۷	[۰/۲۹۱۷, ۰/۷۵۸۱]	[۰/۳۰۱۰, ۰/۷۵۶۹]
۰/۸	[۰/۳۷۶۵, ۰/۶۹۴۱]	[۰/۳۷۸۸, ۰/۶۹۵۶]
۰/۹	[۰/۴۵۳۸, ۰/۶۰۲۸]	[۰/۴۵۹۱, ۰/۶۰۵۰]
۱/۰	[۰/۵۳۸۳, ۰/۵۳۸۳]	[۰/۵۴۱۳, ۰/۵۴۱۳]

بر پایه‌ی نتایجی که در جدول ۳.۷ آمده است می‌توان گفت که: احتمال آن که تعداد موفقیت‌ها در ۱۰۰ آزمایش حداقل ۴۰ و حداکثر ۶۰ باشد، تقریباً ۰/۵۴ است. البته $\tilde{P}[40, 60]$ یک عدد فازی متقارن حول ۰/۵۴ نیست.

۵.۷ نکات تکمیلی

۱. مطالب این فصل، مبتنی بر رویکرد باکلی و اسلامی (مراجع [۵ و ۶] فصل ۶)، باکلی (مراجع [۲ و ۳] فصل ۶)، تروشینگ و هارتر (مرجع [۱۲] فصل ۶) و بر پایه‌ی مرجع [۱]

بوده است (نیز رک به [۹]). گرچه رویکردهای فوق تفاوت‌هایی با هم دارند، اما اساساً مبتنی بر شیوه‌هایی مشابه هم هستند.

۲. رویکرد دیگری نیز برای تعریف و تحلیل توزیع‌های احتمال فازی وجود دارد که مبتنی بر استفاده از هر دو نوع عدم اطمینان احتمالی و امکانی است و توزیع‌های امکان ـ احتمال نامیده می‌شوند. علاقمندان به این موضوع می‌توانند به [۲ و ۱۲] و برای کاربردی از این رویکرد به [۴] مراجعه نمایند.

۳. یک رویکرد مهم و کلیدی به احتمال در محیط فازی، مفهوم متغیرهای تصادفی فازی و توزیع‌های احتمال مربوط به آنها است. متغیرهای تصادفی فازی نخستین بار در سال ۱۹۷۸ به‌وسیله‌ی واکرناک [۵] و سپس در سال ۱۹۸۶ توسط پوری و رالسکو [۷] معرفی و مطالعه شد. پوری و رالسکو همچنین متغیرهای تصادفی فازی نرمال را معرفی و بررسی نمودند [۶] (نیز رک به [۱۰]). در باره‌ی متغیرهای تصادفی فازی و قضایای حدی در باره‌ی آنها و استنباط آماری مبتنی بر آنها تحقیقات بسیاری صورت گرفته است. برای مروری بر این مفهوم و مراجع مربوطه مرجع [۳] را ببینید.

۴. گذشته از رویکردهای گوناگونی که به احتمال فازی، احتمال پیشامدهای فازی، توزیع احتمال فازی و ... وجود دارد، به نظر می‌رسد که باید رویکرد جدید و جامعی به نظریه احتمال انجام گیرد که مبتنی بر منطق فازی (به جای منطق دو ارزشی) باشد. اصول و ایده‌های اولیه و ضرورت چنین رویکرد توسط زاده در [۱۱] ارائه شده است (نیز رک به [۸]).

تمرین‌های فصل هفتم

۱.۷ در مثال ۱.۷، پنج عضو از مجموعه $S_{0/7}$ را بنویسید.

۲.۷ فرض کنید در یک توزیع یکنواخت $\tilde{b} = (5, 2, 2)_T$ و $\tilde{a} = (2, 0/5, 0/5)_T$. α- برش احتمال فازی $\tilde{P}[2, 4]$ را به‌دست آورید و نمودار تقریبی تابع عضویت $\tilde{P}[2, 4]$ را رسم کنید.

۳.۷ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال نمایی به‌صورت زیر باشد

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad x > 0 \ , \ \lambda > 0$$

فرض کنید مقدار دقیق λ معلوم نیست، بلکه مقدار آن به‌صورت عدد فازی مثبت $\tilde{\lambda}$ داده شده است.

الف) توضیح دهید چگونه می‌توان احتمال فازی

$$\tilde{P}[c, d] = \tilde{P}(X \in [c, d])$$

را محاسبه کرد.

ب) با فرض $\tilde{\lambda} = (2, 0/5, 0/5)_T$، α- برش‌های مقدار $\tilde{P}[1, 4]$ را به‌دست آورید و نمودار تقریبی تابع عضویت $\tilde{P}[1, 4]$ را رسم کنید.

۴.۷ در مثال ۳.۷ مقدار غیرفازی شده‌ی $\tilde{P}[1, 4]$ را، به روش مرکز ثقل (مرجع [۸] فصل ۱ را ببینید)، به‌دست آورید.

۵.۷ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال است که در آن مقادیر میانگین به‌صورت عدد فازی $\tilde{\mu} = (12, 1, 0/5)_T$ و واریانس به‌صورت عدد فازی $\tilde{\sigma}^2 = (3, 0/5, 0/5)_T$ می‌باشد.

الف) توضیح دهید چگونه می‌توان احتمال فازی

$$\tilde{P}[10, 11] = \tilde{P}(X \in [10, 11])$$

را محاسبه کرد.

ب) α- برش مقدار $\tilde{P}[10, 11]$ را به‌دست آورید و نمودار تقریبی تابع عضویت $\tilde{P}[10, 11]$ را رسم کنید.

منابع و مراجع

[۱] عزیزی، رحیم؛ طاهری، سید محمود (۱۳۸۵)؛ توزیع‌های دوجمله‌ای و نرمال با پارامترهای فازی، اندیشه آماری، شماره ۲۱: ۵۳–۳۸.

[2] Dubois,D., Prade, H. (1998); Fuzzy sets, probability, and measurement, Euro. J. Oper. Res., 40: 135-154.

[3] Gil, M.A., Lopez-Diaz, M., Ralescu, D.A. (2006); Overview on the development of fuzzy random variables, Fuzzy Sets and Systems, 157: 2546-2557.

[4] Karimi, I., Hüllermeier, E. (2005); A fuzzy-probabilistic risk assessment system for natural disasters, Proc. of 11th IFSA Congress, Beijing, China, pp. 1147-1153.

[5] Kwakernaak, H. (1978); Fuzzy random variables, Part I: definitions and theorems, Inform. Sci., 15: 1-15; Part II: Algorithms and examples for the discrete case, Inform. Sci., 17: 253-278.

[6] Puri, M.L., Ralescu, D.A. (1985); The concept of normality for fuzzy random variables, Ann. Prob., 13: 1373-1379.

[7] Puri, M.L., Ralescu, D.A. (1986); Fuzzy random variables, J. Math. Anal. Appl., 114: 402-422.

[8] Taheri, S.M. (2004); Statistics with non-precise data: a main approach in the future, In: Proc. of International Conference: Statistics-Investment in the Future, Prague, Czech, pp. 52-62.

[9] Viertl, R., Hareter, D. (2004); Fuzzy information and stochastics, Iranian J. Fuzzy Systems, 1: 43-56.

[10] Wu, H. (1999); Probability density functions of fuzzy random variables, Fuzzy Sets and Systems, 105: 139-158.

[11] Zadeh, L.A. (2002); Toward a perception-based theory of probabilistic reasoning with imprecise probabilities, J. Stat. Plan. Inf., 105: 233-264.

[12] Zong, T., Huang, C., Chen, Z., Zhang, J. (2005); A continuous model to represent a fuzzy probability distribution, Proc. of the 11^{the} IFSA Congress, Beijing, China, pp. 1771-1776.

فصل ۹

آزمون فرضیه بر پایه‌ی داده‌های فازی

مقدمه

در این فصل موضوع آزمون فرضیه را بر پایه‌ی داده‌های فازی مورد بحث قرار می‌دهیم. برای مثال در تحقیقی درباره‌ی درآمد ماهانه‌ی خانوارهای یک جامعه، می‌خواهیم آزمون کنیم این فرضیه که μ، متوسط درآمد ماهانه‌ی خانوارها، بیش از ۷ میلیون ریال است قابل قبول می‌باشد یا خیر؟ حال فرض کنید که نتایج مربوط به درآمد خانوارهای نمونه به‌صورت زیر باشند: تقریباً ٦ میلیون ریال، حدوداً ٦/٥ میلیون ریال، بیش از ۷ میلیون ریال ولی نه خیلی بیش از ۸ میلیون ریال، .... در اینجا با مسئله‌ی آزمون فرضیه بر پایه‌ی داده‌های نادقیق سر و کار داریم.

در بخش دوم این فصل، رهیافت کلاسیک به موضوع فوق را تشریح می‌کنیم. در بخش سوم شیوه‌های بزرگ نمونه‌ای را توضیح می‌دهیم. در بخش چهارم رهیافت بیزی را به مسئله‌ی آزمون فرضیه بر پایه‌ی داده‌های فازی بیان می‌کنیم.

۱.۹ تعاریف مقدماتی

در این بخش و در بخش‌های آینده این فصل، فرض می‌شود که $\mathcal{P} = (X, \mathcal{B}_X, P_\theta)$ یک فضای احتمال است که در آن $(X, \mathcal{B}_X)$ یک فضای اندازه‌پذیر و $\{P_\theta \ , \ \theta \in \Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1\}$ خانواده‌ای از توابع چگالی یا توابع جرم احتمال وابسته به پارامتر مجهول θ است.

چون در این بخش و بخش‌های آینده از مفاهیم فضای نمونه‌ای فازی و نمونه

تصادفی فازی استفاده فراوان خواهیم کرد، از خواننده خواسته می‌شود که تعاریف ۵.۸ و ۶.۸ و مثال‌های ۳.۸ و ۴.۸ را دقیقاً مرور کند.

تذکر در این فصل فرض بر این خواهد بود که مجموعه‌ی تمام مشاهدات فازی، اعضای یک فضای نمونه‌ای فازی مرتبط با فضای نمونه‌ی مورد بحث هستند [۱۶].
در ادامه، چند تعریف درباره‌ی آزمون فرضیه بر پایه‌ی داده‌های فازی ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۹ یک آزمون غیر تصادفی بر پایه‌ی داده‌های فازی برای یک فرضیه صفر در برابر یک فرضیه مقابل، عبارت است از قاعده‌ای که بنا بر آن، و با در دست داشتن یک نمونه تصادفی فازی، تصمیم به قبول یا رد فرضیه‌ی مورد نظر می‌گیریم.
هر آزمون فازی غیر تصادفی، فضای $\underline{\tilde{X}}^{(n)}$ را به دو مجموعه‌ی مکمل $\underline{\tilde{X}}_{\circ}^{(n)}$ و $\underline{\tilde{X}}_{1}^{(n)}$ افراز می‌کند. به‌طوری که اگر نمونه فازی در $\underline{\tilde{X}}_{\circ}^{(n)}$ قرار بگیرد، فرضیه‌ی مورد نظر قبول و گرنه رد می‌شود. مجموعه $\underline{\tilde{X}}_{1}^{(n)}$ را ناحیه بحرانی آزمون فازی می‌نامیم.

تعریف ۲.۹ یک آزمون تصادفی بر پایه‌ی داده‌های فازی برای یک فرضیه صفر در برابر یک فرضیه مقابل، عبارت است از قاعده‌ای که بنابر آن و با در دست داشتن نمونه فازی $\underline{\tilde{X}} = (\tilde{X}_{r_1}, \cdots, \tilde{X}_{r_n})$، فرضیه مورد نظر را به‌ترتیب با احتمال‌های $K(\tilde{X}_{r_1}, \ldots, \tilde{X}_{r_n}) = K(\underline{\tilde{X}})$ و $1 - K(\tilde{X}_{r_1}, \ldots, \tilde{X}_{r_n}) = 1 - K(\underline{\tilde{X}})$ رد یا قبول می‌کنیم. تابع $K : \underline{\tilde{X}}^{(n)} \to [\circ, 1]$ تابع آزمون نامیده می‌شود.
مانند حالت معمولی، یک آزمون فازی غیر تصادفی بر پایه‌ی داده‌های فازی را می‌توان یک آزمون تصادفی بر پایه‌ی داده‌های فازی تلقی نمود که تابع آزمون، تابع نشانگر ناحیه بحرانی است. از این پس و برای اختصار از عبارت آزمون فازی به جای «آزمون تصادفی بر پایه‌ی داده‌های فازی» استفاده خواهیم کرد.

تعریف ۳.۹ تابع توان یک آزمون فازی با تابع آزمون K، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\beta_K(\theta) = \sum_{(\tilde{X}_{r_1}, \ldots, \tilde{X}_{r_n}) \in \underline{\tilde{X}}^{(n)}} K(\tilde{X}_{r_1}, \ldots, \tilde{X}_{r_n}) P_\theta(x_1, \cdots, x_n)$$

تعریف ۴.۹ در یک آزمون فازی با تابع آزمون K، احتمال خطای نوع اول و احتمال خطای نوع دوم عبارت‌اند از

$$\sup_{\theta \in \Theta_\circ} \sum_{(\tilde{X}_{r_1}, \ldots, \tilde{X}_{r_n}) \in \underline{\tilde{X}}^{(n)}} K(\tilde{X}_{r_1}, \ldots, \tilde{X}_{r_n}) P_\theta(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\sup_{\theta \in \Theta_1} \sum_{(\tilde{X}_{r_1}, \ldots, \tilde{X}_{r_n}) \in \underline{\tilde{X}}^{(n)}} [1 - K(\tilde{X}_{r_1}, \ldots, \tilde{X}_{r_n})] P_\theta(x_1, \ldots, x_n)$$

تعریف ۵.۹ آزمون فازی با تابع آزمون K را در سطح α گوییم، اگر

$$\sup_{\theta \in \Theta_\circ} \beta_K(\theta) \leq \alpha$$

۲.۹ آزمون فازی بهینه

در این بخش، براساس تعاریف بخش قبل، آزمون بهینه بر پایه‌ی داده‌های فازی را برای آزمون یک فرضیه ساده در برابر فرضیه ساده بیان و تشریح می‌کنیم.

تعریف ۶.۹ در مسئله‌ی آزمون یک فرضیه صفر در برابر یک فرضیه مقابل، آزمون فازی با تابع آزمون K^* را تواناترین آزمون فازی در سطح α گوییم، اگر برای هر آزمون فازی با تابع آزمون K که در سطح α باشد، داشته باشیم

$$\beta_{K^*}(\theta) \geq \beta_K(\theta) \quad , \quad \forall \theta \in \Theta_1$$

در قضیه زیر، ملاک بهینگی نیمن – پیرسن برای آزمون فرضیه‌های ساده به حالتی که داده‌ها فازی باشند تعمیم داده شده است.

قضیه ۱.۹ (لم نیمن – پیرسن تعمیم یافته) در مسئله‌ی آزمون فرضیه $H_\circ : \theta = \theta_\circ$ در برابر $H_1 : \theta = \theta_1$ بر پایه‌ی داده‌های فازی،
الف) یک آزمون فازی با تابع آزمون K^* و یک عدد ثابت c و $\gamma = \gamma(\underline{\tilde{X}})$ ($\circ \leq \gamma \leq 1$ و ثابت) وجود دارد به‌قسمی که

$$1) \quad \beta_{K^*}(\theta_\circ) = \alpha$$

$$2) \quad K^*(\tilde{X}_{r_1}, \ldots, \tilde{X}_{r_n}) = \begin{cases} 1 & P_1(\tilde{X}_{r_1}, \ldots, \tilde{X}_{r_n}) > cP_\circ(\tilde{X}_{r_1}, \ldots, \tilde{X}_{r_n}) \\ \gamma(\underline{\tilde{X}}) & P_1(\tilde{X}_{r_1}, \ldots, \tilde{X}_{r_n}) = cP_\circ(\tilde{X}_{r_1}, \ldots, \tilde{X}_{r_n}) \\ \circ & P_1(\tilde{X}_{r_1}, \ldots, \tilde{X}_{r_n}) < cP_\circ(\tilde{X}_{r_1}, \ldots, \tilde{X}_{r_n}) \end{cases}$$

ب) اگر یک آزمون فازی در روابط (۱) و (۲)، برای یک مقدار c و $\circ \leq \gamma(\underline{\tilde{X}}) \leq 1$ صدق کند، آن آزمون تواناترین آزمون فازی در سطح α برای فرضیه‌های فوق است.
پ) اگر یک آزمون با تابع آزمون K^*، تواناترین آزمون فازی در سطح α برای آزمون فرضیه‌های فوق باشد، آنگاه تابع K^* به‌صورت عبارت (۲)، برای یک مقدار c، خواهد بود. به علاوه خطای نوع اول این آزمون برابر α خواهد بود، مگر آن که یک آزمون فازی با مقدار خطای نوع اول کمتر از α وجود داشته باشد که توان آن در θ_1 یک باشد.

مثال ۱.۹ جامعه بزرگی از حشرات را در نظر بگیرید. فرض کنید تعدادی از آنها آلوده به یک ویروس شده‌اند که نسبت آنها در کل جامعه، برابر p فرض می‌شود. می‌خواهیم بر پایه‌ی نمونه‌ای تصادفی از حشرات فرضیه $H_0 : p = \frac{1}{3}$ را در برابر $H_1 : p = \frac{2}{3}$ آزمون کنیم. نظر به محدودیت‌های آزمایشگاهی، فقط سه حشره را به تصادف از جامعه انتخاب کرده، مورد آزمایش قرار می‌دهیم.

فرض کنید روش موجود برای تشخیص وجود یا عدم وجود ویروس، روش دقیقی نیست و به‌جای آن که منجر به نتایج: «حشره، واجد ویروس است،» یا «حشره، فاقد ویروس است» بشود؛ فقط اطلاعاتی این گونه را نتیجه می‌دهد که: $\tilde{X}_1$: «با اطمینان زیاد، حشره واجد ویروس است»، یا $\tilde{X}_2$: «با اطمینان زیاد، حشره فاقد ویروس است». در اینجا با یک توزیع برنولی روبرو هستیم که مشاهدات مربوط به آن، نادقیق هستند. می‌توانیم اطلاعات نادقیق به‌صورت $\tilde{X}_1$ و $\tilde{X}_2$ را با مجموعه‌های فازی، مثلاً، با توابع عضویت زیر توصیف کنیم

$$\tilde{X}_1(x) = \begin{cases} 0/1 & x = 0 \\ 0/9 & x = 1 \end{cases} \qquad \tilde{X}_2(x) = \begin{cases} 0/9 & x = 0 \\ 0/1 & x = 1 \end{cases}$$

که در آن $x = 0$ بیانگر فقدان ویروس و $x = 1$ بیانگر حضور ویروس است.

با مدل‌بندی مسئله به‌صورت بالا، $\tilde{X} = \{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\}$ یک فضای نمونه‌ای فازی را تشکیل می‌دهد. برای یافتن پرتوان‌ترین آزمون، از قضیه ۱.۹ استفاده می‌کنیم. باید $P_0(\tilde{X}_{r_1}, \tilde{X}_{r_2}, \tilde{X}_{r_3})$ و $P_1(\tilde{X}_{r_1}, \tilde{X}_{r_2}, \tilde{X}_{r_3})$ را برای تمام حالات ممکن نمونه‌ی سه‌تایی از حشرات محاسبه کنیم. مثلاً احتمال این که هر سه حشره‌ی نمونه، با اطمینان زیاد واجد ویروس شناخته شوند، طبق تعریف ۶.۸ برابر است با

$$\begin{aligned} P_1(\tilde{X}_1, \tilde{X}_1, \tilde{X}_1) &= \int \tilde{X}_1(x_1)\tilde{X}_1(x_2)\tilde{X}_1(x_3)dP_1(x_1, x_2, x_3) \\ &= 0/001 \times \frac{1}{27} + 0/009 \times \frac{6}{27} + 0/081 \times \frac{12}{27} + 0/729 \times \frac{8}{27} \\ &= 0/254 \end{aligned}$$

نتایج حاصله برای تمام حالات ممکن در جدول ۱.۹ درج شده است.

فرض کنید بخواهیم آزمون را در سطح $\alpha = 0/05$ انجام دهیم. طبق تعریف‌های ۴.۹ و ۵.۹ باید داشته باشیم

$$\sum_{\substack{(\tilde{x}_{r_1}, \tilde{x}_{r_2}, \tilde{x}_{r_3}) \in \tilde{\mathcal{X}}^{(3)} \\ P_1/P_0 \geq c}} K^*(\tilde{X}_{r_1}, \tilde{X}_{r_2}, \tilde{X}_{r_3}) P_0(x_1, x_2, x_3) = 0/05$$

بر پایه‌ی اطلاعات جدول ۱.۹، مقدار c برابر با ۱/۷۲۹ به‌دست می‌آید و از آن

$$0/05 = 0/049 + 3k(0/085)$$

و در نتیجه $k = 0/004$. بنا بر این طبق لم نیمن – پیرسن تعمیم یافته، پرتوان‌ترین آزمون فازی در سطح ۰/۰۵، یک آزمون با تابع آزمون زیر است

$$K^*(\tilde{X}_{r_1}, \tilde{X}_{r_2}, \tilde{X}_{r_3}) = \begin{cases} 1 & P_1/P_0 > 1/729 \\ 0/004 & P_1/P_0 = 1/729 \\ 0 & P_1/P_0 < 1/729 \end{cases}$$

برای مثال اگر نمونه‌گیری تصادفی منجر به نمونه فازی $(\tilde{X}_2, \tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ بشود، در سطح ۰/۰۵، تصمیم به قبول H_0 در برابر H_1 می‌گیریم.

جدول ۱.۹ احتمال پیشامدهای فازی برای حالت‌های مختلف

نمونه فازی	$\mathcal{P}_1(\cdot)$	$\mathcal{P}_0(\cdot)$	$\mathcal{P}_1(\cdot)/\mathcal{P}_0(\cdot)$
$(\tilde{X}_1, \tilde{X}_1, \tilde{X}_1)$	۰/۲۵۴	۰/۰۴۹	۵/۱۸۳
$(\tilde{X}_1, \tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ یا $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_1)$ یا $(\tilde{X}_2, \tilde{X}_1, \tilde{X}_1)$	۰/۱۴۷	۰/۰۸۵	۱/۷۲۹
$(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_2)$ یا $(\tilde{X}_2, \tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ یا $(\tilde{X}_2, \tilde{X}_2, \tilde{X}_1)$	۰/۰۸۵	۰/۱۴۷	۰/۵۷۸
$(\tilde{X}_2, \tilde{X}_2, \tilde{X}_2)$	۰/۰۴۹	۰/۲۵۴	۰/۱۹۳

۳.۹ شیوه‌های بزرگ نمونه‌ای

همان طور که از بخش قبل و به ویژه مثال ۱.۹ آشکار است، استفاده از لم نیمن – پیرسن تعمیم یافته مستلزم محاسبات بسیار است. کازالس و هیل [۴] برای حالت‌هایی که حجم نمونه به اندازه کافی بزرگ باشد (عملاً $n \geq 25$)، با استفاده از قضیه حد مرکزی، یک روش تقریبی برای یافتن تواناترین آزمون ارائه کرده‌اند.

قضیه ۲.۹ در مسئله‌ی آزمون فرضیه $H_0 : \theta = \theta_0$ در برابر $H_1 : \theta = \theta_1$ بر پایه‌ی داده‌های فازی حاصل از $\underline{\tilde{X}}^{(n)}$، آزمون با ناحیه بحرانی زیر به‌طور تقریبی تواناترین آزمون در سطح α است

$$C = \{\underline{\tilde{X}} = (\tilde{X}_{r_1}, \ldots, \tilde{X}_{r_n}) \in \underline{\tilde{X}}^{(n)} | \log \frac{P_1(\underline{\tilde{X}})}{P_0(\underline{\tilde{X}})} > d\}$$

که در آن d صدک $100(1-\alpha)$ ام توزیع نرمال با میانگین و واریانس زیر است

$$\mu = \sum_{\underline{\tilde{X}} \in \underline{\tilde{X}}^{(n)}} P_0(\underline{\tilde{X}}) \log \frac{P_1(\underline{\tilde{X}})}{P_0(\underline{\tilde{X}})}$$

$$\sigma^2 = \sum_{\underline{\tilde{X}} \in \underline{\tilde{X}}^{(n)}} P_0(\underline{\tilde{X}}) \{\log \frac{P_1(\underline{\tilde{X}})}{P_0(\underline{\tilde{X}})} - \mu\}^2$$

مثال ۲.۹ مثال ۱.۹ را در نظر بگیرید. فرض کنید نمونه‌ای تصادفی به اندازه $n = 40$ حشره انتخاب و بررسی می‌شوند. با توجه به تصادفی انتخاب شدن نمونه

$$P_i(x_1, \ldots, x_n) = P_i(x_1) \cdots P_i(x_n) \ , \ i = 0, 1$$

پس برای هر نمونه تصادفی

$$\frac{P_1(\tilde{X}_{r_1}, \ldots, \tilde{X}_{r_{40}})}{P_0(\tilde{X}_{r_1}, \ldots, \tilde{X}_{r_{40}})} = \left(\frac{P_1(\tilde{X}_1)}{P_0(\tilde{X}_1)}\right)^{\lambda(\underline{\tilde{X}})} \left(\frac{P_1(\tilde{X}_2)}{P_0(\tilde{X}_2)}\right)^{40-\lambda(\underline{\tilde{X}})}$$

که در آن $\lambda(\underline{\tilde{X}})$ نشان دهنده‌ی تعداد $\tilde{X}_1$ ها در $(\tilde{X}_{r_1}, \ldots, \tilde{X}_{r_{40}})$ است. برای به‌دست آوردن آزمون بهینه به‌صورتی که در قضیه ۱.۹ بیان شد، باید مقدار c_0 را طوری بیابیم که در رابطه زیر صدق کند

$$\sum_{P_1 > c_0 P_0} P_0(\tilde{X}_{r_1}, \ldots, \tilde{X}_{r_{40}}) < 0/05 < \sum_{P_1 \geq c_0 P_0} P_0(\tilde{X}_{r_1}, \ldots, \tilde{X}_{r_{40}})$$

با محاسبات لازم، مقدار $c_0 = 1$ و از آنجا مقدار $k = 0/7127$ به‌دست می‌آید. بنا بر این طبق لم نیمن – پیرسن تعمیم یافته، آزمون زیر یک آزمون بهینه در سطح $\alpha = 0/05$ است

$$K^*(X_{r_1}, \ldots, X_{r_{40}}) = \begin{cases} 1 & \lambda(\underline{\tilde{X}}) > 20 \\ 0/7127 & \lambda(\underline{\tilde{X}}) = 20 \\ 0 & \lambda(\underline{\tilde{X}}) < 20 \end{cases}$$

توان این آزمون عبارت است از

$$\sum_{P_1 > P_0} P_1(\underline{\tilde{X}}) + 0/7127 \sum_{P_1 = P_0} P_1(\underline{\tilde{X}}) = 0/9622$$

از سوی دیگر، بر پایه‌ی قضیه ۲.۹، آزمون تقریبی بهینه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$K(\underline{\tilde{X}}) = \begin{cases} 1 & P_1 > 0/7050 P_0 \\ 0 & P_1 \leq 0/7050 P_0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \lambda(\underline{\tilde{X}}) \geq 20 \\ 0 & \lambda(\underline{\tilde{X}}) < 20 \end{cases}$$

توان آزمون بالا برابر است با

$$1 - \phi[\frac{\log 0/7050 - 40\mu_1}{\sqrt{(40\sigma_1^2)}}] = 0/9678$$

که در آن $\mu_1 = -0/1457$ و $\sigma_1^2 = 0/2775$. مشاهده می‌کنید که هم تابع آزمون و هم مقدار توان آزمون، تقریب خوبی برای موارد متناظر هستند که از آزمون دقیق به‌دست می‌آیند.

