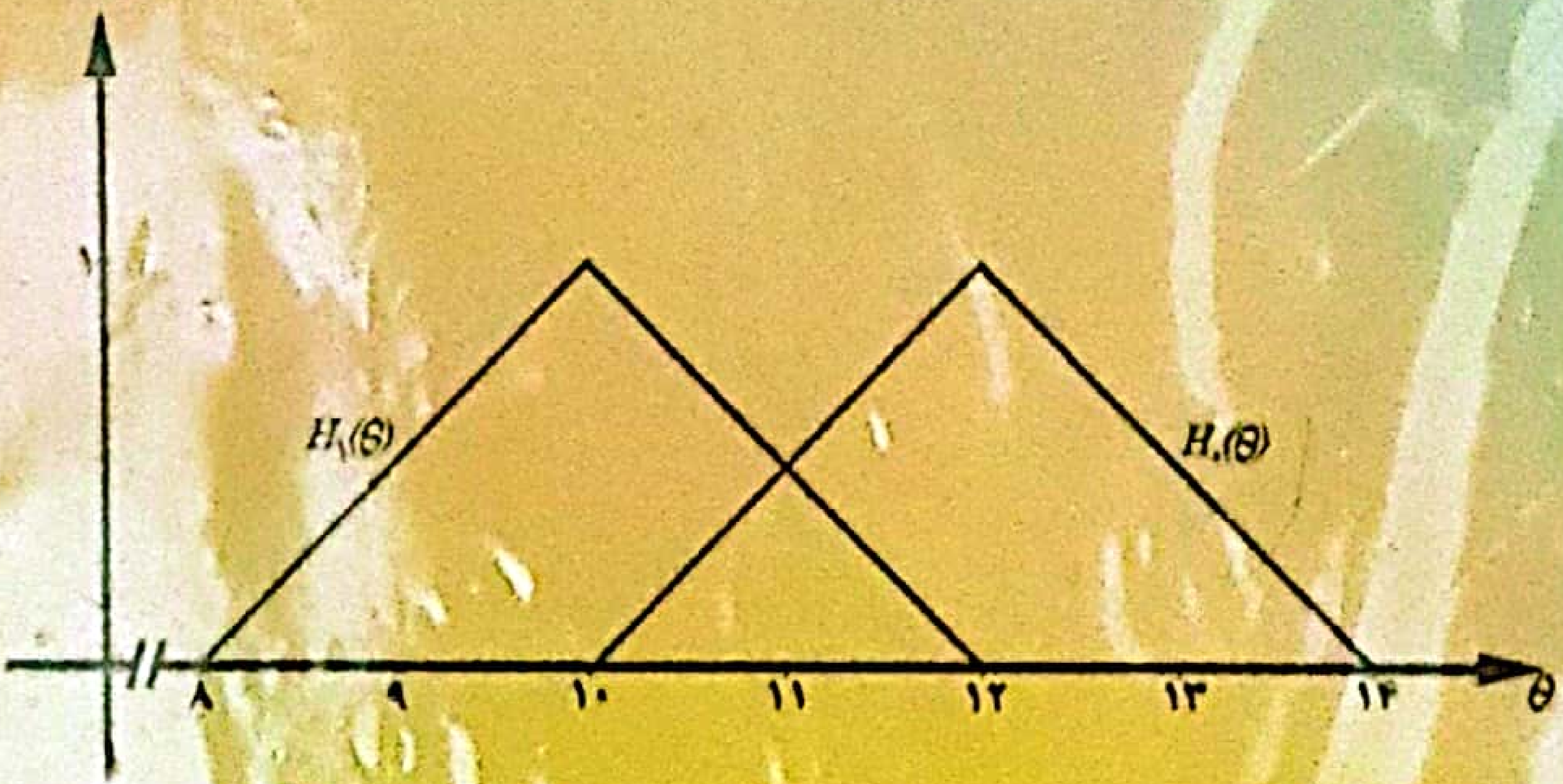
چاپ دوم

مقدمه‌ای بر احتمال و آمار فازی



سیدمحمود طاهری، ماشاالله ماشین‌چی

انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان
۳۶۸

پیش گفتار

هدف ما آن بوده است که یک متن مقدماتی درباره‌ی موضوع‌های رایج در احتمال و آمار فازی فراهم آوریم.

مطالب این کتاب، که در قالب درس‌های گوناگون در دانشگاه‌های صنعتی اصفهان و شهید باهنر کرمان تدریس شده است، می‌تواند اساس یک درس با عنوان احتمال و آمار فازی، یا مشابه آن، قرار گیرد. به علاوه، مطالب کتاب می‌تواند بر حسب نیاز مورد استفاده دانشجویان رشته‌های ریاضی، آمار، شاخه‌های مختلف مهندسی، مدیریت و کشاورزی قرار گیرد.

در فصل‌های اول و دوم، مروری بر مبانی نظریه مجموعه‌های فازی و حساب اعداد فازی (به اندازه لازم برای مطالعه‌ی سایر فصل‌ها) ارائه شده است. فصل‌های سوم تا هفتم شامل مباحثی مانند احتمال پیشامدهای فازی، توزیع‌های احتمال فازی، توزیع‌های امکان، امکان پیشامدهای فازی و همچنین مروری بر انواع اندازه‌های فازی (به‌عنوان رده‌ای بزرگ شامل انواعی از اندازه‌های عدم اطمینان) است. فصل هشتم به بعد در چارچوب آمار فازی و مدل‌سازی فازی است. فصل‌های ۸ تا ۱۰ شامل مباحثی در زمینه‌ی برآورد و آزمون فرضیه در محیط فازی است. در فصل‌های ۱۱ و ۱۲ نیز مبانی دو رویکرد اصلی به رگرسیون فازی (رویکرد امکانی و رویکرد مبتنی بر روش کمترین مربعات) تشریح می‌شوند.

از دانشجویانی که در شکل‌گیری مطالب کتاب نقش داشته‌اند و یا تذکرات سازنده‌ای هنگام تدریس متن اولیه کتاب ابراز داشته‌اند، قدردانی می‌کنیم. خانم زهرا مانی و آقای جعفر اسماعیلی تایپ دشوار کتاب را به نحو احسن انجام دادند و آقایان مهدی بهرامی و جعفر اسماعیلی رسم شکل‌های کتاب را به عهده داشتند، که تلاش آن‌ها شایسته کمال سپاسگزاری است.

داوران محترم، متن نخستین کتاب را به دقت مطالعه کرده و نظرات بسیار سازنده‌ای درباره‌ی ساختار و محتوای کتاب طرح نمودند که در تدوین نسخه‌ی نهایی مورد توجه قرار گرفت. بدین وسیله از داوران گرامی نهایت سپاس را اعلام می‌داریم.

از مسئولین محترم انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان که از چاپ کتاب استقبال نمودند سپاسگزاری می‌نماییم. نیز لازم است از حمایت قطب روش‌های جبری و کاربردها (دانشگاه صنعتی اصفهان) و قطب سیستم‌های فازی و کاربردهای آن (دانشگاه شهید باهنر کرمان)، برای آماده‌سازی کتاب جهت چاپ، تشکر نماییم.
نویسندگان، از پیشنهادها و یادآوری‌های همکاران و دانش‌پژوهان در بهبود مطالب کتاب استقبال می‌کنند.

ای پروردگار ما،
ما را، هم از نزد خویش، مهری بخش
و ما را در کارمان رستگاری آر
(سوره کهف، آیه ۱۰)

سید محمود طاهری

دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی اصفهان
Taheri@cc.iut.ac.ir

ماشاءا... ماشین‌چی

دانشکده ریاضی و کامپیوتر
دانشگاه شهید باهنر کرمان
Mashinchi@mail.uk.ac.ir

مهر ۱۳۸۶

فهرست مندرجات

فصل ۱

مروری بر مجموعه‌های فازی

مقدمه

در این فصل و فصل دوم، مروری کوتاه بر مفاهیم اصلی نظریه مجموعه‌های فازی انجام می‌شود. بدین ترتیب خواننده می‌تواند، بدون نیاز به مرجعی دیگر، مطالب فصل‌های سوم تا دوازدهم را دنبال کند؛ گرچه برای مطالعه‌ی عمیق‌تر در هر مورد باید به متونی که در زمینه نظریه مجموعه‌های فازی و کاربردهای آن نگاشته شده است مراجعه نمود. در نکات تکمیلی پایان هر فصل، به مراجع مربوطه اشاره شده است.
فصل حاضر شامل مروری است بر مفهوم مجموعه و روابط بین مجموعه‌ها، معرفی مفهوم مجموعه فازی، تابع عضویت، عملگرهای مجموعه‌ای بر مجموعه‌های فازی، $\alpha-$ برش‌ها و سرانجام قضیه نمایش.

۱.۱ مروری بر مفهوم مجموعه و روابط بین مجموعه‌ها

پیش از ورود به مبحث مجموعه‌های فازی، مناسب است که مروری بر مفهوم مجموعه در حالت معمولی و روابط بین مجموعه‌ها ارائه شود.

تعریف ۱.۱ گردایه‌ای معین از اشیاء را مجموعه می‌نامند. اشیاء این گردایه، اعضا یا عناصر مجموعه نامیده می‌شوند.

مثال ۱.۱ اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۱۰، تشکیل یک مجموعه می‌دهند. اگر این مجموعه را با A نشان دهیم، داریم $A = \{۱, ۲, \cdots, ۱۰\}$.

در هر موضوع، مجموعه‌ی شامل تمام عناصر مورد بحث را مجموعه مرجع نامیده با U یا X نشان می‌دهند. گاهی یک مجموعه مانند A را با یک ویژگی کاملاً معیّن (خوش تعریف) مشخص می‌کنند. یعنی اگر P یک ویژگی خوش تعریف در مورد عناصر X باشد که مجموعه A توسط آن ویژگی مشخص می‌شود، می‌نویسند $A = \{x \in X | P(x)\}$.

مثال ۲.۱ در مثال ۱.۱، ویژگی کوچکتر یا مساوی ۱۰، یک ویژگی خوش تعریف است. لذا مجموعه A را می‌توان این گونه نیز نوشت $A = \{x \in N | x \leq 10\}$.

مثال ۳.۱ اگر X مجموعه انسان‌ها و P ویژگی بلندتر از ۱۸۰ سانتی‌متر باشد، آنگاه $A = \{x \in X | P(x)\}$ عبارت است از مجموعه تمام انسان‌هایی که ویژگی P را دارند، یعنی قد آن‌ها از ۱۸۰ سانتی‌متر بیشتر است.

تعریف ۲.۱ الف) گوییم مجموعه A زیرمجموعه B است، اگر هر عضو A عضوی از B باشد. در این صورت می‌نویسیم $A \subseteq B$. دو مجموعه A و B را مساوی گوییم و می‌نویسیم $A = B$ اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

ب) متمم مجموعه A (نسبت به X) که با A^c نشان داده می‌شود، عبارت است از مجموعه عناصری از X که در A نیستند. یعنی $A^c = \{x \in X | x \notin A\}$.

پ) اشتراک دو مجموعه A و B که با $A \cap B$ نشان داده می‌شود، عبارت است از مجموعه عناصری که هم در A و هم در B عضو باشند. یعنی $A \cap B = \{x | x \in A,\ x \in B\}$.

ت) اجتماع دو مجموعه A و B که با $A \cup B$ نشان داده می‌شود، عبارت است از مجموعه عناصری که در A یا در B (یا هر دو) عضو باشند. یعنی $A \cup B = \{x | x \in A \text{ یا } x \in B\}$.

گزاره ۱.۱ عملگرهای متمم، اشتراک و اجتماع دارای ویژگی‌های زیر هستند.

۱) برگشت‌پذیری $(A^c)^c = A$

۲) جابه‌جایی $A \cap B = B \cap A \ , \ A \cup B = B \cup A$

۳) شرکت‌پذیری $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \ , \ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

۴) توزیع‌پذیری $(A \cap B) \cup C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \ , \ (A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

۵) خودتوانی $A \cap A = A \ , \ A \cup A = A$

۶) جذب $A \cap (A \cup B) = A \ , \ A \cup (A \cap B) = A$

۷) شمول و طرد $A \cup A^c = X \ , \ A \cap A^c = \emptyset$

۸) قوانین دمورگان $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \ , \ (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

افراز یک مجموعه

تعریف ۳.۱ گوییم مجموعه‌های غیرتهی A_1، A_2، ... و A_n از مجموعه مرجع X یک افراز برای X هستند، اگر در دو شرط زیر صدق کنند

۱) $A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j$

۲) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$

مثال ۴.۱ اگر $X = [0, \infty)$ مجموعه مرجع طول عمر یک نوع لامپ باشد، آنگاه مجموعه‌های زیر تشکیل یک افراز برای طول عمر لامپ می‌دهند

$$A_1 = [0, 500)\ ,\ A_2 = [500, 1500)\ ,\ A_3 = [1500, 5000)\ ,\ A_4 = [5000, \infty)$$

نکته ۱.۱ در عمل، در بسیاری از موارد ویژگی مورد بحث، یک ویژگی دقیق و خوش تعریف نیست. در این موارد، در تعیین عناصر مجموعه‌ی متناظر با آن ویژگی، دچار مشکل می‌شویم. مثلاً در هیچ یک از حالت‌های زیر ویژگی P خوش تعریف نیست.

الف) X مجموعه اعداد طبیعی و P ویژگی خیلی کوچک‌تر از ۱۰ بودن،

ب) X مجموعه انسان‌ها و P ویژگی بلند قد بودن،

پ) X مجموعه زنان و P ویژگی زیبا بودن،

ت) X مقادیر درجه حرارت هوا و P ویژگی گرم بودن،

ث) X مجموعه مقادیر پارامتر نسبت در توزیع دوجمله‌ای و P ویژگی بسیار کوچک بودن،

ج) X مجموعه مقادیر شوری خاک در یک ناحیه و P ویژگی حدوداً ۱۲/۵۰ بودن.

در هیچ یک از مثال‌های بالا، نمی‌توان عناصر مجموعه A متناظر با ویژگی P را دقیقاً تعیین نمود. در این موارد با نوعی عدم قطعیت روبرو هستیم که مربوط به عدم مرزبندی دقیق مفاهیم است. این عدم دقت ربطی به نامعلوم بودن وقوع یک پیشامد (عدم قطعیت تصادفی) مانند آنچه در نظریه احتمال بیان می‌شود، ندارد. بلکه به خوش تعریف نبودن مفاهیم و مبهم بودن آن‌ها باز می‌گردد. بدیهی است که اگر این نوع عدم قطعیت‌ها را در نظر نگیریم، و مواردی را که مثلاً در بندهای بالا برشمردیم از دامنه‌ی کار خارج سازیم، قادر به مدل‌سازی و بررسی بخش وسیعی از آنچه در تفکر و زبان انسان وجود دارد نیستیم. برای پیدا کردن راهکار مناسب مجدداً به مفهوم مجموعه معمولی برمی‌گردیم و آن را بیشتر (و این بار از طریق تابع نشانگر) بررسی می‌کنیم.

۲.۱ تابع نشانگر

یک روش مفید در تعریف و نشان دادن یک مجموعه، استفاده از تابع نشانگر است.

تعریف ۴.۱ فرض کنید A یک زیرمجموعه از مجموعه مرجع X باشد. تابع نشانگر A به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$I_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases} \qquad (۱.۱)$$

دقت دارید که دامنه‌ی تابع نشانگر، مجموعه مرجع، و برد آن مجموعه دو عضوی $\{۰, ۱\}$ است. یعنی $I_A(x) : X \to \{۰, ۱\}$. واضح است که هر مجموعه، یک تابع نشانگر دارد و بالعکس هر تابع به‌صورت (۱.۱) دقیقاً یک مجموعه را تعریف و مشخص می‌کند.

مثال ۵.۱ اگر $X = \{۱, ۲, \ldots, ۶, ۷\}$ و $A = \{۲, ۴, ۷\}$، آنگاه

$$I_A(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۲, ۴, ۷ \\ ۰ & x = ۱, ۳, ۵, ۶ \end{cases}$$

مثلاً $I_A(۴) = ۱$ و $I_A(۵) = ۰$.

نکته ۲.۱ روش دیگر برای تعریف و نشان دادن یک مجموعه، تعریف مجموعه به‌صورت زوج‌های مرتب و بر پایه‌ی مقادیر تابع نشانگر است. مثلاً برای مجموعه A در مثال بالا می‌نویسیم

$$A = \{(۱, ۰), (۲, ۱), (۳, ۰), (۴, ۱), (۵, ۰), (۶, ۰), (۷, ۱)\}$$

هم‌چنین یک روش دیگر در نمایش یک مجموعه با استفاده از مقادیر تابع نشانگر، این گونه است که همه‌ی اعضای مجموعه مرجع را با مشخص کردن مقدار تابع نشانگر هر عضو نمایش دهیم. برای مثال بالا می‌نویسیم

$$A = \left\{\frac{۰}{۱}, \frac{۱}{۲}, \frac{۰}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۰}{۵}, \frac{۰}{۶}, \frac{۱}{۷}\right\}$$

اهمیت توابع نشانگر از جمله در این نکته است که عملگرهای مجموعه‌ای را می‌توانیم برحسب توابع نشانگر بیان کنیم. رابطه زیر مجموعه بودن به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$A \subseteq B \Leftrightarrow I_A(x) \leq I_B(x) \quad \forall x \in X$$

هم‌چنین تعریف عملگرهای متمم، اشتراک و اجتماع نیز با استفاده از توابع نشانگر بسیار ساده است: برای هر x از X داریم

$$\begin{aligned} I_{A^c}(x) &= ۱ - I_A(x) \\ I_{A\cap B}(x) &= I_A(x) \wedge I_B(x) = \min[I_A(x), I_B(x)] \\ I_{A\cup B}(x) &= I_A(x) \vee I_B(x) = \max[I_A(x), I_B(x)] \end{aligned}$$

مثال ۶.۱ فرض کنید $X = \{۱, ۲, \ldots, ۷\}$ و

$$A = \{۲, ۴, ۷\} \quad , \quad B = \{۵, ۶, ۷\}$$

در این‌صورت

$$I_A(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۲, ۴, ۷ \\ ۰ & x = ۱, ۳, ۵, ۶ \end{cases} \quad \text{و} \quad I_B(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۵, ۶, ۷ \\ ۰ & x = ۱, ۲, ۳, ۴ \end{cases}$$

بنابراین

$$I_{A^c}(x) = ۱ - I_A(x) = \begin{cases} ۰ & x = ۲, ۴, ۷ \\ ۱ & x = ۱, ۳, ۵, ۶ \end{cases}$$

و این یعنی $A^c = \{۱, ۳, ۵, ۶\}$. هم‌چنین، برای نمونه

$$\begin{aligned} I_{A\cap B}(۲) &= \min[I_A(۲), I_B(۲)] = \min[۱, ۰] = ۰ \\ I_{A\cup B}(۲) &= \max[I_A(۲), I_B(۲)] = \max[۱, ۰] = ۱ \end{aligned}$$

پس $۲ \in A \cup B$ ولی $۲ \notin A \cap B$.

۳.۱ مجموعه‌های فازی

در بخش پیشین گفته شد که یک مجموعه معمولی، با یک ویژگی دقیق و معیّن مشخص می‌شود. اگر یک عضو از مجموعه مرجع، آن ویژگی را دارا باشد، عضو مجموعه‌ی مورد نظر است و اگر فاقد آن ویژگی باشد در مجموعه عضو نیست. مثلاً اگر مجموعه مقادیر ممکن برای طول قد انسان‌ها $X = [۰, ۲۵۰]$ باشد، و P ویژگی بلندتر از ۱۸۰ سانتی‌متر، آنگاه P یک ویژگی دقیق است که یک مجموعه مانند A را تعریف می‌کند که عبارت است از انسان‌های با قد بیشتر از ۱۸۰ سانتی‌متر. اکنون اگر بخواهیم درباره‌ی انسان‌های بلند قد گفتگو کنیم، با یک ویژگی نادقیق و مبهم سر و کار داریم. این که چه انسان‌هایی بلند قد هستند و کدام‌ها نیستند، یک موضوع نادقیق و مبهم است. به عبارت دیگر عضویت یا عدم عضویت افراد در گردایه‌ی انسان‌های بلند قد قطعی و مشخص نیست. مثلاً آیا یک فرد با ۱۷۰ سانتی‌متر قد بلند قد است؟ با ۱۸۰ سانتی‌متر چطور؟ با ۱۹۰ سانتی‌متر چطور؟

نکته‌ی مهم آن است که بیشتر مفاهیمی که در زندگی روزمره به کار می‌بریم و بر اساس آن‌ها استدلال انجام می‌دهیم و تصمیم‌گیری می‌کنیم، مفاهیمی نادقیق هستند و

مجموعه‌هایی با کران‌های تقریبی می‌باشند. مثلاً لامپ‌های با طول عمر زیاد، شوری خاک حدوداً ۱۲/۴، ضریب هوشی پایین، مسافت‌های طولانی، نرخ تورم بالا، مقاومت کششی زیاد، تاثیر کم دارو، فشار خون بسیار بالا، همگی از این نوع مفاهیم و مجموعه‌ها هستند.

