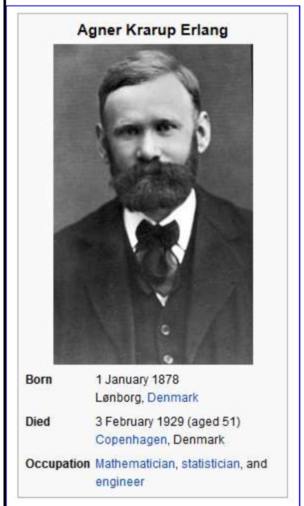
Part 4
توزیع‌های پیوسته (اختیاری)

توزیع‌های ارلنگ و گاما
Erlang and Gamma Distributions

Erlang

GAMMA

توزیع ارلنگ
Erlang Distribution

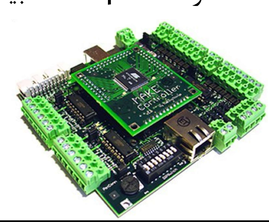


- یک متغیر تصادفی نمایی بیانگر طول (فاصله زمانی) است تا اولین پیشامد (شمارش) (count) (موفقیت) در یک فرآیند پوآسونی اتفاق افتد.
- حال با توجه به تعریف فوق، حالت کلی برای توزیع نمایی عبارت است از طول (فاصله زمانی) تا r پیشامد (شمارش) (موفقیت) در یک فرآیند پوآسونی اتفاق افتد.
- متغیر تصادفی که برابر است با فاصله زمانی (طول فاصله) (interval length) تا r پیشامد (شمارش) (موفقیت) در یک فرآیند پوآسونی رخ دهد را یک **متغیر تصادفی ارلنگ** (Erlang random variable) می‌نامند.

توزیع ارلنگ
Erlang Distribution

- **مثال: خرابی پردازنده** (Processor Failure)

خرابی واحدهای پردازنده مرکزی (CPU) سیستم‌های بزرگ کامپیوتری، اغلب به صورت فرآیند پوآسونی مدل می‌شوند. به‌طورمعمول، اگر خرابی‌ها ناشی از فرسودگی قطعات نباشند، بیشتر خرابی‌های تصادفی ناشی از تعداد زیاد مدارهای نیمه‌هادی در واحدها است. فرض کنید که واحدهایی که خراب می‌شوند، فوراً تعمیر گردند. در ضمن فرض کنید که متوسط تعداد خرابی‌ها در هر ساعت 0.0001 باشد. اگر X بیانگر طول زمان تا 4 خرابی در یک سیستم رخ دهد، باشد احتمال این‌که X از 40000 ساعت بیشتر شود را به دست آورید.



توزیع ارلنگ
Erlang Distribution

حل:

فرض کنید که متغیر تصادفی N بیانگر تعداد خرابی در 40000 ساعت کار کردن باشد. رخداد 4 خرابی در زمانی بیش از 40000 ساعت در صورتی مشاهده خواهد شد که اگر و فقط اگر در 40000 ساعت تعداد 3 و یا کمتر از 3 خرابی اتفاق افتاده باشد. بنابراین:

$$\boxed{P(X > 40{,}000) = P(N \le 3)}$$

فرض اینکه خرابی‌ها از یک فرآیند پواسونی پیروی می‌کنند، این مهم را روشن می‌نماید که N دارای توزیع پواسون با پارامتر زیر می‌باشد:

$$\boxed{E(N) = 40{,}000(0.0001) = 4 \text{ failures per } 40{,}000 \text{ hours}}$$

توزیع ارلنگ
Erlang Distribution

بنابراین:

$$P(X > 40{,}000) = P(N \le 3) = \sum_{k=0}^{3} \frac{e^{-4} 4^k}{k!} = 0.433$$

❑مثال قبلی می‌تواند تعمیم داده شود برای نشان دادن اینکه اگر X زمان تا rامین پیشامد در یک فرآیند پواسونی باشد، آنگاه:

$$\boxed{P(X > x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^k}{k!}}$$

توزیع ارلنگ
Erlang Distribution

❑به‌سبب‌آنکه $P(X > x) = 1 - F(x)$، تابع چگالی احتمال X برابر است با منفی مشتق طرف راست معادله بالا. پس از ساده‌سازی گسترده ریاضی می‌توان نشان داد که تابع چگالی احتمال X برابر است با:

$$f(x)=\frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!} \quad \text{for } x>0 \text{ and } r=1, 2, \ldots .$$

❑تابع توزیع تجمعی یک متغیر عمومی (general) تصادفی ارلنگ می‌تواند از طریق $P(X \le x) = 1 - P(X > x)$ به دست آید، و $P(X > x)$ را می‌توان مانند مثال قبلی تعیین نمود. بدین ترتیب تابع چگالی احتمال X را می‌توان از طریق مشتق گرفتن از تابع توزیع تجمعی و انجام عملیات جبری به دست آورد.

توزیع ارلنگ
Erlang Distribution

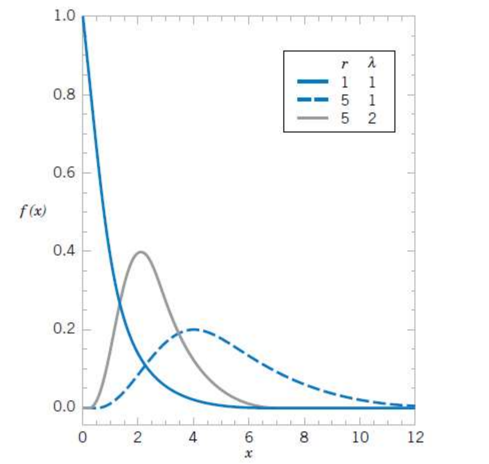
❑**تعریف:**

متغیر تصادفی X که برابر است با **فاصله زمانی (طول فاصله)** (interval length) تا اینکه r پیشامد (شمارش) (موفقیت) در یک فرآیند پوآسونی با میانگین $\lambda > 0$ رخ دهد. یک **متغیر تصادفی ارلنگ** (Erlang random variable) با پارامترهای λ و r می‌باشد. در این حالت، تابع چگالی احتمال X عبارت است از:

$$f(x)=\frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!}, \quad \text{for } x>0 \text{ and } r=1, 2, \ldots$$

❑شکل‌های منحنی تابع چگالی احتمال ارلنگ برای چندین مقدار r و λ در شکل زیر نشان داده شده‌اند.

توزیع ارلنگ
Erlang Distribution



توابع چگالی احتمال ارلنگ برای مقادیر انتخاب شده r و λ.

- ❑واضح است که یک متغیر تصادفی ارلنگ با $r = 1$ یک متغیر تصادفی نمایی می‌باشد.
- ❑احتمالات مربوط به متغیرهای تصادفی ارلنگ مانند مثال خرابی پردازنده، غالباً با استفاده از جمع متغیرهای تصادفی پوآسون به دست می‌آیند.
- ❑با انجام انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء (integrating by parts) بر روی تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی ارلنگ، می‌توان احتمالات را به دست آورد.
- ❑همانگونه که در توزیع نمایی بحث شد، در اینجا نیز باید در تعریف متغیر تصادفی و پارامترهایی با واحد سنجش یکسان دقت نمود.

توزیع ارلنگ
Erlang Distribution

❑**مثال:** روش دیگر برای محاسبه احتمال مثال خرابی پردازنده، انتگرال گرفتن از تابع چگالی احتمال X می‌باشد، به‌طوریکه:

$$P(X > 40{,}000) = \int_{40{,}000}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{40{,}000}^{\infty} \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!}\,dx$$

که در آن $r = 4$ و $\lambda = 0.0001$ می‌باشد. با انجام انتگرال جزءبه‌جزء، جواب قبلی به دست آمده در مثال قبل تأیید می‌شود.

توزیع ارلنگ
Erlang Distribution

- یک متغیر تصادفی ارلنگ را می‌توان در شرایط پیوسته، نظیر و مانند یک **متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی** فرض کرد.
- همانطورکه به یاد دارید، یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی را می‌توان به عنوان جمع r متغیر تصادفی هندسی بیان کرد.
- به‌طورمشابه، یک متغیر تصادفی ارلنگ را می‌توان به عنوان جمع r متغیر تصادفی نمایی در نظر گرفت.
- با استفاده از این تطابق، نتیجه زیر را می‌توان به دست آورد. در ضمن، موضوع جمع متغیرهای تصادفی در فصل 5 بحث و بررسی خواهد شد.
- اگر X یک متغیر تصادفی ارلنگ با پارامترهای r و λ باشد، آنگاه:

$$\mu = E(X) = r/\lambda \quad \text{and} \quad \sigma^2 = V(X) = r/\lambda^2$$

تمرین ۱ تا ۴: مطلوب است محاسبه تابع مولد گشتاور، مد، چولگی و تیزی اوج توزیع ارلنگ.

توزیع گاما
Gamma Distribution

- توزیع ارلنگ یک حالت خاص (special case) از **توزیع گاما** (gamma distribution) می‌باشد.
- اگر پارامتر r یک متغیر تصادفی ارلنگ، یک عدد صحیح نباشد، اما $r > 0$ باشد، آنگاه آن متغیر تصادفی یک توزیع گاما دارد.
- باوجوداین، در تابع چگالی ارلنگ، پارامتر r به صورت فاکتوریل ظاهر می‌شود. بنابراین در تعریف یک متغیر تصادفی گاما، به یک تابع عمومی (تعمیم تابع فاکتوریل (a generalization of the factorial function) از فاکتوریل نیاز است.

توزیع گاما
Gamma Distribution

❑ **تابع گاما** (**Gamma Function**):

تابع گاما عبارت است از:

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x}\, dx, \quad \text{for } r > 0$$

❑ می‌توان نشان داد که انتگرال در تابع $\Gamma(r)$ معین (محدود) (finite) است. بعلاوه، با استفاده از انتگرال جزءبه‌جزء می‌توان نشان داد که:

$$\boxed{\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)}$$

❑ بنابراین، اگر r یک عدد صحیح مثبت باشد، مانند آنچه که در توزیع ارلنگ است، داریم:

$$\boxed{\Gamma(r) = (r-1)!}$$

توزیع گاما
Gamma Distribution

❑ در ضمن $\Gamma(1) = 0! = 1$ و می‌توان نشان داد که $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$.

❑ تابع گاما می‌تواند به عنوان حالت کلی برای مقادیر غیر عدد صحیح r در عبارت $(r-1)!$ تفسیر گردد و این همان عبارتی است که در تابع چگالی احتمال ارلنگ استفاده می‌شود. حال می‌توان تابع چگالی گاما را به صورت زیر بیان کرد.

توزیع گاما
Gamma Distribution

❑ **توزیع گاما** (**Gamma Distribution**):

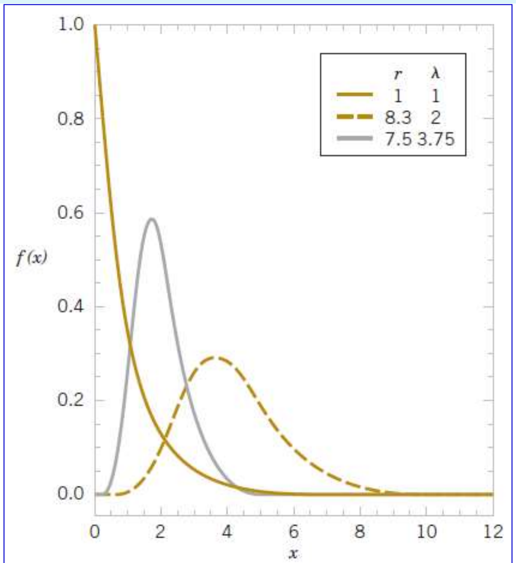
متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال زیر،

$$f(x)=\frac{\lambda^{r}x^{r-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)},\quad \text{for } x>0$$

یک **متغیر تصادفی گاما** (gamma random variable) با پارامترهای $\lambda > 0$ و $r > 0$ می‌باشد. اگر r عدد صحیح باشد، آنگاه X دارای توزیع ارلنگ است.

❑ شکل توزیع گاما برای مقادیر دلخواهی از پارامترهای λ و r در شکل زیر نشان داده شده است. می‌توان نشان داد که f(x) با تأمین ویژگی‌های لازم، یک تابع چگالی احتمال است و بر این اساس با انجام چندین مرحله انتگرال جزءبه‌جزء نتایج زیر به دست می‌آیند، اما محاسبات طولانی هستند.