۴.۹ آزمون بیز

رهیافتی دیگر برای آزمون فرضیه بر پایه‌ی داده‌های فازی، استفاده از ملاک بیز است. یادآور می‌شویم که در این رهیافت فضای حالات (وضعیت‌ها) عبارت از فضای پارامتر Θ است، و فضای اعمال عبارت از $A = \{a_0, a_1\}$ می‌باشد که در آن a_0 نشان دهنده‌ی پذیرش فرضیه H_0، و a_1 نشان دهنده‌ی پذیرش H_1 است. همچنین تابع زیان، یک تابع بر $\Theta \times A$ به‌صورت زیر است

$$L(\theta, a_0) = \begin{cases} a(\theta) & \theta \in \Theta_1 \\ 0 & \theta \in \Theta_0 \end{cases}$$

$$L(\theta, a_1) = \begin{cases} b(\theta) & \theta \in \Theta_0 \\ 0 & \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

که در آن $a(\theta)$ و $b(\theta)$ دو تابع مثبت هستند. تعاریف و نتایج این بخش همگی مبتنی بر تابع زیان فوق هستند.

تعریف ۷.۹ در مسئله‌ی آزمون فرضیه بر پایه‌ی داده‌های فازی، تابع ریسک یک آزمون فازی با تابع آزمون K، به‌صورت تابعی از θ و این گونه تعریف می‌شود

$$R(\theta,K)=\sum_{\underline{\tilde{X}}\in\underline{\tilde{X}}^{(n)}} L(\theta,a_0)[1-K(\underline{\tilde{X}})]P_\theta(\underline{\tilde{X}})+\sum_{\underline{\tilde{X}}\in\underline{\tilde{X}}^{(n)}} L(\theta,a_1)K(\underline{\tilde{X}})P_\theta(\underline{\tilde{X}})$$

تعریف ۸.۹ برای یک آزمون فازی با تابع آزمون K، ریسک بیز آزمون فازی، نسبت به توزیع پیشین $\pi(\theta)$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$R(\pi,K)=\int R(\theta,K)\pi(\theta)d\theta$$

که در حالت گسسته، انتگرال تبدیل به مجموع یابی می‌شود.

تعریف ۹.۹ در یک مسئله‌ی آزمون فرضیه بر پایه‌ی داده‌های فازی، آزمون فازی با تابع آزمون K^* را آزمون فازی بیز، نسبت به پیشین π، گوییم اگر

$$R(\pi,K^*)\le R(\pi,K)$$

که در آن K تابع آزمون هر آزمون فازی دیگر است.

قضیه ۳.۹ مسئله‌ی آزمون فرضیه‌های زیر را بر پایه‌ی داده‌های فازی در نظر بگیرید

$$\begin{cases} H_0:\theta=\theta_0 \\ H_1:\theta=\theta_1 \end{cases}$$

فرض کنید توزیع پیشین به‌صورت $\pi=\{\pi_0,\pi_1\}$ باشد. در این‌صورت آزمون فازی با تابع آزمون زیر، آزمون فازی بیز است

$$K^*(\underline{\tilde{X}})=\begin{cases} 1 & \dfrac{P_1(\underline{\tilde{X}})}{P_0(\underline{\tilde{X}})}>c_0 \\ 0 & \dfrac{P_1(\underline{\tilde{X}})}{P_0(\underline{\tilde{X}})}\le c_0 \end{cases}$$

که در آن $c_0=\dfrac{b\pi_0}{a\pi_1}$.

مثال ۳.۹ مثال ۱.۹ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید توزیع پیشین به‌صورت $\pi(\frac{1}{3})=\pi(\frac{2}{3})=\frac{1}{2}$ باشد. در این حالت، با استفاده از قضیه بالا، آزمون فازی بیز یک آزمون فازی با تابع آزمون زیر است

$$K^*(\underline{\tilde{X}})=\begin{cases} 1 & \dfrac{P_1(\underline{\tilde{X}})}{P_0(\underline{\tilde{X}})}>\dfrac{b}{a} \\ 0 & \dfrac{P_1(\underline{\tilde{X}})}{P_0(\underline{\tilde{X}})}\le\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

حال اگر $a=b=1$، و نمونه‌گیری تصادفی به اندازه $n=3$ منجر به نمونه $(\tilde{X}_2,\tilde{X}_1,\tilde{X}_2)$ بشود، آنگاه خواهیم داشت

$$\frac{P_1(\underline{\tilde{X}})}{P_0(\underline{\tilde{X}})}=0/578\le\frac{b}{a}=1$$

و لذا، طبق ملاک بیز، تصمیم به قبول H_0 در برابر H_1 می‌گیریم.

۵.۹ نکات تکمیلی

۱. موضوع آزمون فرضیه بر پایه‌ی داده‌های فازی نخستین بار توسط تاناکا و همکاران [۱۶] و در چارچوب نظریه تصمیم فازی مطرح شد. اما مطالعه‌ی جدی در این باره توسط کازالس و همکاران [۳] و کازالس و هیل [۴] آغاز شد. مطالبی که در این فصل ارائه شد، عمدتاً مبتنی بر دو مرجع اخیر است.

۲. آزمون فرضیه بر پایه‌ی داده‌های فازی از جنبه‌ی گوناگون مورد توجه قرار گرفته است. به چند مورد اشاره می‌کنیم. کورنر [۱۰] یک آزمون مجانبی برای میانگین متغیرهای فازی تصادفی ارائه داده است. فیلزموزر و فیتل [۶] مفهوم $P-$ مقدار را برای آزمون فرضیه بر پایه‌ی داده‌های فازی معرفی کرده‌اند. طاهری و بهبودیان روش بیزی را برای آزمون فرضیه بر پایه‌ی داده‌های فازی، در حالتی که فرضیه‌ها نیز فازی هستند، مطالعه نموده‌اند [۱۵ و ۱۴]. مونتنگرو و همکاران [۱۳] آزمون مقایسه‌ی میانگین‌های دو جامعه را، هنگامی که نمونه‌های حاصل از دو جامعه فازی باشند، مطالعه نموده‌اند. لئو و چن [۱۱] نیز یک روش آزمون تصادفی شده بر اساس داده‌های فازی ارائه نموده‌اند (نیز رک به [۱]).

۳. آزمون‌های ناپارامتری مبتنی بر مشاهدات فازی توسط هیل و همکاران [۸و۷] مطالعه شده است. آنها آزمون نیکویی برازش کای‌دو و هم چنین آزمون نسبت درستنمایی برای

نیکویی برازش را، بر پایه‌ی داده‌های فازی، بررسی نموده‌اند. عسگری و لوکس [۲] شیوه‌ای دیگر برای آزمون نیکویی برازش، بر پایه‌ی داده‌های فازی، ارائه داده‌اند. دنو و همکاران [۵] برخی از آزمون‌های ناپارامتری را به حالتی که داده‌ها فازی باشند، تعمیم داده‌اند.

۴. شایسته است به چند رویکرد دیگر نیز در باب آزمون فرضیه در محیط فازی اشاره کنیم. باکلی (مراجع [۴و۳] فصل ٦) شیوه‌ای فازی برای آزمون فرضیه مطرح نموده است (که مبتنی بر شیوه‌ی او در براورد فازی یک پارامتر می‌باشد). محمدپور و بهبودیان [۱۲] روشی را برای آزمون فرضیه در حالت وجود پارامتر مزاحم (و داشتن اطلاعی مبهم در باره‌ی آن) ارائه نموده‌اند. هرین‌ویچ [۹] شیوه‌ای برای توصیف و تفسیر امکانی نتایج آزمون‌های آماری در حالت‌های مختلف داده و/یا فرضیه معمولی و/یا فازی ارائه داده است.

تمرین‌های فصل نهم

۱.۹ مثال ۱.۹ و مفروضات آن را در نظر بگیرید. می‌خواهیم فرضیه $H_0 : p = \frac{1}{3}$ را در برابر $H_1 : p = \frac{1}{2}$ آزمون کنیم. آزمون بهینه را در سطح $\alpha = 0/05$ تعیین کنید. احتمال ارتکاب خطای نوع دوم را برای این آزمون به‌دست آورید.

۲.۹ در مثال ۱.۹ فرض کنید چهار حشره را انتخاب و مورد آزمایش قرار داده‌ایم. فضای نمونه‌ای فازی را تشکیل دهید و جدولی مشابه جدول ۱.۹ تنظیم کنید. بر اساس نتایج حاصله، می‌خواهیم فرضیه $H_0 : p = \frac{1}{3}$ را در برابر $H_1 : p = \frac{1}{2}$ آزمون کنیم. آزمون بهینه را در سطح $\alpha = 0/05$ بیابید. احتمال ارتکاب خطای نوع دوم را نیز برای این آزمون محاسبه کنید.

۳.۹ در مثال ۱.۹ فرض کنید روش تشخیص وجود یا عدم وجود ویروس منجر به نتایج زیر شود:

$\tilde{X}_1$: «با اطمینان نسبتاً زیاد، حشره واجد ویروس است»، یا $\tilde{X}_2$: «با اطمینان نسبتاً زیاد، حشره فاقد ویروس است»، که

$$\tilde{X}_1(x) = \begin{cases} 0/10 & x = 0 \\ 0/70 & x = 1 \end{cases} \quad , \quad \tilde{X}_2(x) = \begin{cases} 0/90 & x = 0 \\ 0/30 & x = 1 \end{cases}$$

که در آن $x = 0$ بیانگر فقدان ویروس و $x = 1$ بیانگر حضور ویروس است. می‌خواهیم $H_0 : p = \frac{1}{3}$ را در برابر $H_1 : p = \frac{1}{2}$ آزمون کنیم. بر پایه‌ی نمونه‌ای تصادفی به اندازه $n = 3$، آزمون بهینه را در سطح $\alpha = 0/05$ بیابید.

۴.۹ در مثال ۳.۹ فرض کنید چهار حشره را انتخاب و بررسی نموده‌ایم و نتیجه‌ی نمونه‌گیری به‌صورت $(\tilde{X}_2, \tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_2)$ به‌دست آمده است. به‌علاوه توزیع پیشین به‌صورت $\pi(\frac{1}{3}) = 1 - \pi(\frac{2}{3}) = 0/4$ داده شده است. با فرض این که $a = b = 1$، تصمیم بیز چیست؟

۵.۹ آزمایشی برای تشخیص وجود ویروس HIV در انسان پیشنهاد شده است که در مورد هر فرد منجر به یکی از چهار نتیجه زیر می‌شود

$$\tilde{X}_1(x) = \begin{cases} 0/8 & x = 0 \\ 0/2 & x = 1 \end{cases} \quad , \quad \tilde{X}_2(x) = \begin{cases} 0/2 & x = 0 \\ 0/8 & x = 1 \end{cases}$$

$$\tilde{X}_3(x) = \begin{cases} 0/95 & x = 0 \\ 0/05 & x = 1 \end{cases} \quad , \quad \tilde{X}_4(x) = \begin{cases} 0/05 & x = 0 \\ 0/95 & x = 1 \end{cases}$$

که در آن $x = 0$ بیانگر فقدان ویروس و $x = 1$ بیانگر وجود ویروس است. می‌خواهیم فرضیه $H_0 : p = 0/05$ را در برابر $H_1 : p = 0/15$ آزمون کنیم، که p بیانگر نسبت افرادی از جامعه‌ی تحت بررسی است که واجد ویروس هستند.

الف) توضیح دهید چگونه می توان بر اساس انواع نمونه های ممکن $\tilde{X}_1$ تا $\tilde{X}_4$ یک فضای نمونه‌ای فازی تشکیل داد.

ب) فرض کنید دو فرد از جامعه‌ی تحت بررسی انتخاب کرده‌ایم. جدولی مشابه جدول ۱.۹ تشکیل دهید و آزمون بهینه را در سطح $\alpha = 0/10$ بیابید.

٦.۹ تمرین بالا را در نظر بگیرید.

الف) فرض کنید نمونه‌ای ۱۵ تایی از جامعه‌ی تحت بررسی انتخاب می‌کنیم. برنامه‌ای بنویسید که آزمون بهینه سطح $\alpha = 0/10$ را، به‌ازای تمام حالت‌های ممکن برای نمونه ۱۵ تایی، به‌دست دهد.

ب) در بند الف، اگر در نمونه ۱۵ تایی، تعداد مشاهدات مربوط به $\tilde{X}_1$ تا $\tilde{X}_4$، به‌ترتیب، ۲،۳،۹ و ۱ به‌دست آمده باشد، آزمون بهینه سطح $\alpha = 0/10$ چه نتیجه‌ای می‌دهد؟

منابع و مراجع

[۱] طاهری، سید محمود؛ بزرگوار، تکتم (۱۳۸۳)؛ آزمون تصادفی شده برای میانگین توزیع نرمال بر پایه‌ی داده‌های نادقیق، گزارش هفتمین کنفرانس آمار ایران، دانشگاه علامه طباطبایی، ۵۸۰–۵۶۷.

[۲] عسکری، جواد؛ لوکس، کارو (۱۳۷۴)؛ معیاری جدید برای مرغوبیت برازش با اطلاعات فازی، مجله بین‌المللی مهندسی دانشگاه علم و صنعت ایران، جلد ۶، شماره ۱–ب، ۸–۱.

[3] Casals, M.R., Gil, M.A., Gil, P. (1986); On the use of Zadeh's probabilistic definition for testing statistical hypothesis from fuzzy information, Fuzzy Sets and Systems, 20: 175-190.

[4] Casals, M.R., Gil, M.A. (1989); A note on the operativeness of Neyman-Pearson tests with fuzzy information, Fuzzy Sets and Systems, 30: 215-220.

[5] Denoeux, T., Masson, M.H., Hebert, P.A. (2005); Nonparametric rank-based statistics and significance tests for fuzzy data, Fuzzy Sets and Systems, 153: 1-28.

[6] Filzmoser, P., Viertl, R. (2004); Testing hypothesis with fuzzy data: the fuzzy P-value, Metrika, 59: 21-29.

[7] Gil, M.A., Corral, N., Gil, P. (1985); The minimum inaccuracy estimates in χ^2 tests for goodness of fit with fuzzy observations, J. Stat. Plan. Inf., 19: 95-115.

[8] Gil, M.A., Corral, N., Casals, M.R. (1989); The likelihood ratio test for goodness of fit with fuzzy experimental observation, IEEE Trans. System Man Cybernet., 19: 771-779.

[9] Hryniewicz, O. (2006); Possibilistic decision and fuzzy statistical tests, Fuzzy Sets and Systems, 157: 2665-2673.

[10] Korner, R. (1990); An asymptotic α-test for expectation of random fuzzy variables, J. Stat. Plan. Inf., 83: 331-346.

[11] Leo, C.H., Chen, C.C. (2005); Randomized tests of mean for normal population with fuzzy data, Manuscript.

[12] Mohammadpour, A., Behboodian, J. (2005); Using fuzzy knowledge of a nuisance parameter for hypotheses testing, Iranian J. of Science and Technology, Trans. A, 29: 433-455.

[13] Montenegro, M., Casals, M.R., Lubiano, M.A., Gil, M.A. (2001); Two-sample hypothesis tests of means of a fuzzy random variables, Information Sciences, 133: 89-100.

[14] Taheri, S.M., Behboodian, J. (2002); Fuzzy hypothesis testing with fuzzy data: a Bayesian approach, In: Pal, N.R., Sugeno, M. (Eds.), Advances in Soft Computing, Springe, pp. 527-533.

[15] Taheri, S.M., Behboodian, J. (2006); On Bayesian approach to fuzzy testing hypothesis with fuzzy data, Italian J. Pure and Appl. Math., 19: 139-154.

[16] Tanaka, H., Okuda, T., Asai, K. (1979); Fuzzy information and decision in statistical model, In: Gupta, M.M., et al. (Eds.), Advances in Fuzzy Sets Theory and Applications, North-Holland, Amsterdam, pp. 303-320.

فصل ۱۰

آزمون فرضیه‌های فازی

مقدمه

در این فصل به موضوع آزمون فرضیه‌های آماری، هنگامی که فرضیه‌های مورد آزمون نادقیق هستند، می‌پردازیم. در بخش نخست فرضیه فازی را تعریف نموده و درباره‌ی ضرورت به کارگیری این نوع فرضیه‌ها توضیحاتی می‌دهیم. در بخش دوم لم نیمن — پیرسن را به حالتی که فرضیه‌های مورد آزمون، فازی هستند تعمیم می‌دهیم. در بخش سوم با چند مثال عددی شیوه‌ی فوق را تشریح می‌کنیم.

۱.۱۰ فرضیه‌های فازی

یکی از مسایل مهم در آزمون‌های آماری، تنظیم و صورت‌بندی فرضیه‌هاست. گاهی، ماهیت فرضیه‌ها به گونه‌ای است که به شکل یک فرضیه دقیق فرمول‌بندی نمی‌شوند. برگر و دلامپادی [۵] غیر واقعی بودن فرضیه‌های دقیق را این گونه توضیح می‌دهند:

«به ندرت اتفاق می‌افتد و یا شاید غیر ممکن است که در عالم واقعی، فرضیه‌ای به شکل $\theta = \theta_0$ مدل‌بندی شود. مثلاً، فرضیه‌هایی به شکل زیر در آمار خیلی رایج هستند:

H_0: ویتامین C اثری بر سرماخوردگی ندارد.

واضح است که این فرضیه را نمی‌توان به شکل یک فرضیه دقیق در نظر گرفت. بهتر است که این نوع فرضیه‌ها را به شکل $H_0 : |\theta - \theta_0| \leq \epsilon$ در مقابل $H_1 : |\theta - \theta_0| > \epsilon$ بیان کنیم، که در آن ϵ عددی کوچک است.»

این راه‌حل اگر چه یک گام برای صورت‌بندی فرضیه‌های نادقیق است، اما دارای یک مشکل است. فرض کنید $\epsilon = 10^{-1}$. حال اگر $|\theta - \theta_0| = 10^{-1}$، آنگاه فرضیه H_0 پذیرفته می‌شود، و اگر $|\theta - \theta_0| = 10^{-1} + 10^{-4}$، آنگاه فرضیه H_0 را نخواهیم پذیرفت.

این مسئله با اساس و هدف راه‌حل بالا در تناقض است. اما اگر مفهوم «کوچک» را به جای این که عددی دقیق فرض کنیم، یک عدد فازی در نظر بگیریم، آنگاه مشکل فوق رفع می‌شود. با استفاده از نظریه مجموعه‌های فازی می‌توان مفهوم «کوچک» و مفاهیمی مانند آن را صورت‌بندی و از آنها در آزمون فرضیه‌ها استفاده کرد. آزمون فرضیه‌های فازی در واقع مدل‌بندی و حل این نوع مسائل است.

تعریف ۱.۱۰ در یک مسئله آزمون فرضیه، هر فرضیه به شکل

H : θ به‌صورت $H(\theta)$ است

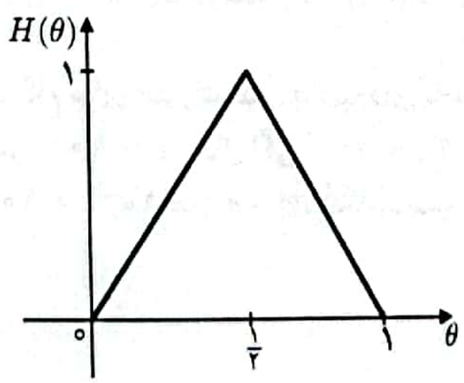
را یک فرضیه فازی گوییم، که در آن $H(\theta)$ یک تابع عضویت روی فضای پارامتر Θ است.

تذکر: در حالت غیرفازی، فرض $H : \theta \in \Theta$ را می‌توان یک فرضیه فازی با تابع عضویت زیر در نظر گرفت

$$H(\theta) = \begin{cases} ۱ & \theta \in \Theta \\ ۰ & \theta \notin \Theta \end{cases}$$

مثال ۱.۱۰ فرض کنید θ پارامتر نسبت در یک توزیع دوجمله‌ای باشد. فرض "θ تقریباً ۰/۵ است" : H، یک فرضیه فازی است که می‌تواند به شکل زیر تعریف شود (شکل ۱.۱۰)

$$H(\theta) = \begin{cases} ۲\theta & ۰ \le \theta < \frac{۱}{۲} \\ ۲ - ۲\theta & \frac{۱}{۲} \le \theta \le ۱ \end{cases}$$



شکل ۱.۱۰ نمودار تابع عضویت فرضیه فازی در مثال ۱.۱۰

مثال ۲.۱۰ می‌خواهیم درباره‌ی قطر واشرهای تولیدی یک کارخانه، و این که آیا متوسط قطر واشرها در حد استاندارد $\mu_۰$ است یا خیر، تحقیقی انجام دهیم. طبق شیوه‌ی رایج در آمار استنباطی، برای آزمون استاندارد بودن قطر واشرها از آزمون فرضیه $H_۰ : \mu = \mu_۰$ در برابر فرضیه $H_۱ : \mu \neq \mu_۰$ استفاده می‌شود. اما واضح است که در این مسئله، اگر متوسط قطر واشرها اندکی با $\mu_۰$ تفاوت داشته باشد، واشرها همچنان پذیرفتنی‌اند و خط تولید خارج از استاندارد تلقی نمی‌شود. بنابراین طبیعی است که محصولات کارخانه پذیرفته شوند اگر μ (میانگین واقعی و مجهول قطر واشرها) تقریباً $\mu_۰$ باشد، و در غیر این‌صورت استاندارد بودن خط تولید و لذا محصولات کارخانه رد شود. از این رو فرضیه‌های واقعی در این مسئله عبارت‌اند از

$$\begin{cases} H_۰ : & \mu \text{ بسیار نزدیک به } \mu_۰ \text{ است} \\ H_۱ : & \mu \text{ از } \mu_۰ \text{ دور است} \end{cases}$$

در این‌جا می‌توان فرضیه‌های $H_۰$ و $H_۱$ را به‌صورت مجموعه‌های فازی مدل‌سازی کرد.

۲.۱۰ آزمون فرضیه‌های فازی

فرض کنید $\underline{X} = (X_۱, \ldots, X_n)$ یک نمونه تصادفی، با مقدار مشاهده شده $\underline{x} = (x_۱, \ldots, x_n)$، باشد که در آن X_i دارای تابع چگالی (جرم) احتمال $f(x_i;\theta),\ \theta \in \Theta$ است. فرض کنید دو تابع عضویت $H_۰(\theta)$ و $H_۱(\theta)$ داده شده‌اند و می‌خواهیم بر پایه‌ی نمونه تصادفی فوق فرضیه‌های فازی زیر را آزمون کنیم

$$\begin{cases} H_۰ : & \theta \text{ به‌صورت } H_۰(\theta) \text{ است} \\ H_۱ : & \theta \text{ به‌صورت } H_۱(\theta) \text{ است} \end{cases}$$

به بیان دیگر هدف آن است که یک تابع آزمون، $\phi(\underline{X})$، بیابیم که $\phi(\underline{x})$ نشان دهنده‌ی احتمال رد فرضیه $H_۰$ باشد. نخست تابع توان یک آزمون را، به‌طور مشابه با حالت معمولی، تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲.۱۰ تابع توان برای هر آزمون $\phi(\underline{X})$ به‌صورت $\beta_\phi(\theta) = E_\theta[\phi(\underline{X})]$ تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۱۰ فرض کنید $\phi(\underline{X})$ یک تابع آزمون برای مسئله‌ی آزمون فرضیه‌های فازی باشد، و به‌علاوه

$$\int_\theta H_۰(\theta)d\theta = M < \infty\ ,\ \int_\theta H_۱(\theta)d\theta = N < \infty$$

که در حالت گسسته به جای انتگرال از مجموع‌یابی استفاده می‌کنیم. در این‌صورت احتمال ارتکاب خطای نوع اول و احتمال ارتکاب خطای نوع دوم به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\alpha_\phi = \frac{1}{M}\int_\theta H_0(\theta)E_\theta\phi(\underline{X})d\theta\,,$$
$$\beta_\phi = \frac{1}{N}\int_\theta H_1(\theta)[1-E_\theta\phi(\underline{X})]d\theta\,.$$

مقدار α_ϕ را می‌توان میانگین موزون شده $E_\theta\phi(\underline{X})$ توسط $H_0(\theta)$ روی مقادیر θ تعبیر کرد. مقدار β_ϕ نیز عبارت است از: متوسط احتمال پذیرش H_0، که توسط $H_1(\theta)$ روی مقادیر θ موزون شده است.