نظریه مجموعه‌های فازی، نظریه‌ای برای صورت بندی و تجزیه و تحلیل این گونه مفاهیم است. برای توضیح مفهوم مجموعه فازی، مثال بالا را پی می‌گیریم. در مثال بالا هر مقدار عددی طول قد یا بیشتر از ۱۸۰ است یا نیست و لذا مقدار تابع نشانگر برای هر x از $[0, 250]$ یا صفر است (عدم تعلق x به A) یا یک (تعلق x به A). اکنون اجازه می‌دهیم که تابع نشانگر بتواند هر عددی را از بازه $[0, 1]$ اختیار کند. در این صورت می‌توانیم به مقادیر بزرگ طول قد اعداد نزدیک ۱ متناظر کنیم (یعنی تعلق بیشتر به مجموعه انسان‌های بلند قد) و به مقادیر کوچک طول قد اعداد نزدیک ۰ را متناظر کنیم (یعنی تعلق کمتر به مجموعه انسان‌های بلند قد). به این ترتیب به جای آنکه بگوییم یک شخص با طول قد ۱۸۳ سانتی‌متر بلند قد است یا بلند قد نیست یا آنکه در این باره ساکت باشیم، می‌گوییم وی با درجه‌ای، مثلاً ۰/۷، بلند قد محسوب می‌شود. به سخن دیگر به جای تعلق قطعی یا عدم تعلق قطعی، می‌گوییم وی به میزان ۰/۷ عضو مجموعه‌ی انسان‌های بلند قد است. واضح است که اساس کار، چیزی نیست جز گسترش مفهوم تابع نشانگر (که یک تابع با برد $\{0, 1\}$ است) به یک تابع با برد $[0, 1]$.

تعریف ۵.۱ یک زیرمجموعه فازی (ازین پس به کوتاهی: مجموعه فازی) از مجموعه مرجع X، توسط یک تابع $\mu_A(x) : X \to [0, 1]$ به نام تابع عضویت مشخص می‌شود که در آن برای هر x از X، مقدار $\mu_A(x)$ میزان عضویت x در مجموعه فازی A را نشان می‌دهد.

نکته ۳.۱ دقت می‌کنید که دیگر نگران آن نیستیم که ویژگی P که یک مجموعه فازی را مشخص می‌کند، حتماً خوش تعریف باشد. کافی است یک تابع عضویت را در نظر بگیریم که رفتار و مقادیر آن، توصیف کننده‌ی ویژگی P باشد.

مثال ۷.۱ فرض کنید $X = \{1, 2, \ldots, 7\}$. می‌خواهیم یک مجموعه فازی تعریف کنیم که اعضای آن ویژگی نادقیق کوچک را داشته باشند. برای مدل‌سازی این مجموعه کافی است تابع عضویت مجموعه فازی را مشخص کنیم. تعیین این تابع بستگی به نظر

تصمیم گیرنده دارد. مثلاً یک تابع عضویت برای مدل سازی مفهوم فوق این گونه است

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0.9 & x = 2 \\ 0.7 & x = 3 \\ 0.5 & x = 4 \\ 0.3 & x = 5 \\ 0.1 & x = 6 \\ 0 & x = 7 \end{cases}$$

مجموعه فازی A را به‌صورت زیر نیز نمایش می‌دهیم

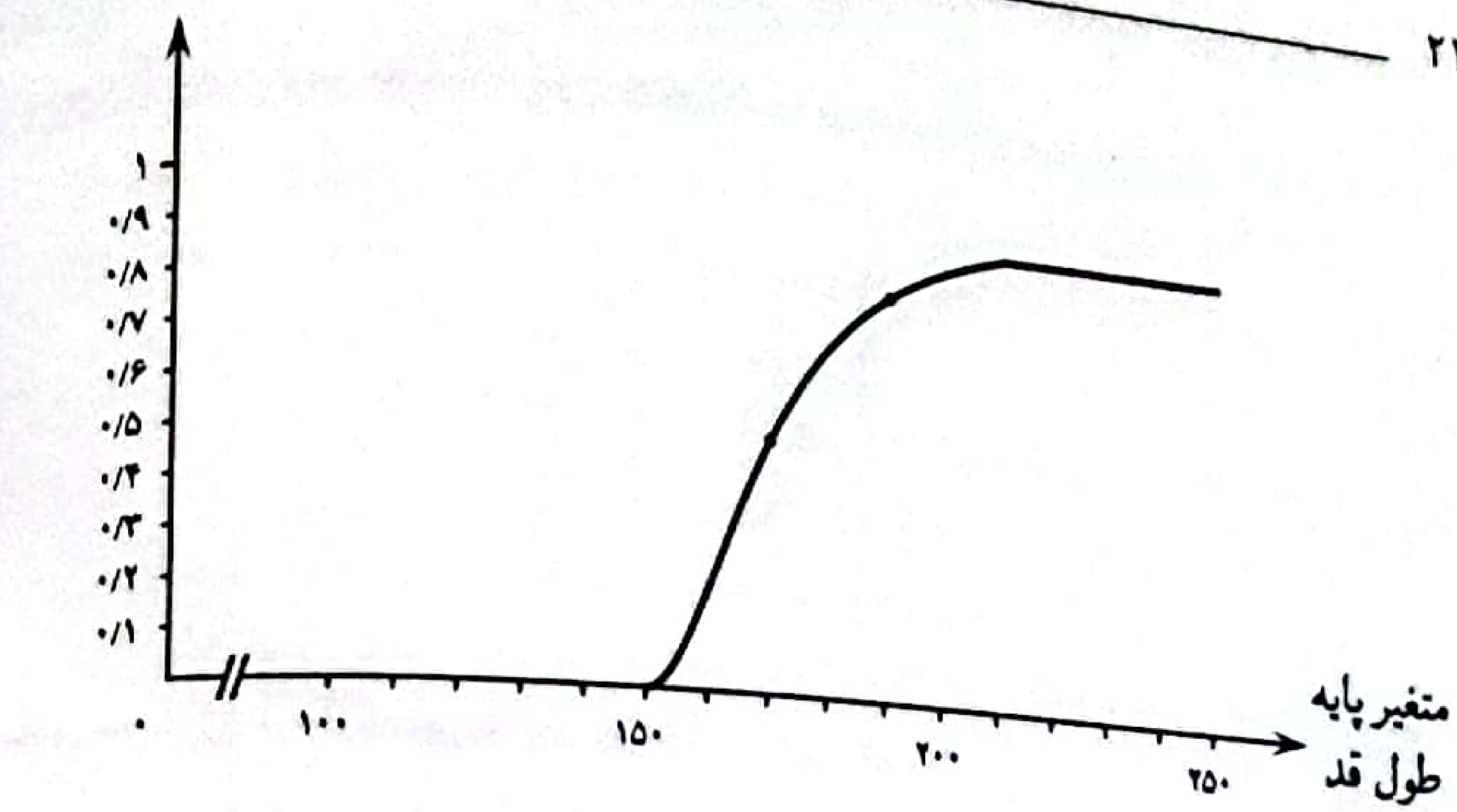
$$A = \{(1, 1), (2, 0.9), (3, 0.7), (4, 0.5), (5, 0.3), (6, 0.1), (7, 0)\}$$

$$A = \left\{\frac{1}{1}, \frac{0.9}{2}, \frac{0.7}{3}, \frac{0.5}{4}, \frac{0.3}{5}, \frac{0.1}{6}, \frac{0}{7}\right\}$$

برای مثال $\mu_A(3) = 0.7$ بدین معنی است که از نظر تصمیم گیرنده عدد ۳ به اندازه ۰/۷ به مجموعه فازی اعداد کوچک تعلق دارد. به سخن دیگر از نظر وی گزاره ۳ عددی کوچک است به اندازه ۰/۷ درست است. بدیهی است که افراد مختلف ممکن است دیدگاه‌های گوناگونی درباره‌ی مفهوم کوچک داشته باشند و هر فرد مفهوم کوچک را به نوع متفاوتی مدل سازی کند.

مثال ۸.۱ فرض کنید $X = [0, 250]$ مجموعه مقادیر ممکن طول قد انسان‌ها باشد. مجموعه فازی افراد بلند قد، A، را می‌توان با تابع عضویت زیر مدل سازی کرد

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x < 150 \\ 2\left(\frac{x-150}{60}\right)^2 & 150 \leq x < 180 \\ 1 - 2\left(\frac{210-x}{60}\right)^2 & 180 \leq x < 210 \\ 1 & 210 \leq x \end{cases}$$

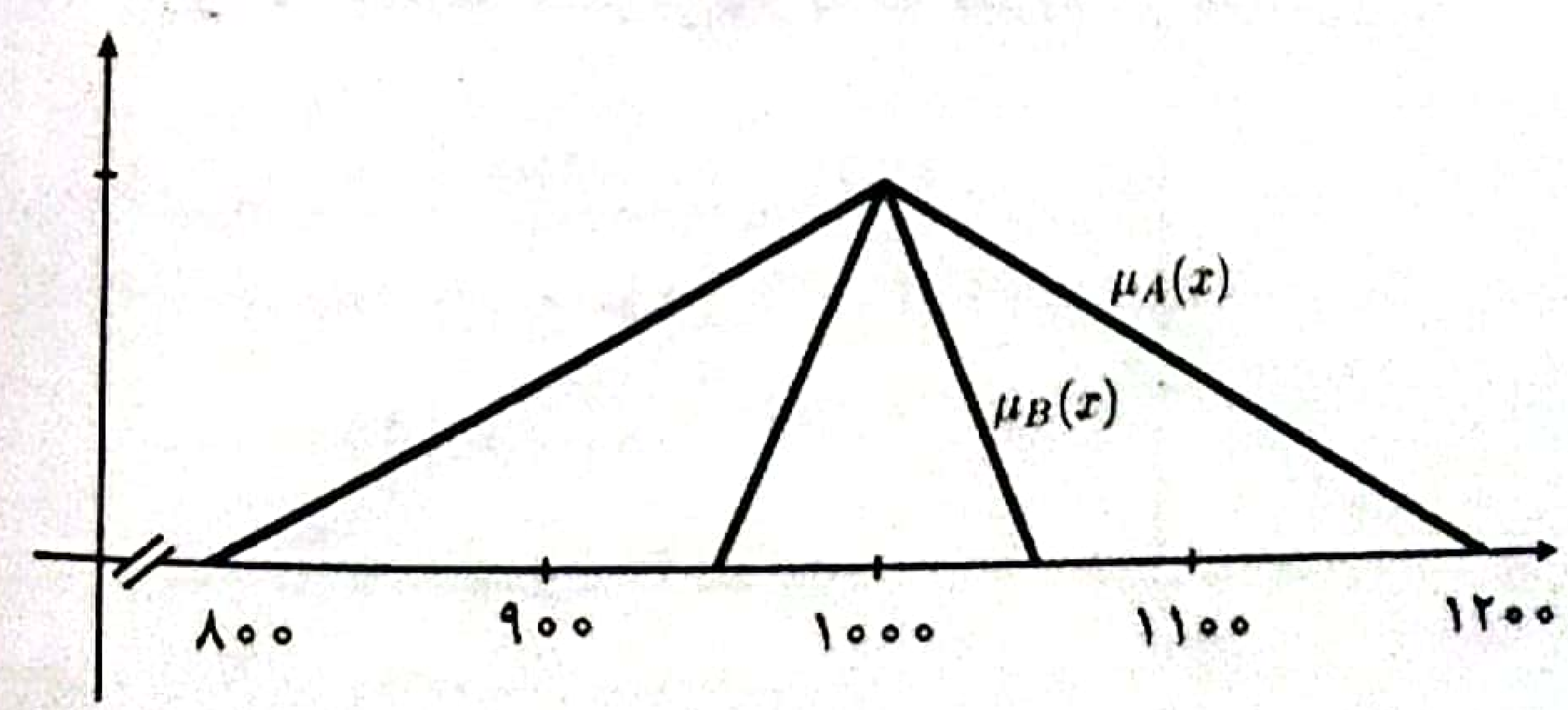


شکل ۱.۱ نمودار تابع عضویت مجموعه فازی افراد بلند قد در مثال ۸.۱

مثال ۹.۱ فرض کنید $X = [0,\infty)$ مجموعه مقادیر ممکن طول عمر یک نوع لامپ (برحسب ساعت) باشد. مجموعه فازی A توصیف کننده طول عمر حدوداً ۱۰۰۰ و مجموعه فازی B توصیف کننده طول عمر بسیار نزدیک به ۱۰۰۰ را می‌توان با توابع عضویت زیر تعریف کرد (شکل ۲.۱)

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-800}{200} & 800 \le x < 1000 \\ \frac{1200-x}{200} & 1000 \le x < 1200 \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \frac{x-950}{50} & 950 \le x < 1000 \\ \frac{1050-x}{50} & 1000 \le x < 1050 \end{cases}$$



شکل ۲.۱ نمودار توابع عضویت مجموعه‌های فازی مثال ۹.۱

عملگرهای مجموعه‌ای

عملگرهای مجموعه‌ای برای مجموعه‌های فازی به‌صورت یک تعمیم طبیعی این عملگرها برای مجموعه‌های معمولی تعریف می‌شوند. در ادامه فرض می‌شود که X مجموعه مرجع و A، B، ... مجموعه‌های فازی از X هستند.

تذکر: از این پس، برای کوتاهی، به جای $\mu_A(x)$ می‌نویسیم $A(x)$. همچنین در حالت گسسته، x هایی را که برای آن‌ها $A(x) = 0$ نخواهیم نوشت.

تعریف ۶.۱ گوییم مجموعه فازی A، زیرمجموعه‌ی مجموعه فازی B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$، اگر برای هر $x \in X$، $A(x) \le B(x)$. دو مجموعه فازی A و B را مساوی گوییم و می‌نویسیم $A = B$، اگر برای هر $x \in X$، $A(x) = B(x)$.

تعریف ۷.۱ مجموعه فازی A^c، متمم مجموعه فازی A، توسط تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$A^c(x) = 1 - A(x) \ , \quad \forall x \in X$$

مثال ۱۰.۱ در مثال ۷.۱، متمم مجموعه فازی A، عبارت است از

$$A^c = \left\{\frac{0}{1}, \frac{0.1}{2}, \frac{0.3}{3}, \frac{0.5}{4}, \frac{0.7}{5}, \frac{0.9}{6}, \frac{1}{7}\right\}$$

مجموعه A^c توصیف کننده مفهوم غیرکوچک است.

مثال ۱۱.۱ در مثال ۹.۱، مجموعه فازی B زیرمجموعه‌ی مجموعه فازی A است.

تعریف ۸.۱ الف) اشتراک دو مجموعه فازی A و B به‌صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$(A \cap B)(x) = \min[A(x), B(x)] \ , \quad \forall x \in X$$

ب) اجتماع دو مجموعه فازی A و B به‌صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$(A \cup B)(x) = \max[A(x), B(x)] \ , \quad \forall x \in X$$

نکته ۴.۱ اگر k یک مجموعه اندیس گذار باشد و A_i ها، $i \in k$، مجموعه‌های فازی از X باشند، آنگاه $\bigcap_{i\in k} A_i$ و $\bigcup_{i\in k} A_i$ به‌صورت مجموعه‌های فازی با توابع عضویت زیر تعریف می‌شوند

$$(\bigcap_{i\in k} A_i)(x) = \inf\{A_i(x)\ ,\ i\in k\}$$
$$(\bigcup_{i\in k} A_i)(x) = \sup\{A_i(x)\ ,\ i\in k\}$$

مثال ۱۲.۱ فرض کنید $(0,\infty)$ مجموعه مقادیر ممکن طول عمر یک نوع لامپ برحسب ساعت باشد. اگر مجموعه فازی A بیانگر طول عمر کم و مجموعه فازی B بیانگر طول عمر حدوداً ۱۰۰۰ با توابع عضویت زیر باشند

$$A(x) = \begin{cases} \frac{1500-x}{1500} & x < 1500 \\ 0 & x \geq 1500 \end{cases}$$

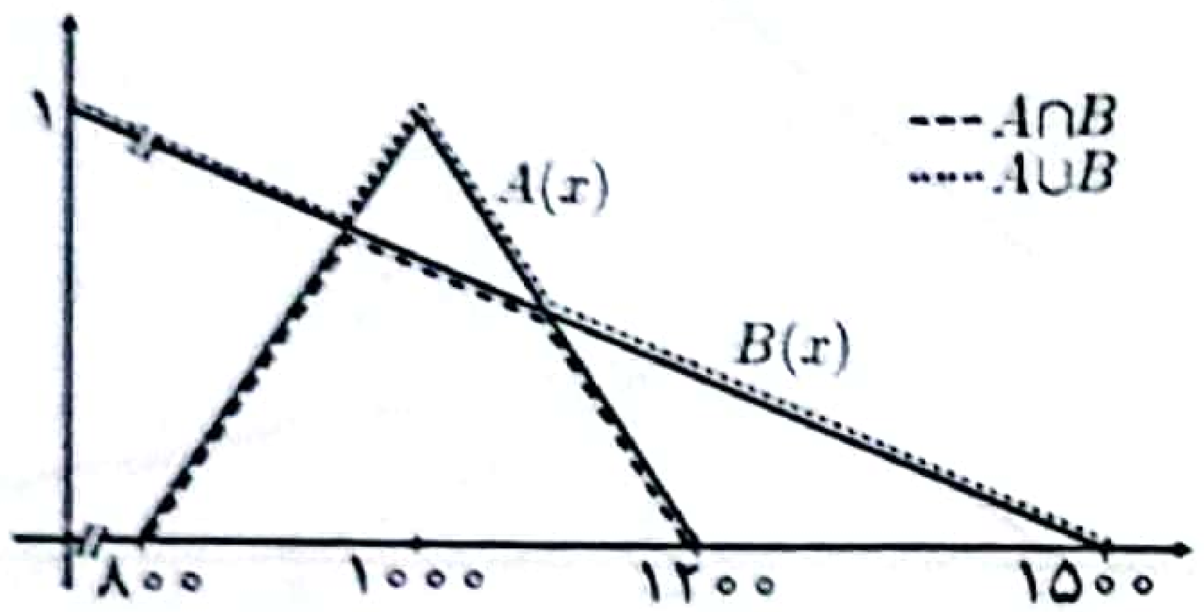
$$B(x) = \begin{cases} \frac{x-800}{200} & 800 \leq x < 1000 \\ \frac{1200-x}{200} & 1000 \leq x < 1200 \end{cases}$$

آنگاه

$$(A\cap B)(x) = \min[A(x), B(x)] = \begin{cases} 0 & x < 800 \\ \frac{x-800}{200} & 800 \leq x < 882/4 \\ \frac{1500-x}{1500} & 882/4 \leq x < 1153/8 \\ \frac{1200-x}{200} & 1153/8 \leq x < 1200 \\ 0 & 1200 \leq x \end{cases}$$

$$(A\cup B)(x) = \max[A(x), B(x)] = \begin{cases} \frac{1500-x}{1500} & 0 \leq x < 882/4 \\ \frac{x-800}{200} & 882/4 \leq x < 1000 \\ \frac{1200-x}{800} & 1000 \leq x < 1153/8 \\ \frac{1500-x}{1500} & 1153/8 \leq x < 1500 \\ 0 & 1500 \leq x < 1500 \end{cases}$$

نمودار توابع عضویت A، B، $A\cap B$ (یعنی طول عمر کم و حدوداً ۱۰۰۰ ساعت)، و $A\cup B$ (یعنی طول عمر کم یا حدوداً ۱۰۰۰ ساعت) در شکل ۳.۱ رسم شده‌اند.



شکل ۳.۱ نمودار توابع عضویت مجموعه‌های فازی در مثال ۱۲.۱

گزاره ۲.۱ عملگرهای متمم، اشتراک و اجتماع برای مجموعه‌های فازی (به گونه‌ای که در تعریف‌های ۷.۱ و ۸.۱ ارائه شدند) در تمام ویژگی‌های بیان شده در گزاره ۱.۱ (به غیر از ویژگی شمول و طرد) صدق می‌کنند.

گزاره بالا نشان می‌دهد که تعریف‌های ۷.۱ و ۸.۱، تعریف‌های مناسبی برای متمم، اشتراک و اجتماع هستند (دست کم به لحاظ برقرار بودن برخی روابط). در عین حال روش‌های دیگری نیز برای تعریف این عملگرها، به ویژه اشتراک و اجتماع، ارائه شده‌اند. یکی از روش‌های جایگزین در تعریف اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی استفاده از عملگرهای ضرب و جمع احتمالی است.