توزیع گاما
Gamma Distribution



توابع چگالی گاما برای مقادیر انتخاب شده λ و r .

❑شکل‌های توزیع گاما برای چندین مقدار λ و r در شکل مقابل نشان داده شده‌اند.

❑بسیاری از شکل‌های متفاوت می‌توانند از تغییرات این پارامترها تولید شوند.

توزیع گاما
Gamma Distribution

- پارامترهای λ و r به‌ترتیب اغلب پارامترهای **مقیاس** (scale) و **شکل** (shape) نامیده می‌شوند.
- اما شخص باید تعاریف استفاده‌شده در بسته‌های نرم‌افزاری را چک کند.
- برای مثال، برخی از نرم‌افزارهای آماری پارامتر مقیاس را به صورت $1/\lambda$ تعریف می‌کنند.
- همچنین، تغییر متغیر $u = \lambda x$ و تعریف تابع گاما می‌توانند برای نشان دادن اینکه انتگرال تابع چگالی احتمال برابر 1 است، مورد استفاده قرار گیرند.
- تمرین ۱: نشان دهید انتگرال تابع چگالی احتمال توزیع گاما برابر یک است.

توزیع گاما
Gamma Distribution

- برای مورد خاص زمانی که r یک عدد صحیح است و مقدار r بزرگ نیست معادله

$$P(X > x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{k!}$$

می‌تواند برای محاسبه احتمالات برای یک متغیر تصادفی گاما به کار رود. با وجود این، در کل، اندازه‌گیری انتگرال تابع چگالی احتمال گاما دشوار است.

- بنابراین، نرم‌افزارهای کامپیوتری برای تعیین احتمالات مورد استفاده قرار می‌گیرند.

توزیع گاما
Gamma Distribution

- به خاطر بیاورید که برای یک توزیع نمایی با پارامتر λ، میانگین و واریانس به ترتیب $1/\lambda$ و $1/\lambda^2$ هستند.
- یک متغیر تصادفی ارلنگ زمان تا rامین پیشامد در یک فرآیند پوآسونی است و زمان بین پیشامدها مستقل هستند. بنابراین، منطقی است که میانگین و واریانس یک متغیر تصادفی گاما، نتایج نمایی را در r ضرب کنند. این امر نتایج زیر را حاصل می‌کند.
- برای به دست آوردن نتایج زیر، انتگرال‌گیری تکراری به روش جزءبه‌جزء می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. اما، محاسبات بسیار طولانی هستند و به عنوان تمرین (۲ و ۳) واگذار می‌شوند.

توزیع گاما
Gamma Distribution

- **میانگین و واریانس (Mean and Variance):**

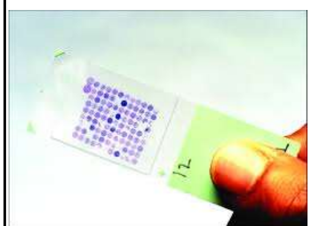
اگر X یک **متغیر تصادفی گاما** (gamma random variable) با پارامترهای λ و r باشد، آنگاه:

$$\mu = E(X) = r/\lambda \quad \text{and} \quad \sigma^2 = V(X) = r/\lambda^2$$

تمرین ۲ و ۳: مطلوب است محاسبه میانگین و واریانس توزیع گاما

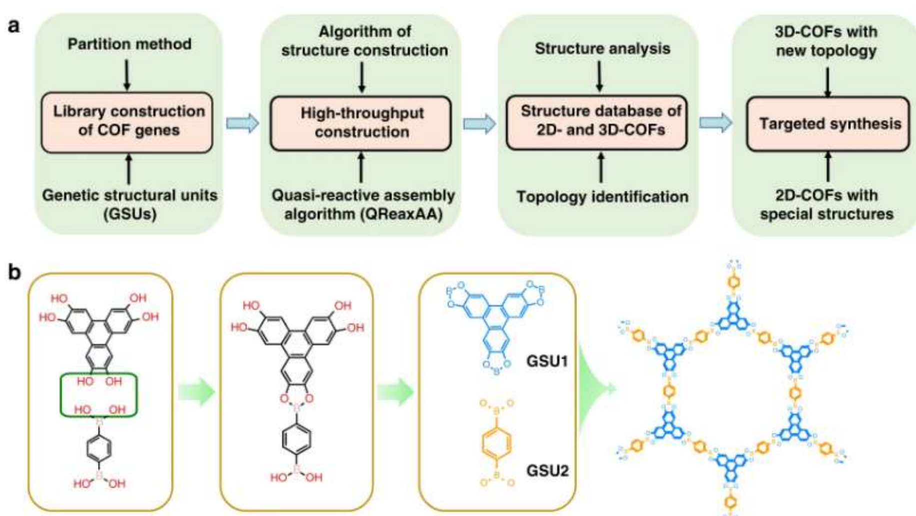
توزیع گاما
Gamma Distribution

❑**مثال:** زمان برای آماده‌سازی یک اسلاید میکروآرایه (micro-array slide) برای ژنومیک ظرفیت بالا (high-throughput genomics) یک فرآیند پوآسونی با میانگین دو ساعت در هر اسلاید (two hours per slide) است. الف) احتمال اینکه 10 اسلاید مستلزم بیش از 25 ساعت برای آماده شدن باشند، چقدر است؟ ب) میانگین و انحراف معیار زمان برای آماده کردن 10 اسلاید چقدر هستند؟ ج) اسلایدها با چه طول زمانی با احتمال برابر با 0.95 کامل خواهند شد؟



ژنومیک ظرفیت بالا
high-throughput genomics

From: Materials genomics methods for high-throughput construction of COFs and targeted synthesis



توزیع گاما
Gamma Distribution

❑ حل:

الف) فرض کنید X نشاندهنده زمان برای آماده کردن 10 اسلاید باشد. به سبب فرض یک فرآیند پوآسونی، X یک توزیع گاما با $\lambda = ½$ و $r = 10$ دارد، و احتمال موردنظر $P(X > 25)$ است. این احتمال می‌تواند از نرم‌افزارهایی که احتمالات پوآسونی تجمعی یا احتمالات گاما را فراهم می‌کنند، به دست آید. برای احتمالات پوآسونی تجمعی، از روش مثال خرابی پردازنده استفاده می‌کنیم برای به دست آوردن:

$$P(X > 25) = \sum_{k=0}^{9} \frac{e^{-12.5}(12.5)^k}{k!}$$

❑ برای به دست آوردن $P(X > 25) = 0.2014$، در نرم‌افزار میانگین = 12.5 و ورودی (input) = 9 قرار دادیم.

توزیع گاما
Gamma Distribution

❑ به عنوان یک چک، از تابع احتمال تجمعی گاما در Minitab استفاده کردیم. پارامتر شکل را برابر با 10، پارامتر مقیاس را برابر 0.5 و ورودی را برابر 25 قرار دادیم. احتمال محاسبه‌شده به‌صورت زیر است:

$$P(X \le 25) = 0.7986$$

و هنگامی‌که این مقدار از یک کم شود، به تطابق خوبی با نتیجه قبلی می‌رسیم:

$$P(X > 25) = 0.2014$$

ب) زمان میانگین برابر است با:

$$E(X) = r/\lambda = 10/0.5 = 20$$

واریانس زمان برابر است با:

$$V(X) = r/\lambda^2 = 10/0.5^2 = 40$$

توزیع گاما
Gamma Distribution

بنابراین، انحراف معیار برابر است با:

$$40^{1/2} = 6.32 \text{ hours}$$

ج) مسئله می‌پرسد برای x به گونه‌ای که:

$$P(X \le x) = 0.95$$

که در آن X گاما با $\lambda = 0.5$ و $r = 10$ است. در نرم‌افزار از تابع احتمال تجمعی معکوس گاما استفاده می‌کنیم و پارامتر شکل را روی 10، پارامتر مقیاس را روی 0.5 و احتمال را روی 0.95 تنظیم می‌کنیم. جواب به صورت زیر است:

$$P(X \le 31.41) = 0.95$$

- تفسیر عملی: براساس این نتیجه، یک برنامه زمانی (schedule) که 31.41 ساعت را برای آماده کردن 10 اسلاید امکان‌پذیر می‌کند باید 95% زمان را تأمین کند (meet).

توزیع مربع کای (مجذور کای) (توزیع خی دو) (توزیع کای دو)
Chi-squared Distribution (χ^2 Distribution)

- اگرچه استفاده از توزیع گاما در سیستم‌های فیزیکی متداول نمی‌باشد، حالت خاص آن یعنی توزیع ارلنگ، برای مدل کردن آزمایش‌های تصادفی بسیار مفید می‌باشد.
- در ضمن، توزیع **مربع کای** (**chi-squared distribution**) حالتی خاص از توزیع گاما می‌باشد که در آن $\lambda = ½$ و r مساوی مقادیر ... ,½, 1, 3/2, 2 می‌باشد.
- این توزیع به شکل وسیعی در تخمین فاصله‌ها (interval estimation) و تست‌های فرضیه‌ها (آزمون‌های فرض) (tests of hypotheses) مورد استفاده قرار می‌گیرد.
- در فصل 7 در رابطه با تخمین فاصله‌ها و آزمون‌های فرض بحث می‌شود.

توزیع مربع کای (مجذور کای) (توزیع خی دو) (توزیع کای دو)
Chi-squared Distribution (χ^2 Distribution)

Chi-Squared Distribution

Important applications of the chi-squared variate arise from the fact that it is the distribution of the sum of the squares of a number of normal variates. Where a set of data is represented by a theoretical model, the chi-squared distribution can be used to test the goodness of fit between the observed data points and the values predicted by the model, subject to the differences being normally distributed. A particularly common application is the analysis of contingency tables.

Variate $\chi^2 : \nu$.

Range $0 \leq x < \infty$. $r = \nu/2, \lambda = 1/2$

Shape parameter ν, degrees of freedom.

Probability density function $\dfrac{x^{(\nu-2)/2} \exp(-x/2)}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}$

where $\Gamma(\nu/2)$ is the gamma function

with argument $\nu/2$

توزیع مربع کای (مجذور کای) (توزیع خی دو) (توزیع کای دو)
Chi-squared Distribution (χ^2 Distribution)

- کاربردهای مهم متغیر کای دو از این واقعیت ناشی می‌شوند که آن توزیع مجموع مربعات تعدادی از متغیرهای نرمال است.
- درجایی‌که مجموعه‌ای از داده‌ها توسط یک مدل نظری ارائه شده است، می‌توان از توزیع مجذور کای برای آزمایش حسن تناسب (goodness of fit) بین نقاط داده مشاهده‌شده و مقادیر پیش‌بینی‌شده توسط مدل استفاده کرد، به شرط آن‌که تفاوت‌ها (اختلافات) به‌طورنرمال توزیع شده باشند.
- یک کاربرد ویژه متداول، آنالیز جداول همسانی (توافق) (contingency tables) است.

توزیع مربع کای (مجذور کای) (توزیع خی دو) (توزیع کای دو)
Chi-squared Distribution (χ^2 Distribution)

Moment generating function	$(1-2t)^{-\nu/2}, \quad t<\frac{1}{2}$
Laplace transform of the pdf	$(1+2s)^{-\nu/2}, \quad s>-\frac{1}{2}$
Characteristic function	$(1-2it)^{-\nu/2}$
Cumulant generating function	$(-\nu/2)\log(1-2it)$
rth Cumulant انباشتک	$2^{r-1}\nu(r-1)!, \quad r\geq 1$
rth Moment about the origin	$2^r\prod_{i=0}^{r-1}[i+(\nu/2)]=\dfrac{2^r\Gamma(r+\nu/2)}{\Gamma(\nu/2)}$
Mean	ν
Variance	2ν
Mode	$\nu-2, \nu\geq 2$
Median	$\nu-\frac{2}{3}$ (approximately for large ν)

توزیع مربع کای (مجذور کای) (توزیع خی دو) (توزیع کای دو)
Chi-squared Distribution (χ^2 Distribution)

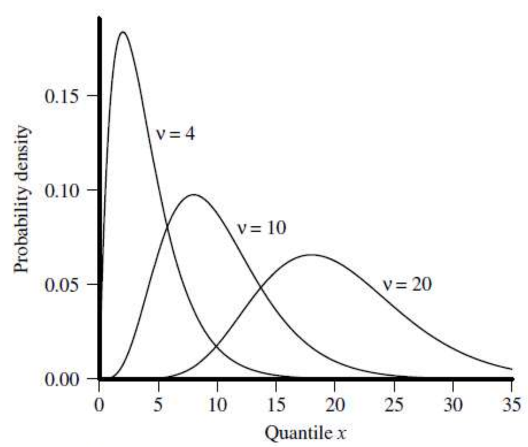


Figure 11.1. Probability density function for the chi-squared variate $\chi^2:\nu$.