نکته ۱.۱۰ در حالت خاص آزمون یک فرضیه ساده (دقیق) در برابر یک فرضیه جانشین ساده (دقیق)، آن گونه که در لم نیمن — پیرسن وجود دارد، تعاریف بالا برای α_ϕ و β_ϕ منطبق بر تعاریف معمولی خطای نوع اول و خطای نوع دوم می‌شود.

دو تعریف بعد، تعریف‌هایی دقیقاً مشابه با حالت معمولی هستند.

تعریف ۴.۱۰ در مسئله‌ی آزمون فرضیه‌های فازی، گوییم آزمون ϕ یک آزمون در سطح (اطمینان) α است اگر $\alpha_\phi \le \alpha$. همچنین مقدار α_ϕ را اندازه آزمون ϕ گوییم.

تعریف ۵.۱۰ در مسئله‌ی آزمون فرضیه‌های فازی، آزمون ϕ در سطح α را بهترین آزمون در سطح α گوییم، اگر برای هر آزمون ϕ^* در سطح α، $\beta_\phi \le \beta_{\phi^*}$.

۳.۱۰ لم نیمن — پیرسن برای آزمون فرضیه‌های فازی

در این بخش نیمن — پیرسن را به حالتی که فرضیه‌های مورد آزمون فازی هستند تعمیم می‌دهیم. نخست، برای یادآوری، حالت معمولی این لم را بیان می‌کنیم (مرجع [۵] فصل ۸).

قضیه ۱.۱۰ (لم نیمن — پیرسن) فرض کنید $\underline{X} = (X_1,\dots,X_n)$ نمونه‌ای تصادفی با مقدار مشاهده شده $\underline{x} = (x_1,\dots,x_n)$ باشد و X_i دارای تابع چگالی (جرم) احتمال $f(x_i;\theta)$ و $\theta \in \Theta = \{\theta_0,\theta_1\}$. برای آزمون فرضیه‌های

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \end{cases}$$

الف) هر آزمون به‌صورت

$$\phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \dfrac{f(\underline{x};\theta_1)}{f(\underline{x};\theta_0)} > k \\ \gamma(\underline{x}) & \dfrac{f(\underline{x};\theta_1)}{f(\underline{x};\theta_0)} = k \\ 0 & \dfrac{f(\underline{x};\theta_1)}{f(\underline{x};\theta_0)} < k \end{cases} \qquad (1.10)$$

برای یک $k \ge 0$ و $0 \le \gamma(\underline{x}) \le 1$، بهترین آزمون در اندازه $\alpha = E_{\theta_0}\phi(\underline{X})$ است.
به‌علاوه اگر $k = \infty$، آنگاه آزمون

$$\phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & f(\underline{x};\theta_0) = 0 \\ 0 & f(\underline{x};\theta_0) > 0 \end{cases} \qquad (2.10)$$

بهترین آزمون در اندازه‌ی صفر است.

ب) (وجود) به‌ازای هر $0 \le \alpha \le 1$، یک آزمون به‌صورت (۱.۱۰) یا (۲.۱۰) با $\gamma(\underline{x}) = \gamma$ (ثابت) وجود دارد که $E_{\theta_0}\phi(\underline{X}) = \alpha$.

پ) (یکتایی) اگر ϕ^* یک بهترین آزمون در اندازه α باشد، آنگاه ϕ^* به‌صورت (۱.۱۰) یا (۲.۱۰) است، مگر احتمالاً روی یک مجموعه‌ای مانند A از $\underline{x}$ها که

$$\int_A f(\underline{x};\theta_0)d\underline{x} = \int_A f(\underline{x};\theta_1)d\underline{x} = 0$$

اکنون لم نیمن—پیرسن را به‌حالتی که فرضیه‌های مورد آزمون فازی باشند، تعمیم می‌دهیم.

قضیه ۲.۱۰ (لم نیمن — پیرسن تعمیم یافته) مفروضات قضیه ۱.۱۰ را در نظر بگیرید. برای آزمون فرضیه‌های فازی

$$\begin{cases} H_0 : \text{است } H_0(\theta) \text{ به‌صورت } \theta \\ H_1 : \text{است } H_1(\theta) \text{ به‌صورت } \theta \end{cases}$$

الف) هر آزمون به‌صورت

$$\phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \dfrac{\int f(\underline{x};\theta)H_1(\theta)d\theta}{\int f(\underline{x};\theta)H_0(\theta)d\theta} > k \\ \gamma(\underline{x}) & \dfrac{\int f(\underline{x};\theta)H_1(\theta)d\theta}{\int f(\underline{x};\theta)H_0(\theta)d\theta} = k \\ 0 & \dfrac{\int f(\underline{x};\theta)H_1(\theta)d\theta}{\int f(\underline{x};\theta)H_0(\theta)d\theta} < k \end{cases} \qquad (3.10)$$

برای یک $k \geq 0$ و $0 \leq \gamma(\underline{x}) \leq 1$، بهترین آزمون در اندازه

$$\alpha = \frac{1}{M}\int H_0(\theta)E_\theta\phi(\underline{X})d\theta$$

است. به‌علاوه اگر $k = \infty$، آنگاه آزمون

$$\phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \int f(\underline{x};\theta)H_0(\theta)d\theta = 0 \\ 0 & \int f(\underline{x};\theta)H_0(\theta)d\theta > 0 \end{cases} \qquad (۴.۱۰)$$

بهترین آزمون در اندازه‌ی صفر است.

ب) (وجود) برای هر $0 \leq \alpha \leq 1$، یک آزمون به‌صورت (۳.۱۰) یا (۴.۱۰) با $\gamma(\underline{x}) = \gamma$ (ثابت) در اندازه α وجود دارد.

پ) (یکتایی) اگر ϕ^* یک بهترین آزمون در اندازه α باشد، به‌صورت (۳.۱۰) یا (۴.۱۰) خواهد بود، مگر احتمالاً روی مجموعه‌ای مانند A از $\underline{x}$ ها که

$$\int_A f(\underline{x};\theta)H_0(\theta)d\theta = \int_A f(\underline{x};\theta)H_1(\theta)d\theta = 0$$

نتیجه ۱.۱۰ اگر T یک آماره بسنده برای θ باشد، آنگاه آزمون فوق تابعی از T خواهد بود. زیرا بنا به قضیه تجزیه به عوامل [۶] داریم

$$\frac{\int f(\underline{x};\theta)H_1(\theta)d\theta}{\int f(\underline{x};\theta)H_0(\theta)d\theta} = \frac{\int g(T(\underline{x});\theta)H_1(\theta)d\theta}{\int g(T(\underline{x});\theta)H_0(\theta)d\theta}$$

که به وضوح تابعی از $T(\underline{x})$ است.

۴.۱۰ مثال‌های عددی

مثال ۳.۱۰ فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر باشد

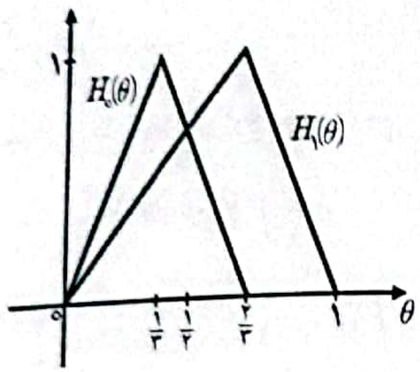
$$f(x;\theta) = 2\theta x + 2(1-\theta)(1-x) \quad , \quad 0 < \theta < 1 \, , \, 0 < x < 1$$

می‌خواهیم فرضیه‌های زیر را آزمون کنیم

$$\begin{cases} H_0 : \theta \simeq \frac{1}{3} & (\theta \text{ تقریبا } \frac{1}{3} \text{ است}) \\ H_1 : \theta \simeq \frac{1}{2} & (\theta \text{ تقریبا } \frac{1}{2} \text{ است}) \end{cases} \qquad (۵.۱۰)$$

که توابع عضویت $H_0(\theta)$ و $H_1(\theta)$ به‌صورت زیر تعریف شده‌اند (شکل ۲.۱۰)

$$H_0(\theta) = \begin{cases} 3\theta & 0 \leq \theta < \frac{1}{3} \\ 2 - 3\theta & \frac{1}{3} \leq \theta < \frac{2}{3} \end{cases} \qquad H_1(\theta) = \begin{cases} 2\theta & 0 \leq \theta < \frac{1}{2} \\ 2 - 2\theta & \frac{1}{2} \leq \theta < 1 \end{cases}$$



شکل ۲.۱۰ نمودار توابع عضویت فرضیه‌های فازی مثال ۳.۱۰

برای ساختن آزمونی به‌صورت (۳.۱۰)، نخست مقادیر زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\int f(x;\theta)H_0(\theta)d\theta = \int_0^{\frac{1}{3}}[2\theta x + 2(1-\theta)(1-x)]H_0(\theta)d\theta = \frac{2}{9}(2-x)$$

$$\int f(x;\theta)H_1(\theta)d\theta = \int_0^1[2\theta x + 2(1-\theta)(1-x)]H_1(\theta)d\theta = \frac{1}{2}$$

بنا بر این فرضیه H_0 رد می‌شود اگر $(\frac{1}{2})/\frac{2}{9}(2-x) > k^*$ و یا به‌طور معادل اگر $x > k$.
بنا بر این بهترین آزمون به‌صورت زیر است

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x > k \\ 0 & x \leq k \end{cases}$$

تابع توان این آزمون عبارت است از

$$\beta_\phi(\theta) = P(X \geq k) = \int_k^1 f(x;\theta)dx = 2k(1-k)\theta + (1-k)^2$$

که، به‌ازای k ثابت، یک تابع صعودی برحسب θ است.
برای محاسبه α_ϕ، احتمال ارتکاب خطای نوع اول، توجه کنید که

$$M = \int H_0(\theta)d\theta = \int_0^{\frac{1}{3}} 3\theta d\theta + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}(2-3\theta)d\theta = \frac{1}{3}$$

و

$$\int H_\circ(\theta)E_\theta\phi(X)d\theta = \int_\circ^{\frac{1}{3}} 3\theta P(X\geq k)d\theta + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}(2-3\theta)P(X\geq k)d\theta$$
$$= \frac{2}{9}k(1-k)+\frac{1}{3}(1-k)^2$$

بنا بر این

$$\alpha_\phi = \frac{\frac{2}{9}k(1-k)+\frac{1}{3}(1-k)^2}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}k^2-\frac{4}{3}k+1$$

به‌طور مشابه برای β_ϕ، احتمال ارتکاب خطای نوع دوم، داریم

$$N = \int H_1(\theta)d\theta = \frac{1}{2}$$

و

$$\int H_1(\theta)[1-E_\theta\phi(X)]d\theta = \frac{k}{2}$$

بنا بر این $\beta_\phi = k$.

برای چند مقدار k، مقادیر α_ϕ و β_ϕ در جدول زیر داده شده‌اند

k	α_ϕ	β_ϕ
۰	۱	۰
۰/۲۰	۰/۷۵	۰/۲۰
۰/۵۰	۰/۴۲	۰/۵۰
۰/۸۰	۰/۱۵	۰/۸۰
۱	۰	۱

از سوی دیگر، به‌ازای هر α می‌توانیم k را طوری بیابیم که آزمون ϕ بهترین آزمون در اندازه α باشد. توجه کنید که k مناسب، به‌طور یکتا، از حل معادله

$$\frac{1}{3}k^2-\frac{4}{3}k+1=\alpha \quad , \quad 0\leq\alpha\leq 1$$

و به‌صورت $k = 2-\sqrt{1+3\alpha}$ به‌دست می‌آید. برای مثال اگر $\alpha = 0/10$ آنگاه $k = 0/86$. پس بهترین آزمون در اندازه ۰/۱۰ برای فرضیه‌های فازی (۵.۱۰) عبارت است از

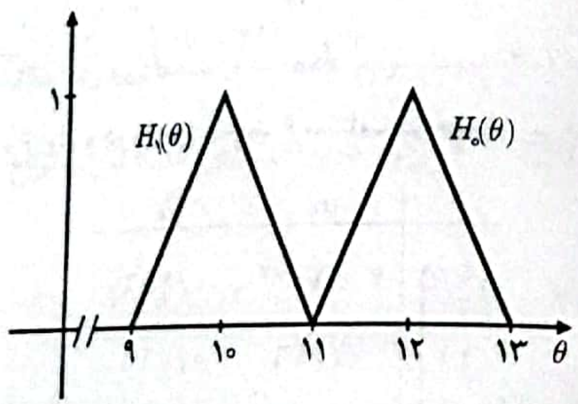
$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x\geq 0/86 \\ 0 & x<0/86 \end{cases}$$

مثال ۴.۱۰ فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از جامعه $N(\theta,1)$ باشد. می‌خواهیم بر پایه‌ی این نمونه، فرضیه‌های فازی زیر را آزمون کنیم

$$\begin{cases} H_\circ : \theta\simeq 12 \\ H_1 : \theta\simeq 10 \end{cases}$$

که توابع عضویت $H_\circ(\theta)$ و $H_1(\theta)$ به‌صورت زیر داده شده‌اند (شکل ۳.۱۰)

$$H_\circ(\theta) = \begin{cases} \theta-11 & 11\leq\theta<12 \\ 13-\theta & 12\leq\theta<13 \end{cases} \qquad H_1(\theta) = \begin{cases} \theta-9 & 9\leq\theta<10 \\ 11-\theta & 10\leq\theta<11 \end{cases}$$



شکل ۳.۱۰ نمودار توابع عضویت فرضیه‌های فازی مثال ۴.۱۰

برای ساختن آزمونی به شکل (۳.۱۰)، توجه کنید که

$$\lambda(\underline{x}) = \frac{\int f(\underline{x};\theta)H_1(\theta)d\theta}{\int f(\underline{x};\theta)H_\circ(\theta)d\theta}$$
$$= \frac{\int_9^{10}(\theta-9)e^{-(n/2)\theta^2+n\bar{x}\theta}d\theta+\int_{10}^{11}(11-\theta)e^{-(n/2)\theta^2+n\bar{x}\theta}d\theta}{\int_{11}^{12}(\theta-11)e^{-(n/2)\theta^2+n\bar{x}\theta}d\theta+\int_{12}^{13}(13-\theta)e^{-(n/2)\theta^2+n\bar{x}\theta}d\theta}$$

با مشتق‌گیری نسبت به $\bar{x}$ و برخی محاسبات، می‌توان نشان داد که $\lambda(\bar{x})$ یک تابع نزولی از $\bar{x}$ است. بنا بر این $H_\circ$ هنگامی رد می‌شود که $\bar{x}\leq k$، و لذا بهترین آزمون برای فرضیه‌های فوق عبارت است از

$$\phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \bar{x}\leq k \\ 0 & \bar{x}>k \end{cases} \qquad (6.10)$$

برای محاسبه α_ϕ، احتمال ارتکاب خطای نوع اول، داریم $M = \int H_\circ(\theta)d\theta = ۱$، لذا

$$\alpha_\phi = \frac{۱}{M}\int H_\circ(\theta)E_\theta[\phi(\underline{X})]d\theta = \int H_\circ(\theta)P(\overline{X} \le k)d\theta$$

برای مثال اگر بر پایه‌ی نمونه‌ای به حجم $n = ۱۶$، مقدار k را برابر ۱۱ قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\alpha_\phi &= \int H_\circ(\theta)P(\overline{X} \le ۱۱)d\theta \\
&= \int_{۱۱}^{۱۲}(\theta - ۱۱)P(\overline{X} \le ۱۱)d\theta + \int_{۱۲}^{۱۳}(۱۳ - \theta)P(\overline{X} \le ۱۱)d\theta \\
&= \int_{۱۱}^{۱۲}(\theta - ۱۱)\int_{-\infty}^{۴(۱۱-\theta)}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-(z^۲/۲)}dzd\theta \\
&\quad + \int_{۱۲}^{۱۳}(۱۳ - \theta)\int_{-\infty}^{۴(۱۱-\theta)}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-(z^۲/۲)}dzd\theta
\end{aligned}$$

مقادیر خطاهای نوع اول و دوم به‌ازای چند k مختلف در جدول زیر داده شده‌اند.

k	α_ϕ	β_ϕ
۱۰/۵	۲×۱۰^{-۴}	۰/۱۵۶
۱۱	۰/۰۱۶	۰/۰۱۶
۱۱/۵	۰/۱۵۶	۲×۱۰^{-۴}
۱۲	۰/۵۰۰	$\simeq ۰$

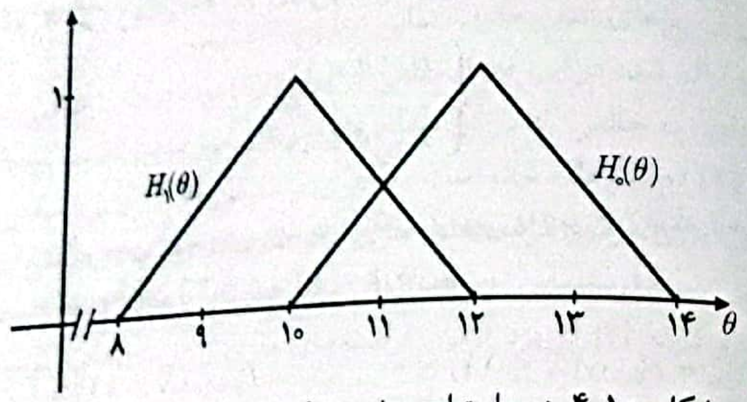
مثال ۵.۱۰ در مثال بالا فرض کنید $H_\circ(\theta)$ و $H_۱(\theta)$ دارای توابع عضویت زیر باشند (شکل ۴.۱۰)

$$H_\circ(\theta) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}(\theta - ۱۰) & ۱۰ \le \theta < ۱۲ \\ \frac{۱}{۲}(۱۴ - \theta) & ۱۲ \le \theta < ۱۴ \end{cases} \qquad H_۱(\theta) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}(\theta - ۸) & ۸ \le \theta < ۱۰ \\ \frac{۱}{۲}(۱۲ - \theta) & ۱۰ \le \theta < ۱۲ \end{cases}$$

به‌طور مشابه با مثال ۴.۱۰، در اینجا نیز بهترین آزمون به‌صورت رابطه (۶.۱۰) است. البته در اینجا $M = N = ۲$، و لذا به‌ازای $n = ۱۶$ و $k = ۱۱$، مقادیر احتمالات خطاهای نوع اول و دوم برابر با $\alpha_\phi = \beta_\phi = ۰/۱۳۳$ به‌دست می‌آید.

دقت می‌کنید که در حالت $k = ۱۱$ احتمال خطاهای نوع اول و نوع دوم در مقایسه با

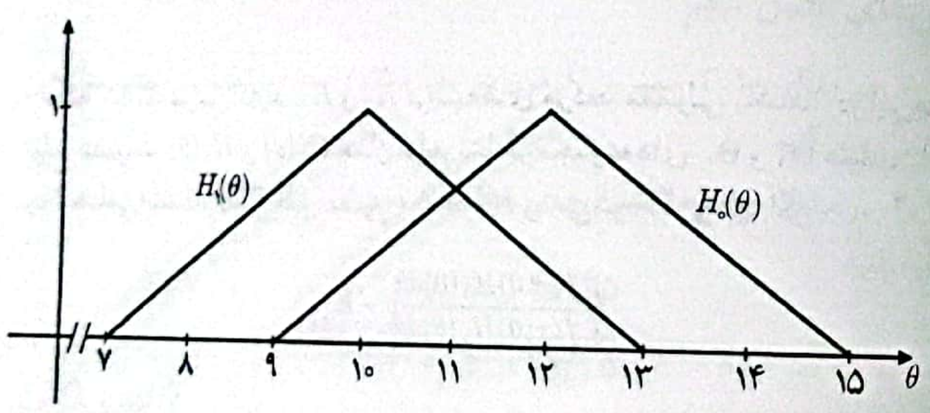
حالتی که در مثال ۴.۱۰ تشریح شد، بزرگ‌تر هستند. افزایش α_ϕ و β_ϕ در حالت اخیر به این دلیل است که نقاط حول و حوش $\theta = ۱۱$ (یعنی همان نقطه‌ای که $\overline{x}$ با آن سنجیده می‌شود) در هر دو تابع $H_\circ(\theta)$ و $H_۱(\theta)$ عضویت قابل ملاحظه و یکسانی دارند و لذا احتمال رد به خطای $H_\circ$ یا پذیرش به خطای $H_\circ$ افزایش می‌یابد.



شکل ۴.۱۰ نمودار توابع عضویت فرضیه‌های فازی مثال ۵.۱۰

مثال ۶.۱۰ در مثال ۴.۱۰ فرض کنید $H_\circ(\theta)$ و $H_۱(\theta)$ دارای توابع عضویت زیر باشند (شکل ۵.۱۰)

$$H_\circ(\theta) = \begin{cases} \frac{۱}{۳}(\theta - ۹) & ۹ \le \theta < ۱۲ \\ \frac{۱}{۳}(۱۵ - \theta) & ۱۲ \le \theta < ۱۵ \end{cases} \qquad H_۱(\theta) = \begin{cases} \frac{۱}{۳}(\theta - ۷) & ۷ \le \theta < ۱۰ \\ \frac{۱}{۳}(۱۳ - \theta) & ۱۰ \le \theta < ۱۳ \end{cases}$$



شکل ۵.۱۰ نمودار توابع عضویت فرضیه‌های فازی مثال ۶.۱۰

در اینجا نیز بهترین آزمون به‌صورت رابطه (۶.۱۰) است. البته در حالت فعلی $M = N = ۳$، و لذا به‌ازای $n = ۱۶$ و $k = ۱۱$، مقادیر احتمالات خطاهای نوع اول و نوع دوم به‌صورت $\alpha_\phi = \beta_\phi = ۰/۲۲۶$ به‌دست می‌آید.

دقت می‌کنید که به‌ازای $k = ۱۱$، احتمال خطاهای نوع اول و نوع دوم نسبت به حالتی که در مثال ۴.۱۰ بحث شد و نیز حالت مربوط به مثال ۵.۱۰ بزرگ‌ترند. افزایش α_ϕ و β_ϕ در حالت فعلی به همان دلیلی است که در مثال قبل توضیح دادیم.

نکته ۲.۱۰ اگر در مثال ۴.۱۰، $H_۰$ و $H_۱$ به‌صورت فرضیه‌های دقیق زیر باشند

$$\begin{cases} H_۰ : \theta = ۱۲ \\ H_۱ : \theta = ۱۰ \end{cases}$$

آنگاه، بر پایه‌ی لم نیمن – پیرسن، بهترین آزمون آزمونی به‌صورت رابطه (۶.۱۰) است. البته در این حالت، به‌ازای $n = ۱۶$ و $k = ۱۱$، داریم

$$\alpha_\phi = P_{\theta=۱۲}(\overline{X} \leq ۱۱) \simeq ۰ \quad , \quad \beta_\phi = P_{\theta=۱۰}(\overline{X} > ۱۱) \simeq ۰$$

با مقایسه‌ی این نتیجه با مقادیر α و β مثال‌های ۴.۱۰، ۵.۱۰ و ۶.۱۰ آشکار می‌شود که، دست‌کم در مواردی مانند این حالات، مبهم بودن فرضیه‌ها منجر به بزرگ شدن احتمالات خطاهای نوع اول و دوم می‌شود.

نکته ۳.۱۰ چنان که از مثال‌های ۵.۱۰ و ۶.۱۰ آشکار است، در آزمون فرضیه‌های فازی می‌توان از فرضیه‌های $H_۰$ و $H_۱$ با اشتراک غیرتهی استفاده نمود. در حالی که آزمون فرضیه‌ها به روش معمولی مبتنی بر این نکته است که $\Theta_۰ \cap \Theta_۱ = \phi$.

نکته ۴.۱۰ فرض کنید $H_۰$ و $H_۱$ فرضیه‌های مرکب معمولی باشند. در این‌صورت توابع عضویت $H_۰(\theta)$ و $H_۱(\theta)$ همان توابع نشانگر مجموعه‌های $\Theta_۰$ و $\Theta_۱$ هستند. اگر M و N متناهی باشند، آنگاه طبق قضیه ۲.۱۰، $H_۰$ رد می‌شود اگر و تنها اگر

$$\frac{\int f(\underline{x};\theta)H_۱(\theta)d\theta}{\int f(\underline{x};\theta)H_۰(\theta)d\theta} > k$$

و یا، اگر و تنها اگر

$$\int_{\Theta_۱} f(\underline{x};\theta)d\theta > k\int_{\Theta_۰} f(\underline{x};\theta)d\theta$$

بدین ترتیب، آزمون فوق معادل با آزمون بیز فرضیه $H_۰$ در برابر $H_۱$ تحت تابع زیان تعمیم یافته ۱ – ۰، و چگالی پیشین یکنواخت بر Θ، می‌شود [۶].