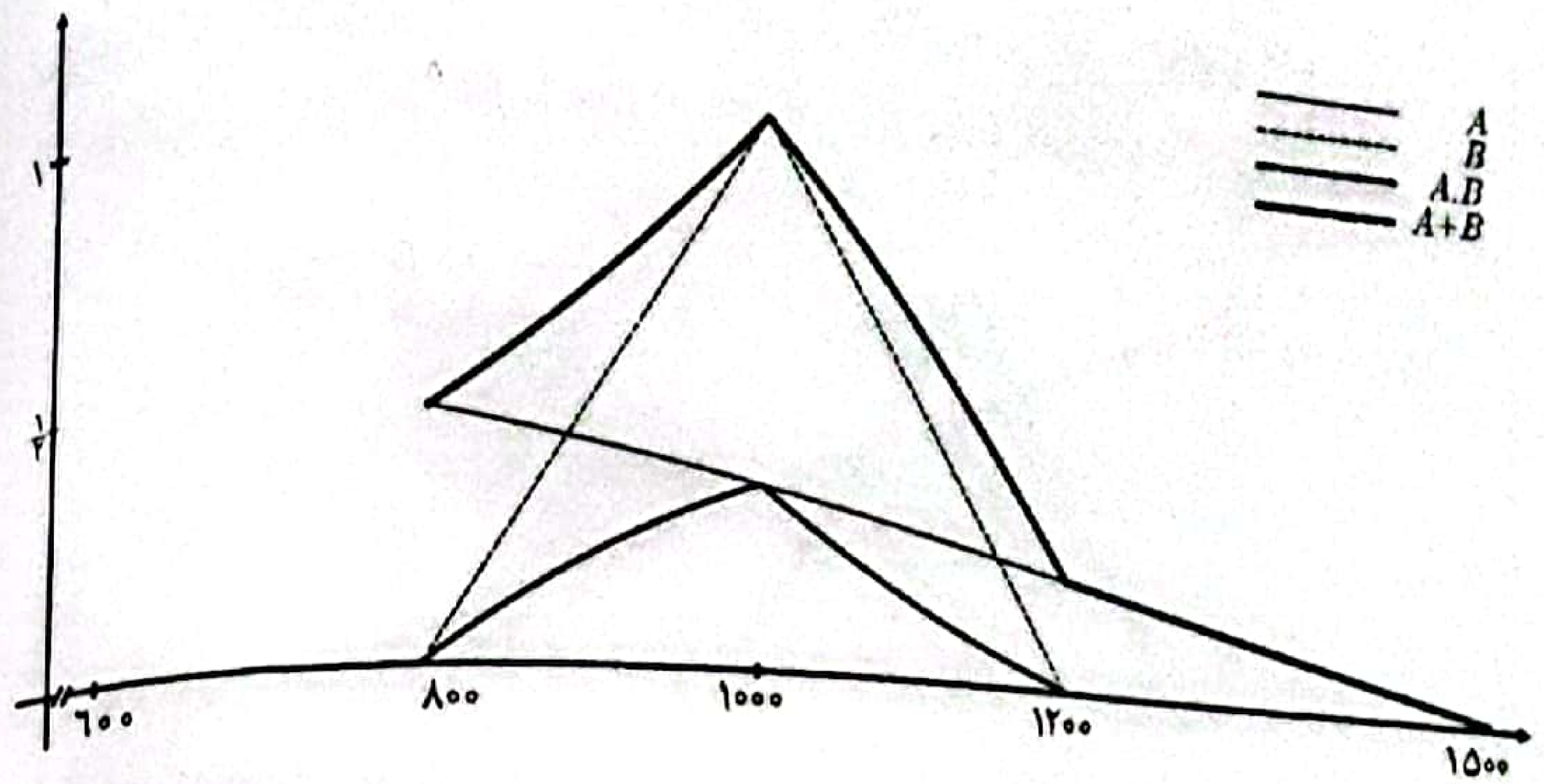
تعریف ۹.۱ الف) ضرب جبری (به کوتاهی: ضرب) دو مجموعه فازی A و B به‌صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$(A\cdot B)(x) = A(x)B(x)\ ,\quad \forall\, x \in X$$

ب) جمع احتمالی (در برخی متون: جمع جبری) دو مجموعه فازی A و B به‌صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$(A+B)(x) = A(x) + B(x) - A(x)B(x)\ ,\quad \forall\, x\in X$$

مثال ۱۳.۱ در مثال ۱۲.۱، اگر از عملگر ضرب برای اشتراک دو مجموعه فازی A و B و از عملگر جمع احتمالی برای اجتماع استفاده کنیم، آنگاه $A\cap B$ و $A\cup B$ دارای توابع عضویتی خواهند بود که نمودار آن‌ها در شکل ۴.۱ رسم شده است.



شکل ۴.۱ نمودار توابع عضویت مجموعه‌های فازی $A \cap B$ و $A \cup B$ در مثال ۱۲.۱ با استفاده از عملگرهای ضرب و جمع احتمالی

تعریف ۱۰.۱ اگر A یک مجموعه فازی باشد، آنگاه αA که در آن $\alpha \in [0,1]$، به‌صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت $(\alpha A)(x) = \alpha A(x)$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱۱.۱ توان m ام ($m > 0$) مجموعه فازی A، که با A^m نشان داده می‌شود به‌صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت $A^m(x) = [A(x)]^m$ تعریف می‌شود.

به‌عنوان دو حالت خاص از تعریف بالا، عملگرهای تمرکز و اتساع بر مجموعه فازی A این گونه تعریف می‌شوند

$$CON(A) = A^2 \ \text{(تمرکز)} \quad , \quad DIL(A) = A^{0.5} \ \text{(اتساع)}$$

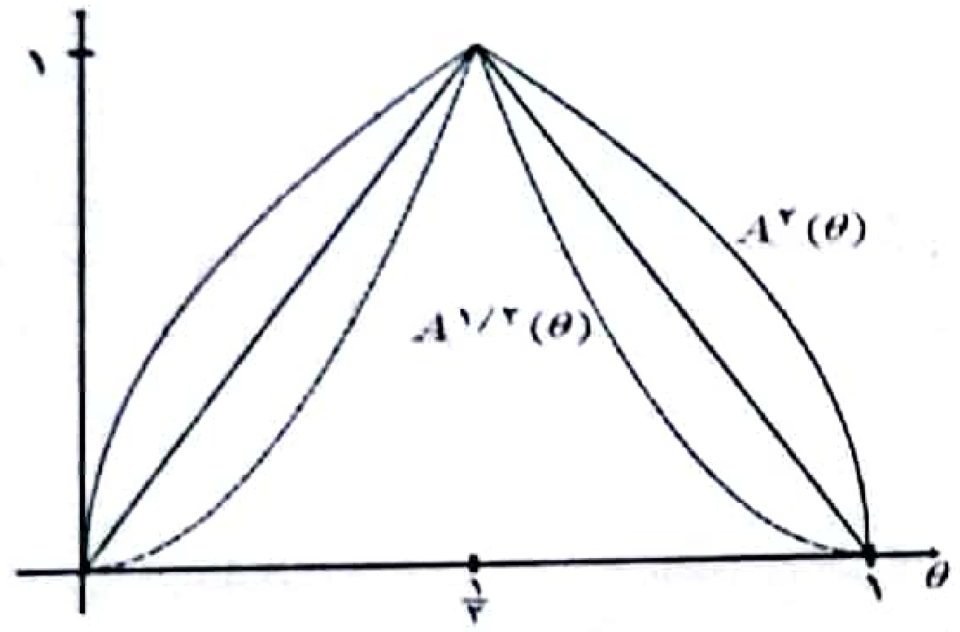
در مسائل کاربردی معمولاً از عملگرهای تمرکز و اتساع، به‌ترتیب، برای مدل سازی قیدهای بسیار (خیلی) و نسبتاً استفاده می‌شود.

مثال ۱۴.۱ فرض کنید $\Theta = [0,1]$ مجموعه مقادیر ممکن برای پارامتر θ در یک توزیع دوجمله‌ای باشد. مجموعه فازی A با تابع عضویت زیر یک توصیف برای فرضیه فازی: θ تقریباً $\frac{1}{2}$ است، می‌باشد

$$A(\theta) = \begin{cases} 2\theta & 0 \leq \theta < \frac{1}{2} \\ 2(1-\theta) & \frac{1}{2} \leq \theta \leq 1 \end{cases}$$

اکنون اگر بخواهیم فرضیه فازی: θ بسیار نزدیک به $\frac{1}{2}$ است را مدل سازی کنیم می‌توانیم از A^2 استفاده کنیم. هم‌چنین فرضیه فازی: θ نسبتاً $\frac{1}{2}$ است را با مجموعه فازی $A^{\frac{1}{2}}$ مدل سازی می‌کنیم. خواهیم داشت (شکل ۵.۱)

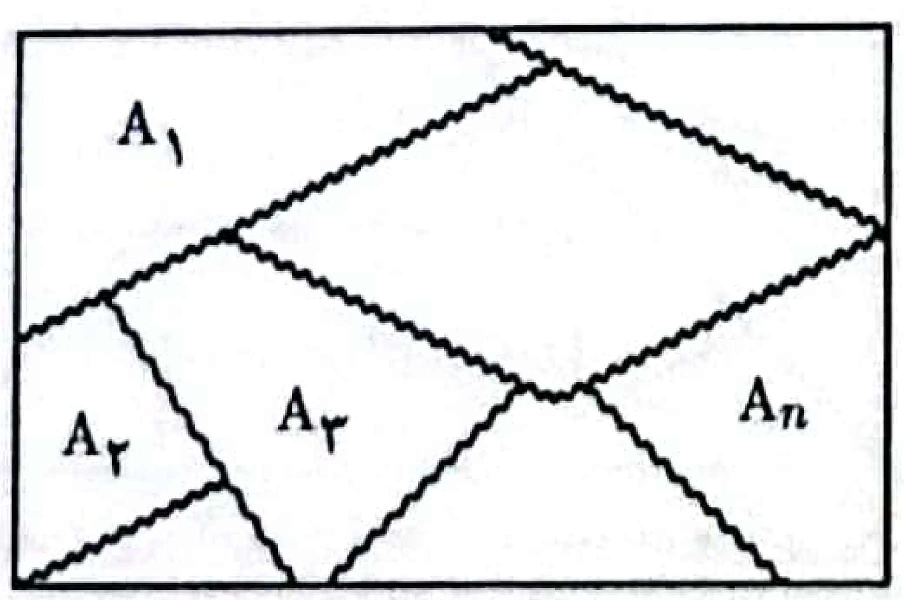
$$A^{\frac{1}{2}}(\theta) = \begin{cases} \sqrt{2\theta} & 0 \leq \theta < \frac{1}{2} \\ \sqrt{1-2\theta} & \frac{1}{2} \leq \theta \leq 1 \end{cases} \qquad A^2(\theta) = \begin{cases} 4\theta^2 & 0 \leq \theta < \frac{1}{2} \\ (1-2\theta)^2 & \frac{1}{2} \leq \theta \leq 1 \end{cases}$$



شکل ۵.۱ نمودار توابع عضویت مجموعه‌های فازی A، A^2 و $A^{\frac{1}{2}}$ در مثال ۱۴.۱

افراز فازی

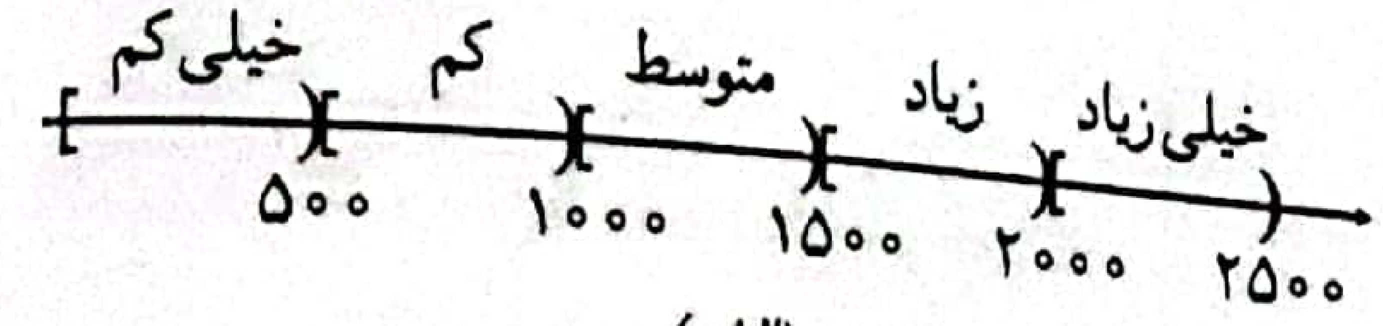
تعریف ۱۲.۱ فرض کنید X یک مجموعه مرجع باشد و A_1 و ... و A_n (برای هر A_i، $A_i \neq X, \phi$) مجموعه‌های فازی از X باشند، به‌قسمی که برای هر x از X، $\sum_{i=1}^{n} A_i(x) = 1$. در این صورت گوییم مجموعه‌های فازی A_1 و ... و A_n یک افراز فازی برای X تشکیل می‌دهند (شکل ۶.۱).



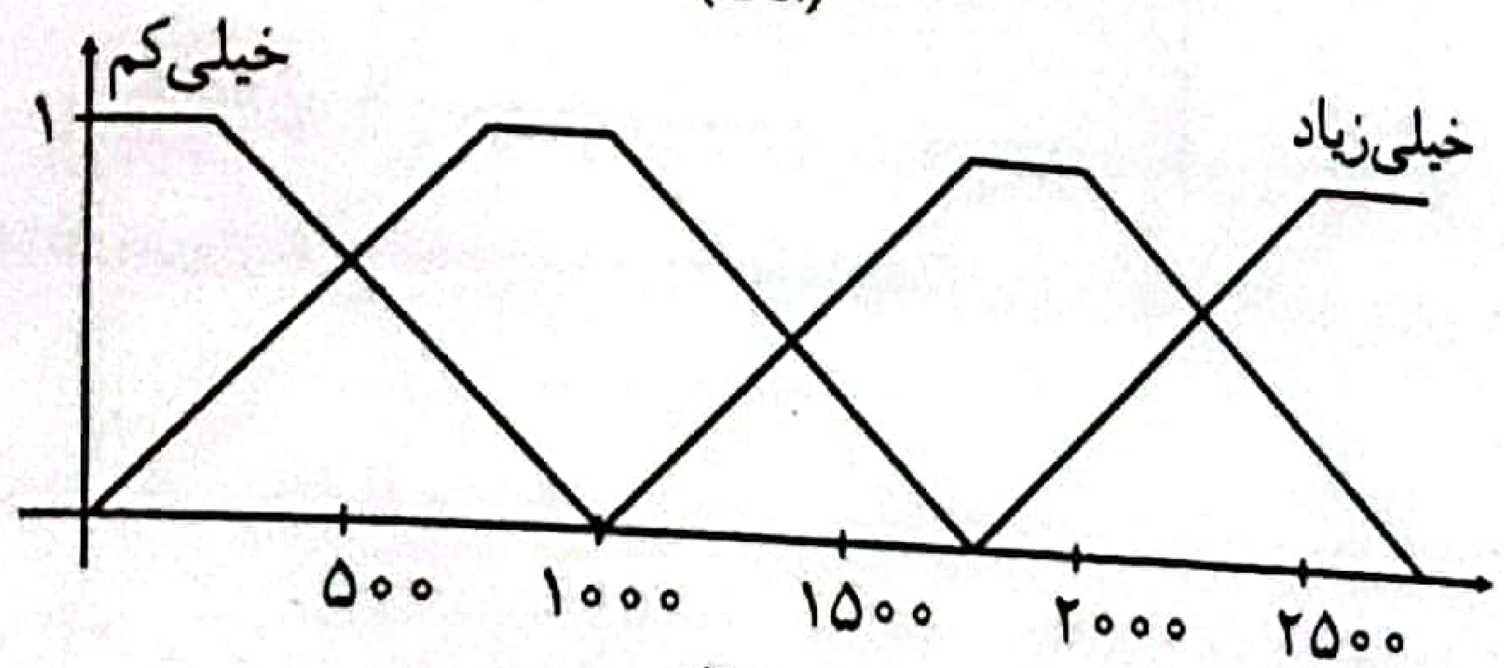
شکل ۶.۱ افراز فازی یک مجموعه به چند مجموعه فازی

مثال ۱۵.۱ فرض کنید درجه حرارت یک کوره در فاصله $[0,T]$ تغییر کند. اگر بخواهیم درجه حرارت کوره را به‌صورت درجه‌های خیلی کم، کم، متوسط، زیاد و خیلی زیاد

تقسیم‌بندی کنیم، چنان چه این کار به‌وسیله‌ی یک افراز معمولی توسط مجموعه‌های معمولی انجام گیرد تقسیم‌بندی‌هایی به‌صورت شکل ۷.۱(الف) خواهیم داشت. همان گونه که ملاحظه می‌شود این تقسیم‌بندی در نزدیکی مرزها بی‌اعتبار است. در حالی که اگر این تقسیم‌بندی‌ها توسط یک افراز فازی انجام گیرد، دیگر مشکل مرزی وجود ندارد و یک درجه حرارت می‌تواند مثلاً هم درجه حرارت خیلی کم و هم درجه حرارت کم باشد، ولی با درجه‌های عضویت متفاوت. یک افراز فازی برای درجه حرارت کوره، که معقول‌تر و مناسب‌تر است، در شکل ۷.۱(ب) ارائه شده است.



(الف)



(ب)

شکل ۷.۱ (الف) یک افراز معمولی برای $[0,T]$ (ب) یک افراز فازی برای $[0,T]$

α- برش‌ها

تعریف ۱۳.۱ مجموعه (معمولی) عناصری را از X که درجه عضویت آن‌ها در مجموعه فازی A دست کم به بزرگی α ($0 < \alpha \le 1$) باشد، α- برش A (مجموعه تراز α وابسته به A) گوییم و با A_α نشان می‌دهیم، یعنی

$$A_\alpha = \{x \in X | A(x) \ge \alpha\}$$

مثال ۱۶.۱ فرض کنید $X = \{0, 1, 2, \ldots\}$ مجموعه مقادیر یک متغیر تصادفی پواسن مربوط به تعداد تصادفات شبانه‌روزی در یک ناحیه باشد و فرض کنید مجموعه فازی A از X بیانگر تعداد تصادفات کم با تابع عضویت زیر تعریف شود

$$A = \left\{\frac{1}{0}, \frac{0/8}{1}, \frac{0/6}{2}, \frac{0/4}{3}, \frac{0/2}{4}\right\}$$

(در فصل ۲ خواهیم دید که A در واقع یک پیشامد فازی است). در این صورت چند α- برش A عبارت‌اند از

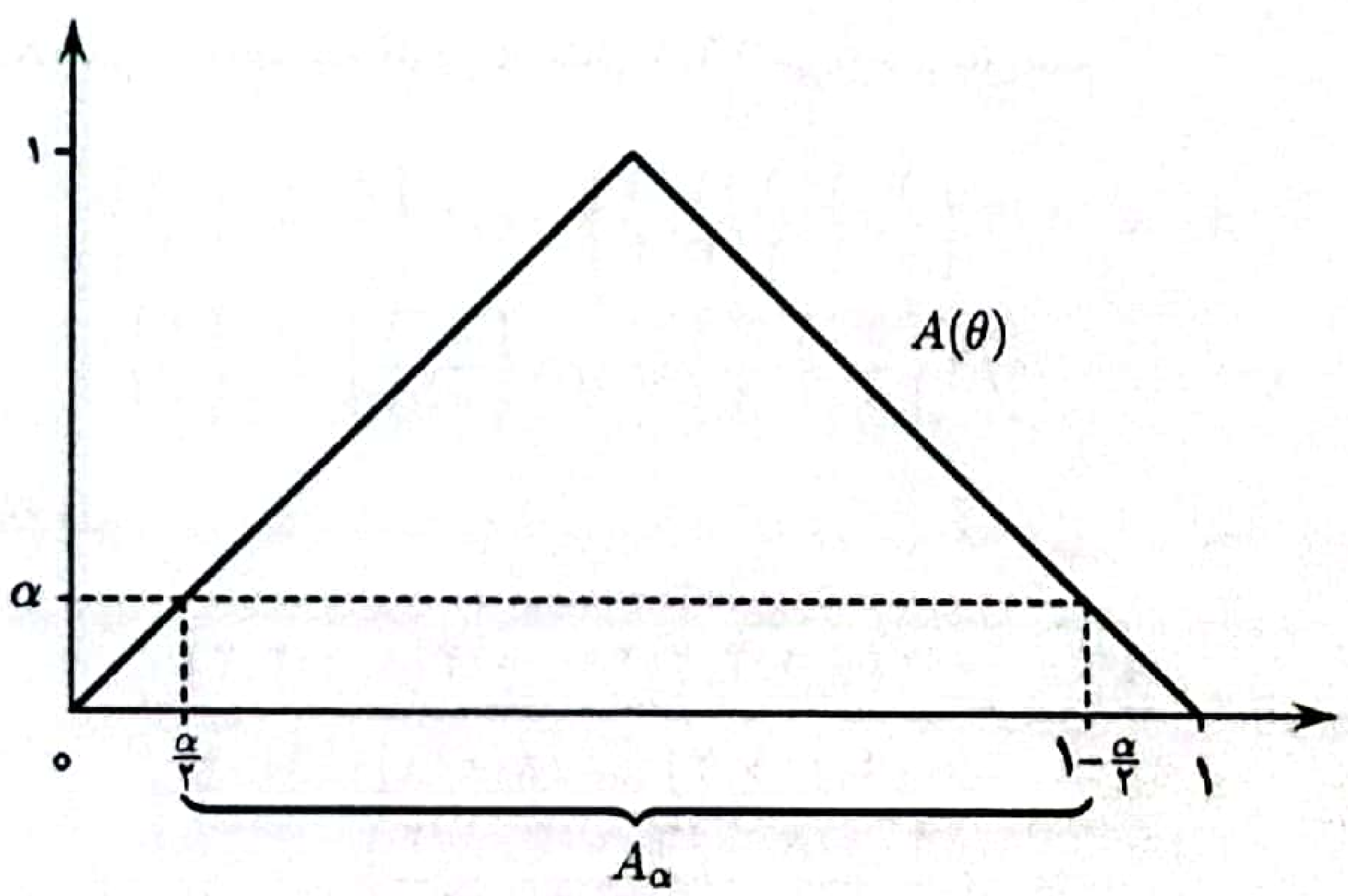
$$A_{0/2} = \{0, 1, 2, 3, 4\} \qquad A_{0/5} = \{0, 1, 2\}$$
$$A_{0/6} = \{0, 1, 2\} \qquad A_{0/85} = \{0\}$$

به‌طور خلاصه می‌توان نوشت

$$A_\alpha = \begin{cases} \{0, 1, 2, 3, 4\} & 0 < \alpha \le 0/2 \\ \{0, 1, 2, 3\} & 0/2 < \alpha \le 0/4 \\ \{0, 1, 2\} & 0/4 < \alpha \le 0/6 \\ \{0, 1\} & 0/6 < \alpha \le 0/8 \\ \{0\} & 0/8 < \alpha \le 1 \end{cases}$$

مثال ۱۷.۱ در مثال ۱۴.۱، A_α به‌صورت زیر به‌دست می‌آید (شکل ۸.۱)

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \{\theta \in [0, 1] \mid A(\theta) \ge \alpha\} \\ &= \{\theta \in [0, 1] \mid 2\theta \ge \alpha \ \text{یا}\ 2(1 - \theta) \ge \alpha\} \\ &= [\tfrac{\alpha}{2}, 1 - \tfrac{\alpha}{2}] \end{aligned}$$



شکل ۸.۱ α- برش مجموعه فازی A در مثال ۱۷.۱

ویژگی‌های اساسی مربوط به α- برش‌ها در قضیه زیر بیان شده است.