Coefficient of skewness	$2^{3/2}\nu^{-1/2}$
Coefficient of kurtosis	$3+12/\nu$
Coefficient of variation	$(2/\nu)^{1/2}$

توزیع مربع کای (مجذور کای) (توزیع خی دو) (توزیع کای دو)
Chi-squared Distribution (χ^2 Distribution)

The probability density function of the $\chi^2 : \nu$ variate is shown in Figure 11.1, with the corresponding distribution function shown in Figure 11.2, for selected values of the degrees of freedom parameter ν.

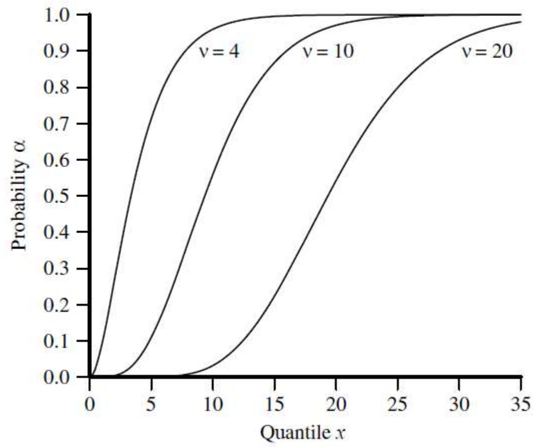
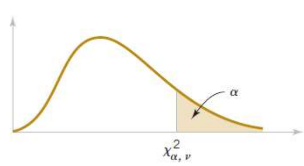


Figure 11.2. Distribution function for the chi-squared variate $\chi^2 : \nu$.

توزیع مربع کای (مجذور کای) (توزیع خی دو) (توزیع کای دو)
Chi-squared Distribution (χ^2 Distribution)



ν = degrees of freedom.

TABLE • IV Percentage Points $\chi^2_{\alpha,\nu}$ of the Chi-Squared Distribution

ν \ α	.995	.990	.975	.950	.900	.500	.100	.050	.025	.010	.005
1	.00+	.00+	.00+	.00+	.02	.45	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.01	.02	.05	.10	.21	1.39	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	.07	.11	.22	.35	.58	2.37	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	.21	.30	.48	.71	1.06	3.36	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	.41	.55	.83	1.15	1.61	4.35	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	.68	.87	1.24	1.64	2.20	5.35	10.65	12.59	14.45	16.81	18.55
7	.99	1.24	1.69	2.17	2.83	6.35	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	7.34	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	8.34	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	9.34	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19

توزیع مربع کای (مجذور کای) (توزیع خی دو) (توزیع کای دو)
Chi-squared Distribution (χ^2 Distribution)

TABLE • IV Percentage Points $\chi^2_{\alpha,\nu}$ of the Chi-Squared Distribution

ν \ α	.995	.990	.975	.950	.900	.500	.100	.050	.025	.010	.005
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	10.34	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	11.34	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	12.34	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	13.34	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.27	7.26	8.55	14.34	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	15.34	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	16.34	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.87	17.34	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	18.34	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	19.34	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	20.34	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	21.34	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	22.34	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	23.34	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	24.34	34.28	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	25.34	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	26.34	36.74	40.11	43.19	46.96	49.65
28	12.46	13.57	15.31	16.93	18.94	27.34	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	28.34	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	29.34	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67

توزیع مربع کای (مجذور کای) (توزیع خی دو) (توزیع کای دو)
Chi-squared Distribution (χ^2 Distribution)

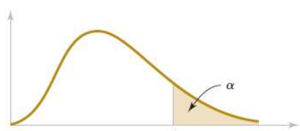


TABLE • IV Percentage Points $\chi^2_{\alpha,\nu}$ of the Chi-Squared Distribution

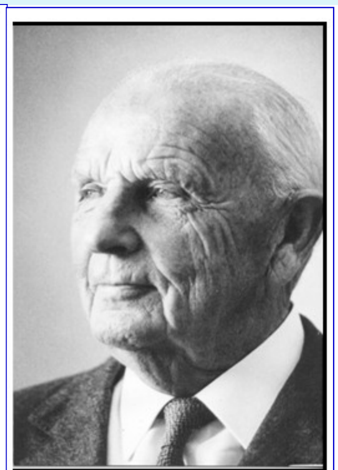
ν \ α	.995	.990	.975	.950	.900	.500	.100	.050	.025	.010	.005
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	29.34	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	39.34	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	49.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	59.33	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	69.33	85.53	90.53	95.02	100.42	104.22
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	79.33	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	89.33	107.57	113.14	118.14	124.12	128.30
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	99.33	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17

ν = degrees of freedom.

توزیع ویبول
Weibull Distribution

Ernst Hjalmar Waloddi Weibull

Born	18 June 1887[1] Annecy, France
Died	12 October 1979 (aged 92)[2] Annecy, France
Nationality	Swedish
Fields	Engineering, mathematics
Institutions	Royal Institute of Technology
Alma mater	Royal Institute of Technology (1924),[1] University of Uppsala (1932)[1]
Known for	Weibull distribution Fracture mechanics[1]
Notable awards	American Society of Mechanical Engineers gold medal (1972) Royal Swedish Academy of Engineering Sciences Great Gold medal (1978).



Wallodi Weibull 1887-1979

- این توزیع به افتخار یک دانشمند سوئدی که در سال 1939 میلادی آن را معرفی کرد، نامگذاری شده است.

توزیع ویبول
Weibull Distribution

- همانطورکه قبلاً بیان شد، توزیع ویبول اغلب برای مدل کردن **زمان تا خرابی** (time until failure) بسیاری از سیستم‌های فیزیکی متفاوت مورد استفاده قرار می‌گیرد.
- پارامترهای توزیع ویبول به‌گونه‌ای هستند که انعطاف‌پذیری بالایی را **برای مدل کردن سیستم‌هایی که در آن‌ها تعداد خرابی‌ها با گذشت زمان افزایش می‌یابد** (مانند سایش بلبرینگ)، یا با گذشت زمان خرابی‌ها کاهش می‌یابند (مانند برخی از نیمه‌رسانا‌ها) (این حالت خیلی کم پیش می‌آید) و یا آنکه در طول زمان ثابت باقی می‌مانند (مانند خرابی‌هایی که به واسطه یک ضربه خارجی (external shocks) به وجود می‌آیند) (شبیه توزیع نمایی می‌شود)، فراهم می‌آورند.

توزیع ویبول
Weibull Distribution

❑توزیع ویبول (**Weibull Distribution**):

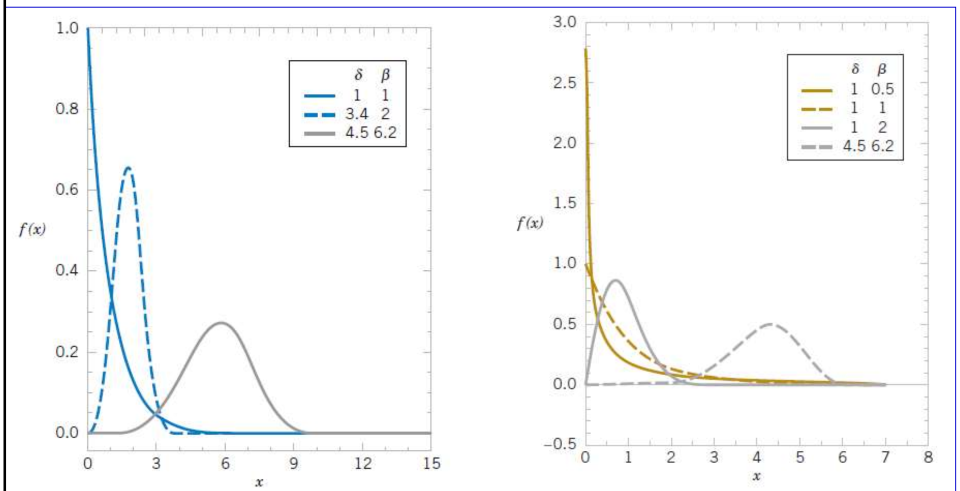
متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال زیر:

$$f(x) = \frac{\beta}{\delta}\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta}\right], \qquad \text{for } x > 0$$

یک **متغیر تصادفی ویبول** (Weibull random variable) با پارامتر مقیاس (scale parameter) $\delta > 0$ و پارامتر شکل (shape parameter) $\beta > 0$ است.

❑انعطاف‌پذیری توزیع ویبول در منحنی‌های توابع چگالی احتمال شکل‌های زیر نشان داده شده است.

توزیع ویبول
Weibull Distribution



توابع چگالی احتمال ویبول برای مقادیر انتخاب شده δ و β .

توزیع ویبول
Weibull Distribution

- با بررسی تابع چگالی احتمال توزیع ویبول، مشاهده می‌شود هنگامی که $\beta = 1$ است، توزیع ویبول با توزیع نمایی یکی می‌شود.
- همچنین توزیع ریلی (**Rayleigh distribution**) یک مورد خاص است هنگامی که پارامتر شکل برابر 2 باشد ($\beta = 2$).
- در توزیع ویبول، تابع توزیع تجمعی آن غالباً برای محاسبه احتمالات مورد استفاده قرار می‌گیرد. با انجام محاسبات لازم، نتیجه زیر به دست می‌آید.

توزیع ویبول
Weibull Distribution

- **تابع توزیع تجمعی (Cumulative Distribution Function):**

اگر X دارای **توزیع ویبول** (Weibull distribution) با پارامترهای δ و β باشد، آنگاه تابع توزیع تجمعی X به صورت زیر خواهد بود:

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta}}$$

- همچنین نتایج زیر می‌توانند با انجام محاسبات لازم، به دست آیند.

توزیع ویبول
Weibull Distribution

❑میانگین و واریانس (**Mean and Variance**):

اگر X دارای توزیع ویبول با پارامترهای δ و β باشد، آنگاه:

$$\mu = E(X) = \delta\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \quad \text{and} \quad \sigma^2 = V(X) = \delta^2\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \delta^2\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]^2$$

❑تمرین: **مطلوب است محاسبه تابع مولد گشتاور، میانگین، واریانس، مد، چولگی و کشیدگی توزیع ویبول.**

توزیع ریلی
Rayleigh distribution

Range $0 < x < \infty$.

Scale parameter $b > 0$.

$\delta = b\sqrt{2}$

$\beta = 2$

Distribution function	$1 - \exp[-x^2/(2b^2)]$
Probability density function	$(x/b^2)\exp[-x^2/(2b^2)]$
Inverse distribution function (of probability α)	$[-2b^2\log(1-\alpha)]^{1/2}$
Hazard function	x/b^2
rth Moment about the origin	$(2^{1/2}b)^r(r/2)\Gamma(r/2)$
Mean	$b(\pi/2)^{1/2}$
Variance	$(2-\pi/2)b^2$
Coefficient of skewness	$2(\pi-3)\pi^{1/2}/(4-\pi)^{3/2} \approx 0.63$
Coefficient of kurtosis	$(32-3\pi^2)/(4-\pi)^2 \approx 3.25$
Coefficient of variation	$(4/\pi-1)^{1/2}$
Mode	b
Median	$b(\log 4)^{1/2}$

توزیع ریلی
Rayleigh distribution

VARIATE RELATIONSHIPS

1. The Rayleigh variate $X(b)$ corresponds to the Weibull variate $W(b\sqrt{(2)}, 2)$.

2. The square of a Rayleigh variate with parameter $b = 1$ corresponds to the chi-squared variate with 2 degrees of freedom, $\chi : 2$.