۵.۱۰ نکات تکمیلی

۱. آزمون فرضیه‌های فازی با رهیافت کلاسیک، هنگامی که مشاهدات و داده‌ها دقیق هستند اما فرضیه‌های مورد آزمون مبهم و نادقیق‌اند، نخستین بار توسط آرنولد [۲ و ۳] مطالعه شد. وی روش خود را با بررسی حالاتی از آزمون فرضیه‌های یکطرفه و دوطرفه و به ویژه برای توزیع‌های عضو خانواده نمایی توضیح داده است.

۲. مطالب ارائه شده در این فصل مبتنی بر مرجع [۸] بوده است. رهیافتی که در این فصل ارائه شد، به حالتی که در آن مشاهدات نمونه‌ای نیز مبهم باشند، توسط ترابی و همکاران [۱۲] تعمیم داده شده است. طاهری و عارفی [۱۰] روشی، مبتنی بر آماره آزمون فازی، برای آزمون فرضیه‌های فازی ارائه نموده‌اند. همچنین، ترابی و بهبودیان [۱۱] آزمون نسبت درستنمایی را برای آزمون فرضیه‌های فازی ارائه کرده اند.

۳. آرنولد و گرکه [۴] کاربرد آزمون فرضیه‌های فازی را در مدل‌های رگرسیون خطی مطالعه کرده‌اند.

۴. واتانابه و ایمایزومی [۱۳] روشی را برای آزمون فرضیه‌های فازی ارائه داده‌اند که در آن خطاهای نوع اول و دوم به‌طور صریح تعریف نمی‌شوند. در روش آنها تابع توان به‌صورت امید ریاضی یک تابع بحرانی فازی تعریف می‌شود و نتیجه‌ی آزمون نیز به‌صورت فازی بیان می‌گردد. پرچمی و همکاران [۷] مفهوم P– مقدار فازی را برای آزمون فرضیه‌های فازی (حالت داده‌های دقیق) تعریف و بررسی نموده‌اند. برای مرور مباحث دیگر مربوط به آزمون فرضیه در محیط فازی به [۱ و ۹] مراجعه کنید.

تمرین‌های فصل دهم

۱.۱۰ در مثال ۳.۱۰، بهترین آزمون در اندازه $\alpha = ۰/۰۵$ را بیابید و تابع توان این آزمون را رسم کنید.

۲.۱۰ در مثال ۵.۱۰، احتمال‌های خطاهای نوع اول و نوع دوم را برای آزمون زیر محاسبه کنید

$$\phi(\underline{x}) = \begin{cases} ۱ & \overline{x} \leq ۱۱/۲۵ \\ ۰ & \overline{x} > ۱۱/۲۵ \end{cases}$$

۳.۱۰ در مثال ۵.۱۰، بهترین آزمون در اندازه $\alpha = ۰/۱۰$ را بیابید.

۴.۱۰ در مثال ۵.۱۰، می‌خواهیم مقدار n را طوری تعیین کنیم که هر دو خطا در سطح ۰/۱۰ کنترل شوند. دو معادله که با حل آنها مقدار n (و همزمان مقدار k) به‌دست می‌آید را بنویسید. سعی کنید با یک نرم‌افزار مناسب مقادیر n و k را به‌دست آورید.

۵.۱۰ در مثال ۳.۱۰، بهترین آزمون در اندازه $\alpha = ۰/۰۵$ را برای آزمون فرضیه‌های زیر به‌دست آورید

$$\begin{cases} H_۰ : & \theta \text{ بزرگ است} \\ H_۱ : & \theta \text{ کوچک است} \end{cases}$$

که در آن

$$H_۰(\theta) = \theta \ , \ H_۱(\theta) = ۱ - \theta \ , \ ۰ < \theta < ۱$$

توجه دارد $H_۰$ و $H_۱$ را می‌توان فرضیه‌های یکطرفه فازی تعبیر نمود.

۶.۱۰ طول عمر یک نوع لامپ، برحسب ده‌هزار ساعت، دارای تابع چگالی احتمال نمایی به‌صورت زیر است

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad x > ۰ \ , \ \lambda > ۰$$

می‌خواهیم بر اساس نمونه‌ای تصادفی به اندازه یک از این لامپ‌ها، فرضیه‌های زیر را در مورد میانگین طول عمر لامپ‌ها آزمون کنیم

$$\begin{cases} H_۰ : & \lambda \simeq ۲ \\ H_۱ : & \lambda \simeq ۲/۵ \end{cases}$$

که در آن $H_۰$ و $H_۱$ مجموعه‌های فازی با توابع عضویت زیر هستند

$$H_۰(\lambda) = \begin{cases} ۲(\lambda - ۱/۵) & ۱/۵ \leq \lambda < ۲ \\ ۲(۲/۵ - \lambda) & ۲ \leq \lambda < ۲/۵ \end{cases} \qquad H_۱(\lambda) = \begin{cases} ۲(\lambda - ۲) & ۲ \leq \lambda < ۲/۵ \\ ۲(۳ - \lambda) & ۲/۵ \leq \lambda < ۳ \end{cases}$$

بهترین آزمون در اندازه $\alpha = ۰/۱۰$ را بیابید. احتمال خطای نوع دوم این آزمون را نیز به‌دست آورید.

۷.۱۰ تمرین ۶.۱۰ را بر پایه‌ی نمونه‌ای تصادفی به اندازه $n = ۲$ لامپ انجام دهید.

منابع و مراجع

[۱] طاهری، سید محمود (۱۳۸۱)؛ آمار فازی: مروری بر گذشته و چشم‌اندازهای آینده، اندیشه آماری، شماره ۷: ۷۲–۵۸.

[2] Arnold, B.F. (1995); Statistical tests optimally meeting certain fuzzy requirments on the power function and on the sample size, Fuzzy Sets and Systems, 75: 365-372.

[3] Arnold, B.F. (1996); An approach to fuzzy hypothesis testing, Metrika, 44: 119-126.

[4] Arnold, B.F, Gerke, O. (2003); Testing fuzzy linear hypothesis in linear regression models, Metrika, 57: 81-95.

[5] Berger, J.O., Delampady, M. (1987); Testing precise hypothesis, Statistical Sciences, 2: 317-352.

[6] Casella, G., Berger, R.L. (1990); Statistical Inference, Brooks/Cole Pub.

[7] Parchami, A., Taheri, S.M., Mashinchi, M. (2008); Fuzzy p-value in testing hypotheses with crisp data, Statistical Papers (to appear).

[8] Taheri, S.M., Behboodian, J. (1999); Neyman-Pearson Lemma for fuzzy hypothesis testing, Metrika, 49: 3-17.

[9] Taheri, S.M. (2003); Trends in fuzzy statistics, Austrian J. Statistics, 32: 239-257.

[10] Taheri, S.M., Arefi, M. (2008); Testing fuzzy hypotheses based on fuzzy test statistic, Soft Computing, (to appear).

[11] Torabi, H., Behboodian, J. (2007); Likelihood ratio tests for fuzzy hypotheses testing, Statistical Papers, 48: 509-522.

[12] Torabi, H., Behboodian, J., Taheri, S.M. (2006); Neyman-Pearson Lemma for fuzzy hypothesis testing with vague data, Metrika, 64: 289-304.

[13] Watanabe, N., Imaizumi, T. (1993); A fuzzy statistical test of fuzzy hypothesis, Fuzzy Sets and Systems, 53: 167-178.

فصل ۱۱

رگرسیون خطی با ضرایب فازی

مقدمه

رگرسیون فازی از موضوع‌هایی است که مورد مطالعه و بررسی بسیاری از محققان قرار گرفته است. این موضوع از لحاظ مقایسه‌ی آن با رگرسیون آماری (از نظر قابلیت‌ها، کاربردها، مزیت‌ها، ...) نیز مورد توجه است. رگرسیون فازی، و به عبارت دقیق‌تر و عام‌تر: رگرسیون در محیط فازی، تنوع بسیاری دارد [۱ و ۷]. ما برای آشنایی خوانندگان، چند رهیافت اصلی را در این باره، در فصل پیش رو و فصل آینده، معرفی و بررسی می‌کنیم.

در فصل حاضر، نخست توضیحاتی درباره‌ی رگرسیون، رگرسیون آماری و رگرسیون فازی ارائه می‌دهیم. در بخش دوم، مدل رگرسیون خطی با ضرایب فازی را معرفی می‌کنیم. در بخش‌های سوم و چهارم توضیح می‌دهیم که محاسبات مربوط به این مدل چگونه انجام می‌شوند و ضرایب مدل چگونه برآورد می‌شوند.

۱.۱۱ رگرسیون فازی: چرا و چه هنگام؟

مدل‌های رگرسیونی الگوهایی فراهم می‌آورند که می‌توان بر پایه‌ی آنها ارتباط بین مجموعه‌ای از متغیرها را بررسی کرد. این متغیرها شامل متغیرهای مستقل (توضیحی/پیش‌بینی کننده) و وابسته (پاسخ) هستند. در این‌مدل‌ها، بر پایه‌ی مشاهدات مربوط به متغیرهای مستقل و وابسته، تابعی به منظور پیش‌بینی و کنترل متغیر وابسته بنا می‌کنیم. در رگرسیون کلاسیک:

۱) فرض می‌شود که متغیرهای مورد مطالعه متغیرهایی دقیق هستند و مشاهدات مربوط به متغیرها نیز مشاهداتی دقیق می‌باشند.

۲) اختلاف بین مقدار مشاهده شده برای متغیر وابسته و مقداری که از طریق مدل حاصل می‌شود، و کلاً خطای مدل، به خطاهای تصادفی مربوط به مشاهدات و اندازه‌گیری‌ها،

عدم حضور برخی از متغیرها، ... نسبت داده می‌شود.

۳) درباره‌ی جملات خطا و توزیع احتمالی آن، مفروضاتی (مانند نرمال بودن، ناهمبسته بودن، ثبات واریانس، ...) در نظر گرفته می‌شود، به‌گونه‌ای که بتوان بر پایه‌ی این مفروضات تجزیه و تحلیل‌های آماری را درباره‌ی مدل انجام داد، مانند برآورد پارامترها، پیش‌بینی مقدار متغیر وابسته، آزمون‌های فرض مرتبط با مدل و غیره. در این باره به کارگیری تبدیلات مختلف روی داده‌ها، کمک می‌کند تا بتوان احتمالاً به مفروضات لازم نزدیک شد.

اما در بسیاری اوقات ممکن است یک یا چند فرض از فرض‌های بالا برقرار نباشد، یا این که (مثلاً به دلیل حجم نمونه اندک) نتوان از درستی بعضی فرض‌ها اطمینان حاصل کرد. مسلماً در این موارد مدل‌های رایج اعتبار و کارایی لازم را ندارند.

برای مثال ممکن است در یک بررسی، مشاهدات مربوط به یک یا چند متغیر نادقیق باشند (یا نادقیق گزارش شده باشند). به‌علاوه ممکن است متغیرهای تحت مطالعه در یک بررسی، دارای ارتباطی نادقیق و مبهم (تقریبی) باشند. همچنین ممکن است مفروضاتی که در بند سوم برشمردیم، برقرار نباشند. در این موارد باید شیوه‌های جدیدی را جایگزین شیوه‌های کلاسیک نمود. یکی از این شیوه‌ها رگرسیون استوار است که به ویژه در مواردی که درستی مفروضات بند ۳ (حتی با انجام تبدیلات مختلف) مورد تردید باشد، کارایی دارد [۱۶].

یکی دیگر از شیوه‌های جایگزین، رگرسیون فازی است. این رگرسیون را می‌توان در مواردی که متغیرهای مورد مطالعه (یا مشاهدات آنها) نادقیق و مبهم باشند، و همچنین در حالاتی که رابطه بین متغیرها نادقیق باشد، و نیز در مواردی که درستی مفروضات بند ۳ مورد تردید است (به ویژه در حالاتی که حجم نمونه اندک است) به کار گرفت.

در یک تقسیم‌بندی کلی، انواع رگرسیون فازی را می‌توان به سه حالت زیر تقسیم کرد:

۱) رگرسیون فازی در حالتی که ارتباط بین متغیرها فازی فرض می‌شود. به‌عبارت دیگر ضرایب معادله رگرسیونی، فازی در نظر گرفته می‌شوند.

۲) رگرسیون فازی در حالتی که متغیرها (و یا مشاهدات مربوط به متغیرها) نادقیق و فازی هستند.

۳) رگرسیون فازی در حالتی که هم متغیرها و هم ضرایب مدل، فازی در نظر گرفته می‌شوند.

گفتنی است که تنوع در رگرسیون فازی محدود به حالت‌های فوق نیست. بلکه شیوه‌هایی که برای هر حالت پیشنهاد شده است (روش‌های برقراری مدل، برآورد پارامترها، ملاک‌های نیکویی برازش، ...) تنوع بسیاری را در روش‌های رگرسیون فازی ایجاد کرده است [۱ و ۵ و ۷] (نیز مرجع [۱۲] فصل ۱۲ را ببینید).

ما در فصل حاضر رگرسیون خطی با ضرایب فازی (حالت ۱) را مورد توجه قرار می‌دهیم. در فصل آینده نیز رگرسیون با مشاهدات فازی (حالت ۲) را مطالعه خواهیم کرد.

۲.۱۱ مدل رگرسیون خطی با ضرایب فازی

همان طور که گفته شد، در این فصل مدل رگرسیونی را مطالعه می‌کنیم که در آن متغیرها و مشاهدات مربوط به آن دقیق هستند، اما ضرایب مدل، فازی فرض می‌شوند. صورت کلی مدلی که مورد بحث قرار می‌گیرد عبارت است از

$$\tilde{Y} = f(\underline{x}, \tilde{A}) = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x_1 + \tilde{A}_2 x_2 + \cdots + \tilde{A}_n x_n \qquad (1.11)$$

که در آن $\tilde{Y}$ متغیر وابسته یا اصطلاحاً خروجی فازی است، $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ بردار متغیرهای مستقل یا اصطلاحاً بردار ورودی (با مقادیر حقیقی) و $\tilde{A} = \{\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n\}$ یک مجموعه از اعداد فازی است. مسئله‌ای که در صدد حل آن هستیم به این صورت مطرح می‌شود:

مجموعه‌ای از داده‌های معمولی به‌صورت $(y_1, \underline{x}_1), (y_2, \underline{x}_2), \ldots, (y_m, \underline{x}_m)$ در اختیار داریم. می‌خواهیم پارامترهای فازی $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n$ را به گونه‌ای تعیین کنیم که مدل (۱.۱۱) بر اساس برخی از معیارهای نیکویی برازش، بهترین برازش را به داده‌های مذکور داشته باشد.

چون در ادامه از اعداد مثلثی برای ضرایب مدل، یعنی $\tilde{A}_0$ تا $\tilde{A}_n$، استفاده خواهیم کرد، لذا به یادآوری چند نکته درباره‌ی این اعداد می‌پردازیم.

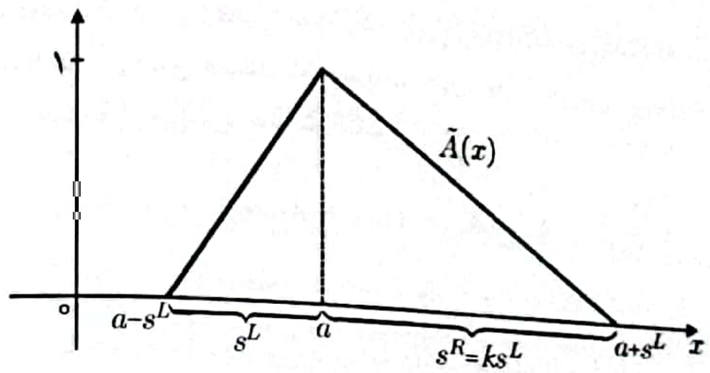
می‌دانیم که هر عدد فازی مثلثی را می‌توان به‌صورت $\tilde{A} = (a, s^L, s^R)_T$ نشان داد که در آن a مقدار نما (یا میانه)، و s^L و s^R به‌ترتیب پهنای چپ و پهنای راست $\tilde{A}$ هستند. اگر $s^R \neq s^L$ آن‌گاه عدد فازی مثلثی A را نامتقارن گوییم. در این حالت تابع عضویت $\tilde{A}$ را باتوجه به سه مشخصه a، s^L و s^R می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{a - x}{s^L} & a - s^L \leq x \leq a \\[2ex] 1 - \dfrac{x - a}{s^R} & a < x \leq a + s^R \end{cases} \qquad (2.11)$$

به‌گونه‌ای دیگر نیز می‌توان این تابع عضویت را نمایش داد. یعنی پهنای راست را برحسب پهنای چپ بیان کرد. به این صورت که در تابع عضویت بالا قرار دهیم $s^R = ks^L$ که در آن k، که عددی حقیقی و مثبت است، ضریب کشیدگی نامیده می‌شود. بنابراین عدد فازی مثلثی نامتقارن $\tilde{A}$ را می‌توان با سه‌تایی $\tilde{A} = (a, s^L, k)_T$ نیز توصیف

کرد. در این حالت تابع عضویت $\tilde{A}$ به‌صورت زیر در می‌آید (شکل ۱.۱۱)

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{a-x}{s^L} & a - s^L \le x \le a \\ 1 - \dfrac{x-a}{ks^L} & a < x \le a + ks^L \end{cases} \qquad (۳.۱۱)$$

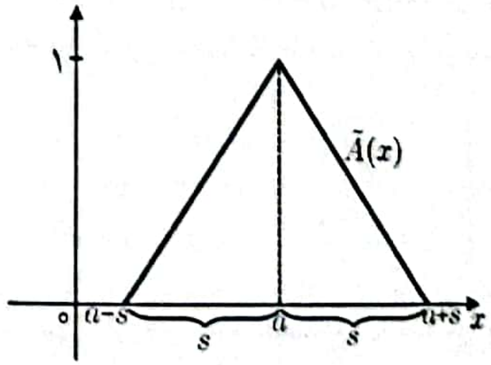


شکل ۱.۱۱ نمودار تابع عضویت یک عدد فازی مثلثی

اگر $s^R = s^L = s$، آنگاه $\tilde{A}$ را عدد مثلثی متقارن نامیده و آن را با $\tilde{A} = (a, s)_T$ نمایش می‌دهیم. در این حالت تابع عضویت $\tilde{A}$ با توجه به دو مشخصه a و s به‌صورت زیر خواهد بود (شکل ۲.۱۱)

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{a-x}{s} & a - s \le x \le a \\ 1 - \dfrac{x-a}{s} & a < x \le a + s \end{cases} \qquad (۴.۱۱)$$

در رابطه (۳.۱۱)، اگر $k = 1$، آنگاه تابع عضویت بالا (یعنی تابع عضویت عدد فازی متقارن) به‌دست می‌آید.



شکل ۲.۱۱ نمودار تابع عضویت یک عدد فازی مثلثی متقارن

گزاره ۱.۱۱ فرض کنید $\tilde{A}_1 = (a_1, s_1)_T$ و $\tilde{A}_2 = (a_2, s_2)_T$ دو عدد فازی مثلثی متقارن باشند و c یک عدد حقیقی، آنگاه

۱) $c\tilde{A}_1 = (ca_1, |c|s_1)_T$

۲) $\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2 = (a_1 + a_2, s_1 + s_2)_T$

گزاره ۲.۱۱ فرض کنید $\tilde{A}_1 = (a_1, s_1^L, s_1^R)_T$ و $\tilde{A}_2 = (a_2, s_2^L, s_2^R)_T$ دو عدد فازی مثلثی نامتقارن و c یک عدد حقیقی باشد،

۱) الف) اگر $c > 0$ آنگاه $c\tilde{A}_1 = (ca_1, cs_1^L, cs_1^R)_T$، ب) اگر $c < 0$ آنگاه $c\tilde{A}_1 = (ca_1, -cs_1^R, -cs_1^L)_T$.

۲) $\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2 = (a_1 + a_2, s_1^L + s_2^L, s_1^R + s_2^R)_T$.

۳.۱۱ تشریح محاسبات مربوط به مدل

اکنون، با توجه به روابط بخش قبل، تشریح می‌کنیم که تابع عضویت خروجی فازی مدل (۱.۱۱) یعنی $\tilde{Y}$ چگونه محاسبه می‌شود.

۱.۳.۱۱ مدل با ضرایب متقارن

اگر $\tilde{A}_i$ ها $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ اعداد فازی متقارن و x_i ها نیز اعداد حقیقی و مثبت باشند، آنگاه بنا به رابطه (۱.۱۱) و گزاره ۱.۱۱، $\tilde{Y}$ یعنی خروجی فازی نیز یک عدد فازی مثلثی متقارن به‌صورت $\tilde{Y} = (f^c(\underline{x}), f^s(\underline{x}))_T$ خواهد بود که در آن $f^c(\underline{x})$ نما و $f^s(\underline{x})$ پهنای $\tilde{Y}$ است و به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند

$$f^c(\underline{x}) = a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \qquad (۵.۱۱)$$

$$f^s(\underline{x}) = s_0 + s_1x_1 + \cdots + s_nx_n \qquad (۶.۱۱)$$

به بیان دیگر تابع عضویت خروجی فازی $\tilde{Y}$ عبارت است از

$$\tilde{Y}(y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{f^c(\underline{x}) - y}{f^s(\underline{x})} & , \quad f^c(\underline{x}) - f^s(\underline{x}) \le y \le f^c(\underline{x}) \\ 1 - \dfrac{y - f^c(\underline{x})}{f^s(\underline{x})} & , \quad f^c(\underline{x}) < y \le f^c(\underline{x}) + f^s(\underline{x}) \end{cases} \qquad (۷.۱۱)$$

مثال ۱.۱۱ مدل فازی $\tilde{Y} = A_0 + A_1x_1 + A_2x_2$ را در نظر می‌گیریم. اگر داشته باشیم $\tilde{A}_0 = (-1, 1)_T$، $\tilde{A}_1 = (2, 1)_T$، $\tilde{A}_2 = (4, 2)_T$ و نیز $\underline{x} = (1, 2)$ بردار مشاهدات

باشد، آنگاه $\tilde{Y}$ یک عدد فازی مثلثی متقارن به‌صورت $\tilde{Y} = (f^c(\underline{x}), f^s(\underline{x}))_T$ خواهد بود که در آن

نمای $\tilde{Y}$: $f^c(\underline{x}) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = -1 + (2 \times 1) + (4 \times 2) = 9$

پهنای $\tilde{Y}$: $f^s(\underline{x}) = s_0 + s_1x_1 + s_2x_2 = 1 + (1 \times 1) + (2 \times 2) = 6$

بنا بر این $\tilde{Y}$ را می‌توان به‌صورت $\tilde{Y} = (9, 6)_T$ نمایش داد. در این حالت، $\tilde{Y}$ توصیفی از تقریباً ۹ می‌باشد.

۲.۳.۱۱ مدل با ضرایب نامتقارن

اگر A_i ها $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ اعداد فازی نامتقارن و x_i ها نیز اعداد حقیقی و مثبت باشند، آنگاه بنا به رابطه (۱.۱۱) و گزاره ۲.۱۱، $\tilde{Y}$ یعنی خروجی فازی نیز یک عدد فازی مثلثی نامتقارن به‌صورت $\tilde{Y} = (f^c(\underline{x}), f_s^L(\underline{x}), f_s^R(\underline{x}))_T$ است که در آن $f^c(\underline{x})$ نما و $f_s^L(\underline{x})$ پهنای چپ و $f_s^R(\underline{x})$ پهنای راست $\tilde{Y}$ می‌باشند و به‌صورت زیر به‌دست می آیند

$$\begin{aligned} f^c(\underline{x}) &= a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \\ f_s^L(\underline{x}) &= s_0^L + s_1^Lx_1 + \cdots + s_n^Lx_n \\ f_s^R(\underline{x}) &= s_0^R + s_1^Rx_1 + \cdots + s_n^Rx_n \end{aligned}$$

به بیان دیگر تابع عضویت $\tilde{Y}$ عبارت است از

$$\tilde{Y}(y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{f^c(\underline{x}) - y}{f_s^L(\underline{x})} & , \quad f^c(\underline{x}) - f_s^L(\underline{x}) \le y \le f^c(\underline{x}) \\ 1 - \dfrac{y - f^c(\underline{x})}{f_s^R(\underline{x})} & , \quad f^c(\underline{x}) < y \le f^c(\underline{x}) + f_s^R(\underline{x}) \end{cases} \qquad (8.11)$$

اگر بخواهیم تابع عضویت بالا را برحسب ضرایب کشیدگی بیان کنیم، قرار می‌دهیم $s_i^R = k_is_i^L$. بدین ترتیب $f_s^R(\underline{x})$ به‌صورت زیر تغییر می‌یابد

$$f_s^R(\underline{x}) = k_0s_0^L + k_1s_1^Lx_1 + \cdots + k_ns_n^Lx_n$$

اگر در رابطه فوق قرار دهیم $k_i = 1$، $(i = 0, 1, \ldots, n)$ آنگاه $s_i^L = s_i^R = s_i$ و به رابطه (۷.۱۱) برای حالت متقارن می‌رسیم، زیرا در این حالت $f_s^L(\underline{x}) = f_s^R(\underline{x}) = f^s(\underline{x})$.