قضیه ۱.۱ ۱) خانواده $\{A_\alpha | \alpha \in [0,1]\}$ یکنواست، یعنی $0 < \alpha \le \beta \le 1 \Rightarrow A_\beta \subseteq A_\alpha$.

۲) $A \subseteq B \Leftrightarrow (A_\alpha \subseteq B_\alpha\ ,\ \forall \alpha \in I)$

۳) $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha\ ,\ (A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$

اکنون به بیان و تشریح یک رابطه‌ی اساسی، به نام اتحاد تجزیه می‌پردازیم.

قضیه ۲.۱ (اتحاد تجزیه) هر مجموعه فازی مانند A را می‌توان به‌صورت زیر برحسب مجموعه‌های تراز آن تجزیه کرد

$$A = \bigcup_\alpha \alpha A_\alpha$$

که در آن αA_α در تعریف ۱۰.۱ تعریف شده است.

یادآور می‌شویم که در برخی متون، اتحاد تجزیه به‌صورت زیر بیان شده است: هر مجموعه فازی A از مجموعه مرجع X را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$A(x) = Sup_{0 \le \alpha \le 1}\ \alpha I_{A_\alpha}(x), \quad \forall x \in X$$

که در آن I_{A_α} تابع نشانگر مجموعه تراز A_α است.

مثال ۱۸.۱ برای مجموعه فازی A مثال ۱۶.۱ می‌توانیم بنویسیم

$$A = 0/2\left\{\frac{1}{0},\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right\} \cup 0/4\left\{\frac{1}{0},\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\}$$
$$\cup\, 0/6\left\{\frac{1}{0},\frac{1}{1},\frac{1}{2}\right\} \cup 0/8\left\{\frac{1}{0},\frac{1}{1}\right\} \cup 1\left\{\frac{1}{0}\right\}$$

یا به‌طور خلاصه‌تر

$$A = 0/2\{0,1,2,3,4\} \cup 0/4\{0,1,2,3\}$$
$$\cup\, 0/6\{0,1,2\} \cup 0/8\{0,1\} \cup 1\{0\}$$
$$= \left\{\frac{1}{0},\frac{0/8}{1},\frac{0/6}{2},\frac{0/4}{3},\frac{0/2}{4}\right\}$$

مثال ۱۹.۱ مجموعه فازی A مثال ۱۷.۱ را می‌توانیم، با استفاده از اتحاد تجزیه، به‌صورت زیر برحسب α- برش‌های آن تجزیه کنیم

$$A = \bigcup_\alpha \alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha \alpha \left[\frac{\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}\right]$$
$$= \bigcup_\alpha \alpha \left\{\theta | \frac{\alpha}{2} \le \theta \le \frac{1-\alpha}{2}\right\}$$

از اتحاد تجزیه نه تنها برای تجزیه یک مجموعه فازی به دنباله‌ای از مجموعه‌های معمولی می‌توان استفاده کرد، بلکه برعکس برای ترکیب دنباله‌ای از مجموعه‌های معمولی و به‌دست آوردن یک مجموعه فازی نیز می‌توان استفاده نمود. در واقع عکس اصل تجزیه بدین صورت مطرح می‌شود: اگر $\{B_\alpha\}_{\alpha \in [0,1]}$ یک رده از زیرمجموعه‌های X باشد، آیا مجموعه فازی مانند A از X وجود دارد که

$$A_\alpha = B_\alpha\ , \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

پاسخ این سوال تحت شرایطی مثبت است و به‌صورت قضیه نمایش بیان می‌شود.

قضیه ۳.۱ (قضیه نمایش) فرض کنید $\{B_\alpha\}_{\alpha \in [0,1]}$ رده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد که $B_0 = X$. شرط لازم و کافی برای آنکه مجموعه فازی A از X وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $\alpha \in [0,1]$، داشته باشیم $A_\alpha = B_\alpha$، آن است که برای هر $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ که $\alpha_1 < \alpha_2$، $B_{\alpha_2} \subseteq B_{\alpha_1}$.

مثال ۲۰.۱ فرض کنید مجموعه‌های معمولی B_{α_1} تا B_{α_4} و اعداد α_1 تا α_4 متناظر با آن‌ها به‌صورت زیر داده شده باشند

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = 1 & B_{\alpha_1} = \{x_3\} \\ \alpha_2 = 0/75 & B_{\alpha_2} = \{x_2, x_3\} \\ \alpha_3 = 0/45 & B_{\alpha_3} = \{x_2, x_3, x_5\} \\ \alpha_4 = 0/25 & B_{\alpha_4} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \end{array}$$

چون مجموعه‌های فوق به همراه α_1 تا α_4 در شرط قضیه نمایش صدق می‌کنند پس بر پایه‌ی این دنباله از مجموعه‌ها (و با تلقی آن‌ها به‌عنوان مجموعه‌های تراز) یک مجموعه فازی مانند A (با α-برش‌های $A_\alpha = B_\alpha$) به‌صورت زیر ساخته می‌شود

$$A = \bigcup_\alpha \alpha A_\alpha = \alpha_1 A_{\alpha_1} \cup \alpha_2 A_{\alpha_2} \cup \alpha_3 A_{\alpha_3} \cup \alpha_4 A_{\alpha_4}$$
$$= \left\{\frac{0/25}{x_1}, \frac{0/75}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{0/25}{x_4}, \frac{0/45}{x_5}\right\}.$$

۴.۱ نکات تکمیلی

۱. ایده‌ی مجموعه‌های فازی توسط پروفسور لطفی عسگرزاده، دانشمند ایرانی تبار، در سال ۱۹۶۵ میلادی (برابر با ۱۳۴۴ هجری شمسی) با انتشار مقاله «مجموعه‌های فازی» [۱۵] به عرصه‌ی دانش معرفی شد و تا دهه ۱۹۷۰ مبانی نظریه مجموعه‌های فازی و نیز منطق فازی شکل گرفت. از دهه ۱۹۸۰ تولید محصولات کاربردی مبتنی بر منطق فازی آغاز شد و از دهه ۱۹۹۰ این محصولات به‌طور گسترده وارد بازارهای تجاری شدند. هم اکنون این نظریه با بسیاری از شاخه‌های علوم و فناوری ارتباط یافته است. برای مطالعه بیشتر و ژرف‌تر درباره‌ی مبانی نظریه مجموعه‌ها و منطق فازی، و نیز کاربردهای متنوع آن، می‌توان به منابع [۱۷ و ۱۲–۱۰ و ۸–۵ و ۳ و ۲ و ۱] مراجعه کرد. معرفی و بررسی مجموعه‌ها و منطق فازی از برخی دیدگاه‌های فلسفی — تاریخی در [۱۳ و ۴] انجام شده است.

۲. در کنار ارتباط‌هایی که نظریه مجموعه‌های فازی با سایر شاخه‌های علوم پیدا کرده است، ارتباط آن با احتمال و آمار شایان توجه است. هم از این روی که هر دو نظریه احتمال و نظریه مجموعه‌های فازی با عدم قطعیت سروکار دارند: اولی با عدم قطعیت ناشی از تصادف و دومی با عدم قطعیت ناشی از ابهام. مطالعات در احتمال و آمار فازی عمدتاً از دهه‌ی ۱۹۸۰ آغاز شد. برای مروری بر کارهای انجام شده در مورد آمار فازی می‌توان به مراجع [۸ و ۱] فصل ۱۰ مراجعه کرد. دو کتاب [۹] و [۱۴] نیز که به احتمال و آمار فازی اختصاص دارند، شایان توجه‌اند. در فصول آینده، به مراجع اصلی مربوط به برخی موضوع‌ها در احتمال و آمار فازی اشاره خواهیم کرد.

۳. عملگرهای مجموعه‌ای برای مجموعه‌های فازی، منحصر به مواردی نیست که در این فصل مطرح شد. به ویژه برای اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی، عملگرهای دیگری نیز پیشنهاد شده‌اند که عمدتاً در چارچوب نُرم‌های موسوم به نرم‌های مثلثی و همنرم‌های مثلثی قرار دارند. برای مطالعه این عملگرها به [۱۷ و ۸ و ۷ و ۲] مراجعه کنید.

۴. توصیف و نمایش یک مجموعه فازی بر حسب α- برش‌های آن توسط زاده [۱۶] در سال ۱۹۷۱ ارائه شد. در مورد ویژگی‌های مربوط به α- برش‌ها که از اصلی‌ترین مفاهیم در نظریه مجموعه‌های فازی است، و همچنین قضیه نمایش که از اصلی‌ترین قضیه‌ها در این نظریه است، مطالعه مراجع [۸ و ۵] توصیه می‌شود.

تمرین‌های فصل اول

۱.۱ کدام یک از گردایه‌های زیر یک مجموعه است؟

الف) کودکان باهوش،

ب) شب‌های سرد زمستان سال ۱۳۸۵ در همدان،

پ) شب‌های زمستان سال ۱۳۸۵ در همدان که درجه حرارت هوا به کمتر از $-17^{\circ}c$ رسیده بوده است،

ت) لامپ‌های با طول عمر بیشتر از ۵۳۸۰ ساعت،

ث) لامپ‌های با طول عمر حدوداً ۵۰۰۰ ساعت.

۲.۱ فرض کنید $X = [0,60]$ و $A = \{10,20,30\}$ و $B = [5,25]$ و $C = (10,30]$ مطلوب است B^C و $A \cap B^C$ و $B \cup C$، $C \cap B$.

۳.۱ بررسی کنید که تعریف اشتراک و اجتماع به‌صورت زیر معادل تعریف اشتراک و اجتماع (به‌صورتی که در نکته ۲.۱ بیان شد) است

$$I_{A\cap B}(x) = I_A(x).I_B(x)$$

$$I_{A\cup B}(x) = I_A(x) + I_B(x) - I_A(x)I_B(x)$$

۴.۱ برای هر یک از مفاهیم زیر یک مجموعه فازی (به‌طور معادل، یعنی یک تابع عضویت) از R ارائه دهید.

الف) نزدیک به ۳، ب) خیلی بزرگتر از ۳، پ) بزرگ ولی نه خیلی بزرگتر از ۲۰.

۵.۱ مجموعه فازی A با تابع عضویت $A(x) = e^{-x^2}$ و $x \in R$ تعریف شده است.

الف) تعبیری برای A بیان کنید.

ب) α- برش‌های A را بیابید و اصل تجزیه را برای A بررسی کنید.

۶.۱ فاصله بین دو شهر ۲۴۰ کیلومتر است. به نظر شما هر یک از عبارت‌های زیر در توصیف فاصله بین دو شهر تا چه حد «درست» است؟

فاصله بین دو شهر زیاد است. فاصله بین دو شهر نسبتاً زیاد است، فاصله بین دو شهر تقریباً ۲۰۰ کیلومتر است. فاصله بین دو شهر کمی بیشتر از ۲۰۰ کیلومتر است.

۷.۱ تعداد زدگی‌های یک نوع پارچه، در هر متر مربع، دارای توزیع پوآسن با پارامتر $\lambda > 0$ است. مجموعه‌های فازی زیر را مدل‌سازی کنید

الف) مقدار λ حدوداً ۴،

ب) مقدار λ بسیار نزدیک به ۴،

پ) مقدار λ حدوداً بین ۴ تا ۵،

ت) مقدار λ بسیار کوچک.

۸.۱ مسأله ۷.۱ را در نظر بگیرید. یک افراز فازی برای مقادیر پارامتر λ، شامل سه مجموعه فازی کوچک، متوسط، بزرگ، ارائه دهید. (در فصل ۱۰ خواهیم دید که هر یک از این مجموعه‌های فازی را می‌توان یک فرضیه فازی در نظر گرفت.)

۹.۱ یک مجموعه فازی دو بعدی با تابع عضویت $A(x_1, x_2) : R \times R \to [0, 1]$ مثال بزنید که بیانگر میزان نزدیک بودن دو نقطه x_1 و x_2 باشد.

۱۰.۱ در یک مطالعه‌ی گیاه‌شناسی، مقدار رشد حدوداً ۱۵ سانتی‌متر و مقدار رشد بسیار بیشتر از ۱۰ سانتی‌متر، به‌ترتیب، با مجموعه‌های فازی A و B با توابع عضویت زیر مدل‌سازی شده‌اند

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x}{15} & 0 \le x < 15 \\ \frac{25-x}{10} & 15 \le x < 25 \end{cases} \qquad B(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-10}{5}\right)^{-1}}$$

الف) نمودار توابع عضویت را رسم کنید.

ب) $A \cap B$ و $A \cup B$ را بیابید، نمودار توابع عضویت آن‌ها را رسم کنید و تعبیر هر کدام را بیان کنید.

۱۱.۱ (رک به مطلب پیش از تعریف ۹.۱) مجموعه‌های فازی $A \cap B$ و $A \cup B$ در تمرین ۱۰.۱ را بر پایه‌ی عملگر ضرب برای اشتراک و جمع احتمالی برای اجتماع بیابید و نمودار توابع عضویت آن‌ها را رسم کنید.

۱۲.۱ موارد ۱ تا ۳ قضیه ۱.۱ را اثبات کنید.

۱۳.۱ مفاهیم «احتمال حدوداً ۰/۵» و «احتمال کم» را با دو مجموعه فازی مدل‌سازی کنید. این مجموعه‌ها را، به‌ترتیب، با A و B نشان دهید. مجموعه‌های فازی $A \cap B$ و $A \cup B$ را بیابید و نمودار توابع عضویت آن‌ها را رسم نموده، تعبیر آن‌ها را بیان کنید.

۱۴.۱ در تمرین بالا $A \cap B$ و $A \cup B$ را با استفاده از عملگرهای ضرب و جمع احتمالی بیابید و نمودار توابع عضویت آن‌ها را رسم کنید.

۱۵.۱ در مسائل حمل و نقل، فاصله بین شهرها حائز اهمیت است. مفهوم «فاصله دور» بین دو شهر (برحسب km) را با یک مجموعه فازی مدل‌سازی کنید.

۱۶.۱ در یک توزیع احتمال دوجمله‌ای $b(n, p)$ می‌خواهیم مفهوم «p، حدوداً ۰/۶» را مدل‌سازی کنیم. دو مدل (به‌صورت دو مجموعه فازی) برای این مفهوم بنویسید.

۱۷.۱ طول عمر یک قطعه مکانیکی توزیع نمایی دارد. برای بررسی آماری در مورد λ، میانگین توزیع، تعداد ۱۵ قطعه را به تصادف از این نوع قطعات انتخاب می‌کنیم.

الف) می‌خواهیم درباره‌ی این فرضیه که: λ حدوداً ۷۰۰۰ ساعت است، آزمون آماری انجام دهیم. مفهوم «λ حدوداً ۷۰۰۰ ساعت» را مدل‌سازی کنید.

ب) می‌خواهیم درباره‌ی این پیشامد بحث کنیم که: اکثر قطعات انتخابی، طول عمر بیشتر از ۵۰۰۰ ساعت دارند. دو مدل (به‌صورت دو مجموعه فازی) برای مدل‌سازی مفهوم «اکثر» (در اینجا: اکثر در بین ۱۵ قطعه) بنویسید.

۱۸.۱ در تمرین بالا، فرض کنید بخواهیم احتمال پیشامد زیر را به‌دست آوریم

اکثر قطعات انتخابی، طول عمر بالایی دارند.

دو مجموعه فازی برای مدل‌سازی مفهوم «طول عمر بالا» ارائه دهید.

منابع و مراجع

[۱] طاهری، سید محمود (۱۳۷۵)؛ آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی، انتشارات جهاد دانشگاهی دانشگاه فردوسی مشهد.

[۲] طاهری، سید محمود (۱۳۸۴)؛ سیمای منطق فازی، فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۳۵: ۹۱–۷۳.

[۳] کازونو، تاناکا (۱۳۸۱)؛ مقدمه‌ای بر منطق فازی برای کاربردهای عملی (ترجمه: وحیدیان کامیاد، علی؛ طارقیان، حامد رضا)، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد.

[۴] کاسکو، بارت (۱۳۷۷)؛ تفکر فازی (ترجمه: غفاری، علی و همکاران)، انتشارات دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی.

[۵] ماشین‌چی، ماشاءا... (۱۳۷۹)؛ مجموعه‌های مشکک، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان.

[۶] وانگ، لی (۱۳۷۸)؛ سیستم‌های فازی و کنترل فازی (ترجمه: تشنه لب، محمد و همکاران)، انتشارات دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی.

[7] Buckley, J.J., Eslami, E. (2002); An Introduction to Fuzzy Logic and Fuzzy Sets, Springer.

[8] Klir, G.J., Yuan, B. (2005); Fuzzy Sets and Fuzzy Logic - Theory and Applications, Prentice Hall.

[9] Kruse, R., Meyer, K.D. (1987); Statistics with Vague Data, Reidal Publ.

[10] Kosko, B. (1997); Fuzzy Engineering, Prentice Hall.

[11] Pedrycz, W., Gomide, F. (2005); An Introduction to Fuzzy Sets Analysis and Design, MIT Press.

[12] Ross, T.J. (2005); Fuzzy Logic with Engineering Applications, Sec. Ed., J. Wiley.

[13] Sangalli, A. (1998); The Importance of Being Fuzzy, Princeton Univ. Press.

[14] Viertl, R. (1996); Statistical Methods for Non- Precise Data, CRC Press.

[15] Zadeh, L.A. (1965); Fuzzy Sets, Inform. Control, 8: 338-353.

[16] Zadeh, L.A. (1971); Similarity relations and fuzzy orderings, Information Sciences, 3: 177-200.

[17] Zimmermann, H.J. (1996); Fuzzy Set Theory and Its Applicatios, Third Ed., Kluwer.

فصل ۲

حساب اعداد فازی

مقدمه

اعداد فازی، یک تعمیم طبیعی اعداد معمولی هستند. در واقع این اعداد، مجموعه‌های فازی خاص از مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ می‌باشند. اعداد فازی نقش کلیدی در صورت بندی و تحلیل بسیاری از مسائل کاربردی ایفا می‌کنند. در این فصل اعداد فازی و عملگرهای حسابی مربوط به این اعداد و هم‌چنین نوع خاصی از اعداد فازی به نام اعداد فازی LR معرفی و مرور می‌شوند. برای تعمیم عملگرهای حسابی معمولی به عملگرهای حسابی فازی، نیاز به بیان و تشریح یک اصل اساسی موسوم به اصل توسیع است، که در ابتدای فصل ارائه می‌شود.

۱.۲ اصل توسیع

فرض کنید f یک تابع از X به Y باشد، یعنی

$$y = f(x)\ , \quad x \in X, y \in Y$$

این تابع به هر نقطه از X، نقطه‌ای را از Y می‌نگارد. حال فرض کنید A زیرمجموعه‌ای معمولی از X باشد. با استفاده از f و A می‌توانیم نگاشت A تحت f، یعنی $f(A)$ را به‌صورت زیر به‌دست آوریم

$$f(A) = \{f(a) \in Y | a \in A\}$$

اکنون می‌خواهیم f را طوری توسیع (گسترش) دهیم که به جای این که صرفاً به یک نقطه از X یا یک زیرمجموعه معمولی از X عمل کند، بتواند بر یک زیرمجموعه فازی از X نیز

عمل کند. مسلماً انتظار داریم که $f(A)$، حاصل عمل f بر مجموعه فازی A از X، دیگر یک مجموعه معمولی از Y نباشد، بلکه یک مجموعه فازی از Y مانند $B = f(A)$ باشد. در اینجا تعیین تابع عضویت $B(y)$ مهم است. واضح است که اگر f تابعی یک به یک باشد، آنگاه $B(y) = A(f^{-1}(y))$. اما در حالت کلی ممکن است $y \in Y$ تصویر چندین نقطه از X باشد. در این حالت اصل توسیع روش تعریف $B = f(A)$ را ارائه می‌دهد. نخست اصل توسیع را برای توابع یک متغیره بیان و تشریح می‌کنیم و سپس حالت کلی آن را مطرح می‌کنیم.