3. The square of a Rayleigh variate with parameter b corresponds to an exponential variate with parameter $2b^2$.

4. The Rayleigh variate with parameter $b = \sigma$, here denoted X: σ, is related to independent normal variates N: 0, σ by

$$X : \sigma \sim \left[(N : 0, \sigma)_1^2 + (N : 0, \sigma)_2^2\right]^{1/2}.$$

5. A generalization of the Rayleigh variate, related to the sum of squares of v independent N: 0, σ variates, has pdf

$$\frac{2x^{v-1}\exp(-x^2/2b^2)}{(2b^2)^{v/2}\Gamma(v/2)}.$$

توزیع ریلی
Rayleigh distribution

with rth moment about the origin

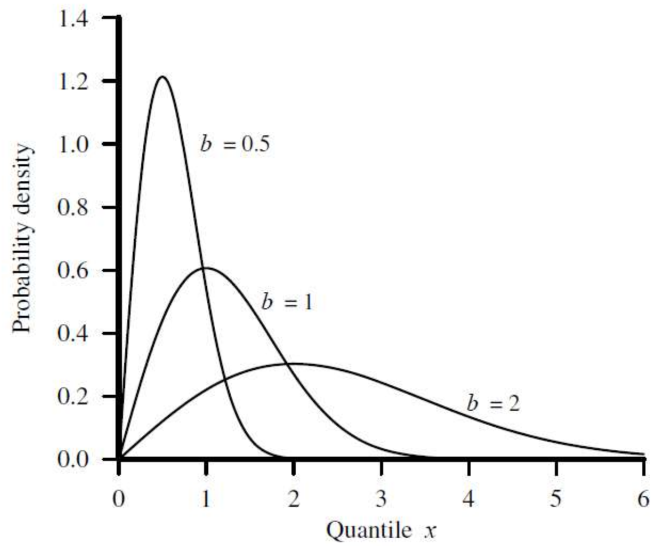
$$\frac{(2^{1/2}b)^r\,\Gamma\big((r+v)/2\big)}{\Gamma(v/2)}.$$

For $b = 1$, this corresponds to the chi variate $\chi : v$.

PARAMETER ESTIMATION

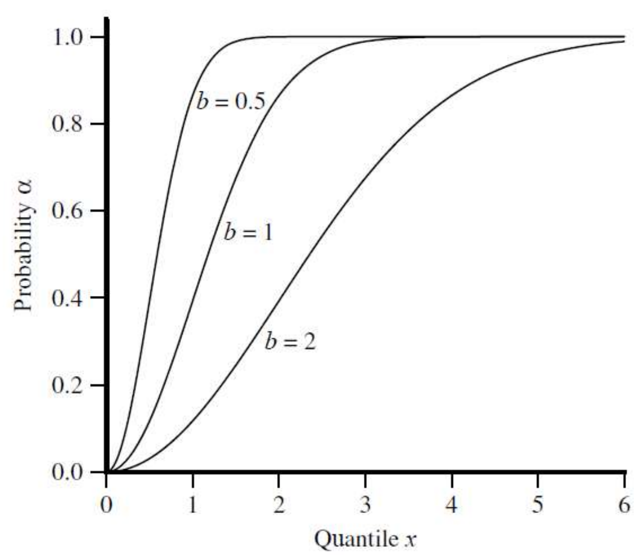
Parameter	Estimator	Method/Properties
b	$\left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$	Maximum likelihood

توزیع ریلی
Rayleigh distribution



Probability density function for the Rayleigh variate; $\chi : b$.

توزیع ریلی
Rayleigh distribution



Distribution function for the Rayleigh variate; $\chi : b$.

توزیع ویبول
Weibull Distribution

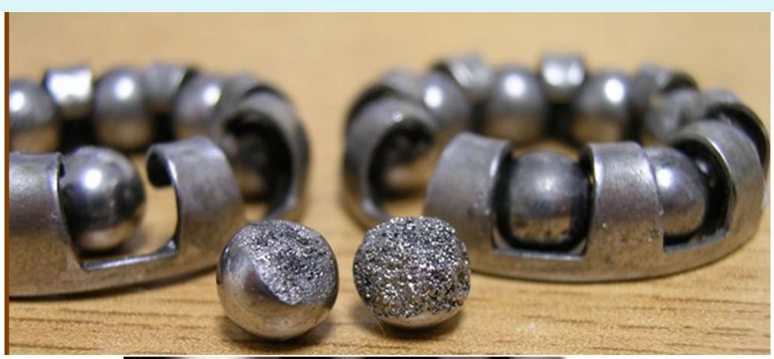
❑**مثال:** سایش یاتاقان (**Bearing Wear**)

زمان خراب شدن (برحسب ساعت) یک بلبرینگ در یک محور مکانیکی (mechanical shaft)، به عنوان یک متغیر تصادفی ویبول با پارامترهای $\beta = ½, 1, 2$ و $\delta = 5000$ ساعت، به شکل مناسبی مدل می‌شود. الف) میانگین زمان خراب شدن را برای هر سه حالت فوق به دست آورید. ب) احتمال اینکه یک بلبرینگ حداقل 6000 ساعت دوام داشته باشد را به دست آورید.

Ball bearing

Roller bearing

توزیع ویبول
Weibull Distribution



توزیع ویبول
Weibull Distribution

حل:

الف) برای $\beta = 1/2$

$$E(X) = 5000\Gamma[1 + (1/0.5)] = 5000\Gamma[3] = 5000 \times 2! = 10{,}000 \text{ hours}$$

برای $\beta = 1$

$$E(X) = 5000\Gamma[1 + (1/1)] = 5000\Gamma[2] = 5000 \times 1! = 5000 \text{ hours}$$

برای $\beta = 2$

$$E(X) = 5000\Gamma\left[1 + (1/2)\right] = 5000\Gamma\left[1.5\right] = 5000 \times 0.5\sqrt{\pi} = 4431.1 \text{ hours}$$

توزیع ویبول
Weibull Distribution

ب) برای $\beta = 1/2$

$$P(X > 6000) = 1 - F(6000) = \exp\left[-\left(\frac{6000}{5000}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = e^{-1.095} = 0.334$$

برای $\beta = 1$

$$P(X > 6000) = 1 - F(6000) = \exp\left[-\left(\frac{6000}{5000}\right)^{1}\right] = e^{-1.20} = 0.301$$

برای $\beta = 2$

$$P(X > 6000) = 1 - F(6000) = \exp\left[-\left(\frac{6000}{5000}\right)^{2}\right] = e^{-1.44} = 0.237$$

درنتیجه در حالت اول فقط 33.4% از بلبرینگ‌ها، در حالت دوم 30.1%، و در حالت سوم 23.7% حداقل 6000 ساعت دوام دارند. یعنی با افزایش β عمر بلبرینگ‌ها کم می‌شود.

توزیع ویبول
Weibull Distribution

❑ لازم به ذکر است که علاوه بر دو پارامتر مقیاس و شکل، پارامتر موقعیت α (location parameter) را نیز در تعریف توزیع ویبول سه‌پارامتری (The 3-Parameter Weibull) به کار می‌برند (سایت زیر).

http://reliawiki.org/index.php/The_Weibull_Distribution

❑ در این صورت متغیر تصادفی پیوسته X دارای توزیع ویبول با پارامترهای α، β و δ می‌باشد، اگر و فقط اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر تعریف گردد:

$$f(x) = \frac{\beta}{\delta}\left(\frac{x-\alpha}{\delta}\right)^{\beta-1} \ exp\left[-\left(\frac{x-\alpha}{\delta}\right)^{\beta}\right]$$

توزیع ویبول
Weibull Distribution

❑ که در آن، α پارامتر موقعیت با محدودیت ∞ > α> ∞- می‌باشد. به عبارت دیگر، در شرایط دو پارامتری پارامتر موقعیت برابر صفر می‌باشد. در این صورت، مقدار واریانس متغیر تصادفی ویبول سه‌پارامتری با شرایط دوپارامتری یکسان است اما میانگین به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{\mu = E(X) = \alpha + \delta\,\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}$$

❑ تابع توزیع تجمعی توزیع ویبول سه‌پارامتری نیز عبارت است از:

$$F(x) = 1 - exp\left[-\left(\frac{x-\alpha}{\delta}\right)^{\beta}\right]; \qquad x \geq \alpha$$

اگر α برابر صفر باشد، توزیع تجمعی ویبول فوق تبدیل به دوپارامتری می‌شود.

توزیع ویبول
Weibull Distribution

❑ **مثال:** اگر زمان خراب شدن یک وسیله الکترونیکی برحسب ساعت را با متغیر تصادفی X معرفی نماییم، که از توزیع ویبول با پارامترهای $\alpha = 0$، $\delta = 100$ و $\beta = 0.5$ پیروی نماید، میانگین زمان خراب شدن و احتمال اینکه وسیله الکترونیکی فوق حداقل 400 ساعت کار کند را محاسبه کنید.

حل:

$$\mu = E(X) = \alpha + \delta\,\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = 0 + 100\,\Gamma(3) = 100\,(2!) = 200$$

$$P(X \geq 400) = 1 - F(400)$$

$$= \exp\left[-\left(\frac{x-\alpha}{\delta}\right)^{\beta}\right] = \exp\left[-\left(\frac{400}{100}\right)^{0.5}\right] = e^{-2} = 0.1353$$

توزیع نرمال لگاریتمی (لاگ‌نرمال)
Lognormal Distribution

❑ برخی از مواقع، در یک سیستم متغیرها از یک رابطه نمایی (exponential relationship) مانند $x = \exp(w)$ پیروی می‌کنند.

❑ اگر نما (exponent) یک متغیر تصادفی مانند W باشد، آنگاه $X = \exp(W)$ یک متغیر تصادفی است و لذا علاقمندیم که توزیع X را بدانیم.

❑ یک حالت خاص و مهم، زمانی اتفاق می‌افتد که W دارای توزیع نرمال باشد. در چنین شرایطی، توزیع X را **توزیع لاگ‌نرمال** (lognormal distribution) می‌نامند.

❑ نامگذاری فوق به دلیل انجام تغییر متغیر (تبدیل) به صورت $\ln(X) = W$ می‌باشد. یعنی لگاریتم طبیعی X به صورت نرمال توزیع شده است.

توزیع نرمال لگاریتمی (لاگ‌نرمال)
Lognormal Distribution

- احتمالات برای X از تبدیل توزیع نرمال به دست می‌آیند. محدوده X ، $(0, \infty)$ می‌باشد.
- فرض کنید که W دارای توزیع نرمال با میانگین θ و واریانس ω^2 باشد. بنابراین، تابع توزیع تجمعی برای X هنگامی که $x > 0$ عبارت است از:

$$F(x) = P[X \le x] = P[\exp(W) \le x] = P[W \le \ln(x)]$$
$$= P\left[Z \le \frac{\ln(x) - \theta}{\omega}\right] = \Phi\left[\frac{\ln(x) - \theta}{\omega}\right]$$

که در آن Z متغیر تصادفی نرمال استاندارد می‌باشد و $\Phi(\cdot)$ تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال استاندارد می‌باشد. بنابراین، جدول توزیع نرمال استاندارد برای به دست آوردن احتمال می‌تواند استفاده شود.

توزیع نرمال لگاریتمی (لاگ‌نرمال)
Lognormal Distribution

- روشن است زمانی که $x \le 0$ می‌باشد، آنگاه $F(x) = 0$ است.
- تابع چگالی احتمال X را با مشتق گرفتن از $F(x)$ می‌توان به دست آورد. این مشتق برای آخرین عبارت فرمول $F(x)$ به کار می‌رود. به سبب آنکه $\Phi(\cdot)$ انتگرال تابع چگالی نرمال استاندارد است، قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال (fundamental theorem of calculus) برای محاسبه مشتق مورد استفاده قرار می‌گیرد.
- علاوه بر این، از تابع چگالی احتمال، مقادیر میانگین و واریانس X نیز می‌توانند حاصل شوند. جزئیات محاسبات در اینجا ذکر نشده‌اند، اما خلاصه‌ای از نتایج به صورت زیر است.