مثال ۲.۱۱ مدل فازی $\tilde{Y} = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1x_1 + \tilde{A}_2x_2$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید داشته باشیم $\tilde{A}_0 = (-1, 1, 2)_T$، $\tilde{A}_1 = (2, 1, 3)_T$، $\tilde{A}_2 = (4, 2, 1/5)_T$ و هم چنین $\underline{x} = (1, 2)$ بردار مشاهدات باشد. آنگاه $\tilde{Y}$ عدد فازی مثلثی نامتقارن به‌صورت

$\tilde{Y} = (f^c(\underline{x}), f_s^L(\underline{x}), f_s^R(\underline{x}))_T$ خواهد بود که در آن

نمای $\tilde{Y}$: $f^c(\underline{x}) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = -1 + (2 \times 1) + (4 \times 2) = 9$

پهنای چپ $\tilde{Y}$: $f_s^L(\underline{x}) = s_0^L + s_1^Lx_1 + s_2^Lx_2 = 1 + (1 \times 1) + (2 \times 2) = 6$

پهنای راست $\tilde{Y}$: $f_s^R(\underline{x}) = s_0^R + s_1^Rx_1 + s_2^Rx_2 = 2 + (3 \times 1) + (1/5 \times 2) = 8$

بنابراین $\tilde{Y}$ یک عدد فازی مثلثی نامتقارن خواهد بود که به‌صورت $\tilde{Y} = (9, 6, 8)_T$ نمایش داده می‌شود و توصیفی از تقریباً ۹ می‌باشد.

۴.۱۱ برآورد پارامترهای مدل

برای این که بتوانیم بر پایه‌ی مجموعه‌ای از مشاهدات، پارامترهای مدل رگرسیون فازی (۱.۱۱)، یعنی ضرایب فازی مدل، را برآورد کنیم، باید ملاک‌ها و معیارهایی را در نظر بگیریم. ما به دو معیار توجه می‌کنیم. نخست این که مقدار عضویت هر y_j در $\tilde{Y}_j$ (خروجی مدل به‌ازای $\underline{x}_j$) عدد بزرگی باشد. در این‌صورت مطمئن هستیم که مدل فازی برازش خوبی به مشاهدات دارد. دوم این که ابهام در پیش‌بینی بر اساس مدل، حداقل شود.

به سخن دیگر در جستجوی مدلی هستیم که:

اولاً: خروجی فازی یعنی $\tilde{Y}$ برای تمامی مقادیر $\tilde{Y}_j$، $(j = 1, 2, \ldots, m)$ دارای درجه عضویتی دست‌کم به بزرگی h باشد، یعنی:

$$\tilde{Y}_j(y_j) \ge h \ , \quad j = 1, 2, \ldots, m \qquad (9.11)$$

ثانیاً: ضرایب فازی $\tilde{A}_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ به گونه‌ای باشند که ابهام خروجی فازی مینیمم گردد. با توجه به این که هرچه پهنای یک عدد فازی مثلثی بیشتر باشد ابهام آن نیز بیشتر است، لذا برای رسیدن به هدف فوق مجموع پهناهای خروجی‌های فازی $\tilde{Y}_j$ مربوط به کلیه‌ی مجموعه داده‌ها را مینیمم می‌کنیم.

نکته اخیر را به تفکیک برای دو حالت ضرایب متقارن و نامتقارن تشریح می‌کنیم.

الف) در حالتی که $\tilde{A}_i$ ها $(i = 1, 2, \ldots, n)$ متقارن هستند، مجموع پهنای خروجی فازی $\tilde{Y}$ برای همه‌ی داده‌ها کمیت زیر است که آن را تابع هدف می‌نامیم

$$Z = 2ms_0 + 2\sum_{i=1}^{n}[s_i\sum_{j=1}^{m}x_{ji}] \qquad (10.11)$$

تابع هدف برای حالت متقارن

در رابطه‌ی اخیر منظور از x_{ji} مشاهده j ام متغیر i ام است.

ب) در حالتی که $\tilde{A}_i$ ها $(i = 1, 2, \ldots, n)$ نامتقارن باشند، Z به این صورت تغییر می‌یابد

$$Z = m(s_0^L + s_0^R) + \sum_{i=1}^{n}[(s_i^L + s_i^R)\sum_{j=1}^{m}x_{ji}] \qquad (11.11)$$

تابع هدف برای حالت نامتقارن

تابع هدف Z را با جایگذاری $s_i^R = k_i s_i^L$ می‌توان برحسب ضرایب کشیدگی به‌صورت زیر نوشت

$$Z = (1 + k_0) m s_0^L + \sum_{i=1}^{n} [(1 + k_i) s_i^L \sum_{j=1}^{m} x_{ji}] \qquad (12.11)$$

با قرار دادن $k_i = 1$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ رابطه فوق این گونه بازنویسی می‌شود

$$Z = 2(m s_0^L + \sum_{i=1}^{n} [s_i^L \sum_{j=1}^{m} x_{ji}]) \qquad (13.11)$$

که برابر Z در حالت متقارن است.

روش کار، یعنی مینیمم سازی تابع هدف تحت محدودیت (۹.۱۱)، را در دو حالت متقارن و نامتقارن به تفکیک مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۴.۱۱ مدل با ضرایب متقارن

در حالتی که $\tilde{A}_i$ ها $(i = 0, 1, \ldots, n)$ را متقارن در نظر گیریم، با توجه به رابطه‌های (۷.۱۱) و (۹.۱۱)، محدودیت‌های مدل به‌صورت زیر حاصل می‌شوند

$$1 - \frac{f^c(\underline{x}_j) - y_j}{f^s(\underline{x}_j)} \geq h \Rightarrow (1 - h) f^s(\underline{x}_j) - f^c(\underline{x}_j) \geq -y_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

$$1 - \frac{y_j - f^c(\underline{x}_j)}{f^s(\underline{x}_j)} \geq h \Rightarrow (1 - h) f^s(\underline{x}_j) + f^c(\underline{x}_j) \geq +y_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

با قرار دادن روابط (۵.۱۱) و (۶.۱۱) در دو رابطه‌ی فوق، محدودیت‌های مدل بدین صورت به‌دست می‌آیند

$$(1 - h) s_0 + (1 - h) \sum_{i=1}^{n} (s_i x_{ji}) - a_0 - \sum_{i=1}^{n} (a_i x_{ji}) \geq -y_j \quad , \quad j = 1, 2, \cdots, m \qquad (14.11)$$

$$(1 - h) s_0 + (1 - h) \sum_{i=1}^{n} (s_i x_{ji}) + a_0 + \sum_{i=1}^{n} (a_i x_{ji}) \geq y_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, m \qquad (15.11)$$

که در آن x_{ji} بیانگر مشاهده j ام برای متغیر i ام است. دقت کنید که برای هر مشاهده دو محدودیت تولید می‌شود. حال باید با استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی خطی، تابع هدف Z (در حالت متقارن یعنی رابطه (۱۰.۱۱)) را با توجه به $2m$ محدودیت تولید شده توسط m مشاهده، مینیمم کنیم. برای این منظور می‌توان از نرم‌افزارهای مختلف استفاده

نمود. برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی مربوط به مثال‌های این فصل از نرم افزارهای GAMS و LINGO استفاده شده است.

مثال ۳.۱۱ داده‌های جدول (۱.۱۱) را، که مربوط به یک فرآیند رنگرزی در صنعت نساجی است، در نظر بگیرید [۲۴]. متغیر مستقل اول غلظت رنگ مورد استفاده (گرم در لیتر)، متغیر مستقل دوم زمان پروسه (دقیقه) و متغیر پاسخ میزان جذب رنگ توسط پارچه (k/s) است.

می‌خواهیم یک مدل رگرسیون خطی با ضرایب فازی متقارن به مشاهدات فوق برازش دهیم. طبق رابطه (۱۰.۱۱) تابع هدف Z برای این مثال به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$Z = 40 s_0 + s_1 \sum_{j=1}^{20} x_{j1} + s_2 \sum_{j=1}^{20} x_{j2} = 20 s_0 + 63 s_1 + 600 s_2$$

حال باید رابطه‌ی فوق را با توجه به محدودیت‌های زیر، که با استفاده از روابط (۱۴.۱۱) و (۱۵.۱۱) با $h = 0/5$ نوشته شده‌اند، مینیمم کنیم. در اینجا ۴۰ محدودیت داریم. برای نمونه ۱۰ محدودیت تولید شده توسط ۵ مشاهده‌ی اول عبارت‌اند از

جدول ۱.۱۱ داده‌های مربوط به مثال‌های ۳.۱۱ و ۴.۱۱

شماره(j)	y_j	x_{j1}	x_{j2}	شماره(j)	y_j	x_{j1}	x_{j2}
۱	۰/۵۵۷۵	۰/۷۵	۱۲	۱۱	۰/۵۴۵۳	۰/۷۵	۳۶
۲	۰/۹۲۶۶	۱/۵۰	۱۲	۱۲	۰/۹۸۱۸	۱/۵۰	۳۶
۳	۱/۵۶۷۳	۳	۱۲	۱۳	۱/۶۰۳۲	۳	۳۶
۴	۲/۰۱۶۳	۴/۵	۱۲	۱۴	۲/۱۸۲۷	۴/۵	۳۶
۵	۲/۴۲۹۳	۶	۱۲	۱۵	۲/۸۶۸۶	۶	۳۶
۶	۰/۶۳۶۵	۰/۷۵	۲۴	۱۶	۰/۵۸۸۸	۰/۷۵	۴۸
۷	۱/۰۳۷۸	۱/۵۰	۲۴	۱۷	۱/۰۰۸۴	۱/۵۰	۴۸
۸	۰/۵۷۰۴	۳	۲۴	۱۸	۱/۶۱۶۶	۳	۴۸
۹	۲/۰۸۶۴	۴/۵	۲۴	۱۹	۲/۱۱۵۷	۴/۵	۴۸
۱۰	۲/۶۵۰۲	۶	۲۴	۲۰	۲/۸۲۵۱	۶	۴۸

$$۰/۵s_۰ + ۰/۳۷۵s_۱ + ۶s_۲ + a_۰ + ۰/۷۵a_۱ + ۱۲a_۲ \geq ۰/۵۵۷۵$$
$$۰/۵s_۰ + ۰/۳۷۵s_۱ + ۶s_۲ - a_۰ - ۰/۷۵a_۱ - ۱۲a_۲ \geq -۰/۵۵۷۵$$
$$۰/۵s_۰ + ۰/۷۵s_۱ + ۶s_۲ + a_۰ + ۱/۵a_۱ + ۱۲a_۲ \geq ۰/۹۲۱۶$$
$$۰/۵s_۰ + ۰/۷۵s_۱ + ۶s_۲ - a_۰ - ۱/۵a_۱ - ۱۲a_۲ \geq -۰/۹۲۱۶$$
$$۰/۵s_۰ + ۱/۵s_۱ + ۶s_۲ + a_۰ + ۳a_۱ + ۱۲a_۲ \geq ۱/۵۶۷۳$$
$$۰/۵s_۰ + ۱/۵s_۱ + ۶s_۲ - a_۰ - ۳a_۱ - ۱۲a_۲ \geq -۱/۵۶۷۳$$
$$۰/۵s_۰ + ۲/۲۵s_۱ + ۶s_۲ + a_۰ + ۴/۵a_۱ + ۱۲a_۲ \geq ۲/۰۱۶۳$$
$$۰/۵s_۰ + ۲/۲۵s_۱ + ۶s_۲ - a_۰ - ۴/۵a_۱ - ۱۲a_۲ \geq -۲/۰۱۶۳$$
$$۰/۵s_۰ + ۳s_۱ + ۶s_۲ + a_۰ + ۶a_۱ + ۱۲a_۲ \geq ۲/۴۲۹۳$$
$$۰/۵s_۰ + ۳s_۱ + ۶s_۲ - a_۰ - ۶a_۱ - ۱۲a_۲ \geq -۲/۴۲۹۳$$

با حل مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی فوق جواب‌های زیر به‌دست می‌آید

$$a_۰ = ۰ \ , \ a_۱ = ۰/۳۲۶ \ , \ a_۲ = ۰/۰۰۵ \ , \ s_۰ = ۰/۶۵۳ \ , \ s_۱ = ۰/۱۳۵ \ , \ s_۲ = ۰$$

هم چنین مقدار مینیمم شده‌ی تابع هدف عبارت است از $Z = ۲۱/۵۵۴$. با استفاده از این مقادیر ضرایب فازی مدل به‌صورت $A_۰ = (۰/۰, ۰/۶۵۳)_T$، $A_۱ = (۰/۳۲۶, ۰/۱۳۵)_T$ و $A_۲ = (۰/۰۰۵, ۰/۰)_T$ به‌دست می‌آیند و این یعنی عدد فازی $A_۲$ دقیقاً برابر ۰/۰۰۵ است.

حال علاقه‌مندیم به‌ازای مقادیری از متغیرهای مستقل یعنی $x_۱$ و $x_۲$، مقدار خروجی فازی را پیش‌بینی نماییم. اگر $x_۱ = ۴/۵$ و $x_۲ = ۴۸$، آنگاه به‌دست می‌آوریم

$$f^c(\underline{x}) = ۰ + (۴/۵ \times ۰/۳۲۶) + (۴۸ \times ۰/۰۰۵) = ۱/۷۰۷ \quad (۵.۱۱)$$ باتوجه‌به‌رابطه

$$f^s(\underline{x}) = ۰/۶۵۳ + (۴/۵ \times ۰/۱۳۵) + (۴۸ \times ۰/۰) = ۱/۲۶۱ \quad (۶.۱۱)$$ باتوجه‌به‌رابطه

بنابراین خروجی فازی، یک عدد مثلثی متقارن با نمای ۱/۷۰۷ و پهنای ۱/۲۶۱ است. نمای $\tilde{Y}$ را می‌توان با مقدار مشاهده شده یعنی ۲/۱۱۵۷ مقایسه نمود.

علاقه‌مندیم بدانیم تغییر مقادیر h چگونه مراکز و پهناهای اعداد فازی A_i را تحت تأثیر قرار می‌دهد. اگر مراحل فوق را برای مقادیر مختلف h انجام دهیم جدول (۲.۱۱) حاصل می‌گردد.

همان گونه که از جدول (۲.۱۱) مشاهده می‌شود، تغییر مقادیر h مراکز $\tilde{A}_i$ ها را تغییر نمی‌دهد، اما مقادیر $s_۰$ و $s_۱$ و Z را تحت تأثیر قرار می‌دهد و این یعنی ابهام خروجی $\tilde{Y}$ با افزایش h بیشتر می‌شود.

جدول ۲.۱۱ نتایج مربوط به مثال ۳.۱۱

h	$s_۰$	$s_۱$	$s_۲$	$a_۰$	$a_۱$	$a_۲$	Z
۰/۱	۰/۳۶۲۹	۰/۰۷۴۹	۰	۰	۰/۳۲۶۰	۰/۰۰۵۰	۱۱/۹۷۴۴
۰/۲	۰/۴۰۸۲	۰/۰۸۴۲	۰	۰	۰/۳۲۶۰	۰/۰۰۵۰	۱۳/۴۷۱۱
۰/۳	۰/۴۶۶۵	۰/۰۹۶۳	۰	۰	۰/۳۲۶۰	۰/۰۰۵۰	۱۵/۳۹۵۶
۰/۴	۰/۵۴۴۳	۰/۱۱۲۳	۰	۰	۰/۳۲۶۰	۰/۰۰۵۰	۱۷/۹۶۱۵
۰/۵	۰/۶۵۳۲	۰/۱۳۴۸	۰	۰	۰/۳۲۶۰	۰/۰۰۵۰	۲۱/۵۵۳۸
۰/۶	۰/۸۱۶۴	۰/۱۶۸۵	۰	۰	۰/۳۲۶۰	۰/۰۰۵۰	۲۶/۹۴۲۳
۰/۷	۱/۰۸۸۶	۰/۲۲۴۶	۰	۰	۰/۳۲۶۰	۰/۰۰۵۰	۳۵/۹۲۳۰
۰/۸	۱/۶۳۲۹	۰/۳۳۶۹	۰	۰	۰/۳۲۶۰	۰/۰۰۵۰	۵۳/۸۸۴۶
۰/۹	۳/۲۶۵۸	۰/۶۷۳۹	۰	۰	۰/۳۲۶۰	۰/۰۰۵۰	۱۰۷/۷۶۹۱

۲.۴.۱۱ مدل با ضرایب نامتقارن

برای حالتی که $\tilde{A}_i$ ها $(i = ۰, ۱, \ldots, n)$ را نامتقارن در نظر بگیریم، با توجه به رابطه (۸.۱۱) و شرط (۹.۱۱)، محدودیت‌های مدل رگرسیونی بدین صورت به‌دست می‌آیند

$$۱ - \frac{f^c(\underline{x}_j) - y_j}{f_s^L(\underline{x}_j)} \geq h \Rightarrow (۱-h)f_s^L(\underline{x}_j) - f^c(\underline{x}_j) \geq -y_j \quad , \quad j = ۱, ۲, \ldots, m$$

$$۱ - \frac{y_j - f^c(\underline{x}_j)}{f_s^R(\underline{x}_j)} \geq h \Rightarrow (۱-h)f_s^R(\underline{x}_j) + f^c(\underline{x}_j) \geq y_j \quad , \quad j = ۱, ۲, \ldots, m$$

با جایگذاری $f^C(\underline{x})$، $f_s^L(\underline{x})$ و $f_s^R(\underline{x})$ در روابط فوق خواهیم داشت

$$(۱-h)s_۰^L + (۱-h)\sum_{i=۱}^{n}(s_i^L x_{ji}) - a_۰ - \sum_{i=۱}^{n}(a_i x_{ji}) \geq -y_j \quad , \quad j = ۱, ۲, \ldots, m \qquad (۱۶.۱۱)$$

$$(۱-h)s_۰^R + (۱-h)\sum_{i=۱}^{n}(s_i^R x_{ji}) + a_۰ + \sum_{i=۱}^{n}(a_i x_{ji}) \geq +y_j \quad , \quad j = ۱, ۲, \ldots, m \qquad (۱۷.۱۱)$$

که با استفاده از $s_i^R = k_i s_i^L$ می‌توان رابطه اخیر را برحسب ضریب کشیدگی k_i بازنویسی نمود

$$(1-h)k_0 s_0^L + (1-h)\sum_{i=1}^{n}(k_i s_i^L x_{ji}) + a_0 + \sum_{i=1}^{n}(a_i x_{ji}) \geq +y_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, m \tag{18.11}$$

ملاحظه می‌شود که با قرار دادن $k_i = 1$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ در رابطه‌ی فوق، رابطه (۱۵.۱۱) برای حالت متقارن به‌دست می‌آید. مانند حالت متقارن با استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی خطی، تابع هدف Z (رابطه (۱۲.۱۱)) را با توجه به $2m$ محدودیت تولید شده توسط m مشاهده و برای مقادیر مختلف k_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ مینیمم می‌نماییم.

مثال ۴.۱۱ داده‌های جدول (۱.۱۱) را در نظر بگیرید. می‌خواهیم برای این داده‌ها ضرایب $\tilde{A}_i$ را برای حالت نامتقارن برای مقادیر مختلف k_i و h، با استفاده از تابع هدف (۱۲.۱۱) و محدودیت‌های (۱۶.۱۱) و (۱۸.۱۱)، به‌دست آوریم. تابع هدف Z به‌ازای مقادیر $k_0 = 1/9$، $k_1 = 2/3$، $k_2 = 2/6$ و $h = 0/5$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} Z &= 20(1+k_0)s_0^L + (1+k_1)s_1^L \sum_{j=1}^{20} x_{j1} + s_2^L(1+k_2)\sum_{j=1}^{20} x_{j2} \\ &= 58 s_0^L + 207/9 s_1^L + 2160 s_2^L \end{aligned}$$

برای هر مشاهده دو محدودیت تولید می‌شود. بنابراین ۴۰ محدودیت داریم. برای نمونه ۱۰ محدودیت مربوط به ۵ مشاهده‌ی اول عبارت‌اند از

$$\begin{aligned}
0/5 s_0^L + 0/375 s_1^L + 6 s_2^L + a_0 + 0/75 a_1 + 12 a_2 &\geq 0/5575 \\
0/95 s_0^L + 0/8625 s_1^L + 15/6 s_2^L - a_0 - 0/75 a_1 - 12 a_2 &\geq -0/5575 \\
0/5 s_0^L + 0/75 s_1^L + 6 s_2^L + a_0 + 1/5 a_1 + 12 a_2 &\geq 0/9216 \\
0/95 s_0^L + 1/725 s_1^L + 15/6 s_2^L - a_0 - 1/5 a_1 - 12 a_2 &\geq -0/9216 \\
0/5 s_0^L + 1/5 s_1^L + 6 s_2^L + a_0 + 3 a_1 + 12 a_2 &\geq 1/5673 \\
0/95 s_0^L + 3/45 s_1^L + 15/6 s_2^L - a_0 - 3 a_1 - 12 a_2 &\geq -1/5673 \\
0/5 s_0^L + 2/25 s_1^L + 6 s_2^L + a_0 + 4/5 a_1 + 12 a_2 &\geq 2/0163 \\
0/95 s_0^L + 5/175 s_1^L + 15/6 s_2^L - a_0 - 4/5 a_1 - 12 a_2 &\geq -2/0163 \\
0/5 s_0^L + 3 s_1^L + 6 s_2^L + a_0 + 6 a_1 + 12 a_2 &\geq 2/4293 \\
0/95 s_0^L + 6/9 s_1^L + 15/6 s_2^L - a_0 - 6 a_1 - 12 a_2 &\geq -2/4293
\end{aligned}$$

با حل مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی فوق نتایج زیر به‌دست می‌آید

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = 0/2635 \quad , \quad a_2 = 0/005$$
$$s_0^L = 0/3438 \quad , \quad s_1^L = 0/1129 \quad , \quad s_2^L = 0$$

مقدار مینیمم شده‌ی تابع هدف عبارت است از $Z = 43/417$. با استفاده از این مقادیر ضرایب فازی مدل به‌صورت $\tilde{A}_1 = (0/382, 0/1129, 0/2597)_T$ و $\tilde{A}_0 = (0, 0/3438, 0/6532)_T$، $\tilde{A}_2 = (0/005, 0/0)_T$ به‌دست می‌آیند (یعنی عدد $\tilde{A}_2$ دقیقاً برابر ۰/۰۰۵ است).

از مدل فوق می‌توانیم برای پیش‌بینی متغیر وابسته هم استفاده کنیم. برای نمونه فرض کنید که علاقه‌مندیم به‌ازای مقادیر $x_1 = 4$ و $x_2 = 30$، مقدار $\tilde{Y}$ را پیش‌بینی کنیم. باید مقدار نما، پهنای چپ و پهنای راست $\tilde{Y}$ را به‌دست آوریم. با استفاده از گزاره ۲.۱۱ داریم

$$f^c(\underline{x}) = 0 + (4 \times 0/2635) + (30 \times 0/005) = 1/2040$$

$$f_s^L(\underline{x}) = 0/3438 + (4 \times 0/1129) + (30 \times 0/0) = 0/7954$$

$$f_s^R(\underline{x}) = 0/6532 + (4 \times 0/2597) + (30 \times 0/0) = 1/6920$$

بنابراین $\tilde{Y}$ یک عدد فازی مثلثی نامتقارن با نمای ۱/۲۰۴۰، پهنای چپ ۰/۷۹۵۴ و پهنای راست ۱/۶۹۲۰ است.

برای انتخاب یک مدل بهینه، باید مراحل فوق را به‌ازای مقادیر مختلف k_0، k_1 و k_2 انجام دهیم. سرانجام مدلی را که ضرایب کشیدگی آن معقول و منطقی باشد و مقدار ابهام کل مدل (مقدار Z) نیز کوچک باشد، به‌عنوان مدل نهایی انتخاب کنیم. در مثال حاضر این مراحل را برای چند مقدار k_0، k_1 و k_2 انجام داده‌ایم. نتایج، بر پایه‌ی $h = 0/5$، در جدول (۳.۱۱) درج شده‌اند.

جدول ۳.۱۱ نتایج مربوط به مثال ۴.۱۱

k_0	k_1	k_2	s_0^L	s_1^L	s_2^L	a_0	a_1	a_2	Z
۱	۱	۱	۰/۶۵۳۲	۰/۱۳۴۸	۰	۰	۰/۳۲۶۰	۰/۰۰۵۰	۴۳/۱۰۷۷
۱/۱	۱/۲۵	۱/۴	۰/۵۹۳۸	۰/۱۲۸۶	۰	۰	۰/۳۱۳۰	۰/۰۰۵۰	۴۳/۱۶۷۰
۱/۴	۱/۶	۱/۹	۰/۴۶۶۵	۰/۱۲۷۶	۰	۰	۰/۲۹۱۳	۰/۰۰۵۰	۴۳/۲۹۴۳
۱/۹	۲/۳	۲/۶	۰/۳۴۳۸	۰/۱۱۲۹	۰	۰	۰/۲۶۳۵	۰/۰۰۵۰	۴۳/۴۱۷۰

با توجه به جدول (۳.۱۱) در می‌یابیم که در حالت نامتقارن با افزایش k_0، k_1 و k_2 به‌طور همزمان (تا اندازه‌ای که در جدول ۳.۱۱ لحاظ شده است) مقادیر a_0 و s_2^L همواره صفر

هستند، مقدار s_0^L تغییری نمی‌کند ولی مقدار a_1 زیاد می‌شود و تابع هدف نیز تغییرات اندکی دارد.