تعریف ۱.۲ فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع و A یک مجموعه فازی از X باشد. در این صورت $B = f(A)$ به‌صورت یک مجموعه فازی از Y با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$B(y) = \begin{cases} \sup\limits_{y=f(x);x\in X} A(x) & f^{-1}(\{y\}) \neq \phi \\ ۰ & f^{-1}(\{y\}) = \phi \end{cases}$$

که در آن $f^{-1}(\{y\})$ نگاشت معکوس f است که گاهی آن را با $f^{-1}(y)$ نشان می‌دهند.

مثال ۱.۲ فرض کنید $X = Y = Z$ و $f : X \to Y$ با ضابطه $f(x) = ۲x$ تعریف شود. اگر A مجموعه اعداد فرد مثبت باشد، یعنی $A = \{۱, ۳, ۵, ۷, \ldots\}$، آنگاه

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(a) \in Y | a \in A\} \\ &= \{۲, ۶, ۱۰, ۱۴, \ldots\} \end{aligned}$$

اکنون فرض کنید مجموعه فازی A از X بیانگر اعداد تقریباً ۵ به‌صورت زیر تعریف شده باشد

$$A = \left\{\frac{۰/۴}{۳}, \frac{۰/۷}{۴}, \frac{۱}{۵}, \frac{۰/۷}{۶}, \frac{۰/۴}{۷}\right\}$$

آنگاه طبق اصل توسیع

$$B = f(A) = \left\{\frac{۰/۴}{۶}, \frac{۰/۷}{۸}, \frac{۱}{۱۰}, \frac{۰/۷}{۱۲}, \frac{۰/۴}{۱۴}\right\}$$

مثال ۲.۲ در مثال بالا فرض کنید تابع f با ضابطه $f(x) = x^۲$، و مجموعه فازی A از X بیانگر اعداد تقریباً یک به‌صورت زیر تعریف شود

$$A = \left\{\frac{۰/۱}{-۲}, \frac{۰/۴}{-۱}, \frac{۰/۷}{۰}, \frac{۱}{۱}, \frac{۰/۷}{۲}, \frac{۰/۴}{۳}, \frac{۰/۱}{۴}\right\}$$

آنگاه طبق اصل توسیع

$$B = \left\{\frac{۰/۷}{۰}, \frac{۱}{۱}, \frac{۰/۷}{۴}, \frac{۰/۴}{۹}, \frac{۰/۱}{۱۶}\right\}$$

مثال ۳.۲ فرض کنید $f(x) = x^۲$ و مجموعه فازی A از مجموعه اعداد حقیقی، توصیف کننده تقریباً ۳، این گونه تعریف شده باشد

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x-۱}{۲} & ۱ \leq x < ۳ \\ ۴ - x & ۳ \leq x < ۴ \end{cases}$$

چون در بازه $(۱, ۴]$ تابع $f(x)$ یک به یک است، پس

$$\begin{aligned} B(y) = \sup_{x, y=f(x)} A(x) &= A(f^{-1}(y)) \\ &= A(\sqrt{y}) \\ &= \begin{cases} \frac{\sqrt{y}-۱}{۲} & ۱ \leq y < ۹ \\ ۴ - \sqrt{y} & ۹ \leq y < ۱۶ \end{cases} \end{aligned}$$

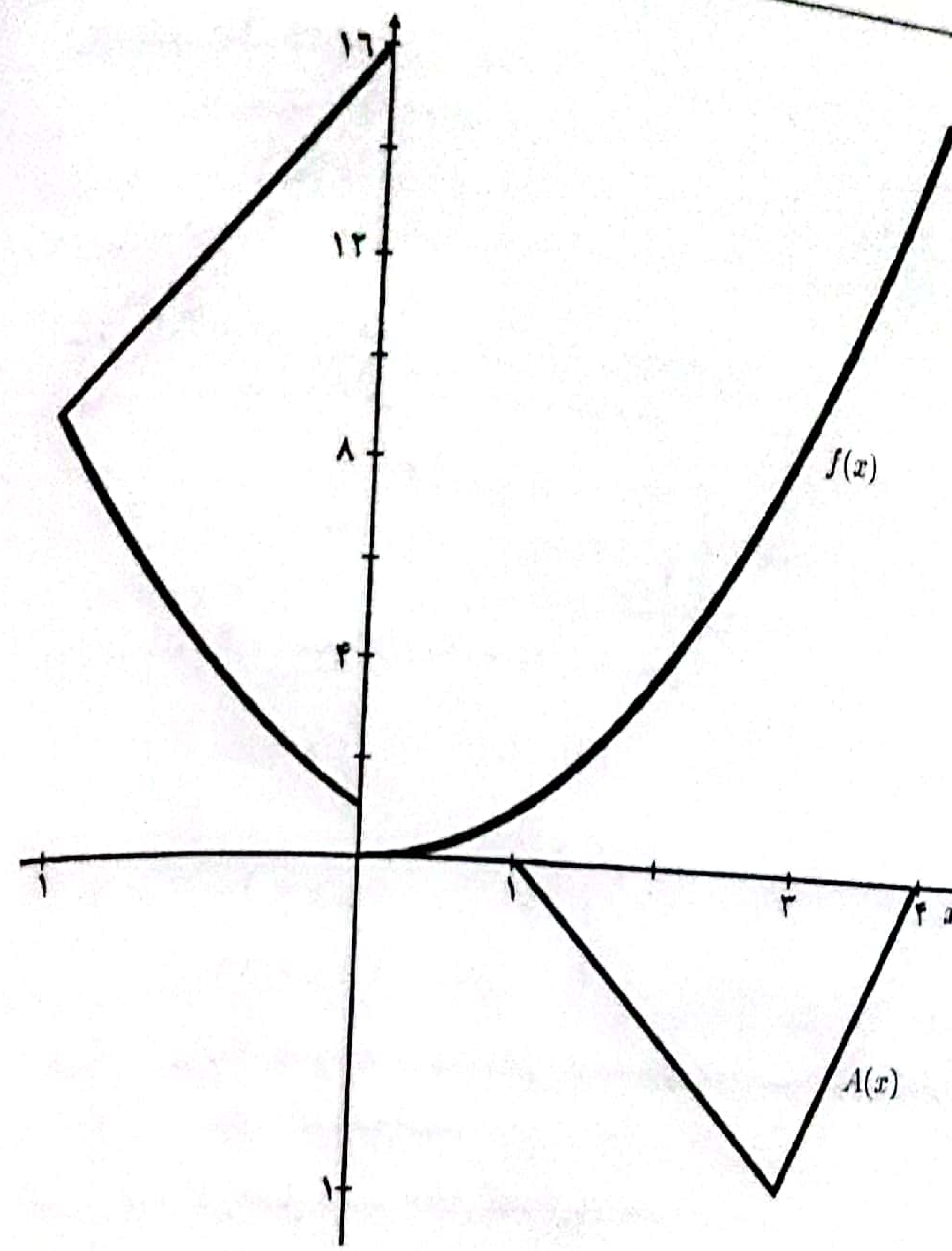
چگونگی توسیع $y = f(x) = x^۲$ به‌حالتی که به جای x، مجموعه فازی A قرار می‌گیرد، در شکل ۱.۲ نشان داده شده است.

اکنون حالت کلی اصل توسیع (اصل گسترش) را بیان می‌کنیم.

تعریف ۲.۲ (اصل توسیع) فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$، n مجموعه مرجع و $X = X_۱ \times \cdots \times X_n$ حاصل ضرب دکارتی آنها باشد. همچنین $A_۱, \ldots, A_n$، n مجموعه فازی به‌ترتیب از $X_۱, \ldots, X_n$ باشند. به‌علاوه $y = f(x_۱, \ldots, x_n)$ یک نگاشت از X به Y باشد. حاصل عمل f بر n مجموعه فازی $A_۱, \ldots, A_n$ به‌صورت مجموعه فازی B از Y با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$B(y) = f(A_۱, \ldots, A_n)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{\substack{x_۱, \ldots, x_n \\ y=f(x_۱, \ldots, x_n)}} \min\{A_۱(x_۱), \ldots, A_n(x_n)\} & f^{-1}(y) \neq \phi \\ ۰ & f^{-1}(y) = \phi \end{cases}$$

که در آن $f^{-1}(y)$ نگاشت معکوس y تحت f است.



شکل ۱.۲ روش عمل اصل توسیع در مثال ۳.۲

مثال ۴.۲ فرض کنید $X_1 = X_2 = N$ مجموعه اعداد صحیح مثبت، A_1 مجموعه فازی تقریباً ۵، و A_2 مجموعه فازی تقریباً ۶ به‌صورت زیر باشند

$$A_1 = \left\{\frac{0/3}{3}, \frac{0/7}{4}, \frac{1}{5}, \frac{0/7}{6}, \frac{0/3}{7}\right\}, \quad A_2 = \left\{\frac{0/6}{5}, \frac{1}{6}, \frac{0/6}{7}\right\}$$

آنگاه براساس اصل توسیع می‌توان جمع دو مجموعه فازی تقریباً ۵ و تقریباً ۶ را انجام داد. مثلاً

$$\begin{aligned}(A_1 \oplus A_2)(8) &= \max_{\substack{x_1, x_2 \\ x_1+x_2=8}} \min\{A_1(x_1), A_2(x_2)\} \\ &= \min\{A_1(3), A_2(5)\} = \min\{0/3, 0/6\} = 0/3\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}(A_1 \oplus A_2)(9) &= \max_{\substack{x_1, x_2 \\ x_1+x_2=9}} \min\{A_1(x_1), A_2(x_2)\} \\ &= \max\{\min\{A_1(3), A_2(6)\}, \min\{A_1(4), A_2(5)\}\} \\ &= \max\{0/3, 0/6\} = 0/6\end{aligned}$$

و سرانجام

$$A_1 \oplus A_2 = \left\{\frac{0/3}{8}, \frac{0/6}{9}, \frac{0/7}{10}, \frac{1}{11}, \frac{0/7}{12}, \frac{0/6}{13}, \frac{0/3}{14}\right\}$$

ملاحظه می‌کنید که $A_1 \oplus A_2$ را می‌توان تعبیری از یک مجموعه فازی که تقریباً ۱۱ را مدل‌سازی می‌کند تعبیر کرد، و این چیزی است که انتظار آن را داریم.

۲.۲ اعداد فازی

اعداد فازی، که زیرمجموعه‌های فازی خاصی از مجموعه اعداد حقیقی هستند، در بیشتر مسائل کاربردی استفاده می‌شوند. در این بخش اعداد فازی و نوع ویژه‌ای از آنها، موسوم به اعداد فازی LR را مرور می‌کنیم. در بخش آینده، بر پایه‌ی اصل توسیع، به موضوع حساب اعداد فازی می‌پردازیم.

تعریف ۳.۲ مجموعه فازی N از R (اعداد حقیقی) را یک عدد فازی (حقیقی) گوییم، اگر

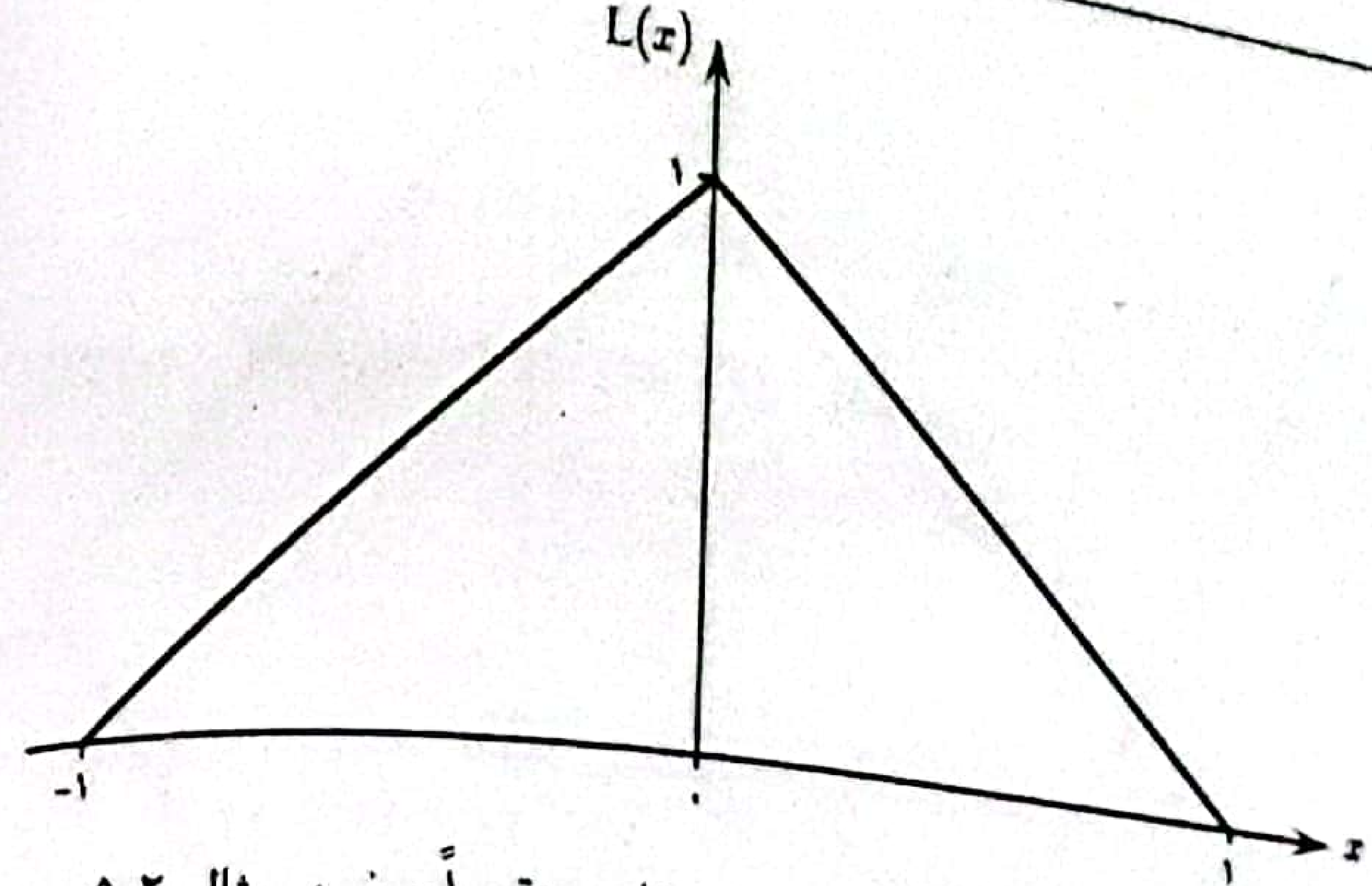
۱) N نرمال و تک‌نمایی باشد. یعنی یک و دقیقاً یک $x_0 \in R$ وجود داشته باشد که $N(x_0) = 1$.

۲) α- برش‌های N، به‌ازای هر $\alpha \in (0, 1]$، به‌صورت بازه‌های بسته باشند.

مجموعه همه‌ی اعداد فازی را با $F(R)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۵.۲ مجموعه فازی L با تابع عضویت زیر یک عدد فازی است. می‌توان L را یک مدل سازی برای عدد فازی تقریباً صفر تعبیر کرد.

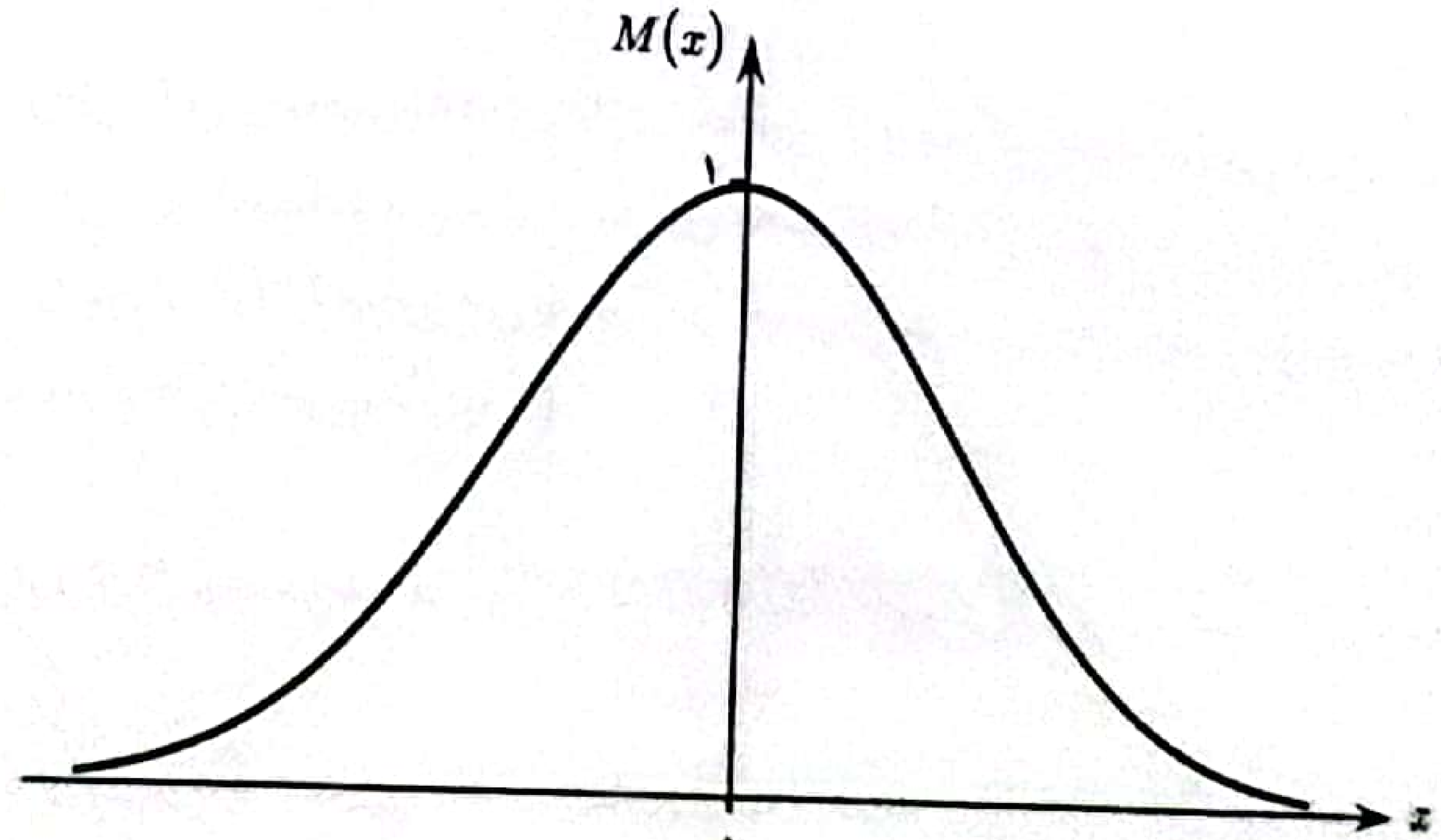
$$L(x) = 1 - |x| \qquad -1 \leq x \leq 1$$



شکل ۲.۲ نمودار تابع عضویت عدد فازی تقریباً صفر در مثال ۵.۲

مثال ۶.۲ مجموعه فازی M با تابع عضویت زیر یک عدد فازی است. در واقع M یک نوع مدل سازی دیگر (یعنی یک تعبیر دیگر) از اعداد تقریباً صفر است

$$M(x) = e^{-x^2} \qquad x \in R$$



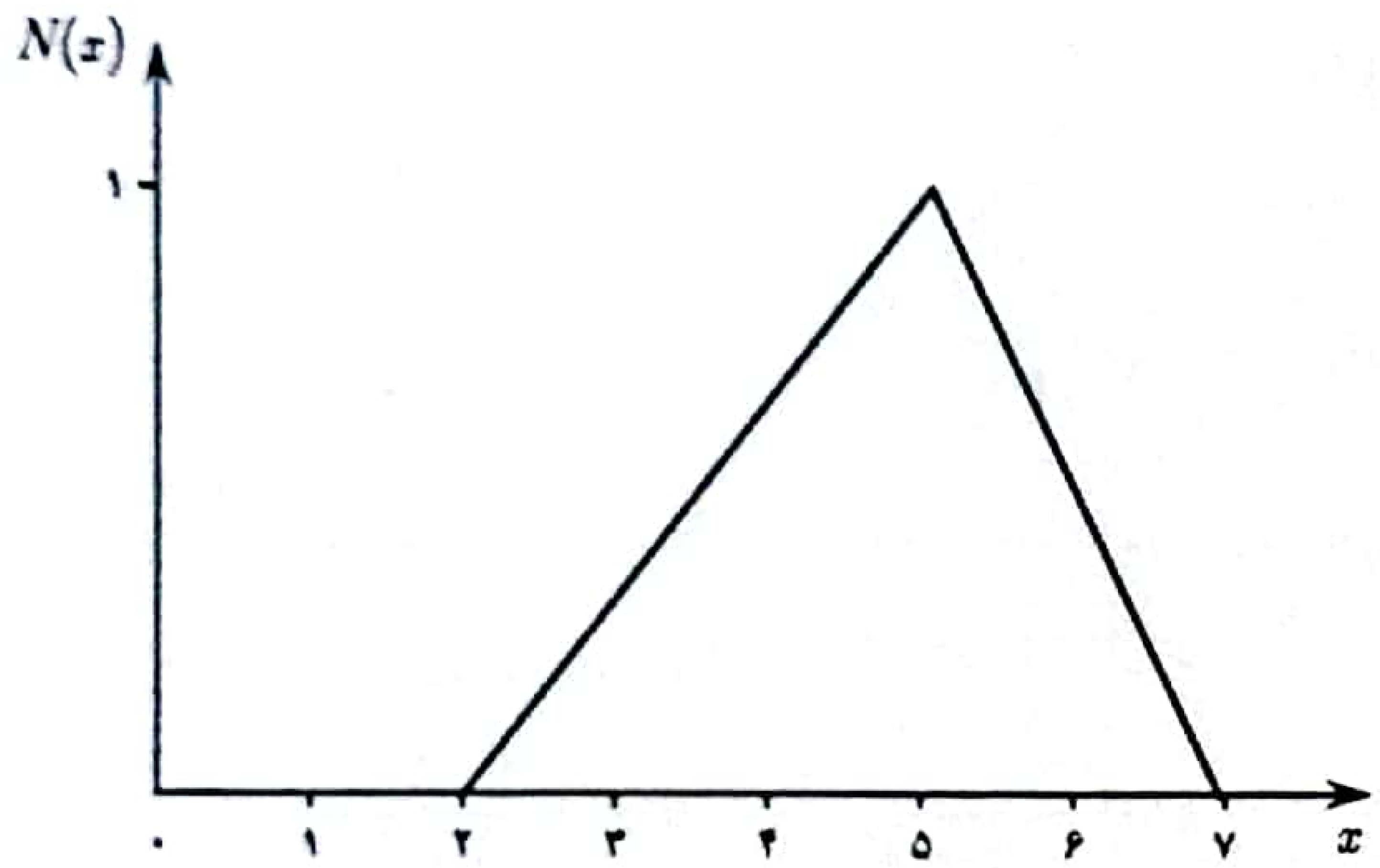
شکل ۳.۲ نمودار تابع عضویت عدد فازی تقریباً صفر در مثال ۶.۲

مثال ۷.۲ به مثال ۹.۱ توجه کنید. در این مثال، مجموعه A که توصیف کننده طول عمر حدوداً ۱۰۰۰ است، یک عدد فازی است. مجموعه فازی B که توصیف کننده بسیار نزدیک به ۱۰۰۰ است نیز یک عدد فازی است. اما مجموعه فازی A در مثال ۸.۱ یک عدد فازی نیست.