توزیع نرمال لگاریتمی (لاگ‌نرمال)
Lognormal Distribution

❑توزیع لاگ‌نرمال (**Lognormal Distribution**):

فرض کنید که W دارای توزیع نرمال با میانگین θ و واریانس ω^2 باشد. آنگاه $X = \exp(W)$ یک متغیر تصادفی لاگ‌نرمال (lognormal random variable) با تابع چگالی احتمال زیر می‌باشد:

$$f(x) = \frac{1}{x\omega\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln(x)-\theta)^2}{2\omega^2}\right] \qquad 0 < x < \infty$$

توزیع نرمال لگاریتمی (لاگ‌نرمال)
Lognormal Distribution

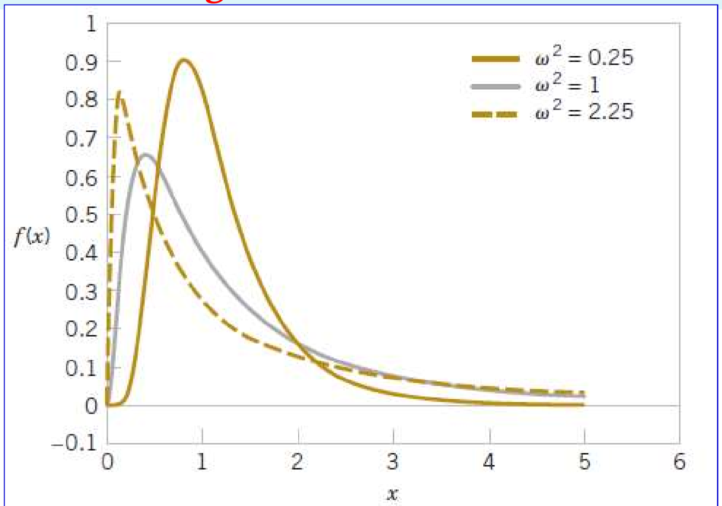
میانگین و واریانس X نیز عبارت خواهند بود از:

$$E(X) = e^{\theta+\omega^2/2} \qquad \text{and} \qquad V(X) = e^{2\theta+\omega^2}\left(e^{\omega^2}-1\right)$$

❑پارامترهای توزیع لاگ‌نرمال، θ و ω^2 می‌باشند، اما این‌ها میانگین و واریانس متغیر تصادفی نرمال W می‌باشند. میانگین و واریانس X توابعی از پارامترهای فوق می‌باشند که در معادله بالا ارائه شده است.

❑شکل زیر، توزیع های لاگ نرمال را با مقادیری منتخب از پارامترهای آن نشان می‌دهد.

توزیع نرمال لگاریتمی (لاگ‌نرمال)
Lognormal Distribution



توابع چگالی احتمال لاگ نرمال با $\theta = 0$ برای مقادیر انتخاب‌شده از ω^2.

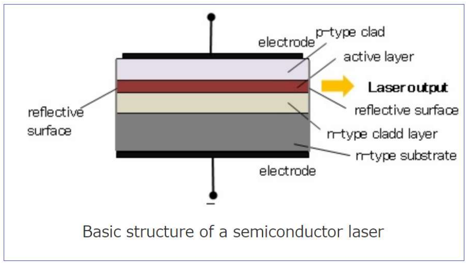
توزیع نرمال لگاریتمی (لاگ‌نرمال)
Lognormal Distribution

- **عمر** (lifetime) یک محصول را که با گذشت زمان **کم می‌شود**، اغلب با استفاده از متغیر تصادفی لاگ‌نرمال مدل می‌کنند.
- برای مثال، توزیع لاگ‌نرمال، یک توزیع معمول برای مدل کردن طول عمر یک لیزر نیمه‌رسانا (a semiconductor laser) می‌باشد. البته **توزیع ویبول** نیز در این گونه موارد می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد، و با یک انتخاب مناسب برای پارامترها، می‌تواند یک توزیع لاگ‌نرمال انتخاب‌شده را تقریب بزند.
- با وجود این، یک توزیع لاگ نرمال از یک تابع نمایی ساده یک متغیر تصادفی نرمال به دست می‌آید. بنابراین، درک آن ساده است و ارزیابی احتمالات نیز ساده خواهد بود.

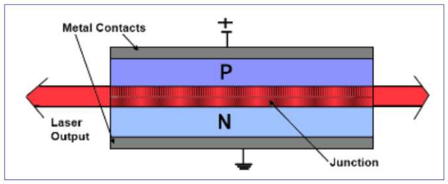
توزیع نرمال لگاریتمی (لاگ‌نرمال)
Lognormal Distribution

❑**مثال: لیزر نیمه‌رسانا (Semiconductor Laser)**

طول عمر (برحسب ساعت) یک لیزر نیمه‌رسانا دارای توزیع لاگ‌نرمال با $\theta = 10$ ساعت و $\omega = 1.5$ ساعت می‌باشد. الف) با چه احتمالی طول عمر این لیزر نیمه‌رسانا از 10000 ساعت بیشتر خواهد شد؟ ب) طول عمر 99% لیزرها از چه مقداری بیشتر خواهد بود؟ ج) میانگین و انحراف معیار طول عمر را برای لیزر نیمه‌رسانا به دست آورید.



Basic structure of a semiconductor laser



توزیع نرمال لگاریتمی (لاگ‌نرمال)
Lognormal Distribution

حل:

الف) از تابع توزیع تجمعی برای X داریم:

$$
\begin{aligned}
P(X > 10{,}000) &= 1 - P\left[\exp(W) \le 10{,}000\right] \\
&= 1 - P\left[W \le \ln(10{,}000)\right] \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{\ln(10{,}000) - 10}{1.5}\right) = 1 - \Phi(-0.52) \\
&= 1 - 0.30 = 0.70
\end{aligned}
$$

توزیع نرمال لگاریتمی (لاگ‌نرمال)
Lognormal Distribution

ب) در اینجا آن xی باید تعیین شود که P(X > x) = 0.99، بنابراین:

$$P(X > x) = P[\exp(W) > x] = P[W > \ln(x)]$$
$$= 1 - \Phi\left(\frac{\ln(x) - 10}{1.5}\right) = 0.99$$

بر اساس جدول توزیع نرمال استاندارد، زمانی $1-\Phi(z) = 0.99$ می‌باشد که $z = -2.33$ است.

بنابراین:

$$\frac{\ln(x) - 10}{1.5} = -2.33 \quad \text{and} \quad x = \exp(6.505) = 668.48 \text{ hours}$$

توزیع نرمال لگاریتمی (لاگ‌نرمال)
Lognormal Distribution

ج)

$$E(X) = e^{\theta+\omega^2/2} = e^{(10+1.125)} = 67{,}846.3$$
$$V(X) = e^{2\theta+\omega^2}\left(e^{\omega^2} - 1\right) = e^{(20+2.25)}(e^{2.25} - 1)$$
$$= 39{,}070{,}059{,}886.6$$

- بنابراین، انحراف معیار X مقدار 197,661.5 hours می‌باشد.

- تفسیر عملی: انحراف معیار یک متغیر تصادفی لاگ‌نرمال می‌تواند در مقایسه با میانگین بزرگ باشد.

توزیع نرمال لگاریتمی (لاگ‌نرمال)
Lognormal Distribution

❑ تمرین: **مطلوب است محاسبه میانگین، مد، واریانس، چولگی و کشیدگی توزیع لاگ‌نرمال.**

❑ نکته: تابع مولد گشتاور تزیع لاگ‌نرمال فقط در نیمه منفی محور تعریف شده است. برای مقادیر مثبت t انتگرال واگرا می‌شود. در نتیجه، تابع مولد گشتاور تعریف نشده است.

❑ علت: توزیع لاگ‌نرمال به‌طورمنحصر به فردی به وسیله گشتاورهایش تعریف نمی‌شود.

توزیع بتا
Beta Distribution

❑ یک توزیع پیوسته که **انعطاف‌پذیر اما کراندار** (flexible but bounded) در طی یک محدوده معین است، برای مدل‌های احتمال مفید است.

❑ **نسبت** تابش خورشیدی جذب‌شده به وسیله یک ماده یا **نسبت** (زمان ماکزیمم) موردنیاز برای تکمیل کردن یک کار در یک پروژه، **نسبت‌های** کانی‌ها در سنگ‌ها در چینه‌شناسی و غیره مثال‌هایی از متغیرهای تصادفی پیوسته در طی فاصله (بازه) (interval) [0, 1] هستند.

توزیع بتا
Beta Distribution

❑ **توزیع بتا** (**Beta Distribution**):

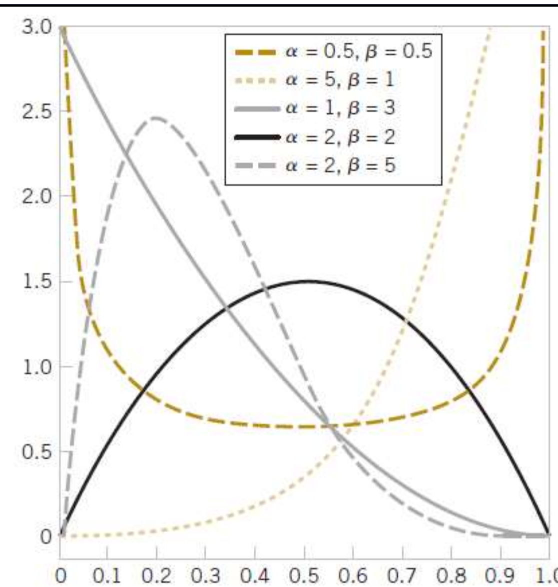
متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال

$$f(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},\quad \text{for } x \text{ in } [0,\ 1]$$

یک **متغیر تصادفی بتا** (beta random variable) با پارامترهای $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ است.

❑ پارامترهای شکل α و β به تابع چگالی احتمال اجازه می‌دهند که بسیاری از شکل‌های گوناگون را به خود بگیرد (assume).

توزیع بتا
Beta Distribution



توابع چگالی احتمال بتا برای مقادیر انتخاب شده پارامترهای α و β .

❑ شکل مقابل برخی از مثال‌ها را فراهم می‌کند.

❑ اگر $\beta = \alpha$، توزیع نسبت به محور $x = 0.5$ متقارن است، و اگر $\alpha = \beta = 1$، توزیع بتا معادل یک توزیع یکنواخت پیوسته می‌شود.

❑ شکل مقابل نشان می دهد که دیگر انتخاب‌های پارامترها توزیع‌های نامتقارن ایجاد می‌کنند.

توزیع بتا
Beta Distribution

❑در کل، یک عبارت دارای فرم بسته (closed-form) برای تابع توزیع تجمعی وجود ندارد، و احتمالات برای متغیرهای تصادفی بتا لازم است که به صورت عددی محاسبه شوند.

❑تمرینات این بخش برخی از موارد خاص را ارائه می‌کنند که در آن‌ها تابع چگالی احتمال به‌طورساده‌تری به کار می‌رود (handle).

$\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$

توزیع بتا
Beta Distribution

❑**مثال:** زمان تکمیل یک توسعه تجاری بزرگ را در نظر بگیرید. نسبت زمان ماکزیمم مجاز برای تکمیل کردن یک کار به صورت یک متغیر تصادفی بتا با $\alpha = 2.5$ و $\beta = 1$ مدل می‌شود. احتمال آنکه نسبت ماکزیمم از 0.7 تجاوز نماید (بیشتر شود)، چقدر است؟

❑**حل:** فرض کنید که X نشاندهنده نسبت زمان ماکزیمم موردنیاز برای تکمیل کردن یک کار باشد، این احتمال برابر است با:

$$P(X > 0.7) = \int_{0.7}^{1} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\, x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = \int_{0.7}^{1} \frac{\Gamma(3.5)}{\Gamma(2.5)\,\Gamma(1)}\, x^{1.5}\,dx$$

$$= \frac{2.5(1.5)(0.5)\sqrt{\pi}}{(1.5)(0.5)\sqrt{\pi}}\,\frac{x^{2.5}}{2.5}\Big|_{0.7}^{1} = 1 - 0.7^{2.5} = 0.59$$

$\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$

توزیع بتا
Beta Distribution

- اگر α > 1 و β > 1، **مد** **(mode)** (اوج تابع چگالی) (peak of the density function) در داخل [0, 1] است و برابر است با:

$$\boxed{\text{mode} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2}}$$

- این فرمول برای مرتبط کردن اوج چگالی (ماکزیمم تابع چگالی احتمال) به پارامترها مفید است.
- فرض کنید که نسبت زمان برای تکمیل کردن یک کار در میان چندین کار از یک توزیع بتا با پارامترهای α = 2.5 و β = 1 پیروی کند. مد این توزیع برابر است با:

$$\text{mode} = \frac{(2.5 - 1)}{(3.5 - 2)} = 1$$

توزیع بتا
Beta Distribution

- میانگین و واریانس یک توزیع بتا می‌توانند از انتگرال‌ها حاصل شوند، اما جزئیات محاسباتی به عنوان یک تمرین گسترش‌دهنده ذهن (Mind-Expanding) واگذار می‌شوند.
- **تمرین:** مطلوب است محاسبه تابع مولد گشتاور، میانگین، واریانس، مد، چولگی و کشیدگی توزیع بتا.
- همچنین، اگرچه یک متغیر تصادفی بتا X در طی یک بازه [0, 1] تعریف شده است، یک متغیر تصادفی W تعریف‌شده در طی فاصله معین [a, b] می‌تواند از W = a + (b − a)X ایجاد شود.