در جدول (۴.۱۱) مقادیر دو ضریب کشیدگی را در ۱ ثابت نگه داشته‌ایم و سومی را تغییر داده‌ایم. همان طور که از این جدول مشاهده می‌شود، با تغییر ضرایب کشیدگی هیچ تغییری در مقادیر a_1 و a_2 به وجود نیامده است. مقدار a_0 در یک حالت خاص مثبت و در بقیه‌ی حالت صفر است. مقدار s_2^L همواره صفر است (مانند جدول ۳.۱۱)، مقدار s_0^L به جز در یک مورد خاص ثابت مانده است و s_1^L تغییر داشته است. اما در هر صورت مقدار ابهام کل مدل تغییرات چندانی نداشته است. به نظر می‌رسد، با توجه به جمیع جهات، عدم تقارن ضرایب منجر به یک بهبود چشمگیر در مدل نمی‌شود و می‌توان مدل با ضرایب متقارن را به‌عنوان مدل نهایی پذیرفت.

جدول ۴.۱۱ نتایج مربوط به مثال ۴.۱۱

k_0	k_1	k_2	s_0^L	s_1^L	s_2^L	a_0	a_1	a_2	Z
۱/۴	۱	۱	۰/۴۶۶۵	۰/۱۶۵۹	۰	۰	۰/۳۱۰۴	۰/۰۰۵۰	۴۳/۲۹۴۳
۳/۵	۱	۱	۰/۱۸۶۶	۰/۲۱۲۵	۰	۰	۰/۲۸۷۱	۰/۰۰۵۰	۴۳/۵۷۴۲
۱	۱/۴	۱	۰/۶۵۳۲	۰/۱۱۲۳	۰	۰	۰/۳۳۷۲	۰/۰۰۵۰	۴۳/۱۰۷۷
۱	۳/۵	۱	۰/۶۵۳۲	۰/۰۵۹۹	۰	۰	۰/۳۶۳۴	۰/۰۰۵۰	۴۳/۱۰۷۷
۱	۱	۱/۴	۰/۶۵۳۲	۰/۱۳۴۸	۰	۰	۰/۳۲۶۰	۰/۰۰۵۰	۴۳/۱۰۷۷
۱	۱	۳/۵	۰/۶۵۳۲	۰/۱۳۴۸	۰	۰	۰/۳۲۶۰	۰/۰۰۵۰	۴۳/۱۰۷۷

۵.۱۱ نکات تکمیلی

۱. به مدل‌های رگرسیون با ضرایب فازی، گاهی مدل‌های رگرسیون امکانی هم گفته می‌شود. بدین دلیل که در این مدل‌ها، خطای مدل در قالب توزیع‌های امکانی ضرایب مدل منظور می‌شود. هم چنین در این مدل‌ها، خطای پیش‌بینی متغیر وابسته، تعبیر امکانی دارد. به سخن دیگر، هنگامی که بر پایه‌ی مدل رگرسیون و به‌ازای مقادیری از متغیرهای توضیحی، مقدار متغیر پاسخ (وابسته) را پیش‌بینی می‌کنیم، فاصله‌ی پیش‌بینی تعبیر امکانی دارد نه تعبیر احتمالی.

۲. رگرسیون فازی نخستین بار توسط تاناکا و همکاران [۲۱] در سال ۱۹۸۲ مورد بحث و بررسی قرار گرفت. در واقع آنها رگرسیون با ضرایب فازی (به بیان دیگر: رگرسیون امکانی) را مورد توجه قرار دادند. روش آنها توسط بسیاری از محققان مطالعه و بررسی شده است و از جنبه‌های گوناگون تعمیم یافته است. برای نمونه می‌توان به [۹ و ۱۰ و ۱۵

و ۱۷ و ۲۲ و ۲۳ و ۲۵] اشاره کرد. رهیافت ارائه شده در این فصل مبتنی بر مراجع [۲ و ۲۱ و ۲۵] بوده است. مروری بر دیگر روش‌ها را در مراجع [۱ و ۹] فصل ۱۰ می‌یابید.

۳. یک نکته مهم در رویکردی که در این فصل تشریح شد، انتخاب مقدار h است. همان گونه که در بخش ۴.۱۱ گفته شد، بزرگ اختیار کردن h به معنی افزایش اعتبار مدل است و از سوی دیگر باعث بزرگ شدن ابهام مدل می‌شود. در [۱۳] تاثیر مقدار h بر مدل رگرسیون فازی مطالعه شده است (نیز رک به تمرین ۵.۱۱).

۴. کاربردهای رگرسیون فازی در علوم مختلف رو به گسترش است. به چند مورد اشاره می‌کنیم. باردوسی و همکاران [۸] کاربردهایی از رگرسیون فازی را در هیدرولوژی بررسی نموده‌اند. محمدی و طاهری [۶ و ۱۹] رگرسیون فازی را برای برازش توابع انتقالی خاک به کار برده‌اند. توانایی و همکاران [۲۴] از رگرسیون فازی در مدل‌سازی متغیرهای مؤثر در رنگرزی الیاف استفاده کرده‌اند (نیز رک به [۲ و ۱۴ و ۲۰]). حشمتی و کاندل [۱۱] از رگرسیون فازی برای الگوسازی و پیش‌بینی فروش استفاده نموده‌اند. کاربرد رگرسیون فازی در تحلیل داده‌های زلزله نیز مورد توجه قرار گرفته است (مرجع [۳] فصل ۱۲). سانچز [۱۸] نیز کاربرد رگرسیون فازی را در بیمه مطالعه نموده‌اند.

تمرین‌های فصل یازدهم

۱.۱۱ چهار مشاهده‌ی زیر را از متغیرهای x و y در اختیار داریم و می‌خواهیم معادله رگرسیون خطی با ضرایب فازی متقارن y بر حسب x را، با $h = ۰/۸$، به‌دست آوریم.

$$(۴/۵, ۳۵/۲)\ ,\ (۳/۸, ۳۱/۶)\ ,\ (۳/۱, ۲۷/۵)\ ,\ (۲/۱, ۲۳/۷)$$

الف) مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی متناظر با مسئله‌ی فوق را به‌طور کامل و دقیق بنویسید.

ب) با یک نرم‌افزار مناسب، مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی را که نوشته‌اید حل کنید و معادله رگرسیون خطی با ضرایب فازی را به‌دست آورید.

پ) اگر در یک نمونه جدید مقدار x برابر ۳/۵ باشد، مقدار y را پیش‌بینی کنید. فاصله‌ی پیش‌بینی را، که یک فاصله‌ی امکانی است، به‌دست آورید.

۲.۱۱ الف) مسئله ۱.۱۱ را با این شرط که عرض از مبدأ یک عدد دقیق باشد، دوباره حل کنید و معادله رگرسیون خطی با ضرایب فازی را بیابید.

ب) اگر در یک نمونه جدید مقدار x برابر ۳/۵ باشد، مقدار y را طبق الگوی بند الف پیش‌بینی کنید. فاصله‌ی پیش‌بینی را بیابید.

۳.۱۱ در مسئله ۱.۱۱ معادله‌های رگرسیون خطی با ضرایب فازی نامتقارن را به‌ازای چند مقدار k_0 و k_1 بیابید و مدل‌ها را با یکدیگر مقایسه کنید.

۴.۱۱ داده‌های زیر مربوط به یک مطالعه درباره‌ی میزان فسفر در کود (x)، و میزان رشد نهال‌های ذرت طی ۳۸ روز (y) است

x_i	۱	۴	۵	۹	۱۱	۱۳	۲۳	۲۳	۲۸
y_i	۶۴	۷۱	۵۴	۸۱	۷۶	۹۳	۷۷	۹۵	۱۰۹

معادله رگرسیون خطی با ضرایب فازی y برحسب x را، با $h = ۰/۶$، به‌دست آورید.

۵.۱۱ در تمرین بالا، بهترین معادله‌های رگرسیون خطی با ضرایب فازی را به‌ازای مقادیر مختلف $h = ۰/۱, ۰/۲, \ldots, ۰/۹$ به‌دست آورید. برای هر مدل مقدار Z (ابهام کل) را بیابید. سپس نمودار تقریبی Z را برحسب h رسم کنید. توضیح دهید چگونه می‌توان از این نمودار برای انتخاب مقدار h استفاده کرد.

۶.۱۱ تمرین ۳.۱۱ را در نظر بگیرید.

الف) معادله رگرسیون آماری (مبتنی بر روش کمترین مربعات) y برحسب x را به‌دست آورید. این معادله را با معادله رگرسیون با ضرایب فازی مقایسه کنید.

ب) بر اساس معادله رگرسیون با ضرایب فازی، مقدار y را به‌ازای مقدار $x = ۲۰$ پیش‌بینی کنید و فاصله‌ی پیش‌بینی امکانی را به‌دست آورید (با $h = ۰/۶$). این فاصله را تعبیر کنید.

پ) براساس معادله رگرسیون آماری، مقدار y را به‌ازای مقدار $x = ۲۰$ پیش‌بینی کنید. یک فاصله اطمینان ۰/۹۵ برای مقدار y به‌ازای $x = ۲۰$ بیابید. برای تشکیل این فاصله اطمینان چه فرض‌هایی لازم است؟ با توجه به تعداد کم داده‌ها، برقراری این فرض‌ها را چگونه می‌توان بررسی کرد؟ (می‌توانید از مراجعی مانند [۳ و ۱۲] استفاده کنید).

ت) عطف به نتایج تمرین ۳.۱۱ و بندهای بالا، درباره‌ی مزیت‌های دو نوع مدل سازی: رگرسیون با ضرایب فازی و رگرسیون آماری بحث کنید.

منابع و مراجع

[۱] ارقامی، ناصررضا (۱۳۷۱)؛ مروری بر رگرسیون فازی، گزارش نخستین سمینار مجموعه‌های مشکک و کاربردهای آن، دانشگاه شهید باهنر کرمان، ۱۸–۱.

[۲] توانایی، حسین؛ طاهری، سید محمود؛ نصیری، مریم (۱۳۸۳)؛ مدل سازی فازی تغییرات استحکام پارچه پنبه‌ای با غلظت هیدروژن پراکسید در حمام سفیدگری، گزارش پنجمین کنفرانس سیستم‌های فازی ایران، دانشگاه امام حسین (ع)، ۶۶۸–۶۶۱.

[۳] عمیدی، علی (۱۳۷۳)؛ آمار کاربردی، ج ۲ (ترجمه)، مرکز نشر دانشگاهی.

[۴] مجدی، سعید؛ طاهری، سید محمود؛ علامت‌ساز، محمدحسین (۱۳۸۱)؛ رگرسیون خطی با ضرایب فازی، گزارش ششمین کنفرانس آمار ایران، دانشگاه تربیت مدرس، ۳۳۴–۳۱۹.

[۵] ماشین‌چی، ماشاا... (۱۳۷۹)؛ رگرسیون با استفاده از پایگاه اطلاعاتی مشکک، اندیشه آماری، شماره ۵: ۱۹–۱۳.

[۶] محمدی، جهانگرد؛ طاهری، سید محمود (۱۳۸۴)؛ برازش توابع انتقالی خاک با استفاده از رگرسیون فازی، مجله علوم و فنون کشاورزی و منابع طبیعی، شماره ۹: ۶۰–۵۱.

[۷] میرزایی یگانه، شهره؛ ارقامی، ناصررضا (۱۳۸۶)؛ رگرسیون فازی: مروری بر چند رویکرد، اندیشه آماری (در دست چاپ).

[8] Bardossy, A., Bogardi, I., Duckstein, L. (1990); Fuzzy regression in hydrology, Water Resources Research, 26: 1497-1508.

[9] Choi, S.H., Dong, K.H. (2004); Note on fuzzy regression model, In: Proc. of the 7th Iranian Stat. Conf., Allameh-Tabatabaie Univ., pp. 51-55.

[10] Guo, P., Tanaka, H. (2006); Dual models for possibilistic regression analysis, Comput. Stat. and Data Anal., 51: 253-266.

[11] Heshmaty, B., Kandel, A. (1985); Fuzzy linear regression and its applications to forecasting n uncertain environment, Fuzzy Sets and Systems, 15: 159-191.

[12] Montgomery, D.C., Peck, A.E., Vining, G.G. (2001); Introduction to Linear Regression Analysis, Third Ed., J. Wiley.

[13] Moskowitz, H., Kim, K. (1993); On assessing the H value in fuzzy linear regression, Fuzzy Sets and Systems, 58: 303-327.

[14] Nasiri, M. (2005); Fuzzy regression modeling of false twist texturing yarn, In: Proc. of the 11th IFSA, Beijing, China, pp. 142-146.

[15] Nasrabadi, M.M., Nasrabadi, E., (2004); A mathematical-programming approach to fuzzy linear regression analysis, Appl. Math. Comput., 155: 873-881.

[16] Rousseeuw, P.J.; Leory, A.M. (1987); Robust regression and outlier detection, J. Wiley.

[17] Sakawa, M., Yano, H. (1990); Multiobjective fuzzy linear regression analysis and its application, Fundamental Electronic Science, 73: 1-10.

[18] Sanchez, J.A. (2006); Calculating insurance claim reserves with fuzzy regression, Fuzzy Sets and Systems, 157: 3091-3108.

[19] Taheri, S.M., Mohammadi, J. (2004); Application of fuzzy regression in soil science, In: Proc. of the 8th World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics, Florida, USA, 6: 311-316.

[20] Taheri, S.M., Tavanai, H., Nasiri, M. (2006); Fuzzy versus statistical regression in false-twist texturing, WSEAS Trans. on Mathematics, 10: 1138-1145.

[21] Tanaka, H., Uejima, S., Asai, K. (1982); Linear regression analysis with fuzzy model, IEEE Trans. Systems Man Cybernet., 12: 903-907.

[22] Tanaka, H., Hayashi, Watada (1989); Possibilistic linear regression analysis for fuzzy data, Euro. J. Oper. Res., 40: 389-396.

[23] Tanaka, H., Lee, H. (1998); Interval regression analysis by quadratic programming approach, IEEE Trans. Fuzzy Systems, 6: 473-481.

[24] Tavanai, H., Taheri, S.M., Nasiri, M. (2005); Modeling of colour yield in polyethylene terephthalate dyeing with statistical and fuzzy regression, Iranian Polymer Journal, 14: 954-967.

[25] Yen, K.K., Ghoshray, G., Roig, G. (1999); A linear regression model using triangular fuzzy number coefficients, Fuzzy Sets and Systems, 106: 167-177.

فصل ۱۲

رگرسیون با ضرایب فازی به روش کمترین مربعات

مقدمه

علاوه بر تقسیم‌بندی که در بخش ۱.۱۱ در مورد انواع رگرسیون فازی بیان شد، شیوه‌های رگرسیون فازی، از لحاظ رویکرد، به دو نوع کلی تقسیم می‌شوند:

۱) شیوه‌های موسوم به رگرسیون امکانی. در این شیوه‌ها ضرایب مدل رگرسیون اعداد فازی هستند. یافتن مدل‌های رگرسیون بر پایه‌ی این شیوه‌ها غالباً مبتنی بر حل مسائل برنامه‌ریزی خطی یا غیر خطی است. اصول این نوع شیوه‌ها در فصل گذشته تشریح شد.

۲) شیوه‌های مبتنی بر روش کمترین مربعات. در این شیوه‌ها بر پایه‌ی تعریف‌هایی برای فاصله‌ی بین اعداد فازی، روش کمترین مربعات تعمیم می‌یابد و بر اساس آن ضرایب مدل رگرسیونی برآورد می‌شوند. در مطالعات مربوط به رگرسیون در محیط فازی، شیوه‌های متنوعی بر پایه‌ی روش کمترین مربعات ارائه شده است. این تنوع عوامل مختلفی دارد مانند: دقیق یا نادقیق بودن مشاهدات مربوط به متغیرهای توضیحی، دقیق یا نادقیق بودن مشاهدات متغیر وابسته، نوع تعریف فاصله بین دو عدد فازی، دقیق یا نادقیق منظور نمودن عرض از مبدأ و برخی موارد دیگر.

در فصل حاضر، یکی از شیوه‌های رگرسیون فازی به روش کمترین مربعات را ارائه و تشریح می‌کنیم. در این روش حالتی مورد مطالعه قرار می‌گیرد که مشاهدات مربوط به متغیرهای توضیحی دقیق، و مشاهدات مربوط به متغیر وابسته فازی هستند. آنگاه بر پایه‌ی این نوع داده‌ها یک مدل با ضرایب فازی به داده‌ها برازش داده می‌شود.

به بیان دقیق‌تر، هدف آن است که بر پایه‌ی مشاهداتی به‌صورت

$$(\tilde{y}_i, x_{i1}, \ldots, x_{in}) \quad , \quad i = 1, \ldots, m \tag{۱.۱۲}$$

که در آن x_{ij} ها اعداد حقیقی و $\tilde{y}_i$ ها اعداد فازی هستند، یک مدل بهینه با ضرایب فازی به‌صورت زیر، برای توصیف و تحلیل داده‌ها و پیش‌بینی بر پایه‌ی آن، به‌دست آوریم

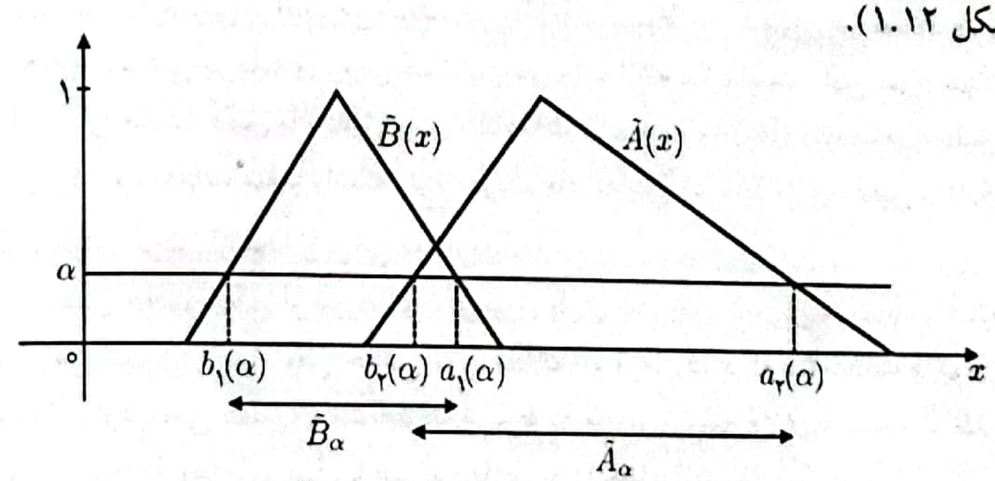
$$\tilde{Y} = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x_1 + \cdots + \tilde{A}_n x_n \tag{۲.۱۲}$$

که در آن $\tilde{A}_i$ ها اعداد فازی هستند.

چون برازش مدل بر پایه‌ی تعریف خاصی از فاصله بین دو عدد فازی است، در بخش اول این تعریف را ارائه می‌کنیم و نتایجی درباره‌ی آن بیان می‌نماییم. در بخش‌های دوم و سوم توضیح می‌دهیم که پارامترهای مدل چگونه برآورد می‌شوند. در بخش چهارم، روش ارزیابی مدل را توضیح می‌دهیم. در بخش پنجم شیوه‌ی بررسی داده‌های پرت مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱.۱۲ فاصله بین دو عدد فازی

در این بخش و بخش‌های آینده فرض می‌کنیم که $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو عدد فازی، و $\tilde{A}_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ و $\tilde{B}_\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$ به‌ترتیب α- برش‌های $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ باشند (شکل ۱.۱۲).



شکل ۱.۱۲ α- برش‌های دو عدد فازی

تعریف ۱.۱۲ فاصله‌ی بین دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ بر پایه‌ی تابع وزنی $f(\alpha)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left[\int_0^1 f(\alpha) d^2(\tilde{A}_\alpha, \tilde{B}_\alpha) d_\alpha\right]^{\frac{1}{2}} \tag{۳.۱۲}$$

که

$$d^2(\tilde{A}_\alpha, \tilde{B}_\alpha) = [a_1(\alpha) - b_1(\alpha)]^2 + [a_2(\alpha) - b_2(\alpha)]^2 \tag{۴.۱۲}$$

که در آن، $f(\alpha)$ یک تابع صعودی روی بازه $[0, 1]$ است که برای آن $f(0) = 0$ و $\int_0^1 f(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2}$. مقدار $d(\tilde{A}_\alpha, \tilde{B}_\alpha)$ فاصله‌ی بین α- برش‌های اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را اندازه می‌گیرد. تابع $f(\alpha)$ را می‌توان به‌عنوان وزن $d^2(\tilde{A}_\alpha, \tilde{B}_\alpha)$ تعبیر کرد. ویژگی صعودی بودن $f(\alpha)$ منجر به این می‌شود که درجات عضویت بالاتر، اهمیت بیشتری در تعیین فاصله‌ی بین دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ داشته باشند. شرط‌های $f(0) = 0$ و $\int_0^1 f(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2}$ نیز این اطمینان را می‌دهد که فاصله‌ی فوق، یک تعمیم معمولی از فاصله بین دو عدد حقیقی است.

در ادامه‌ی این بخش و هم‌چنین در بخش‌های آینده از تابع $f(\alpha) = \alpha$، که یک انتخاب معقول و طبیعی برای $f(\alpha)$ است، استفاده خواهیم کرد.

قضیه ۱.۱۲ فرض کنید $\tilde{A} = (a, s_a)_T$ و $\tilde{B} = (b, s_b)_T$ دو عدد فازی مثلثی متقارن باشند. آنگاه، بر پایه‌ی تابع وزنی $f(\alpha) = \alpha$،

$$d^2(\tilde{A}, \tilde{B}) = (a - b)^2 + \frac{1}{6}(s_a - s_b)^2 \tag{۵.۱۲}$$

اثبات: تابع عضویت یک عدد فازی مثلثی متقارن مانند $\tilde{A}$ به‌صورت زیر است

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - (a - s_a)}{s_a} & a - s_a \le x < a \\[2ex] \dfrac{(a + s_a) - x}{s_a} & a \le x < a + s_a \end{cases}$$

α- برش‌های دو عدد فازی مثلثی متقارن $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند (شکل ۲.۱۲)

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\alpha &= [(\alpha - 1)s_a + a, (1 - \alpha)s_a + a] \\ \tilde{B}_\alpha &= [(\alpha - 1)s_b + b, (1 - \alpha)s_b + b] \end{aligned}$$

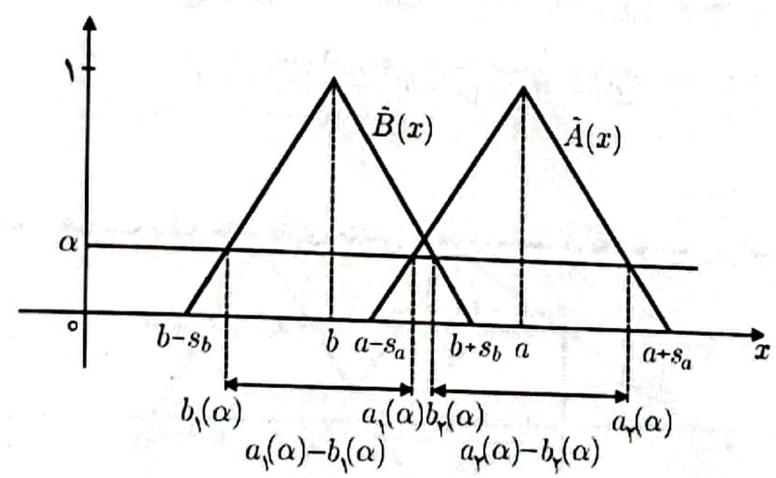
بنا بر این، بر پایه‌ی رابطه (۴.۱۲)،

$$d^2(\tilde{A}_\alpha, \tilde{B}_\alpha) = [(\alpha - 1)s_a + a - (\alpha - 1)s_b - b]^2$$

$$
\begin{aligned}
&+[(1-\alpha)s_a + a - (1-\alpha)s_b - b]^2 \\
&= [\alpha(s_a - s_b) + (a-b) - (s_a - s_b)]^2 \\
&\quad +[\alpha(s_b - s_a) + (a-b) + (s_a - s_b)]^2
\end{aligned}
$$

اکنون، با استفاده از $f(\alpha) = \alpha$، داریم

$$
\begin{aligned}
d^2(\tilde{A},\tilde{B}) &= \int_0^1 \alpha d^2(\tilde{A}_\alpha, \tilde{B}_\alpha) d\alpha \\
&= \int_0^1 \alpha[\alpha(s_a - s_b) + (a-b) - (s_a - s_b)]^2 d\alpha \\
&\quad + \int_0^1 \alpha[\alpha(s_b - s_a) + (a-b) + (s_a - s_b)]^2 d\alpha \\
&= \frac{1}{2}(s_a - s_b)^2 + \frac{1}{2}[(a-b) + (s_a - s_b)]^2 + \frac{1}{2}[(a-b) - (s_a - s_b)]^2 \\
&\quad + \frac{2}{3}(s_a - s_b)[(a-b) - (s_a - s_b)] + \frac{2}{3}(s_b - s_a)[(a-b) + (s_a - s_b)] \\
&= (a-b)^2 + \frac{1}{6}(s_a - s_b)^2
\end{aligned}
$$



شکل ۲.۱۲ اعداد فازی مثلثی در قضیه ۱.۱۲ و α- برش‌های آن‌ها

قضیه ۲.۱۲ فرض کنید $\tilde{A} = (a, s_a)_N$ و $\tilde{B} = (b, s_b)_N$ دو عدد فازی نرمال باشند. آنگاه، بر پایه‌ی تابع وزنی $f(\alpha) = \alpha$،

$$
d^2(\tilde{A},\tilde{B}) = (a-b)^2 + \frac{1}{2}(s_a - s_b)^2 \qquad (6.12)
$$

اثبات: در این حالت، α- برش‌های $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ عبارت‌اند از

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}_\alpha &= [a - s_a\sqrt{-\ln\alpha}, a + s_a\sqrt{-\ln\alpha}] \\
\tilde{B}_\alpha &= [b - s_b\sqrt{-\ln\alpha}, b + s_b\sqrt{-\ln\alpha}]
\end{aligned}
$$

لذا، طبق رابطه (۴.۱۲)،

$$
\begin{aligned}
d^2(\tilde{A}_\alpha, \tilde{B}_\alpha) &= [a - s_a\sqrt{-\ln\alpha} - (b - s_b\sqrt{-\ln\alpha})]^2 \\
&+ [a + s_a\sqrt{-\ln\alpha} - (b + s_b\sqrt{-\ln\alpha})]^2 \\
&= 2(a-b)^2 - 2(s_a - s_b)^2 \ln\alpha
\end{aligned}
$$

بنا بر این، با استفاده از $f(\alpha) = \alpha$،

$$
\begin{aligned}
d^2(\tilde{A},\tilde{B}) &= \int_0^1 \alpha d^2(\tilde{A}_\alpha, \tilde{B}_\alpha) d\alpha \\
&= (a-b)^2 - 2(s_a - s_b)^2 \int_0^1 \alpha \ln\alpha d\alpha \\
&= (a-b)^2 + \frac{1}{2}(s_a - s_b)^2
\end{aligned}
$$

۲.۱۲ برآورد پارامترهای مدل

در این بخش توضیح می‌دهیم که چگونه می‌توان یک مدل بهینه به‌صورت (۲.۱۲) را بر پایه‌ی داده‌هایی به‌صورت (۱.۱۲) به‌دست آورد. بحث را به حالتی که $\tilde{y}_i$ ها و $\tilde{A}_i$ ها اعداد مثلثی متقارن باشند، محدود می‌کنیم. (اگر این اعداد نرمال باشند نتایج مشابهی را می‌توان به‌دست آورد). بنا بر این مسئله‌ی اصلی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

می‌خواهیم یک مدل خطی با ضرایب فازی به‌صورت

$$
\tilde{Y} = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x_1 + \cdots + \tilde{A}_n x_n \quad , \quad \tilde{A}_j \in \mathcal{F}(R) \quad , \quad j = 1, \ldots, n \qquad (7.12)
$$

به داده‌هایی به‌صورت

$$
(\tilde{y}_i, x_{i1}, \ldots, x_{in}),\ x_{ij} \in R,\ \ \tilde{y}_i \in \mathcal{F}(R),\ \ i = 1, \ldots, m,\ \ j = 1, \ldots, n \qquad (8.12)
$$

برازش دهیم.