تعریف ۴.۲ عدد فازی N را مثبت (منفی) گوییم اگر برای هر $x \le 0$ ($x \ge 0$)؛ $N(x) = 0$.

مثال ۸.۲ دو عدد فازی L و M در مثال‌های ۵.۲ و ۶.۲ هیچ کدام نه عدد فازی مثبت و نه عدد فازی منفی هستند. اما عدد فازی N با تابع عضویت زیر، یک عدد فازی مثبت است. این عدد فازی تعبیری برای تقریباً پنج است.

$$N(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{3} & 2 \le x < 5 \\ \frac{7-x}{2} & 5 \le x < 7 \end{cases}$$



شکل ۴.۲ نمودار تابع عضویت عدد فازی تقریباً پنج در مثال ۸.۲

تذکر: در برخی منابع، تعریف عدد فازی با اندکی تفاوت با تعریف ۳.۲ مطرح می‌شود. برخی نویسندگان شرط تک‌نمایی بودن را منظور نمی‌کنند. برخی نیز این شرط را می‌افزایند که تکیه‌گاه N یعنی $\{x \in R; N(x) > 0\}$ کراندار باشد. در این کتاب، ما تعریف ۳.۲ را مبنا قرار داده‌ایم.

اعداد فازی LR

اعداد فازی LR نوع خاصی از اعداد فازی هستند که علاوه بر آنکه ساختار ویژه‌ای دارند، اعمال حسابی بر آنها نیز از قواعد خاصی پیروی می‌کند. این ساختار و این قواعد باعث شده است که در عمل، عمدتاً از این نوع اعداد فازی استفاده شود.

تعریف ۵.۲ اگر ساختار تابع عضویت عدد فازی N به‌صورت زیر باشد

$$N(x) = \begin{cases} L(\frac{m-x}{\alpha}) & x \le m \\ R(\frac{x-m}{\beta}) & x > m \end{cases}$$

که در آن L و R توابعی غیرصعودی از R^+ (مجموعه اعداد حقیقی مثبت) به $[0,1]$ هستند و $L(0) = R(0) = 1$، آنگاه N را یک عدد فازی LR نامیده و با نماد $N = (m,\alpha,\beta)_{LR}$ نشان می‌دهیم. عدد m را مقدارنما (یا میانه) و اعداد مثبت α و β را به‌ترتیب پهنای چپ و پهنای راست N می‌نامیم. L و R توابع مرجع (یا توابع شکل) نامیده می‌شوند.

توابع رایج برای L (به‌طور مشابه برای R) عبارتند از:

$$L(x) = \max\{0, 1 - |x|^p\} \quad (L(x) = 1 - |x|^p \text{ به کوتاهی})$$
$$L(x) = e^{-|x|^p}$$
$$L(x) = \frac{1}{1+|x|^p}$$
$$L(x) = \frac{1}{1+p|x|}$$

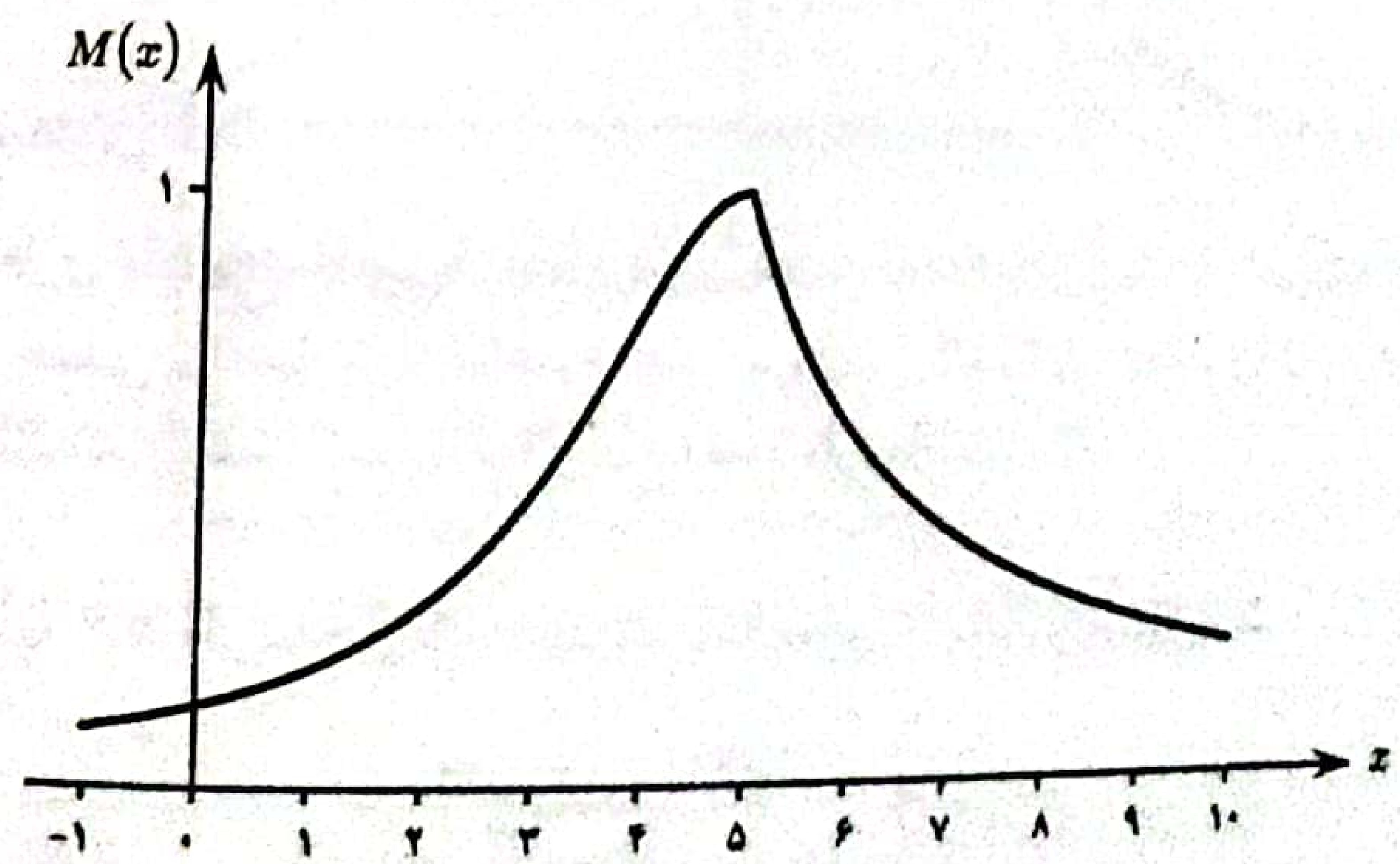
که در آن‌ها $p > 0$.

مثال ۹.۲ فرض کنید $M = (m,\alpha,\beta)_{LR}$ و

$$L(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad , \quad R(x) = \frac{1}{1+2x}$$

و $m = 5$ و $\alpha = 2$ و $\beta = 3$، آنگاه (شکل ۵.۲)

$$M(x) = \begin{cases} L(\frac{5-x}{2}) = \frac{1}{1+(\frac{5-x}{2})^2} & x \le 5 \\ R(\frac{x-5}{3}) = \frac{1}{1+\frac{2(x-5)}{3}} & x > 5 \end{cases}$$



شکل ۵.۲ نمودار عدد فازی LR تقریباً پنج در مثال ۹.۲

تعریف ۶.۲ فرض کنید $N = (m,\alpha,\beta)_{LR}$، و $L = R$. در این‌صورت

الف) N را یک عدد فازی مثلثی نامیده و با $N = (m,\alpha,\beta)_T$ نشان می‌دهیم اگر $L(x) = \max\{0, 1 - |x|\}$.

ب) N را یک عدد فازی نرمال نامیده و با $N = (m,\alpha,\beta)_N$ نشان می‌دهیم اگر $L(x) = e^{-x^2}$.

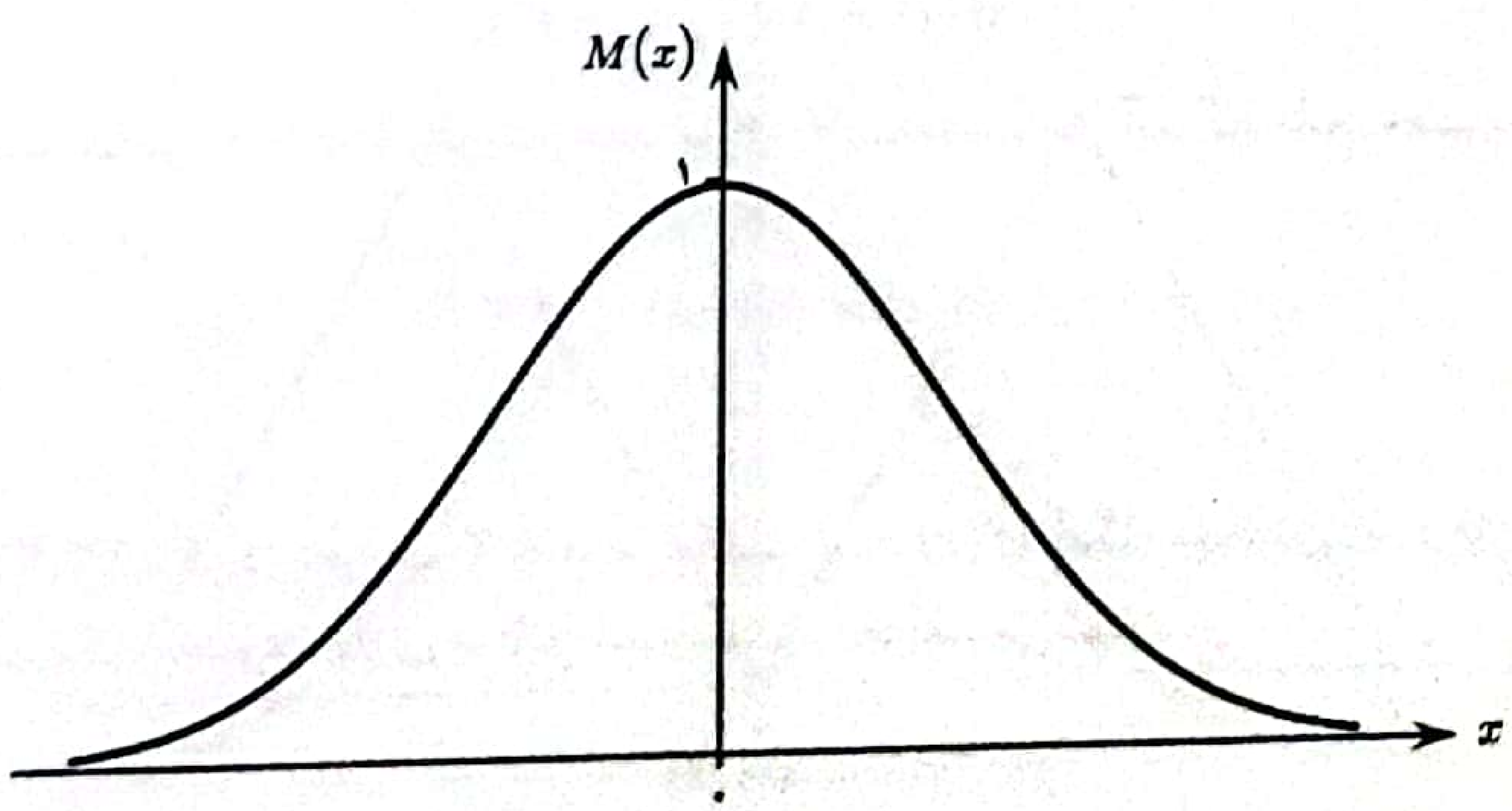
پ) N را یک عدد فازی سهموی نامیده و با $N = (m,\alpha,\beta)_P$ نشان می‌دهیم اگر $L(x) = \max\{0, 1 - x^2\}$.

تعریف ۷.۲ اگر برای عدد فازی N، $L = R$ و $\alpha = \beta$، آنگاه N را یک عدد فازی متقارن می‌نامیم و با $N = (m,\alpha)_L$ نشان می‌دهیم. اگر عدد فازی متقارن N، مثلثی، نرمال یا سهموی باشد، به‌ترتیب از نمادهای $N = (m,\alpha)_T$ و $N = (m,\alpha)_N$ و $N = (m,\alpha)_P$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۱۰.۲ فرض کنید M یک عدد فازی LR متقارن باشد و $L(x) = R(x) = e^{-x^2}$ و $m = 0$ و $\alpha = \beta = 1$. در این‌صورت

$$M(x) = \begin{cases} L(\frac{0-x}{1}) = e^{-x^2} & x \le 0 \\ R(\frac{x-0}{1}) = e^{-x^2} & x > 0 \end{cases}$$

یعنی $M(x) = e^{-x^2}, x \in R$. نمودار تابع عضویت عدد فازی نرمال متقارن M که می‌توان آن را یک عدد فازی تقریباً صفر تعبیر کرد، در شکل ۶.۲ رسم شده است.



شکل ۶.۲ نمودار تابع عضویت عدد فازی نرمال متقارن تقریباً صفر در مثال ۱۰.۲

مثال ۱۱.۲ عدد فازی L در مثال ۵.۲، یک عدد فازی مثلثی متقارن است. هم‌چنین عدد فازی M در مثال ۶.۲ یک عدد فازی نرمال متقارن است. به‌علاوه عدد فازی N در مثال ۸.۲ یک عدد فازی مثلثی نامتقارن است که برای آن پهنای چپ برابر ۳ و پهنای راست برابر ۲ است.

۳.۲ حساب اعداد فازی

در این بخش، به کوتاهی، به موضوع حساب اعداد فازی می‌پردازیم. نخست عملگرهای یک بعدی مانند ضرب اسکالر و معکوس را تعریف می‌کنیم، سپس عملگرهای دو بعدی را برای اعداد فازی تعمیم می‌دهیم. برای اثبات قضایا می توانید به مرجع [۴] مراجعه کنید.

تعریف ۸.۲ فرض کنید M یک عدد فازی و $f : R \to R$ یک عملگر یک بعدی باشد. بر پایه‌ی اصل توسیع، $f(M)$ به‌صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$f(M)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x, y=f(x)} M(x) & f^{-۱}(y) \neq \phi \\ ۰ & f^{-۱}(y) = \phi \end{cases}$$

مثال ۱۲.۲ اگر در تعریف ۸.۲ فرض کنیم $f(x) = \lambda x$ و $\lambda \in R - \{۰\}$، آنگاه ضرب اسکالر عدد حقیقی λ در عدد فازی M به‌صورت یک عدد فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$\lambda M(x) = M(\frac{x}{\lambda}) \ , \ \ x \in R$$

در حالت خاص $\lambda = -۱$، قرینه عدد فازی M به‌دست می‌آید که تابع عضویت آن عبارت است از

$$(\ominus M)(x) = M(-x) \ , \ \ x \in R$$

مثال ۱۳.۲ اگر در تعریف ۸.۲ فرض کنیم $f(x) = \frac{۱}{x}$، آنگاه معکوس عدد فازی M به‌صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$M^{-۱}(x) = M(\frac{۱}{x}) \ , \ \ x \in R$$

توجه کنید که اگر M نه یک عدد فازی مثبت و نه یک عدد فازی منفی باشد، $M^{-۱}$ یک مجموعه فازی با $\alpha-$ برش‌هایی به‌صورت بازه (و در نتیجه یک عدد فازی) نخواهد بود.

مثال ۱۴.۲ عدد فازی تقریباً ۱۰ با تابع عضویت زیر را در نظر بگیرید

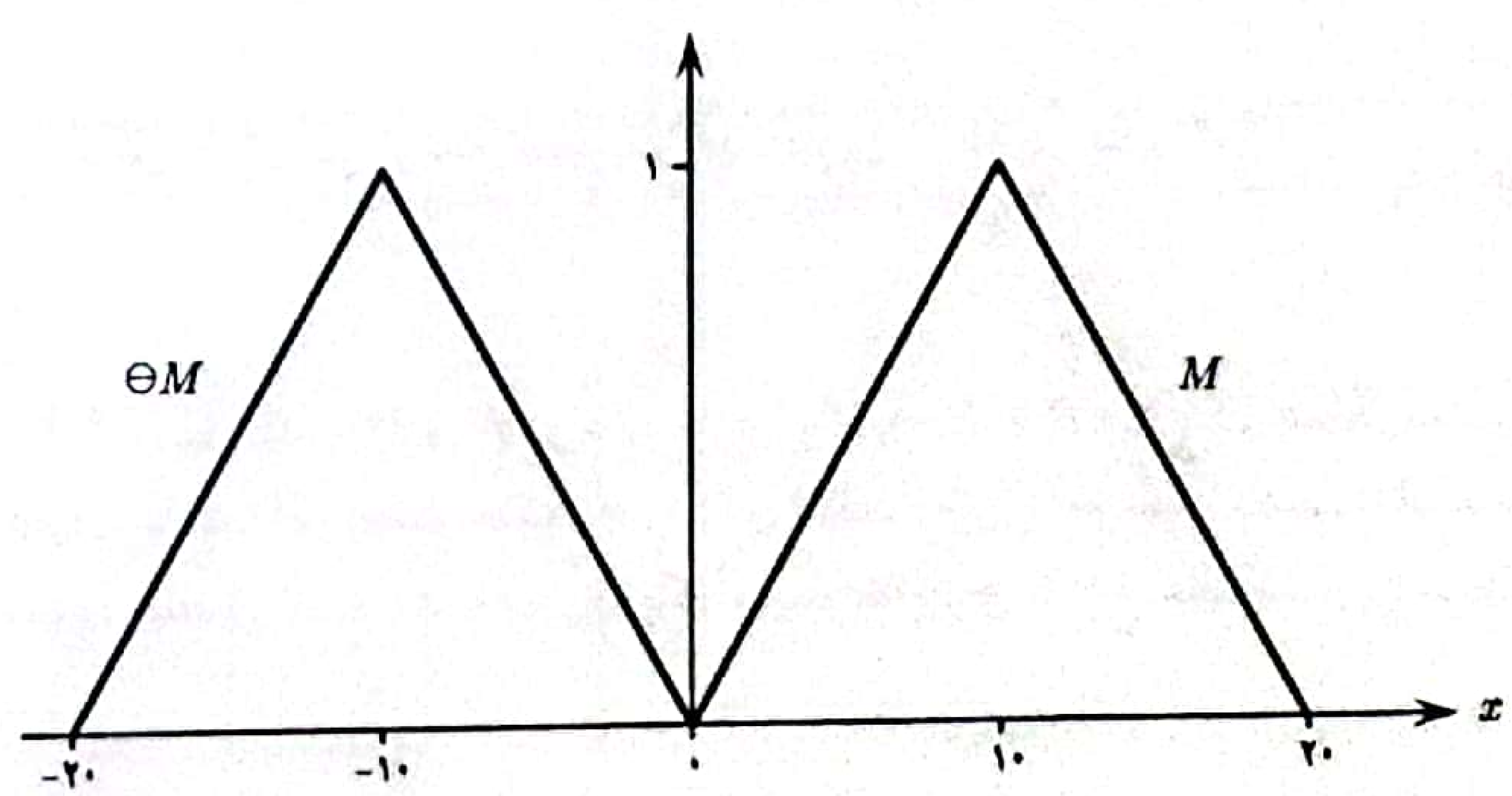
$$M(x) = \begin{cases} \frac{x}{۱۰} & ۰ \leq x < ۱۰ \\ \frac{۲۰-x}{۱۰} & ۱۰ \leq x \leq ۲۰ \end{cases}$$