توزیع بتا
Beta Distribution

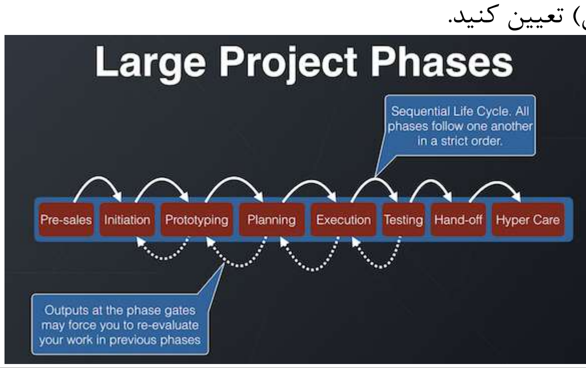
❑**میانگین و واریانس** (**Mean and Variance**):

اگر X یک توزیع بتا با پارامترهای α و β داشته باشد، آنگاه:

$$\mu = E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \text{ and } \sigma^2 = V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

توزیع بتا
Beta Distribution

❑**مثال:** زمان برای تکمیل کردن یک کار در یک پروژه بزرگ بوسیله یک توزیع بتای تعمیم‌یافته (generalized) با زمان‌های می‌نیمم و ماکزیمم به ترتیب $a = 8$ و $b = 20$ روز، همراه با مد $m = 16$ روز مدل شده است. همچنین، فرض کنید که زمان تکمیل میانگین $\mu = (a + 4m + b) / 6$ باشد. پارامترهای α و β توزیع بتای تعمیم‌یافته را با این ویژگی‌ها (خواص) تعیین کنید.



توزیع بتا
Beta Distribution

حل: مقادیر (a,m,b) زمان‌های می‌نیمم، مد و ماکزیمم را مشخص می‌کنند، اما مقدار مد به تنهایی به‌طورمنحصربه‌فردی دو پارامتر α و β را تعیین نمی‌کند. در نتیجه، زمان تکمیل میانگین (μ) فرض می‌شود که برابر با $\mu = (a + 4m + b) / 6$ باشد.

در اینجا، متغیر تصادفی بتای تعمیم‌یافته برابر است با $W = a + (b - a)X$، که در آن X یک متغیر تصادفی بتا است. به سبب آنکه مقادیر می‌نیمم و ماکزیمم برای W به ترتیب $a = 8$ و $b = 20$ هستند، میانگین W برابر است با:

$$\mu = a + (b-a)E(X) = a + (b-a)\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}$$

میانگین فرض‌شده برابر است با: $\mu = (8 + 4(16) + 20) / 6 = 15.333$

توزیع بتا
Beta Distribution

مد W برابر است با:

$$m = a + (b-a)\frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2}$$

با $m = 16$. این معادلات می‌توانند برحسب α و β حل شوند برای به دست آوردن:

$$\alpha = \frac{(\mu - a)(2m - a - b)}{(m - \mu)(b - a)}$$

$$\beta = \frac{\alpha(b - \mu)}{\mu - a}$$

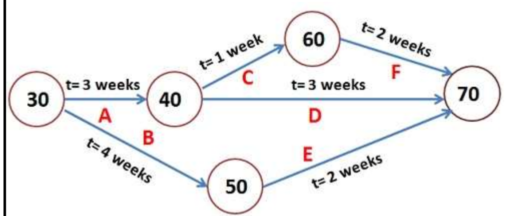
بنابراین،

$$\alpha = \frac{(15.333-8)(2(16)-8-20)}{(16-15.333)(20-8)} = 3.665$$

$$\beta = \frac{3.665(20-15.333)}{15.333-8} = 2.333$$

توزیع بتا
Beta Distribution

❑تفسیر عملی: تکنیک مرور (بررسی) و ارزیابی برنامه (program evaluation and review technique) (PERT) به‌طوروسیعی از توزیع W برای مدل کردن مدت زمان کارها (duration of tasks) استفاده می‌کند.

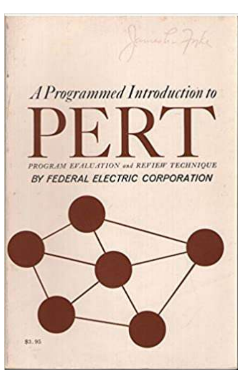


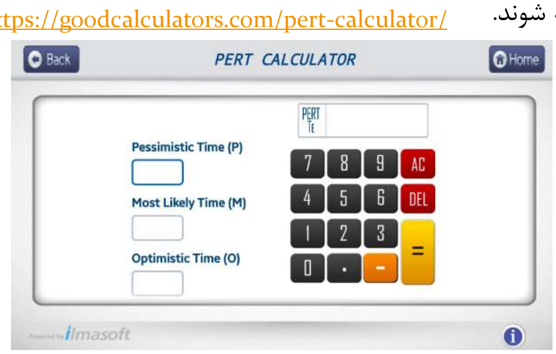
توزیع بتا
Beta Distribution

❑بنابراین، گفته می‌شود W دارای توزیع PERT است. توجه کنید که فقط لازم است می‌نیمم، ماکزیمم و مد را در اکثر زمان‌ها (most likely time) برای یک کار برای تعیین کردن توزیع مشخص کنیم.

❑این مدل فرض می‌کند که میانگین تابع این سه مقدار است و اجازه می‌دهد پارامترهای α و β محاسبه شوند.

https://goodcalculators.com/pert-calculator/





توزیع بتا
Beta Distribution

❑علت نامگذاری توزیع بتا:

تابع چگالی توزیع بتای استاندارد می‌تواند به صورت زیر نیز بیان شود:

$$Beta(\alpha,\beta):\ prob(x|\alpha,\beta)=\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}$$

که در آن $B(\alpha, \beta)$ تابع بتا است.

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$$

توزیع بتا
Beta Distribution

❑اجازه ندهید همه آن بتاها شما را گیج کند.

1. $Beta(\alpha,\beta)$ "Beta" is the name of the probability distribution — بتا نام توزیع احتمال است.
2. $B(\alpha,\beta)$ "Beta" is the name of a function that appears in the denominator of the density function — بتا نام تابعی است که در مخرج تابع چگالی احتمال ظاهر می شود.
3. β "Beta" is the name of the second parameter in the density function — بتا نام پارامتر دوم در تابع چگالی است.

❑تابع بتا معادل نسبت توابع گاما است:

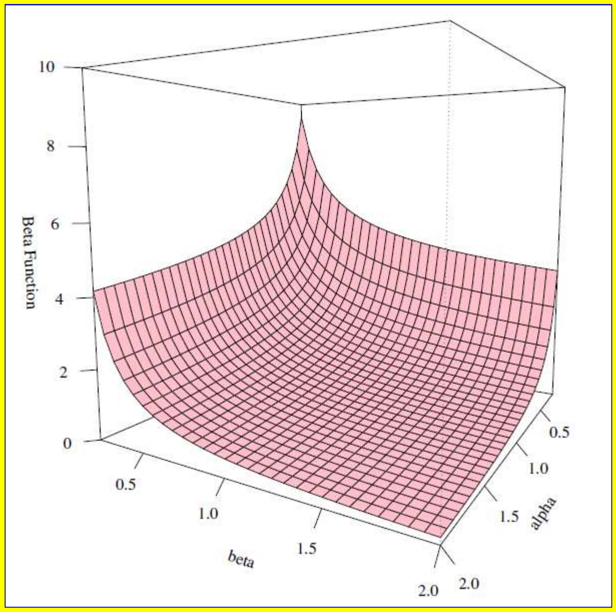
$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

❑چولگی توزیع بتا از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

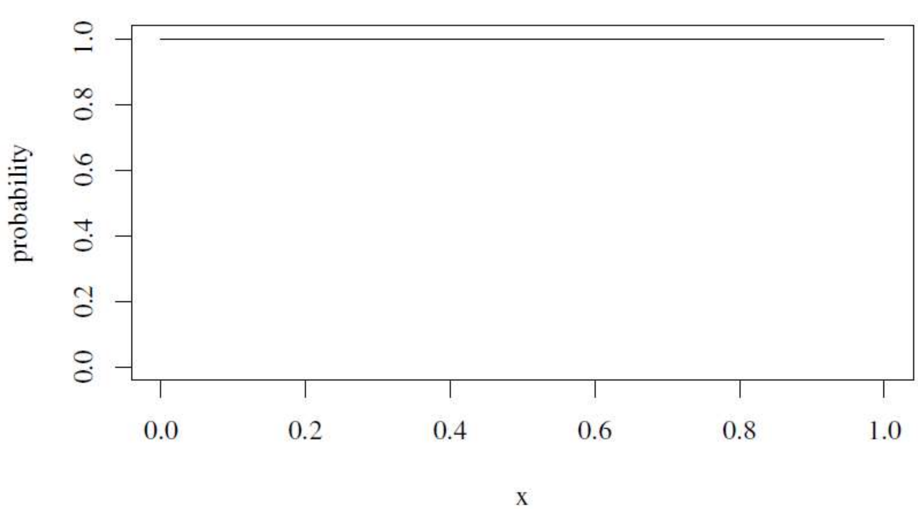
$$Skewness(x)=\frac{2(\beta-\alpha)\sqrt{1+\alpha+\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}\,(2+\alpha+\beta)}$$

توزیع بتا
Beta Distribution

❑ تابع بتا



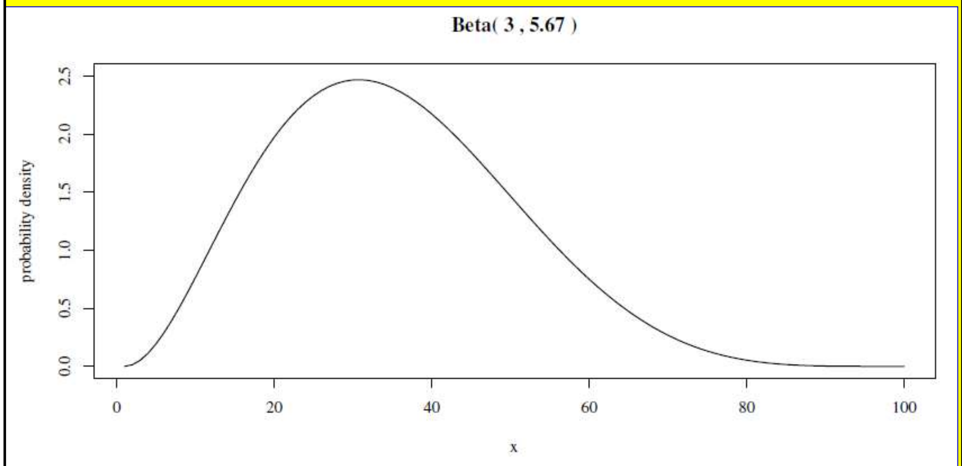
توزیع بتا
Beta Distribution



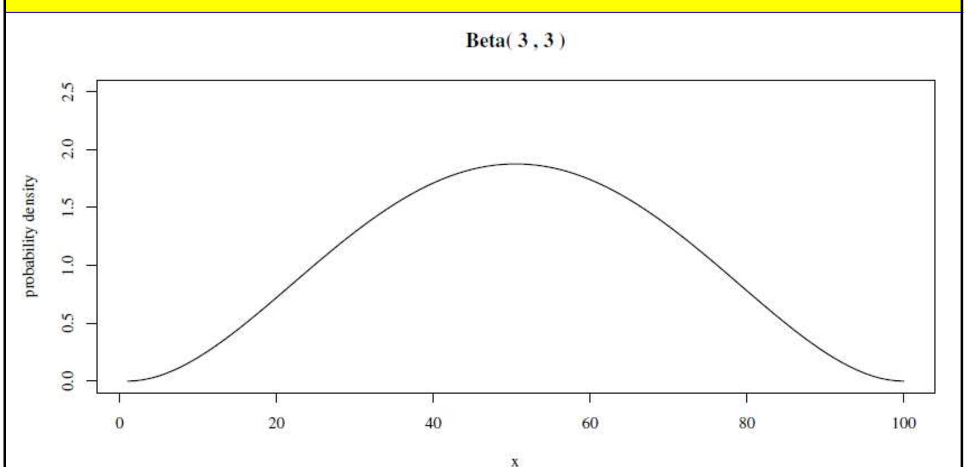
Beta(1,1) is the Uniform distribution

Beta(1,1) دارای توزیع یکنواخت است.