شیوه‌ی برازش مدل، استفاده از روش کمترین مربعات خطاست. این کار را با توجه به فاصله‌ی d بیان شده در تعریف ۱.۱۲ انجام می‌دهیم. به سخن دیگر می‌خواهیم مجموع

مربعات خطا را، با توجه به فاصله‌ی d، مینیمم کنیم. یعنی ضرایب فازی $\tilde{A}_0, \ldots, \tilde{A}_n$ را طوری بیابیم که مجموع مربعات خطا یعنی عبارت زیر مینیمم شود

$$M(\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n) = \sum_{i=1}^{m} d^2(\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x_{i1} + \cdots + \tilde{A}_n x_{in}, \tilde{y}_i) \qquad (۹.۱۲)$$

فرض کنید $\tilde{y}_i$ ها و $\tilde{A}_j$ ها به‌صورت $\tilde{y}_i = (y_i, s_i)_T$ و $\tilde{A}_j = (a_j, \sigma_j)_T$ باشند. با توجه به گزاره ۱.۱۲، داریم

$$\begin{aligned} &\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x_{i1} + \cdots + \tilde{A}_n x_{in} \\ &= (a_0 + a_1 x_{i1} + \cdots + a_n x_{in} \ , \ \sigma_0 + \sigma_1 |x_{i1}| + \cdots + \sigma_n |x_{in}|)_T \end{aligned}$$

لذا رابطه (۹.۱۲) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} M(\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \cdots, \tilde{A}_n) \ &= \ \sum_{i=1}^{m} (a_0 + a_1 x_{i1} + \cdots + a_n x_{in} - y_i)^2 \\ &+ \ \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{m} (\sigma_0 + \sigma_1 |x_{i1}| + \cdots + \sigma_n |x_{in}| - s_i)^2 \end{aligned} \qquad (۱۰.۱۲)$$

برای مینیمم سازی عبارت بالا، از تابع M نسبت به a_j و σ_j، به‌ازای $j = 0, 1, \ldots, n$، مشتق می‌گیریم. از برابر صفر قرار دادن عبارت‌های حاصله، معادلات زیر، به‌ازای $j = 0, 1, \ldots, n$، نتیجه می‌شوند

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} (a_0 + a_1 x_{i1} + \cdots + a_n x_{in} - y_i) x_{ij} = 0 \\ &\sum_{i=1}^{m} (\sigma_0 + \sigma_1 |x_{i1}| + \cdots + \sigma_n |x_{in}| - s_i |x_{ij}| = 0 \end{aligned}$$

که در آن، به‌ازای $i = 1, \ldots, m$، $x_{i0} = 1$ منظور شده است. از معادلات بالا روابط زیر، به‌ازای $j = 0, 1, \ldots, n$، به‌دست می‌آیند

$$\begin{aligned} &a_0 \sum_{i=1}^{m} x_{i0} x_{ij} + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_{i1} x_{ij} + \cdots + a_n \sum_{i=1}^{m} x_{in} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_{ij} \\ &\sigma_0 \sum_{i=1}^{m} |x_{i0} x_{ij}| + \sigma_1 \sum_{i=1}^{m} |x_{i1} x_{ij}| + \cdots + \sigma_n \sum_{i=1}^{m} |x_{in} x_{ij}| = \sum_{i=1}^{m} s_i |x_{ij}| \end{aligned} \qquad (۱۱.۱۲)$$

برای سادگی، معادلات فوق را به‌صورت ماتریسی نمایش می‌دهیم. در ادامه فرض می‌کنیم x_{ij} ها نامنفی باشند (برای حالت کلی، روند مشابهی را می‌توان پی گرفت

(تمرین ۶.۱۲)). فرض کنید

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix},$$

$$A = X^T X = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} x_{i0} x_{i0} & \sum_{i=1}^{m} x_{i1} x_{i0} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} x_{in} x_{i0} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{i0} x_{i1} & \sum_{i=1}^{m} x_{i1} x_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} x_{in} x_{i1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} x_{i0} x_{in} & \sum_{i=1}^{m} x_{i1} x_{in} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} x_{in} x_{in} \end{pmatrix},$$

$$a = (a_0, a_1, \cdots, a_n)^T \ , \ y = (\sum_{i=1}^{m} y_i x_{i0}, \sum_{i=1}^{m} y_i x_{i1}, \cdots, \sum_{i=1}^{m} y_i x_{in})^T \ ,$$

$$\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_n)^T \ , \ s = (\sum_{i=1}^{m} s_i x_{i0}, \sum_{i=1}^{m} s_i x_{i1}, \cdots, \sum_{i=1}^{m} s_i x_{in})^T \ .$$

در این صورت معادلات (۱۱.۱۲) را می‌توان این گونه نوشت

$$Aa = y \ , \ A\sigma = s \qquad (۱۲.۱۲)$$

اکنون نتایجی را درباره‌ی وجود و یکتایی جواب دستگاه(۱۲.۱۲) بیان می‌کنیم[۲۳].

قضیه ۳.۱۲ اگر $Rank(X) = n + 1$، آنگاه A یک ماتریس همیشه مثبت است.

بر پایه‌ی قضیه بالا، و با توجه به اینکه اگر A همیشه مثبت باشد دارای معکوس A^{-1} است، نتیجه زیر به‌دست می‌آید.

نتیجه ۱.۱۲ اگر $Rank(X) = n + 1$، آنگاه دستگاه (۱۲.۱۲) دارای جواب یکتا به‌صورت زیر است

$$a = A^{-1} y \ , \ \sigma = A^{-1} s \qquad (۱۳.۱۲)$$

بر پایه‌ی نتیجه‌ی بالا، می‌توان قضیه زیر را در مورد مینیمم‌سازی عبارت (۹.۱۲) اثبات کرد.

قضیه ۴.۱۲ اگر $Rank(X) = n + ۱$ و $A^{-۱}s \geq ۰$، آنگاه مسئله‌ی مینیمم سازی عبارت (۹.۱۲) دارای جواب یکتاست که از رابطه (۱۳.۱۲) به‌دست می‌آید.

تذکر: شرط $A^{-۱}s \geq ۰$ در قضیه بالا تضمین می‌کند که مقادیر σ_i ها، یعنی پهناهای ضرایب فازی مدل، نامنفی باشند.

مثال ۱.۱۲ داده‌های جدول ۱.۱۲ مربوط به یک بررسی خاک‌شناسی هستند که درباره‌ی تأثیر $x : SAR$ (نسبت جذب سدیم) بر $y : ESP$ (درصد تبادل سدیم) در ناحیه‌ی سیلاخور لرستان در سال ۱۳۸۰ انجام شده است [۱۵]. به دلیل عدم نتیجه‌گیری با دقت کافی در اندازه‌گیری‌های ESP، مشاهدات مربوط به متغیر y مبهم هستند. در واقع، همان طور که در جدول ۱.۱۲ درج شده است، این مشاهدات اعداد فازی مثلثی متقارن هستند که ابهام هر عدد نیز برابر ۰/۱۰ مقدار نمای آن است. می‌خواهیم یک مدل بهینه برای رابطه ESP بر حسب SAR بیابیم.

برای یافتن مدل بهینه لازم‌است ماتریس‌های X و A و بردارهای y و s را به‌دست آوریم. داریم

$$X = \begin{pmatrix} ۱ & x_{۱۱} \\ ۱ & x_{۲۱} \\ \vdots & \vdots \\ ۱ & x_{m۱} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰/۷۸ \\ ۱ & ۰/۶۴ \\ \vdots & \vdots \\ ۱ & ۱/۱۳ \end{pmatrix}_{۲۴\times ۲}$$

$$A = X^T X = \begin{pmatrix} ۲۴ & ۲۰/۹ \\ ۲۰/۹ & ۲۶/۸۱ \end{pmatrix}$$

$$y = (\sum_{i=۱}^{۲۴} y_i x_{i۰}, \sum_{i=۱}^{۲۴} y_i x_{i۱})^T = (۱۶۴/۰۹, ۲۰۲/۳۲)^T$$

$$s = (\sum_{i=۱}^{۲۴} s_i x_{i۰}, \sum_{i=۱}^{۲۴} s_i x_{i۱})^T = (۱۶/۴۱, ۲۰/۲۳)^T$$

جدول ۱.۱۲ داده‌های مربوط به مثال ۱.۱۲

شماره مشاهده	x_i	$\bar{y}_i = (y_i, s_i)_T$
۱	۰/۷۸	(۳/۰۸, ۰/۳۱)
۲	۰/۶۴	(۲/۸۶, ۰/۲۹)
۳	۰/۶۲	(۶/۲۵, ۰/۶۳)
۴	۰/۴۹	(۴/۱۱, ۰/۴۱)
۵	۱/۱۰	(۱/۰۴, ۰/۱۰)
۶	۰/۶۱	(۲/۷۱, ۰/۲۷)
۷	۰/۷۴	(۴/۴۵, ۰/۴۵)
۸	۱/۱۵	(۶/۹۲, ۰/۶۹)
۹	۱/۰۸	(۷/۴۱, ۰/۷۴)
۱۰	۰/۳۸	(۹/۰۸. ۰/۹۱)
۱۱	۰/۶۱	(۶/۵۶. ۰/۶۶)
۱۲	۰/۹۸	(۵/۰۵. ۰/۵۱)
۱۳	۰/۷۱	(۵/۲۳, ۰/۵۲)
۱۴	۰/۵۰	(۵/۱۶, ۰/۵۲)
۱۵	۰/۷۷	(۱۱/۱۰, ۱/۱۱)
۱۶	۰/۹۹	(۴/۴۷, ۰/۴۵)
۱۷	۳/۵۶	(۲۸/۸۴, ۲/۸۸)
۱۸	۰/۸۶	(۹/۴۳, ۰/۹۴)
۱۹	۰/۶۱	(۴/۵۰, ۰/۴۵)
۲۰	۰/۶۴	(۹/۳۰, ۰/۹۴)
۲۱	۰/۷۱	(۹/۴۸, ۰/۹۵)
۲۲	۰/۶۱	(۳/۶۵, ۰/۳۷)
۲۳	۰/۶۳	(۱۰/۱۴, ۱/۰۱)
۲۴	۱/۱۳	(۳, ۰/۳)

در این مثال رتبه ماتریس X برابر ۲ است، و طبق قضیه ۳.۱۲، ماتریس A معکوس‌پذیر است و لذا دستگاه (۱۲.۱۲) یعنی

$$Aa = y \quad , \quad A\sigma = s$$

دارای جواب یکتاست. طبق محاسبات بالا این جواب‌ها عبارت‌اند از

$$a = A^{-1}y = (۰/۸۲۶۵, ۶/۵۰۲۱)^T$$
$$\sigma = A^{-1}s = (۰/۰۸۲۶, ۰/۶۹۰۲)^T$$

چون $A^{-1}s \geq ۰$ پس، طبق قضیه ۴.۱۲، مسئله‌ی مینیمم سازی مجموع مربعات خطا (عبارت ۹.۱۲) دارای جواب یکتا به‌صورت فوق است. بنا بر این مدل بهینه برای داده‌های جدول ۱.۱۲ عبارت است از

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &= \tilde{A}_۰ + \tilde{A}_۱ x \\ &= (۰/۸۲۶۵, ۰/۰۸۲۶)_T + (۶/۵۰۲۱, ۰/۶۹۰۲)_T x \end{aligned}$$

مدل فوق علاوه بر این که یک الگو برای رابطه‌ی بین دو متغیر x و y ارائه می‌دهد، برای پیش‌بینی مقدار y بر پایه‌ی x نیز قابل استفاده است. برای مثال فرض کنید مقدار x برابر ۰/۷۵ مشاهده شود، آنگاه پیش‌بینی می‌کنیم که مقدار y یعنی ESP برابر با

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &= (۰/۸۲۶۵, ۰/۰۸۲۶)_T + (۶/۵۰۲۱, ۰/۶۹۰۲)_T \times ۰/۷۵ \\ &= (۵/۷۰, ۰/۶۰)_T \end{aligned}$$

باشد. به سخن دیگر مقدار y را حدوداً ۵/۷۰ (با ابهام ۰/۶۰) پیش‌بینی می‌کنیم.

۳.۱۲ بررسی یک حالت خاص

در قضیه ۴.۱۲ بیان شد که اگر $A^{-1}s > ۰$، آنگاه مسئله‌ی مینیمم سازی عبارت (۹.۱۲) دارای جواب یکتاست. اما اگر در یک مسئله‌ی خاص حالت $A^{-1}s < ۰$ رخ دهد، آنگاه نمی‌توان از قضیه ۴.۱۲ استفاده کرد. برای حل مسائلی که در آنها حالت $A^{-1}s < ۰$ رخ می‌دهد، از شیوه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

فرض کنید در مدلی که طبق روش بخش قبل به داده‌ها برازش می‌دهیم، یک یا چند σ_i منفی به‌دست می‌آید. در این صورت مجدداً یک مدل جدید به داده‌ها برازش می‌دهیم، با این تفاوت که این بار ضرایب متغیرهایی را که برای آنها $\sigma_i < ۰$ به‌دست آمده

است، معمولی (غیر فازی) فرض می‌کنیم. به بیان دیگر پهنای ضرایب فازی این متغیرها را صفر قرار می‌دهیم. بنا بر این در این حالت، مقادیر a_i ها (مرکز ضرایب فازی مدل) مشابه حالت قبل از رابطه‌ی $a = A^{-1}y$ به‌دست می‌آید، ولی برای مقادیر σ_i ها (پهناهای ضرایب فازی مدل) باید از رابطه‌ی $\sigma^* = A^{*-1}s^*$ استفاده کرد. در این رابطه s^* برداری مانند بردار s است با این تفاوت که درایه‌های متناظر با ضرایب غیر فازی، حذف شده‌اند. همچنین A^* یک ماتریس مانند A است با این تفاوت که سطرها و ستون‌های متناظر با ضرایب غیر فازی، حذف شده‌اند.

مثال ۲.۱۲ داده‌های جدول ۲.۱۲ مربوط‌اند به بررسی خاک‌شناسی که در مثال ۱.۱۲ توضیح داده شد. متغیر توضیحی $SAND : x_۱$ (درصد شن)، متغیر توضیحی $OM : x_۲$ (درصد مواد آلی) و متغیر وابسته $CEC : y$ (ظرفیت تبادل کاتیونی) است. می‌خواهیم یک مدل رگرسیون فازی به این داده‌ها برازش دهیم.

ماتریس مشاهدات به‌صورت زیر است

$$X = \begin{pmatrix} ۱ & x_{۱۱} & x_{۱۲} \\ ۱ & x_{۲۱} & x_{۲۲} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ۱ & x_{۲۵\,۱} & x_{۲۵\,۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۳۵ & ۰/۸۸ \\ ۱ & ۳۷ & ۱/۱۳ \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ۱ & ۷۹ & ۰/۳۶ \end{pmatrix}_{۲۵\times ۳}$$

بنا بر این

$$A = X^T X = \begin{pmatrix} ۲۵ & ۷۶۱ & ۳۷/۲۴ \\ ۷۶۱ & ۲۷۹۱۳ & ۱۰۶۵/۵۸ \\ ۳۷/۲۴ & ۱۰۶۵/۵۸ & ۶۴/۶۷ \end{pmatrix}$$

هم‌چنین

$$y = (\sum_{i=۱}^{۲۵} y_i x_{i۰}, \sum_{i=۱}^{۲۵} y_i x_{i۱}, \sum_{i=۱}^{۲۵} y_i x_{i۲})^T = (۴۷۲/۵, ۱۳۱۵۹/۲, ۷۴۱/۷)^T$$

$$s = (\sum_{i=1}^{25} s_i x_{i0}, \sum_{i=1}^{25} s_i x_{i1}, \sum_{i=1}^{25} s_i x_{i2})^T = (47/25, 1315/92, 74/17)^T$$

در این مثال رتبه X برابر ۳ است و لذا، طبق نتیجه ۱.۱۲، دستگاه

$$Aa = y \quad , \quad A\sigma = s$$

دارای جواب یکتا به‌صورت زیر است

$$a = A^{-1}y = (22/9810, -0/2223, 2/4741)^T$$
$$\sigma = A^{-1}s = (2/1982, -0/0222, 0/2474)^T$$

اما در اینجا $A^{-1}s \ngeq 0$، پس نمی‌توان از قضیه ۴.۱۲ استفاده کرد. در واقع مقدار $\sigma_1 = -0/0222$ به‌عنوان پهنای عدد فازی A_1 (ضریب متغیر x_1) پذیرفتنی نیست.

اکنون از شیوه‌ای که در بالا بیان کردیم استفاده می‌کنیم تا یک مدل پذیرفتنی برای برازش به داده‌های مورد مطالعه بیابیم. در مدل جدید σ_1 را، که در مدل بالا منفی به‌دست آمد، از ابتدا برابر صفر قرار می‌دهیم. در این حالت مقادیر a_i ها از همان رابطه‌ی $a = A^{-1}y$ به‌دست می‌آید، ولی برای مقادیر σ_0 و σ_2 از رابطه‌ی $\sigma^* = A^{*^{-1}}s^*$ استفاده می‌کنیم که در آن

$$A^* = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{25} x_{i0}x_{i0} & \sum_{i=1}^{25} x_{i2}x_{i0} \\ \sum_{i=1}^{25} x_{i0}x_{i2} & \sum_{i=1}^{25} x_{i2}x_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 37/24 \\ 37/24 & 64/67 \end{pmatrix},$$

$$s^* = (\sum_{i=1}^{25} s_i x_{i0}, \sum_{i=1}^{25} s_i x_{i2})^T = (47/25, 74/17)^T \quad , \quad \sigma^* = (\sigma_0, \sigma_2)^T$$

در این حالت شرط $A^{*^{-1}}s^* \geq 0$ برقرار است و لذا می‌توان از قضیه ۴.۱۲ استفاده کرد. با جایگذاری مقادیر لازم، خواهیم داشت

$$a = A^{-1}y = (22/9810, -0/2223, 2/4741)^T,$$

$$\sigma^* = A^{*^{-1}}s^* = \begin{pmatrix} 0/281 & -0/162 \\ -0/162 & 0/109 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 47/25 \\ 74/17 \end{pmatrix}$$
$$= (1/2766, 0/4118)^T$$

بنابراین مدل بهینه به‌صورت زیر خواهد بود

$$\tilde{Y} = \tilde{A}^*_0 + \tilde{A}^*_1 x_1 + \tilde{A}^*_2 x_2 \qquad (14.12)$$
$$= (22/9810, 1/2766)_T - 0/2223x_1 + (2/4741, 0/4118)_T x_2$$

برای مثال اگر در یک نمونه‌ی خاص مقادیر متغیرهای x_1 و x_2 به‌ترتیب برابر ۳۸ و ۱/۴۵ به‌دست آیند، پیش‌بینی می‌شود که مقدار y برابر با

$$\tilde{Y} = (22/9810, 1/2766)_T - 0/2223 \times 38 + (2/4741, 0/4118)_T \times 1/45$$
$$= (18/12, 1/87)_T$$

باشد.

جدول ۲.۱۲ داده‌های مربوط به مثال ۲.۱۲

شماره مشاهده	x_{i1}	x_{i2}	$\tilde{y}_i = (y_i, s_i)_T$
۱	۳۵	۰/۸۸	$(۱۶/۵, ۱/۶۵)_T$
۲	۳۷	۱/۱۳	$(۱۸/۶, ۱/۸۶)_T$
۳	۲۷	۱/۳۱	$(۱۹/۳, ۱/۹۳)_T$
۴	۲۹	۱/۹۸	$(۲۰/۳, ۲/۰۳)_T$
۵	۳۸	۱/۰۲	$(۱۷/۳, ۱/۷۳)_T$
۶	۳۲	۱/۲۹	$(۲۰/۴, ۲/۰۴)_T$
۷	۲۹	۱/۵۲	$(۱۹/۳, ۱/۹۳)_T$
۸	۱۸	۱/۳۳	$(۲۱/۹, ۲/۱۹)_T$
۹	۴۰	۱/۷۱	$(۱۵/۹, ۱/۵۹)_T$
۱۰	۲۸	۲/۰۰	$(۱۸/۳, ۱/۸۳)_T$
۱۱	۱۳	۱/۶۸	$(۲۲/۶, ۲/۲۶)_T$
۱۲	۱۹	۲/۱۵	$(۲۳/۷, ۲/۳۷)_T$
۱۳	۳۱	۳/۵۲	$(۲۴/۴, ۲/۴۴)_T$
۱۴	۳۱	۲/۳۳	$(۲۱/۸, ۲/۱۸)_T$
۱۵	۱۷	۱/۷۱	$(۲۳/۸, ۲/۳۸)_T$
۱۶	۱۴	۱/۱۴	$(۲۰/۸, ۲/۰۸)_T$
۱۷	۱۹	۰/۹۹	$(۱۷/۵, ۱/۷۵)_T$
۱۸	۲۸	۱/۱۴	$(۱۷/۸, ۱/۷۸)_T$
۱۹	۲۶	۱/۴۶	$(۲۰/۲, ۲/۰۲)_T$
۲۰	۳۲	۱/۸۱	$(۲۰/۰, ۲/۰۰)_T$
۲۱	۱۰	۱/۳۸	$(۲۲/۸, ۲/۲۸)_T$
۲۲	۳۸	۰/۸۴	$(۱۹/۱, ۱/۹۱)_T$
۲۳	۴۹	۱/۴۸	$(۱۲/۱, ۱/۲۱)_T$
۲۴	۴۲	۱/۰۸	$(۱۲/۸, ۱/۲۸)_T$
۲۵	۷۹	۰/۳۶	$(۵/۳, ۰/۵۳)_T$

۴.۱۲ معیار نیکویی برازش مدل

برای ارزیابی نیکویی برازش در مدل‌هایی که به شیوه‌ی کمترین مربعات فازی، طبق بخش ۲.۱۲، به‌دست می‌آیند چند شاخص معرفی شده است. این شاخص‌ها در واقع معیارهایی برای اندازه نزدیکی بین دو عدد فازی هستند. در این بخش یکی از این شاخص‌ها را، بر پایه‌ی مرجع [۲۰]، معرفی کرده و با مثال توضیح می‌دهیم.