در این‌صورت قرینه M و $۳M$ و معکوس M دارای توابع عضویت زیر خواهند بود

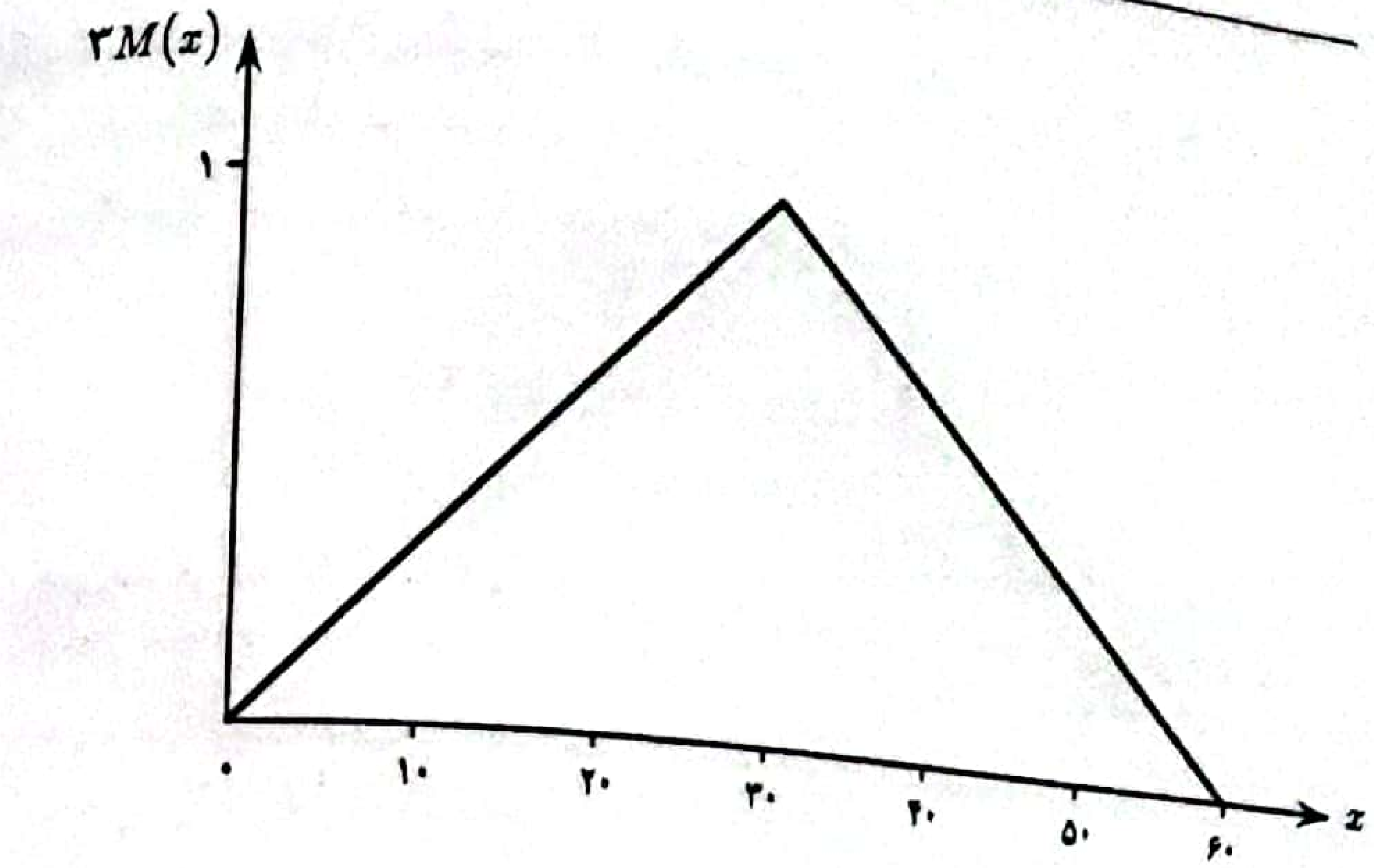
$$(\ominus M)(x) = \begin{cases} \frac{۲۰+x}{۱۰} & -۲۰ \leq x < -۱۰ \\ \frac{-x}{۱۰} & -۱۰ \leq x \leq ۰ \end{cases}$$

$$۳M(x) = \begin{cases} \frac{x}{۳۰} & ۰ \leq x < ۳۰ \\ \frac{۶۰-x}{۳۰} & ۳۰ \leq x < ۶۰ \end{cases}$$

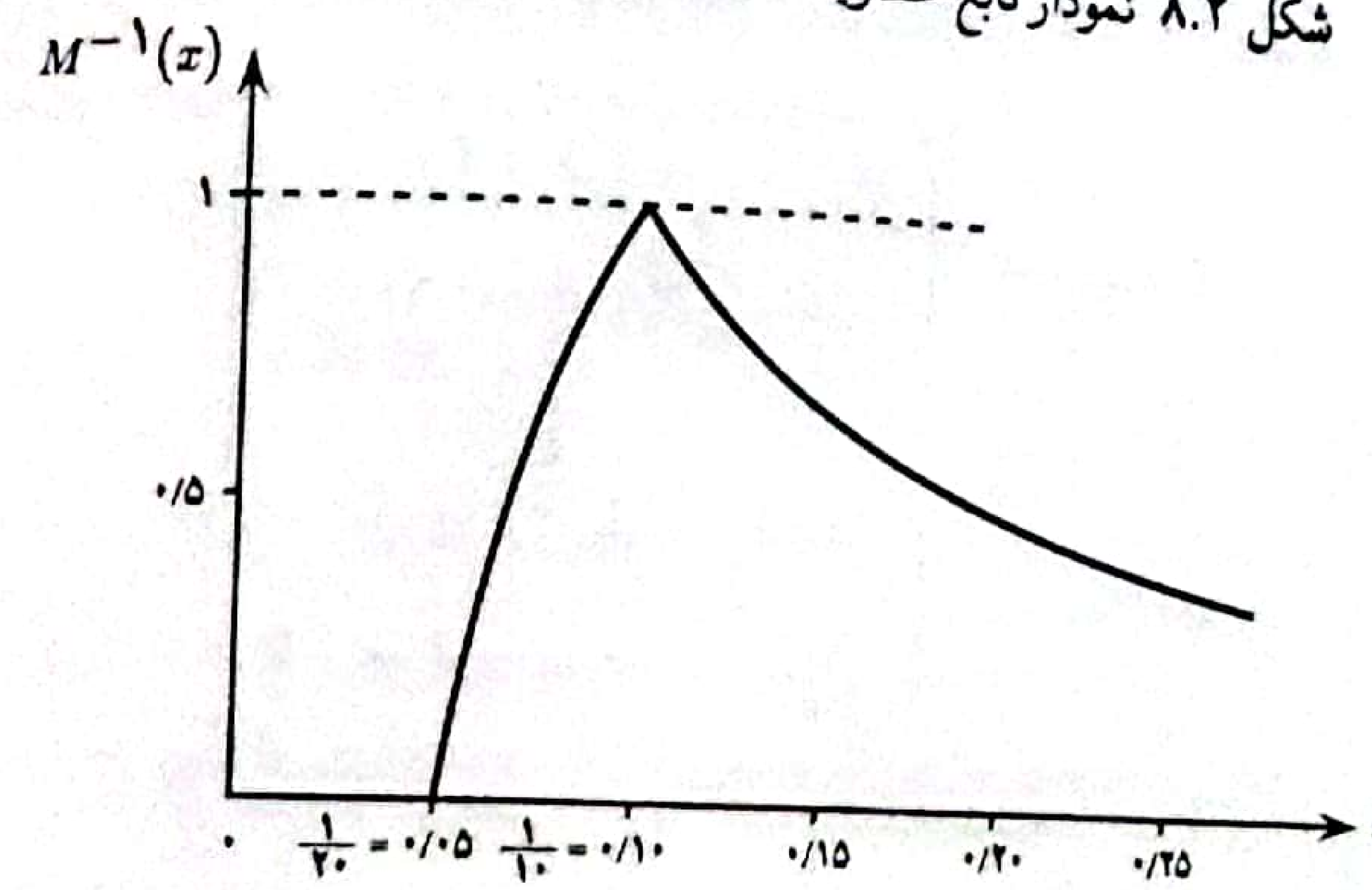
$$M^{-۱}(x) = \begin{cases} \frac{۲۰x-۱}{۱۰x} & \frac{۱}{۲۰} \leq x < \frac{۱}{۱۰} \\ \frac{۱}{۱۰x} & \frac{۱}{۱۰} \leq x < \infty \end{cases}$$



شکل ۷.۲ نمودار تابع عضویت اعداد فازی M و $\ominus M$ در مثال ۱۴.۲



شکل ۸.۲ نمودار تابع عضویت عدد فازی $3M$ در مثال ۱۴.۲



شکل ۹.۲ نمودار تابع عضویت عدد فازی M^{-1} در مثال ۱۴.۲

تعریف ۹.۲ فرض کنید M و N دو عدد فازی و $* : R \times R \to R$ یک عملگر دوتایی بر اعداد حقیقی باشد. اگر تعمیم عملگر $*$ را برای اعداد فازی با $\circledast$ نشان دهیم، با استفاده از اصل توسیع، حاصل $M \circledast N$ به‌صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$(M \circledast N)(z) = \sup_{z=x*y} \min[M(x), N(y)]$$

تعمیم چهار عمل اصلی برای اعداد فازی

در حالت خاص برای چهار عمل اصلی، تعریف بالا به‌صورت‌های زیر در می آید

$$\begin{aligned}
(M \oplus N)(z) &= \sup_{z=x+y} \min[M(x), N(y)] \\
(M \ominus N)(z) &= \sup_{z=x-y} \min[M(x), N(y)] \\
(M \otimes N)(z) &= \sup_{z=x\times y} \min[M(x), N(y)] \\
(M \oslash N)(z) &= \sup_{z=x/y} \min[M(x), N(y)]
\end{aligned}$$

این که نتیجه‌ی حاصل از عمل $\circledast$ برای دو عدد فازی M و N تحت چه شرایطی خود، یک عدد فازی است و این که عملگرهای فوق چه ویژگی‌هایی دارند، موضوع‌هایی است که در قسمت بعد به آن‌ها می‌پردازیم. نخست برای روشن شدن تعریف بالا، به یک مثال توجه کنید.

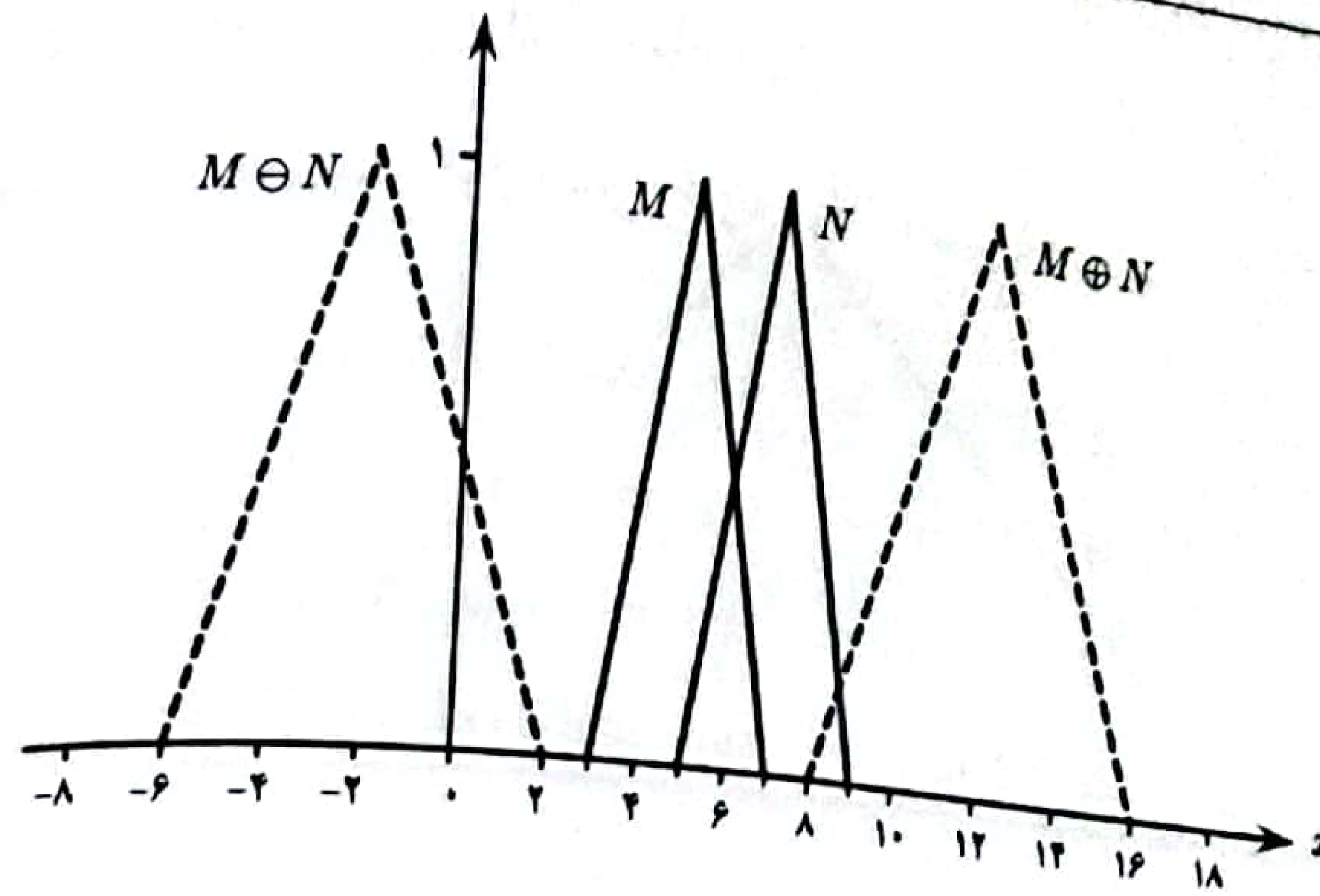
مثال ۱۵.۲ دو عدد فازی مثلثی M به‌صورت تقریباً پنج و N به‌صورت تقریباً هفت را با توابع عضویت زیر در نظر بگیرید

$$M(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{2} & 3 \le x < 5 \\ \frac{7-x}{2} & 5 \le x < 7 \end{cases}, \quad N(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{2} & 5 \le x < 7 \\ \frac{9-x}{2} & 7 \le x < 9 \end{cases}$$

جمع و تفاضل دو عدد فازی بالا، اعداد فازی با توابع عضویت زیر هستند (درباره‌ی چگونگی به‌دست آوردن این توابع عضویت به زودی بحث خواهیم کرد)

$$(M \oplus N)(x) = \begin{cases} \frac{x-8}{4} & 8 \le x < 12 \\ \frac{16-x}{4} & 12 \le x < 16 \end{cases}$$

$$(M \ominus N)(x) = \begin{cases} \frac{x+6}{4} & -6 \le x < -2 \\ \frac{2-x}{4} & -2 \le x < 2 \end{cases}$$



شکل ۱۰.۲ نمودار توابع عضویت اعداد فازی M و N و جمع و تفاضل آنها در مثال ۱۵.۲

ویژگی‌های عملگرهای تعمیم یافته

قضیه ۱.۲ اگر M و N دو عدد فازی با توابع عضویت پیوسته و پوشا بر $I = [0,1]$ باشند و $*$ یک عملگر دوتایی به‌طور پیوسته یکنوا باشد، آنگاه $M \circledast N$ یک عدد فازی است که تابع عضویت آن پیوسته و بر I پوشاست.

قضیه ۲.۲ اگر عملگر دوتایی $*$ دارای ویژگی جابه‌جایی (شرکت پذیری) باشد، آنگاه عملگر $\circledast$ نیز دارای ویژگی جابه‌جایی (شرکت پذیری) است.

برخی ویژگی‌های عملگرهای تعمیم یافته در نتیجه زیر بیان شده است.

نتیجه ۱.۲ ۱) مجموعه اعداد فازی نسبت به عملگرهای $\oplus$، $\ominus$ و $\otimes$ بسته است.

۲) $\ominus(M \oplus N) = (\ominus M \oplus (\ominus N))$

۳) $(\ominus M) \otimes N = \ominus(M \otimes N)$

۴) $\oplus$ و $\otimes$ ویژگی‌های جابه‌جایی و شرکت پذیری دارند.

دقت دارید که در حالت کلی، حاصل تقسیم دو عدد فازی ممکن است یک عدد فازی نباشد. اما اگر M و N دو عدد فازی باشند که هر کدام اکیداً مثبت یا اکیداً منفی باشند، آنگاه $M \oslash N$ نیز یک عدد فازی خواهد بود.

حساب اعداد فازی LR

از مطالب قسمت‌های پیشین آشکار است که اعمال جبری با اعداد فازی مستلزم محاسبات پیچیده است. اما اعداد فازی LR این ویژگی را دارند که برخی اعمال جبری بر آنها بسیار ساده و دارای الگوهای مشخص است و برای برخی دیگر از اعمال جبری نیز الگوهای تقریبی وجود دارد. این ویژگی‌ها باعث شده است که در بسیاری از مسائل کاربردی، از این نوع اعداد استفاده شود. در این قسمت برخی روابط مهم در حساب اعداد فازی LR بیان می‌شود.

قضیه ۳.۲ اگر $M = (m,\alpha,\beta)_{LR}$ و $\lambda \in R$ آنگاه

$$\lambda \otimes (m,\alpha,\beta)_{LR} = (\lambda m, \lambda\alpha, \lambda\beta)_{LR} \quad \lambda > 0$$

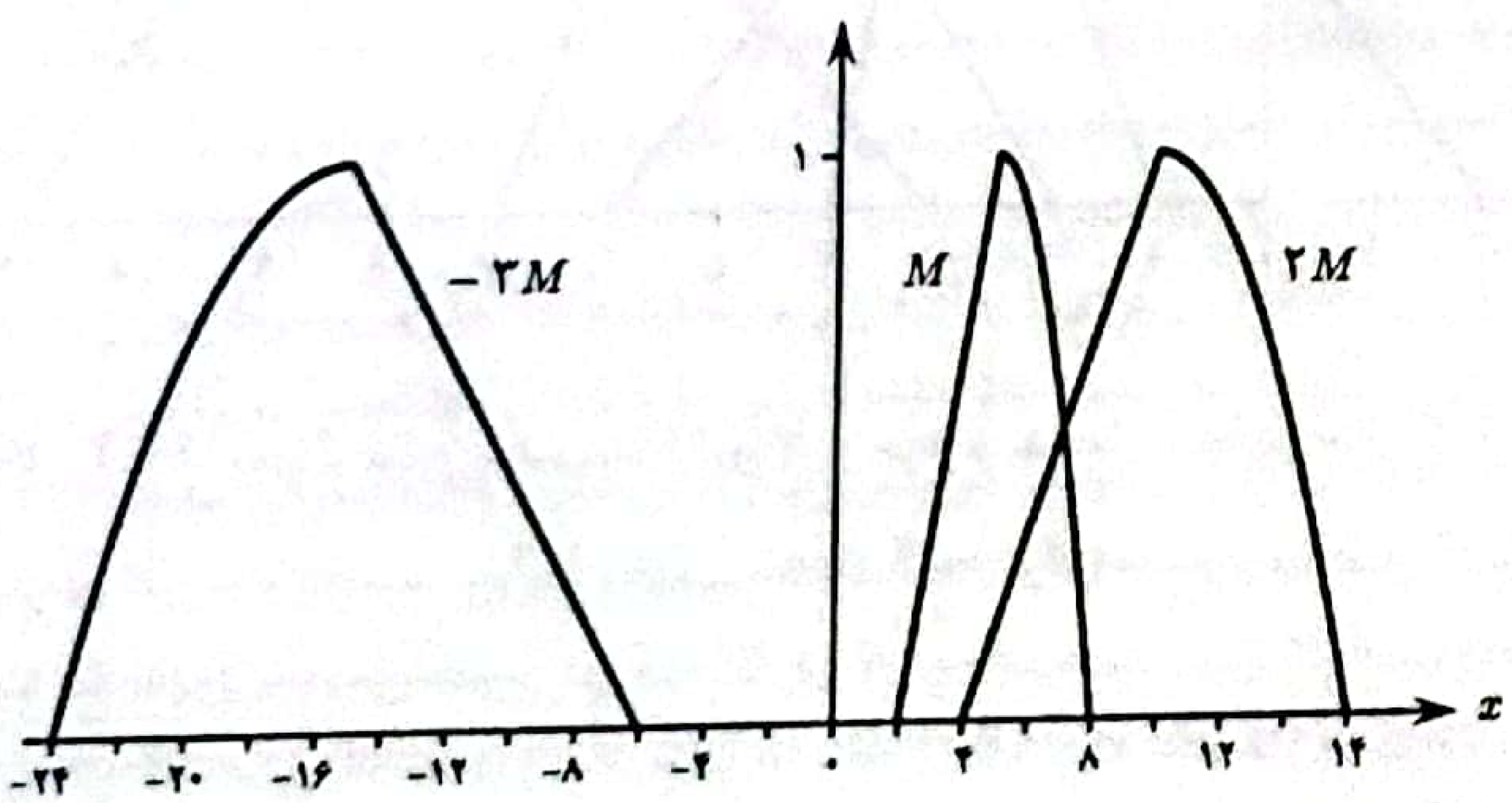
$$\lambda \otimes (m,\alpha,\beta)_{LR} = (\lambda m, -\lambda\beta, -\lambda\alpha)_{RL} \quad \lambda < 0$$

نتیجه ۲.۲ اگر $M = (m,\alpha,\beta)_{LR}$ آنگاه $\ominus M = (-m,\beta,\alpha)_{RL}$.