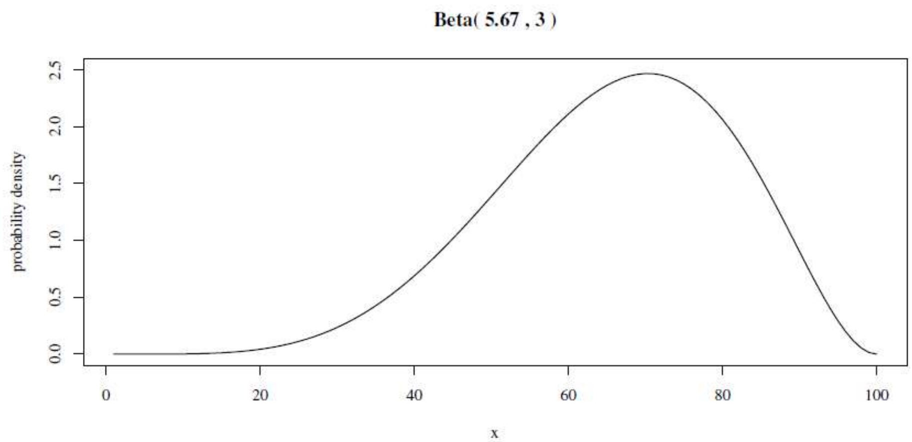
برخی از بتاهای دارای یک نقطه اوج خوشایند
Some Pleasant Single-Peaked Betas



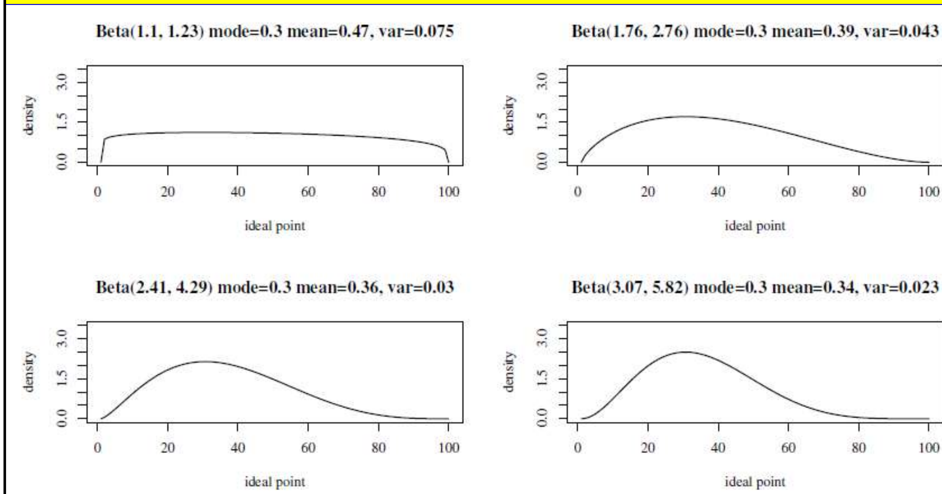
برخی از بتاهای دارای یک نقطه اوج خوشایند
Some Pleasant Single-Peaked Betas



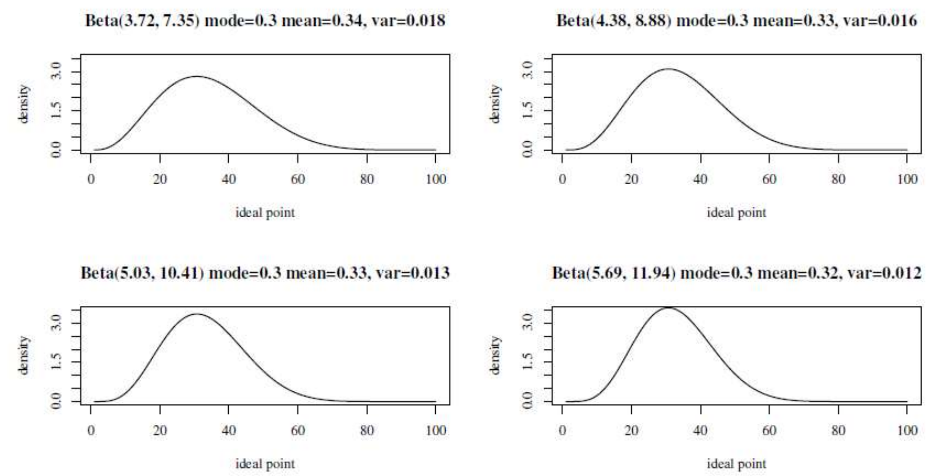
برخی از بتاهای دارای یک نقطه اوج خوشایند
Some Pleasant Single-Peaked Betas



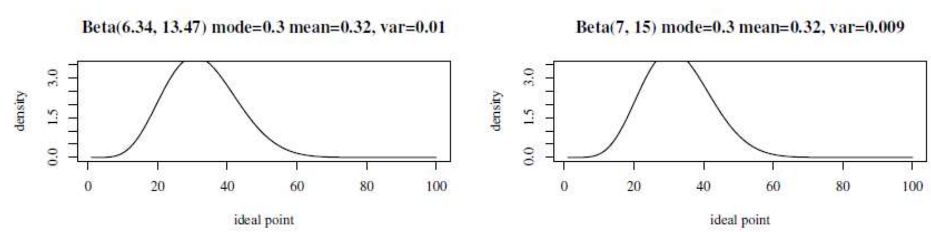
توزیع‌های بتا با مد= 0.3
Beta Distributions with Mode=0.3



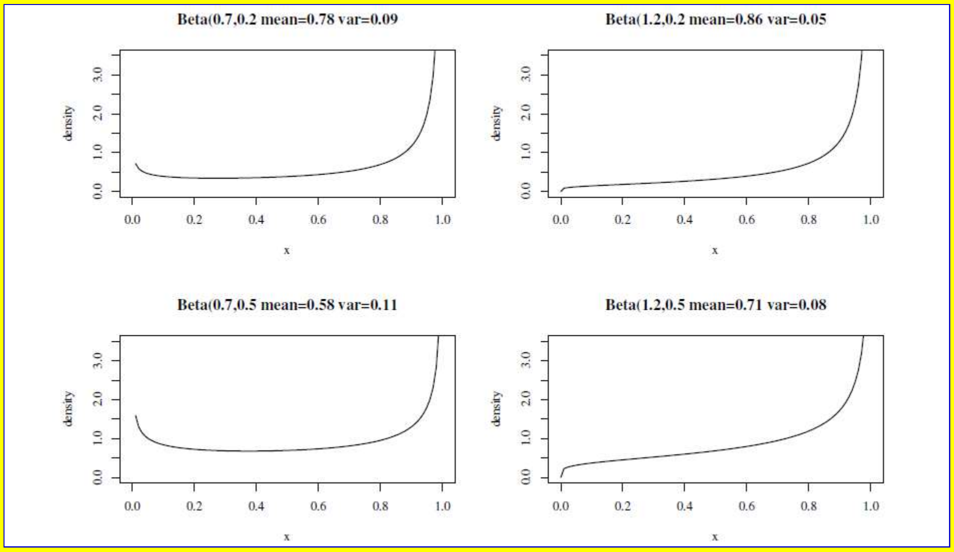
توزیع‌های بتا با مد= 0.3
Beta Distributions with Mode=0.3



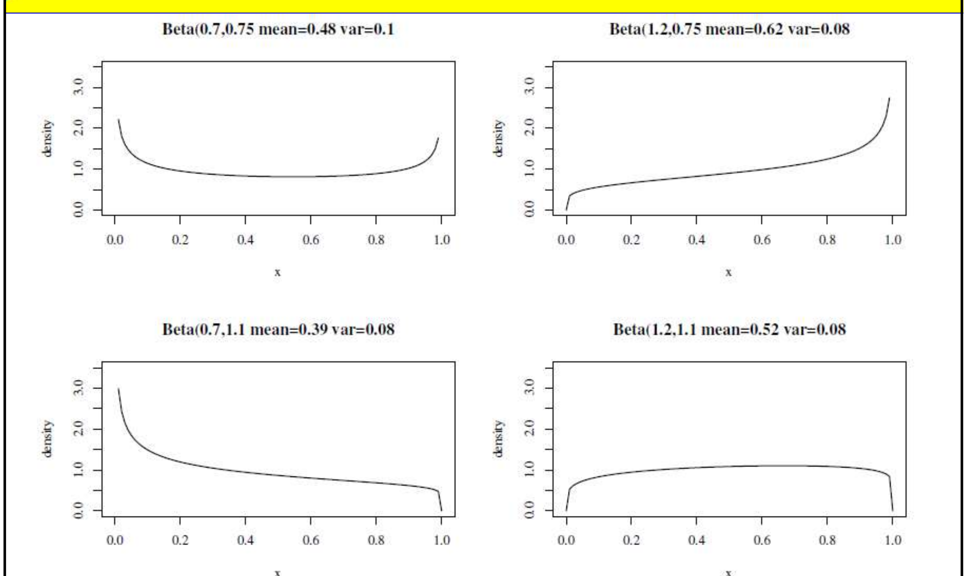
توزیع‌های بتا با مد= 0.3
Beta Distributions with Mode=0.3



برخی از بتاهای ناخوشایند
Some Unpleasant Betas



برخی از بتاهای ناخوشایند
Some Unpleasant Betas



توابع خطی متغیرهای تصادفی
Linear Functions of Random Variables

❑ترکیب خطی (**Linear Combination**):

متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \ldots, X_p$ و اعداد ثابت $c_1, c_2, \ldots, c_p$ را در نظر بگیرید. آنگاه:

$$Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_pX_p$$

یک **ترکیب خطی** (linear combination) از $X_1, X_2, \ldots, X_p$ است.

❑میانگین یک تابع خطی (**Mean of a Linear Function**):

If $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_pX_p$,

$$E(Y) = c_1E(X_1) + c_2E(X_2) + \ldots + c_pE(X_p)$$

توابع خطی متغیرهای تصادفی
Linear Functions of Random Variables

❑واریانس یک تابع خطی (**Variance of a Linear Function**):

اگر $X_1, X_2, \ldots, X_p$ متغیرهای تصادفی و $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_pX_p$. همچنین اگر متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \ldots, X_p$ مستقل باشند، آنگاه:

$$V(Y) = c_1^2V(X_1) + c_2^2V(X_2) + \ldots + c_p^2V(X_p)$$

توابع خطی متغیرهای تصادفی
Linear Functions of Random Variables

❑میانگین و واریانس برای متوسط متغیرهای تصادفی (**Mean and Variance of an Average**):

اگر

$$\bar{X} = (X_1 + X_2 + \ldots + X_p)/p$$

با $E(X_i) = \mu$ برای $i = 1, 2, \ldots, p$

$$E(\bar{X}) = \mu$$

❑اگر $X_1, X_2, \ldots, X_p$ مستقل باشند و برای تمامی $i = 1, 2, \ldots, p$ متغیر تصادفی، مقدار $V(X_i) = \sigma^2$ باشد، آنگاه:

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{p}$$

توابع خطی متغیرهای تصادفی
Linear Functions of Random Variables

❑ویژگی تولیدمثل برای توزیع نرمال (**Reproductive Property of the Normal Distribution**):

اگر $X_1, X_2, \ldots, X_p$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند و از توزیع نرمال با پارامترهای $E(X_i) = \mu_i$ و $V(X_i) = \sigma_i^2$ پیروی کنند، به طوریکه $i = 1, 2, \ldots, p$ باشد، آنگاه:

$$Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_pX_p$$

یک متغیر تصادفی نرمال با پارامترهای زیر می‌باشد:

$$E(Y) = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \ldots + c_p\mu_p$$

و

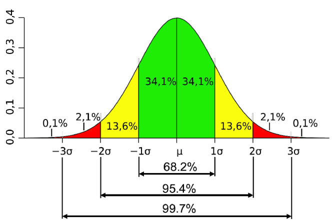
$$V(Y) = c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2 + \ldots + c_p^2\sigma_p^2$$

نامساوی چبیشف
CHEBYSHEV'S INEQUALITY

❑قبلاً نشان دادیم که اگر X یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ باشد، آنگاه:

$$P(\mu - 1.96\sigma < X < \mu + 1.96\sigma) = 0.95$$

❑نتیجه فوق، احتمال یک متغیر تصادفی نرمال را با مقدار انحراف معیار مرتبط می‌سازد. در سال 1867 یک ریاضیدان روسی به نام چبیشف توانست نتیجه مشابهی **برای کلیه متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته** به دست آورد.