تعریف ۲.۱۲ فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه فازی باشند. شاخص تطبیق برای این دو مجموعه به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$I(\tilde{A}, \tilde{B}) = \min(\tilde{A} o \tilde{B}, ۱ - (\tilde{A} \bullet \tilde{B})) ,$$

که در آن

$$\begin{aligned} \tilde{A} o \tilde{B} &= \max_x \{\min[\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)]\} \\ \tilde{A} \bullet \tilde{B} &= \min_x \{\max[\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)]\} \end{aligned}$$

قضیه ۵.۱۲ برای دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$،

۱) $۰ \leq I(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq ۱$

۲) $\tilde{A} = \tilde{B} \Rightarrow I(\tilde{A}, \tilde{B}) = ۱$

۳) $I(\tilde{A}, \tilde{B}) = I(\tilde{B}, \tilde{A})$

۴) $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \subseteq \tilde{C} \Rightarrow I(\tilde{A}, \tilde{C}) \leq \min(I(\tilde{A}, \tilde{B}), I(\tilde{B}, \tilde{C}))$

با توجه به ویژگی‌های شاخص فوق، می‌توان از آن به‌عنوان یک شاخص مناسب برای میزان تطبیق دو مجموعه فازی استفاده کرد. در مبحث رگرسیون فازی نیز می‌توان از شاخص فوق برای ارزیابی نیکویی برازش یک مدل رگرسیون فازی استفاده نمود. بدین صورت که میزان تطبیق هر مشاهده y_i و مقدار برآورد آن را از مدل محاسبه می‌کنیم. بزرگ بودن این اعداد نشانگر برازش خوب مدل است و برعکس کوچک بودن این اعداد نشان دهنده‌ی این است که مدل، برازش ضعیفی به مشاهدات دارد.

نکته ۱.۱۲ در حالتی که با اعداد فازی سر و کار داریم، مانند مثال‌ها و تمرین‌های این فصل، شاخص تطبیق فوق برابر با ارتفاع اشتراک دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ می‌شود.

مثال ۳.۱۲ داده‌های جدول ۳.۱۲ مربوط به یک بررسی درباره‌ی رابطه بین x_1 : مقدار تری کلسیم آلومینات، x_2 : مقدار تری کلسیم سیلیکات، و x_3 مقدار تری کلسیم آلومنوفری به‌عنوان متغیرهای توضیحی، و y : حرارت حاصله (کالری در گرم) در سیمان، مربوط به ۱۳ آزمایش است که به منظور بررسی اثر ترکیبات سیمان پرتلند بر روی حرارت حاصله طی سفت شدن سیمان انجام شده است [۲۳].

جدول ۳.۱۲ داده‌های مربوط به مثال ۳.۱۲

شماره مشاهده	$\tilde{y}_i$	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}
۱	(۷۸/۵, ۶/۹)	۷	۲۶	۶
۲	(۷۴/۳, ۶/۴)	۱	۲۹	۱۵
۳	(۱۰۴/۳, ۹/۴)	۱۱	۵۶	۸
۴	(۸۷/۶, ۷/۸)	۱۱	۳۱	۸
۵	(۹۵/۵, ۸/۶)	۷	۵۲	۶
۶	(۱۰۹/۲, ۹/۹)	۱۱	۵۵	۹
۷	(۱۰۲/۷, ۹/۳)	۳	۷۱	۱۷
۸	(۷۲/۵, ۶/۲)	۱	۳۱	۲۲
۹	(۹۳/۱, ۸/۳)	۲	۵۴	۱۸
۱۰	(۱۱۵/۹, ۱۰/۶)	۲۱	۴۷	۴
۱۱	(۸۳/۸, ۷/۴)	۱	۴۰	۲۳
۱۲	(۱۱۳/۳, ۱۰/۶)	۱۱	۶۶	۹
۱۳	(۱۰۹/۴, ۹/۹)	۱۰	۶۸	۸

طبق روشی که در بخش ۲.۱۲ تشریح شد، رگرسیون فازی y بر x_1 و x_2 و x_3 به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\tilde{Y} = (۴۸/۱۹۳۴, ۳/۸۶۹۳)_T + (۱/۶۹۵۹, ۰/۱۶۸۸)_T x_1 + (۰/۶۵۶۹, ۰/۰۶۵۱)_T x_2 + (۰/۲۵, ۰/۰۲۳۳)_T x_3$$

برای بررسی نیکویی برازش مدل، مقدار $I(\tilde{y}_i, \tilde{Y}_i)$ را برای همه‌ی داده‌ها محاسبه می‌کنیم. نتایج در جدول ۴.۱۲ درج شده‌اند.

جدول ۴.۱۲ نتایج مربوط به مثال ۳.۱۰

شماره مشاهده	$\tilde{y}_i = (y_i, s_i)$	$\tilde{Y}_i = (\hat{y}_i, \hat{s}_i)$	$I(\tilde{y}_i, \tilde{Y}_i)$
۱	(۷۸/۵, ۶/۹)	(۷۸/۶۴, ۶/۸۸)	۰/۹۹۹۹
۲	(۷۴/۳, ۶/۴)	(۷۲/۶۹, ۶/۲۸)	۰/۹۸۴۰
۳	(۱۰۴/۳, ۹/۴)	(۱۰۵/۶۴, ۹/۵۶)	۰/۹۹۵۱
۴	(۸۷/۶, ۷/۸)	(۸۹/۲۱, ۷/۹۳)	۰/۹۸۹۵
۵	(۹۵/۵, ۸/۶)	(۹۵/۷۲, ۸/۵۸)	۰/۹۹۹۹
۶	(۱۰۹/۲, ۹/۹)	(۱۰۵/۲۳, ۹/۵۲)	۰/۹۵۹۰
۷	(۱۰۲/۷, ۹/۳)	(۱۰۴/۱۷, ۹/۳۹)	۰/۹۹۳۸
۸	(۷۲/۵, ۶/۲)	(۷۵/۷۵, ۶/۵۷)	۰/۹۳۷۱
۹	(۹۳/۱, ۸/۳)	(۹۱/۵۶, ۸/۱۴)	۰/۹۹۱۳
۱۰	(۱۱۵/۹, ۱۰/۶)	(۱۱۵/۶۸, ۱۰/۵۷)	۰/۹۹۹۹
۱۱	(۸۳/۸, ۷/۴)	(۸۱/۹۲, ۷/۱۸)	۰/۹۸۳۵
۱۲	(۱۱۳/۳, ۱۰/۶)	(۱۱۲/۴۵, ۱۰/۲۳)	۰/۹۹۸۳
۱۳	(۱۰۹/۴, ۹/۹)	(۱۱۱/۸۲, ۱۰/۱۷)	۰/۹۸۵۵

برای مثال برای مشاهده اول داریم

$$\tilde{y}_1 = (y_1, s_1)_T = (۷۸/۵, ۶/۹)_T$$
$$\tilde{Y}_1 = (\hat{y}_1, \hat{s}_1)_T = (۷۸/۶۴۴۶, ۶/۸۸۳۶)_T$$

و چون

$$\tilde{A} o \tilde{B} = \max_x\{\min[\tilde{y}_1(x), \tilde{Y}_1(x)]\} = ۰/۹۹۹۹$$
$$\tilde{A} \bullet \tilde{B} = \min_x\{\max[\tilde{y}_1(x), \tilde{Y}_1(x)]\} = ۰$$

بنا بر این

$$\begin{aligned} I(\tilde{y}_1, \tilde{Y}_1) &= \min[\tilde{A} o \tilde{B}, 1 - (\tilde{A} \bullet \tilde{B})] \\ &= \min[0/9999, 1] = 0/9999 \end{aligned}$$

همان طور که از جدول ۴.۱۲ آشکار است، شاخص تطبیق I برای همه‌ی مشاهدات، بالا است و لذا می‌توان نتیجه گرفت که مدل برازش شده، یک مدل مناسب است.

۵.۱۲ بررسی داده‌های دور افتاده (پرت)

بر پایه‌ی شاخص تطبیق که در بخش قبل تشریح شد، می‌توان داده‌های دور افتاده (پرت) را مشخص کرد. داده‌ای که مقدار $I(\tilde{y}_i, \tilde{Y}_i)$ کوچکی داشته باشد، داده‌ی پرت محسوب می‌گردد. این که مقدار I از چه عددی کوچکتر باشد تا داده‌ی متناظر با آن را پرت تلقی کنیم، تا اندازه‌ای بستگی به نظر کاربر دارد.

مثال ۴.۱۲ مثال ۲.۱۲ را در نظر بگیرید. برای مدل بهینه (۱۴.۱۲) مقادیر $I(\tilde{y}_i, \tilde{Y}_i)$ در جدول ۵.۸ درج شده‌اند. بررسی این مقادیر نشان می‌دهد که مشاهدات با شماره‌های ۱۷، ۲۲، ۲۳ و ۲۴ را می‌توان داده‌های پرت محسوب کرد. لذا این مشاهدات را حذف نموده و یک مدل بهینه برای ۲۱ داده‌ی دیگر برازش می‌دهیم.
با انجام مراحلی مشابه با آنچه در مثال ۲.۱۲ بیان شد، مدل بهینه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\tilde{y} = (22/0176, 1/3176)_T - 0/2159x_1 + (2/4650, 0/4088)_T x_2$$

مقادیر شاخص $I(\tilde{y}_i, \tilde{Y}_i)$ برای مدل جدید در ستون سوم جدول ۵.۱۲ درج شده است. از مقایسه‌ی مقادیر شاخص I برای مدل اولیه و مدل جدید می‌توان نتیجه گرفت که برای نیمی از مشاهدات، شاخص I بهبود یافته است. و برای نیم دیگر نیز کاهش بسیار اندکی داشته است. در مجموع، متوسط شاخص I از مقدار ۰/۸۵ در مدل اولیه به مقدار ۰/۹۳ در مدل جدید افزایش یافته است.

جدول ۵.۱۲ نتایج مربوط به مثال ۴.۱۲

شماره مشاهده	$I(\tilde{y}_i, \tilde{Y}_i)$	$I_*(\tilde{y}_i, \tilde{Y}_i)$
۱	۰/۹۹۴۵	۰/۹۹۸۵
۲	۰/۲۷۴۴	۰/۷۸۶۲
۳	۰/۹۹۸۲	۰/۹۹۹۰
۴	۰/۹۹۵۸	۰/۹۹۳۴
۵	۰/۵۹۱۱	۰/۹۲۴۳
۶	۰/۲۲۷۶	۰/۷۴۴۳
۷	۱	۰/۹۹۷۲
۸	۰/۹۰۶۳	۰/۹۸۵۵
۹	۰/۵۳۱۱	۰/۸۰۱۴
۱۰	۰/۲۲۳۶	۰/۶۵۰۰
۱۱	۰/۹۱۰۴	۰/۹۶۹۴
۱۲	۰/۹۲۷۲	۰/۹۸۸۸
۱۳	۰/۹۴۷۳	۰/۹۹۴۱
۱۴	۰/۸۳۲۵	۰/۹۷۳۳
۱۵	۰/۶۷۴۹	۰/۹۲۳۸
۱۶	۰/۸۰۵۶	۰/۹۳۴۶
۱۷	۰/۰۸۳۳	----
۱۸	۰/۸۲۳۳	۰/۹۲۶۸
۱۹	۰/۹۶۱۵	۰/۹۹۷۵
۲۰	۰/۸۹۹۶	۰/۹۸۸۹
۲۱	۰/۹۶۷۹	۰/۹۸۷۸
۲۲	۰/۰۲۰۳	----
۲۳	۰/۰۵۳۳	----
۲۴	۰/۰۶۰۰	----
۲۵	۰/۹۹۹۹	۰/۹۲۷۰

۶.۱۲ نکات تکمیلی

۱. روش کمترین مربعات در رگرسیون فازی، توسط کلمینس [۵] و دیاموند [۸] در سال ۱۹۸۷ معرفی شد. این روش از جهات مختلفی بررسی و تعمیم داده شده است. برای نمونه، علاقمندان را به [۱ و ۳ و ۴ و ۶–۱۰ و ۱۲–۱۴ و ۱۶ و ۲۲] ارجاع می‌دهیم. مطالب این فصل مبتنی بر مراجع [۱۵ و ۲۳] بوده است.

۲. نوعی رگرسیون ناپارامتری (برای حالتی که مشاهدات متغیر پاسخ فازی باشد) توسط وانگ و همکاران [۲۱] بر اساس روش کمترین مربعات پیشنهاد شده است. ترابی و بهبودیان [۱۹] رگرسیون فازی را بر پایه‌ی معیار کمترین قدر مطلق خطا مطالعه کرده‌اند. همچنین، طاهری و کلکین نما [۱۸]، با معرفی یک متر جدید بر فضای اعداد فازی، شیوه‌ای مبتنی بر کمترین قدر مطلق خطا برای رگرسیون فازی ارائه نموده‌اند.

۳. برای ارزیابی نیکویی برازش در مدل‌های رگرسیون فازی شاخص‌های دیگری نیز به جز آنچه در بخش ۴.۱۲ مطرح شد، پیشنهاد شده‌اند. خواننده می‌تواند، برای نمونه، به [۱۷] مراجعه نماید (نیز رک به تمرین ۵.۱۲). بسیاری از این شاخص‌ها بر مفهوم اندازه شباهت بین دو مجموعه فازی مبتنی هستند. البته به نظر می‌رسد ارزیابی نیکویی برازش یک مدل رگرسیون فازی باید بر مفهوم فاصله بین دو عدد فازی مبتنی باشد.

معرفی و بررسی معیارها و شاخص‌های نیکویی برازش (در برخی متن‌ها: شاخص تطبیق) در مدل‌های رگرسیون فازی، هم در مدل‌های رگرسیون امکانی و هم در مدل‌های مبتنی بر شیوه‌ی کمترین مربعات، از موضوع‌هایی است که مستعد تحقیق بیشتر است.

۴. انتخاب یک اندازه برای فاصله بین دو عدد فازی (مانند تعریف ۱.۱۲) یک عامل تعیین کننده و مهم در روش کمترین مربعات فازی است. ویژگی‌هایی که هر تعریف برای فاصله بین دو عدد فازی دارد و سادگی محاسباتی (مانند قضیه ۱.۱۲ و قضیه ۲.۱۲ برای تعریف ۱.۱۲) نکات مؤثر در انتخاب یک اندازه برای فاصله بین دو عدد فازی است. درباره‌ی انواع تعریف‌ها برای فاصله‌ی بین دو عدد فازی می‌توان به [۱۴] مراجعه کرد.

۵. در مقدمه‌ی این فصل بیان شد که شیوه‌های رگرسیون کمترین مربعات در محیط فازی تنوع بسیاری دارد. یکی از عوامل این تنوع، دقیق یا نادقیق بودن مشاهدات مربوط به متغیر (های) توضیحی است. در حالتی که این مشاهدات نادقیق باشند، با فرض فازی بودن پارامترها، با مدل‌هایی مشتمل بر ضرب اعداد فازی روبرو هستیم. در این زمینه، شیوه‌هایی که در آن‌ها از عملگرهایی استفاده شود که شکل تابع حاصل از ضرب دو عدد فازی را حفظ کند، حایز اهمیت است. درباره‌ی این نوع مدل‌های رگرسیون فازی به [۲ و ۱۱] مراجعه نمایید.

تمرین‌های فصل دوازدهم

۱.۱۲ داده‌های جدول ۶.۱۲ را در نظر بگیرید. مدل رگرسیون y بر x را به‌صورت یک مدل با ضرایب فازی به‌دست آورید. توجه دارید که مشاهدات متغیر y، اعداد فازی مثلثی متقارن هستند.

جدول ۶.۱۲ داده‌های مربوط به تمرین ۱.۱۲

شماره داده	x	y
۱	۱۱/۵	$(۳۱,۳/۱)_T$
۲	۱۴/۷	$(۳۷,۳/۷)_T$
۳	۱۲/۱	$(۳۴,۳/۴)_T$
۴	۲۰/۹	$(۴۴,۴/۴)_T$
۵	۱۴/۵	$(۳۰,۳/۰)_T$
۶	۱۷/۳	$(۳۹,۳/۹)_T$
۷	۹/۲	$(۲۸,۲/۸)_T$

۲.۱۲ در تمرین ۱.۱۲، نیکویی برازش مدلی را که به‌دست آورده‌اید، بر پایه‌ی شاخص تطبیق I بررسی کنید.

۳.۱۲ جدول ۷.۱۲ شامل داده‌هایی مربوط به تحقیق خاک‌شناسی است که در مثال ۱.۱۲ تشریح شد. می‌خواهیم مقادیر متغیر SP (درصد رطوبت اشباع) را برحسب مقادیر $x_1 : SILT$ (درصد لای و لجن)، $x_2 : SAND$، و $x_3 : OM$ مدل‌سازی کنیم. مدل رگرسیون با ضرایب فازی y بر x_1 و x_2 و x_3 را به‌دست آورید. مشاهدات مربوط به y، اعداد فازی مثلثی متقارن هستند.

۴.۱۲ در تمرین ۳.۱۲، نیکویی برازش مدلی را که به‌دست آورده‌اید، بر پایه‌ی شاخص تطبیق I بررسی کنید. داده‌های پرت را مشخص کنید. آنها را حذف کنید و یک مدل جدید به داده‌ها برازش دهید. نیکویی برازش مدل جدید و تأثیر حذف داده‌های پرت را بررسی کنید.

جدول ۷.۱۲ داده‌های مربوط به تمرین ۳.۱۲

شماره مشاهده	x_1	x_2	x_3	y
۱	۴۵	۳۵	۰/۸۸	$(۳۸,۳/۸)_T$
۲	۴۲	۳۷	۱/۱۳	$(۴۱,۴/۱)_T$
۳	۴۳	۲۷	۱/۳۱	$(۴۷/۵,۴/۷۵)_T$
۴	۴۱	۲۹	۱/۹۸	$(۵۱,۵/۱)_T$
۵	۳۹	۳۸	۱/۰۲	$(۳۵,۳/۵)_T$
۶	۳۹	۳۲	۱/۲۹	$(۴۳,۴/۳)_T$
۷	۳۷	۲۹	۱/۵۲	$(۵۴,۵/۴)_T$
۸	۴۵	۱۸	۱/۳۳	$(۵۲,۵/۲)_T$
۹	۳۸	۴۰	۱/۷۱	$(۴۵,۴/۵)_T$
۱۰	۴۶	۲۸	۲/۰۰	$(۵۰,۵)_T$
۱۱	۴۰	۱۳	۱/۶۸	$(۵۸/۶,۵/۸۶)_T$
۱۲	۴۱	۱۹	۲/۱۵	$(۶۲,۶/۲)_T$
۱۳	۴۱	۳۱	۳/۵۲	$(۶۰,۶)_T$
۱۴	۴۲	۳۱	۲/۳۳	$(۵۲,۵/۲)_T$
۱۵	۵۰	۱۷	۱/۷۱	$(۵۲,۵/۲)_T$
۱۶	۵۳	۱۴	۱/۱۴	$(۴۹,۴/۹)_T$
۱۷	۴۴	۱۹	۰/۹۹	$(۴۹,۴/۹)_T$
۱۸	۴۳	۲۸	۱/۱۴	$(۴۴,۴/۴)_T$
۱۹	۴۴	۲۶	۱/۴۶	$(۴۹,۴/۹)_T$
۲۰	۴۲	۳۲	۱/۸۱	$(۵۰/۳,۵/۰۳)_T$
۲۱	۴۹	۱۰	۱/۳۸	$(۵۲,۵/۲)_T$
۲۲	۴۳	۳۸	۰/۸۴	$(۴۲,۴/۲)_T$
۲۳	۳۵	۴۹	۱/۴۸	$(۴۰,۴)_T$
۲۴	۴۴	۴۲	۱/۰۸	$(۳۷,۳/۷)_T$
۲۵	۱۴	۷۹	۰/۳۶	$(۲۱/۲,۲/۱۲)_T$

۵.۱۲ صادقپور و ژیان [۱۷] شاخص تطبیق زیر را برای بررسی نیکویی برازش در مدل‌های رگرسیون فازی پیشنهاد کرده‌اند

$$I_{SG}(\tilde{A},\tilde{B}) = \min\left\{\frac{Card(\tilde{A}\cap\tilde{B})}{Card(\tilde{A})}, \frac{Card(\tilde{A}\cap\tilde{B})}{Card(\tilde{B})}\right\}$$

که در آن

$$Card(\tilde{A}) = \begin{cases} \sum_x \tilde{A}(x) & \text{حالت گسسته} \\ \int_x \tilde{A}(x)dx & \text{حالت پیوسته} \end{cases}$$

الف) بررسی کنید که شاخص I_{SG} هر چهار ویژگی بیان شده در قضیه ۵.۱۲ را دارد.

ب) بررسی کنید که برای شاخص I_{SG}، ویژگی دو در قضیه ۵.۱۲ به‌صورت قوی‌تر زیر برقرار است

$$I_{SG}(\tilde{A},\tilde{B}) = ۱ \Leftrightarrow \tilde{A} = \tilde{B}$$

پ) بر پایه‌ی داده‌های جدول ۳.۱۲ و نتایج جدول ۴.۱۲، مقادیر $I_{SG}(\tilde{y}_i,\tilde{Y}_i)$ را به‌دست آورید و نیکویی برازش مدل رگرسیون فازی مربوطه را، بر اساس شاخص I_{SG}، بررسی نمایید.

۶.۱۲ بررسی کنید که تحت حالت کلی $x_{ij} \in R$، چگونه می‌توان نتایج مشابهی با قضیه‌های ۳.۱۲ و ۴.۱۲ به‌دست آورد.

منابع و مراجع

[۱] اخلاقی، سعید؛ تقی‌زاده کاخکی، حسین؛ ارقامی، ناصررضا (۱۳۸۳)؛ رگرسیون حداقل مربعات فازی، اندیشه آماری، شماره ۹: ۶۲–۵۳.

[۲] بزرگوار، تکتم؛ طاهری، سید محمود (۱۳۸۳)؛ رگرسیون کمترین مربعات فازی با استفاده از عملگرهای حافظ شکل، گزارش پنجمین کنفرانس سیستم‌های فازی ایران، دانشگاه امام حسین (ع)، ۶۶۰–۶۵۳.

[3] Bardossy, A., Hagaman, R., Duckstein, L., Bogardi, I. (1992), Fuzzy least squares regression and application to earthquake data, In: Kacprzyk, J., Fedrizzi, M. (Eds.), Fuzzy Regression Analysis, Omnitech Press, Warsaw, pp. 181-193.

[4] Bargiela, A., Pedrycz, W., Nakashima, T. (2007); Multiple regression with fuzzy data, Fuzzy Sets and Systems (to appear).

[5] Celmins, A. (1987); Least squares model fitting to fuzzy vector data, Fuzzy Sets and Systems, 22: 260-269.

[6] Celmins, A. (1992); Nonlinear least squares regression in fuzzy vector spaces, In: Kacprzyk, J., Fedrizzi, M. (Eds.), Fuzzy Regression Analysis, Omnitech Press, Warsaw, pp. 152-168.

[7] Coppi, R., D'Urso, P., Giordani, P., Santoro, A. (2006); Least squares estimation of a linear regression model with LR fuzzy response, Comput. Stat. and Data Anal., 51: 267-286.

[8] Diamond, P. (1987); Least squares fitting of several fuzzy variables, Proc. of the Second IFSA Congress, Tokyo, Japan, pp. 20-25.

[9] Diamond, P. (1988); Fuzzy least squares, Inform. Sci., 46: 141-157.

[10] Diamond, P., Korner, R. (1997); Extended fuzzy linear models and least square estimates, Comput. Math. Appl., 33: 15-32.

[11] Hong, D.H., Lee, S., Do, H.Y. (2001); Fuzzy least squares linear regression analysis using shape preserving operation, Inform. Sci., 138: 185-193.

[12] Kim, K.J., Moskowitz, H., Koksalan, M. (1996), Fuzzy versus statistical linear regression, Euro. J. Oper. Res., 92: 417-434.

[13] Krätschmer, V. (2004); Least squares estimation in linear regression models with vague concepts, In: Lopez-Diaz, M., et at. (Eds.), Soft Methodology and Random Information Systems, Springer, pp. 407-414.

[14] Ming. M., Menahem, F., Kandel, A. (1999); General fuzzy least squares, Fuzzy Sets and Systems, 88: 107-118.

[15] Mohammadi, J., Taheri, S.M. (2003); Pedomodels fitting with fuzzy least squares regression, Iranian J. Fuzzy Systems, 1 (2): 45-62.

[16] Näther, W., Körner, R. (2002); Linear regression with random fuzzy observations, In: Bertoluzza, C., et. al. (Eds.), Statistical Modeling, Analysis and Management of Fuzzy Data, Springer, pp. 282-305.

[17] Sadeghpour, B., Gien, D. (2002), A goodness of fit index to reliability analysis in fuzzy model, In: Grmela, A. (Ed.), Advances in Intelligent Systems, Fuzzy Systems, Evolutionary Computation, WSEAS Press, Greece, 78-83.

[18] Taheri, S.M., Kelkinnama, M. (2008); Fuzzy least absolutes regression, In: Proc. of the 4th International IEEE Conference on Intelligent Systems, Varna, Bulgaria.

[19] Torabi, H., Behboodian, J. (2007); Fuzzy least-absolute estimates in linear models, Commun. in Stat. (Theory and Methods), 36: 1935-1944.

[20] Wang, P. (1983); Fuzzy Sets and Its Applications, Publishing House of Shanghai Science and Technology, Shanghai.

[21] Wang, N., Zhang, W.X., Mei, C.L. (2007); Fuzzy nonparametric regression based on local linear smoothing technique, Inform. Sci., 177: 3882-3900.

[22] Wu, J.W., Jang, J.B., Tsai, T.R. (1996), Fuzzy weighted scaled coefficients in semi-parametric model, Annl. Inst. Stat. Math., 48: 97-110.

[23] Xu, R., Li, C. (2001), Multidimentional least-squares fitting with a fuzzy model, Fuzzy Sets and Systems, 119: 215-223.