مثال ۱۶.۲ فرض کنید $M = (5,3,3)_{LR}$ و $L(x) = 1 - |x|$ و $R(x) = 1 - x^2$. در این صورت (شکل ۱۱.۲)

$$2 \otimes M = (10,6,6)_{LR} \quad , \quad -3 \otimes M = (-15,9,9)_{RL}$$

نوشتن توابع عضویت اعداد فازی M و $2 \otimes M$ و $-3 \otimes M$ به خواننده واگذار می‌شود.



شکل ۱۱.۲ نمودار توابع عضویت M و $2 \otimes M$ و $-3 \otimes M$ در مثال ۱۶.۲

قضیه ۴.۲ اگر $M=(m,\alpha,\beta)_{LR}$ و $N=(n,\delta,\gamma)_{LR}$، آنگاه $M\oplus N$ یک عدد فازی LR به‌صورت زیر است

$$M\oplus N=(m+n,\alpha+\delta,\beta+\gamma)_{LR}$$

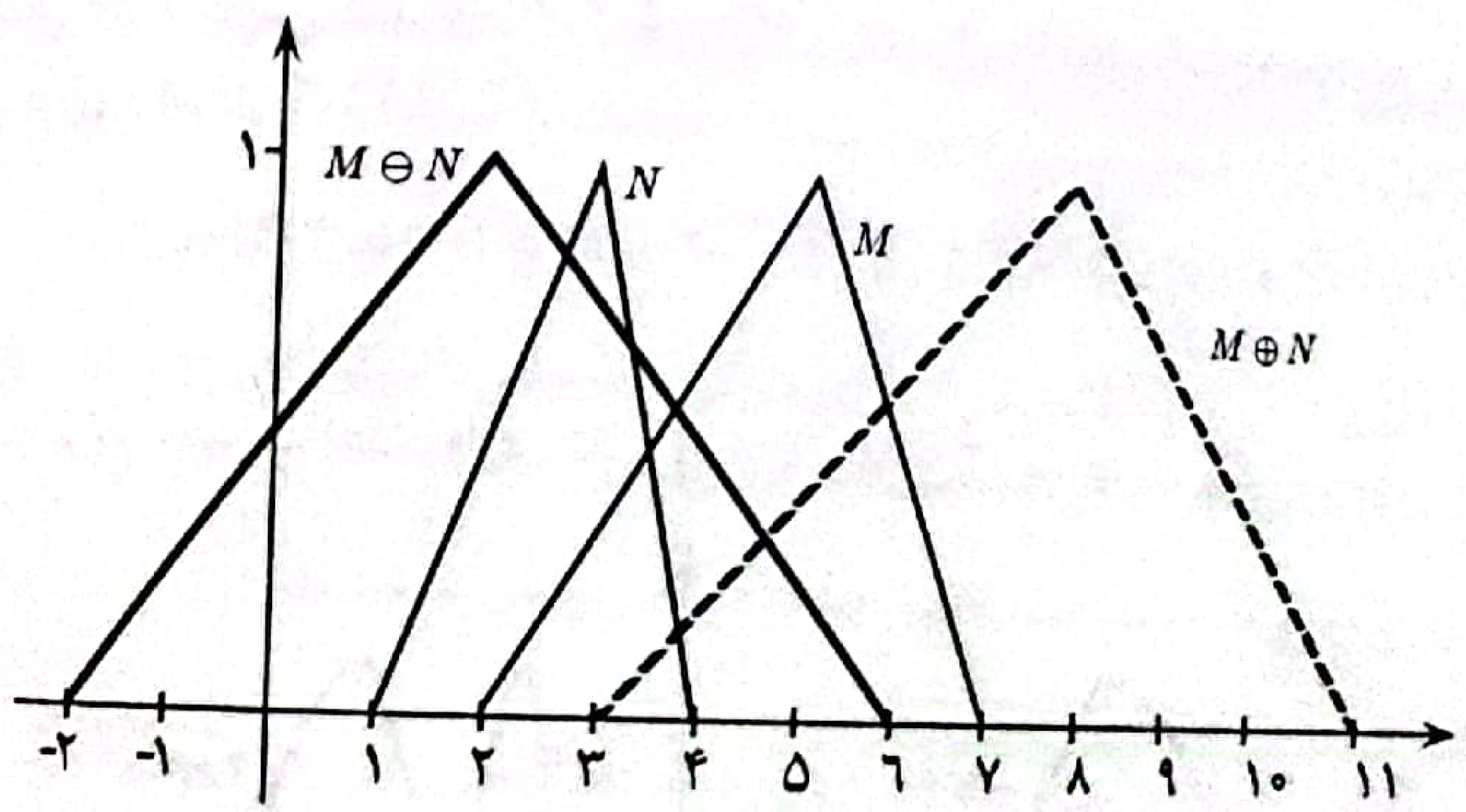
قضیه ۵.۲ اگر $M=(m,\alpha,\beta)_{LR}$ و $N=(n,\gamma,\delta)_{RL}$، آنگاه $M\ominus N$ یک عدد فازی LR به‌صورت زیر است

$$M\ominus N=(m-n,\alpha+\delta,\beta+\gamma)_{LR}$$

مثال ۱۷.۲ فرض کنید $M=(5,3,2)_T$ و $N=(3,2,1)_T$، آنگاه (شکل ۱۲.۲)

$$M\oplus N=(8,5,3)_T \quad , \quad M\ominus N=(2,4,4)_T$$

نوشتن توابع عضویت مربوطه به خواننده واگذار می‌شود.



شکل ۱۲.۲ نمودار توابع عضویت M و N و جمع و تفاضل آنها در مثال ۱۷.۲

درباره‌ی ضرب و تقسیم، روابط دقیقی مانند آنچه برای جمع و تفاضل گفته شد، وجود ندارد. اصولاً حاصل ضرب دو عدد فازی LR، یک عدد فازی LR نخواهد بود. هم‌چنین در حالت‌هایی که حاصل تقسیم دو عدد فازی LR یک عدد فازی می‌شود، عدد حاصل از نوع LR نیست. اما برای ضرب و تقسیم روابطی تقریبی پیشنهاد شده‌اند، که در ادامه چند رابطه تقریبی را بیان می‌کنیم.

روابط تقریبی برای ضرب اگر $M=(m,\alpha,\beta)_{LR}$ و $N=(n,\gamma,\delta)_{LR}$، آنگاه

$$(M\otimes N)\simeq\begin{cases}(mn,m\gamma+n\alpha,m\delta+n\beta)_{LR} & \text{هر دو مثبت } N \text{ و } M\\(mn,m\gamma-n\beta,m\delta-n\alpha)_{RL} & \text{ منفی } N \text{ مثبت و } M\\(mn,-n\beta-m\delta,-n\alpha-m\gamma)_{RL} & \text{هر دو منفی } N \text{ و } M\end{cases}$$

روابط تقریبی برای تقسیم اگر $M=(m,\alpha,\beta)_{LR}$ یک عدد فازی مثبت باشد، آنگاه

$$M^{-1}\simeq(m^{-1},\beta m^{-2},\alpha m^{-2})_{RL}$$

اگر $M=(m,\alpha,\beta)_{LR}$ و $N=(n,\gamma,\delta)_{RL}$ دو عدد فازی مثبت باشند، آنگاه

$$(M\oslash N)\simeq\left(\frac{m}{n},\frac{\delta m+\alpha n}{n^2},\frac{\gamma m+\beta n}{n^2}\right)_{LR}$$

یادآور می‌شویم که هرچه پهناهای اعداد فازی M و N (نسبت به مقادیر نمای آنها) کوچک باشند، روابط فوق دقیق‌تر هستند. به‌علاوه، این روابط در همسایگی مقادیر نما دقت بیشتری دارند.

۴.۲ نکات تکمیلی

۱. اصل توسیع یکی از اصول اساسی نظریه مجموعه‌های فازی و ابزاری مناسب برای تعمیم مفاهیم و ساختارهای ریاضیات کلاسیک به ریاضیات فازی است. این اصل توسط زاده در سال ۱۹۷۵ [۱۲] معرفی شد. برای مرور چند رویکرد به اصل توسیع به [۱] و برای بحثی گسترده درباره‌ی این اصل و مشخصه‌سازی آن به [۱۱] مراجعه کنید.
روابط و قضایای مربوط به مجموعه‌های فازی تصویر شده و α- برش‌های آن‌ها به‌طور گسترده، از جمله توسط ماشین‌چی [۸]، کلیر و یوان (مرجع [۹] فصل ۱) و گوین و واکر [۱۰]، بررسی شده است.

۲. معرفی و مطالعه درباره‌ی اعداد فازی و عملگرهای جبری مربوط به آن‌ها به دهه ۱۹۷۰ باز می‌گردد. نخستین مطالعات در این باره شامل مطالعات دوبوا و پراد [۳ و ۲] است. اعداد فازی LR نیز توسط دوبوا و پراد [۳] در سال ۱۹۷۹ معرفی شدند. از آن پس در بیشتر موارد از این نوع اعداد فازی استفاده می‌شود.

۳. حساب اعداد فازی در مراجعی مانند [۷ و ۶ و ۴] به گستردگی ارائه شده است. رویکرد آنالیز بازه‌ای [۹] به حساب اعداد فازی در اثر دوبوا و همکاران [۵] مطالعه شده است.

۴. رده دیگری از مجموعه‌های فازی از R، بازه‌های فازی هستند. اگر در تعریف

شرط تک‌نمایی بودن N حذف شود، آنگاه N یک بازه فازی (تعریف ۳.۲) عدد فازی نامیده می‌شود. بنابراین برای هر بازه فازی N، دو عدد $n_۱ \leq n_۲$ وجود دارد که برای x های عضو بازه $[n_۱, n_۲]$ داریم $N(x) = ۱$. پس یک بازه فازی عبارت است از یک بازه معمولی با کران‌های نادقیق. برای مثال مجموعه فازی M با تابع عضویت زیر یک بازه فازی است، که می توان آن را یک مدل برای مفهوم «حدوداً بین ۴ و ۵» در نظر گرفت (شایان یادآوری است که در برخی منابع، عدد فازی مطابق آنچه ما بازه فازی نامیدیم تعریف شده است)

$$M(x) = \begin{cases} (x-۲)/۲ & ۲ \leq x < ۴ \\ ۱ & ۴ \leq x < ۵ \\ ۱-(x-۵)^۲/۹ & ۵ \leq x < ۸ \end{cases}$$

۵. تعریف جمع دو عدد فازی M و N را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}(M \oplus N)(y) &= \sup_{x_۱, x_۲ \,;\, x_۱+x_۲=y} \min[M(x_۱), N(x_۲)] \\ &= \sup_{x \in R} \min[M(x), N(y-x)]\end{aligned}$$

این نکته شایان ذکر است که تعریف بالا تعمیم طبیعی تعریف جمع دو مجموعه معمولی (موسوم به جمع مینکوسکی) است. اگر M و N دو مجموعه معمولی از R باشند، آنگاه جمع مینکوسکی M و N به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$M + N = \{x + y \,;\, x \in M, y \in N\}$$

تعبیر و تفسیر بالا را می‌توان برای دیگر عملگرها نیز به‌کار برد.

تمرین‌های فصل دوم

۱.۲ می‌خواهیم درباره‌ی مقدار آهن موجود در سنگ آهن یک معدن بررسی آماری انجام دهیم. داده‌های فازی زیر نتایج تعیین مقدار آهن (به درصد، و به روش دی کرومات) برای پنج نمونه از سنگ‌ها است

$$(۴۳, ۰/۲۵, ۰/۲۵)_T \ , \quad (۳۵, ۰/۲۵, ۰/۲۵)_T \ , \quad (۳۷, ۰/۵, ۰/۵)_T$$
$$(۴۵, ۰/۲۵, ۰/۵)_T \ , \quad (۳۳, ۰/۲۵, ۰/۲۵)_T$$

میانگین نمونه را محاسبه کنید. واریانس نمونه را، به‌طور تقریبی، به‌دست آورید.

۲.۲ در یک توزیع احتمال نمایی با میانگین λ، مقدار λ به‌صورت عدد فازی «حدوداً ۶» با تابع عضویت $(۶, ۱, ۲)_T$ گزارش شده است. تابع عضویت عدد فازی $\frac{۱}{\lambda}$ را بیابید.

۳.۲ میانگین درآمد خانوارهای دو جامعه الف و ب (برحسب میلیون ریال) به‌صورت اعداد فازی نرمال $\mu_{\text{الف}} = (۶/۵, ۰/۵, ۰/۵)_N$ و $\mu_{\text{ب}} = (۸, ۰/۷۵, ۱)_N$ ارائه شده است. تفاوت میانگین درآمدها $(\mu_{\text{ب}} - \mu_{\text{الف}})$ را بیابید. نمودار سه تابع عضویت را در یک دستگاه رسم کنید.

۴.۲ می‌خواهیم برای یک کنترل‌گر فازی تهویه هوا، مفهوم «تقریباً ۴۰ درجه سانتی‌گراد» را مدل‌سازی کنیم. این مفهوم را به وسیله‌ی یک عدد فازی مثلثی و یک عدد فازی نرمال و یک عدد فازی سهموی مدل‌سازی کنید و نمودار هر سه تابع عضویت را رسم کنید.

۵.۲ به مجموعه نتایج یک بررسی درباره‌ی رابطه بین $x_۱$: مقدار تری کلسیم آلومینات، $x_۲$: مقدار تری کلسیم سیلیکات، $x_۳$: مقدار تری کلسیم آلمنو فری و y : حرارت حاصله (کالری در گرم) در مطالعه تأثیر اثر ترکیبات سیمان پرتلند بر روی حرارت حاصله طی سفت شدن سیمان، مدل زیر (یک مدل با ضرایب فازی) برازش شده است (چگونگی برازش را در فصل‌های ۱۱ و ۱۲ شرح می‌دهیم)

$$\begin{aligned} Y = (۴۷/۲۱, ۳/۴)_T &+ (۱/۷۰, ۰/۱۴)_T x_۱ \\ &+ (۰/۶۶, ۰/۰۴)_T x_۲ + (۰/۲۹, ۰/۰۲)_T x_۳ \end{aligned}$$

الف) فرض کنید در یک آزمایش جدید قرار است مقادیر $x_۱ = ۷/۵$ و $x_۲ = ۳۱$ و $x_۳ = ۱۲$ منظور گردند. مقدار Y را پیش‌بینی کنید.

ب) فرض کنید برای یک نمونه خاص مقادیر متغیرهای $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ به‌صورت نادقیق $x_۱ = (۷/۵, ۰/۵)_T$ و $x_۲ = (۳۱, ۱)_T$ و $x_۳ = (۱۲, ۰/۵)_T$ گزارش شده باشند. مقدار Y را، به‌طور تقریبی، برآورد کنید.

۶.۲ در یک بررسی نمونه‌ای، ضریب هوشی ۶ کودک از جامعه الف و ۸ کودک از جامعه ب اندازه‌گیری و نتایج به‌صورت اعداد فازی مثلثی زیر گزارش شده‌اند

جامعه الف	$(۱۱۵, ۵, ۵)_T$, $(۱۰۰, ۵, ۷)_T$, $(۱۱۰, ۵, ۵)_T$
	$(۱۰۸, ۵, ۵)_T$, $(۱۱۵, ۵, ۱۰)_T$, $(۹۵, ۵, ۵)_T$
جامعه ب	$(۱۰۰, ۵, ۵)_T$, $(۱۱۲, ۲, ۳)_T$, $(۱۰۷, ۵, ۳)_T$, $(۱۰۵, ۵, ۵)_T$
	$(۹۸, ۳, ۲)_T$, $(۹۰, ۲, ۴)_T$, $(۱۰۰, ۵, ۲)_T$, $(۱۱۵, ۳, ۳)_T$

مطلوبست $\bar{x}_{\text{ب}} - \bar{x}_{\text{الف}}$.

۷.۲ فاصله بین دو نقطه از R (خط اعداد حقیقی) به‌صورت $d(x_1,x_2)=|x_1-x_2|$ تعریف می‌شود. توضیح دهید چگونه می‌توان تعریفی برای فاصله بین دو عدد فازی بر پایه‌ی اصل توسیع، و با استفاده از تابع d، ارائه نمود.

۸.۲ در هر مورد $4M+1$ و $M\oplus N$ و $M\ominus N$ را بیابید.

الف) $M=(5, 0/5, 0/25)_L$ و $N=(3, 0/5, 0/2)_L$ و $L(x)=\max\{0, 1-x\}$.

ب) M و N بند الف و $L(x)=\frac{1}{1+|x|}$.

پ) M و N بند الف و $L(x)=e^{-x^2}$.

۹.۲ با به‌کارگیری روابط تقریبی برای ضرب دو عدد فازی، در هر مورد $M\otimes N$ را به‌طور تقریبی بیابید و درباره‌ی دقت تقریب بحث کنید.

الف) $M=(5, 0/5, 0/5)_T$ و $N=(2, 0/5, 0/2)_T$.

ب) $M=(15, 1, 0/5)_T$ و $N=(-2, 0/5, 0/1)_T$.

پ) $M=(-3, 0/5, 0/5)_T$ و $N=(0/5, 0/1, 0/2)_T$.

۱۰.۲ نمودار تابع عضویت اعداد فازی LR زیر را رسم کنید. مقدار نما و پهنای چپ و پهنای راست هر عدد را مشخص کنید.

الف) $M=(15, 1, 0/5)_L$ و $L(x)=\frac{1}{1+|x|}$.

ب) $M=(1500, 50, 100)$ و $L(x)=\max\{0, 1-x\}$.

پ) $M=(1500, 50, 100)_{LR}$ و $L(x)=\frac{1}{1+x^2}$ و $R(x)=e^{-x^2}$.

۱۱.۲ عدد فازی M : «تقریباً ۴۰» با تابع عضویت زیر را در نظر بگیرید

$$M(x)=\begin{cases} \frac{x-35}{5} & 35\le x<40 \\ \frac{50-x}{10} & 40\le x<50 \end{cases}$$

قرینه M و معکوس M و $\frac{1}{2}M$ را بیابید و نمودار توابع عضویت مربوطه را رسم کنید.

۱۲.۲ فرض کنید $X_1=X_2=Z$ و A_1, A_2 دو مجموعه فازی از Z، به‌ترتیب، بیانگر «تقریباً دو» و «تقریباً سه» به‌صورت زیر باشند

$$A_1=\left\{\frac{0/2}{0}, \frac{0/6}{1}, \frac{1}{2}, \frac{0/6}{3}, \frac{0/2}{4}, \frac{0/1}{5}\right\}$$

$$A_2=\left\{\frac{0/1}{0}, \frac{0/2}{1}, \frac{0/6}{2}, \frac{1}{3}, \frac{0/6}{4}, \frac{0/2}{5}, \frac{0/1}{6}\right\}$$

اگر $f: X_1\times X_2\to Y$ به‌صورت $y=f(x_1,x_2)=2x_1^2+x_2^2$ تعریف شده باشد، $f(A_1,A_2)$ را بیابید.

منابع و مراجع

[1] Dijkman, G.J., Haeringen, H. van, de Lange, S.T. (1983); Fuzzy numberss, 92: 301-341.

[2] Dubois H., Prade, H. (1978); Operations on fuzzy numbers, Inter. J. Systems Sciences, 9: 613-626.

[3] Dubois H., Prade, H. (1979); Fuzzy real algebra: Some results, Fuzzy Sets and Systems, 2: 327-348.

[4] Dubois H., Prade, H. (1980); Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Press.

[5] Dubois D., Kerre, E., Mesiar, R., Prade, H. (2000); Fuzzy interval analysis, In: D. Dubois, H. Prade (Eds.), Fundamentals of Fuzzy Sets, Vol. 1., Kluwer, pp. 483-582.

[6] Kaufmann A., (1975); Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets, Vol. 1: Fundamental Theoretical Elements, Academic Press.

[7] Kaufmann A., Gupta, M.M. (1985); Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications, Van Nastrand.

[8] Mashinchi, M., (1996); An application of fuzzy set representation, Inter. J. Science and Technology, Scientia Iranica, 2: 342-346.

[9] Moore, R.E. (1979); Methods and Applications of Inteval Analysis, SIAM.

[10] Nguyen, H.T., Walker, E.A. (2006); A First Course in Fuzzy Logic, Third Ed., Chapman & Hall/CRC.

[11] Yager, R.R. (1986); A characterization of the extension principle, Fuzzy Sets and Systems, 18: 205-217.

[12] Zadeh, L.A. (1975); The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, Inform. Sci., 8: 199-249.