Pafnuty Chebyshev

Pafnuty Lvovich Chebyshev

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6827$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9545$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

نامساوی چبیشف
CHEBYSHEV'S INEQUALITY

Pafnuty Chebyshev

Pafnuty Lvovich Chebyshev

Born	May 16, 1821 Akatovo, Kaluga Governorate, Russian Empire
Died	December 8, 1894 (aged 73) St. Petersburg, Russian Empire
Nationality	Russian

Fields	Mathematician
Institutions	St. Petersburg University
Alma mater	Moscow University
Academic advisors	Nikolai Brashman
Notable students	Dmitry Grave Aleksandr Korkin Aleksandr Lyapunov Andrey Markov Vladimir Andreevich Markov Konstantin Posse
Known for	Work on probability, statistics, mechanics, and analytical geometry
Notable awards	Demidov Prize (1849)

نامساوی چبیشف
Chebyshev's Inequality

❑**نامساوی چبیشف** (**Chebyshev's Inequality**):
برای هر متغیر تصادفی X با میانگین μ و واریانس σ^2 نامساوی زیر برقرار است:

$$P(|X-\mu| \geq c\sigma) \leq 1/c^2 \qquad \text{for } c > 0.$$

❑ نتیجه فوق بیان می‌دارد، احتمال اینکه اختلاف بین یک متغیر تصادفی و میانگین آن حداقل به اندازه c انحراف معیار باشد، کمتر یا مساوی $1/c^2$ است. توجه داشته باشید که **این قانون فقط زمانی مفید است که $c > 1$ باشد**.

❑ برای مثال، $c = 2$ بیانگر آن است که احتمال اینکه هر متغیر تصادفی با میانگینش حداقل دو انحراف معیار تفاوت داشته باشد، بزرگتر از ¼ نمی‌باشد. می‌دانیم که برای یک متغیر تصادفی نرمال، احتمال فوق کمتر از 0.05 می‌باشد.

نامساوی چبیشف
Chebyshev's Inequality

$$P(|X-\mu| \geq c\sigma) \leq 1/c^2 \qquad \text{for } c > 0.$$

❑ همچنین، استفاده از $c = 3$ دلالت می‌کند که احتمال اینکه هر متغیر تصادفی با میانگینش حداقل سه انحراف معیار تفاوت داشته باشد، بزرگتر از $1/9$ نمی‌باشد.

❑ **نامساوی چبیشف** (Chebyshev's inequality) رابطه‌ای بین انحراف معیار و پراکندگی توزیع احتمال هر متغیر تصادفی برقرار می‌کند.

نامساوی چبیشف
Chebyshev's Inequality

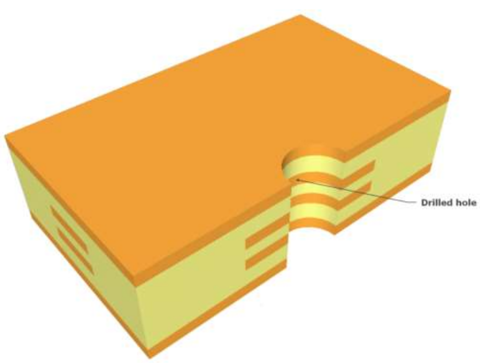
❑جدول زیر، احتمالاتی که توسط قانون (قاعده) چبیشف (Chebyshev's rule) محاسبه شده اند را با احتمالات یک متغیر تصادفی نرمال مقایسه می‌کند.

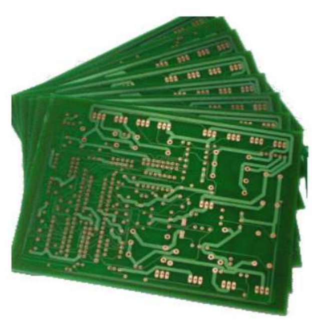
Percentage of Distribution Greater than c Standard Deviations from the Mean

c	Chebyshev's Rule for any Probability Distribution	Normal Distribution
1.5	less than 44.4%	13.4%
2	less than 25.0%	4.6%
3	less than 11.1%	0.27%
4	less than 6.3%	0.01%

نامساوی چبیشف
Chebyshev's Inequality

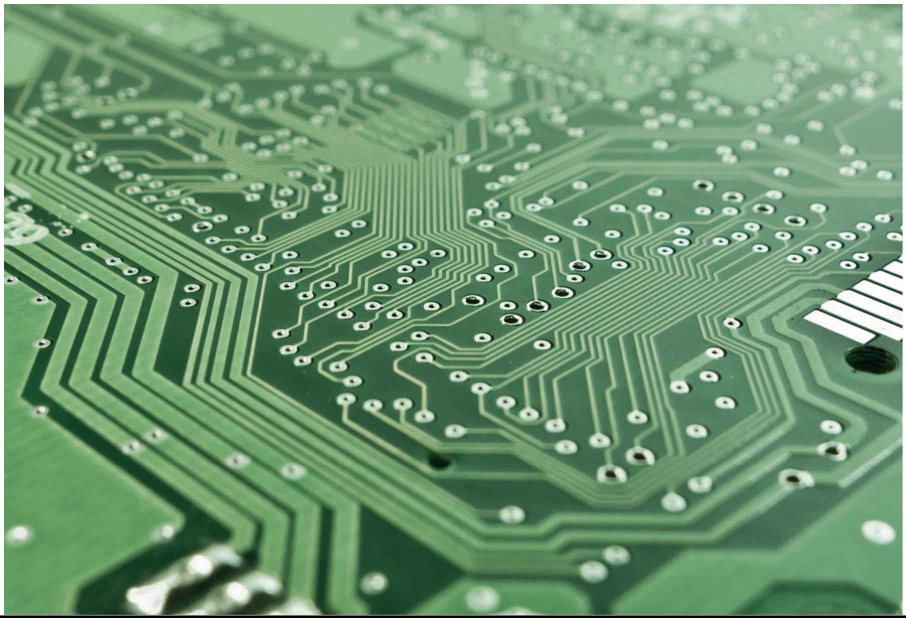
❑**مثال:** فرآیند سوراخکاری (drilling holes) بر روی صفحه‌های مدار چاپی (printed circuit boards (PCB)، قطرهایی با انحراف معیار 0.01 میلی‌متر ایجاد می‌کند. چه تعداد قطر باید اندازه‌گیری شود تا با احتمال حداقل 8/9، متوسط قطرهای اندازه‌گیری‌شده در حدود 0.005 میلی‌متر با میانگین قطر فرآیند μ اختلاف داشته باشد.



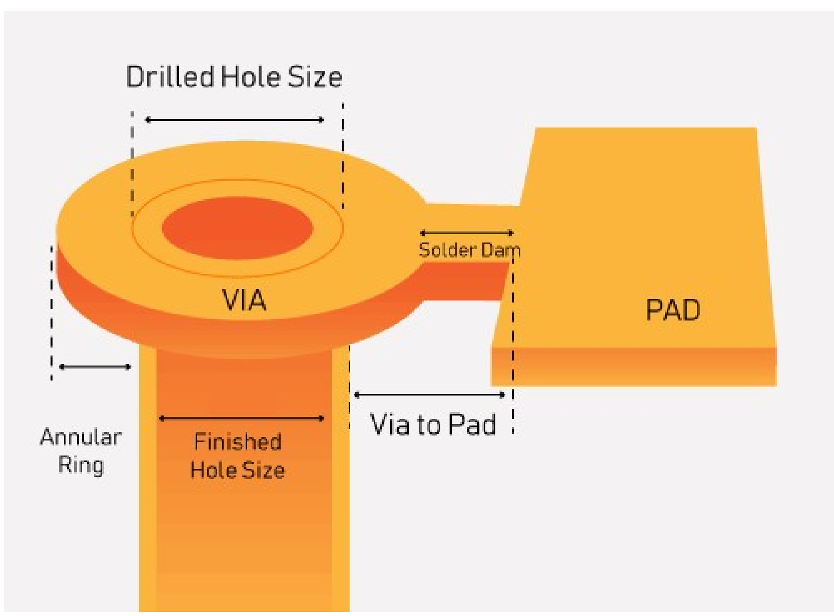


Printed Circuit Board

صفحه‌های مدار چاپی
PRINTED CIRCUIT BOARDS (PCB)



سوراخکاری صفحه‌های مدار چاپی
PCB Drilling



نامساوی چبیشف
Chebyshev's Inequality

حل:

فرض کنید که $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی باشند که قطرهای n سوراخ را نشان می‌دهند. متوسط قطرهای اندازه‌گیری‌شده برابر است با:

$$\overline{X} = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$$

فرض کنید که Xها متغیرهای تصادفی مستقل باشند. با استفاده از معادلات اسلاید 93 می‌توان نوشت:

$$E(\overline{X}) = \mu \text{ and } V(\overline{X}) = 0.01^2/n$$

در نتیجه انحراف استاندارد $\overline{X}$ برابر است با:

$$(0.01^2/n)^{1/2}$$

نامساوی چبیشف
Chebyshev's Inequality

با استفاده از نامساوی چبیشف برای $\overline{X}$ می‌توان نوشت:

$$P(|\overline{X} - \mu| \geq c(0.01^2/n)^{1/2}) \leq 1/c^2$$

Let $c = 3$. Then,

$$P(|\overline{X} - \mu| \geq 3(0.01^2/n)^{1/2}) \leq 1/9$$

Therefore,

$$P(|\overline{X} - \mu| < 3(0.01^2/n)^{1/2}) \geq 8/9$$

نامساوی چبیشف
Chebyshev's Inequality

بنابراین، احتمال اینکه $\bar{X}$ در فاصله $3(0.01^2/n)^{1/2}$ از μ باشد، حداقل 8/9 می‌باشد. نهایتاً n از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$3(0.01^2/n)^{1/2} = 0.005$$

بنابراین،

$$n = 3^2[0.01^2/0.005^2] = 36$$

توابع مولد گشتاور
Moment-Generating Functions

- فرض کنید که X یک متغیر تصادفی با میانگین μ باشد. در سرتاسر این کتاب برای میانگین عبارت **مقدار موردانتظار** (expected value) را استفاده کردیم و آن را با $E(X) = \mu$ نشان دادیم.
- اکنون فرض کنید که بخواهیم مقدار موردانتظار یک تابع X مانند $g(X) = X^r$ را به دست آوریم. مقدار موردانتظار این تابع، یعنی $E[g(X)] = E(X^r)$، که آن را با μ'_r نشان می‌دهیم، **گشتاور rام حول مبدأ متغیر تصادفی X** نامیده می‌شود. در اینجا r عدد صحیح و مثبت است.

توابع مولد گشتاور
Moment-Generating Functions

❑تعریف گشتاورها حول مبدأ (**Definition of Moments about the Origin**):

گشتاور rام حول مبدأ (r^{th} moment about the origin) متغیر تصادفی X عبارت است از:

$$\mu'_r = E(X^r) = \begin{cases} \sum_x x^r f(x), & X \text{ discrete} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx, & X \text{ continuous} \end{cases}$$

توابع مولد گشتاور
Moment-Generating Functions

❑توجه داشته باشید که اولین گشتاور حول مبدأ، همان میانگین، یعنی $E(X) = \mu'_1 = \mu$ می‌باشد. بعلاوه ازآنجایی‌که دومین گشتاور حول مبدأ عبارت از $E(X^2) = \mu'_2$ می‌باشد، لذا واریانس یک متغیر تصادفی را با استفاده از گشتاورهای مبدأ می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \mu'_2 - \mu^2}$$

❑گشتاورهای یک متغیر تصادفی را در بسیاری از اوقات می‌توان مستقیماً از معادله

$$\mu'_r = E(X^r) = \begin{cases} \sum_x x^r f(x), & X \text{ discrete} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx, & X \text{ continuous} \end{cases}$$

به دست آورد. اما **رویکرد جایگزینی نیز وجود دارد** که در بسیاری از اوقات مفید است که از یک تابع خاص استفاده می‌کند.

توابع مولد گشتاور
Moment-Generating Functions

❑تعریف تابع مولد گشتاور (**Definition of a Moment-Generating Function**) (**mgf**):

تابع مولد گشتاور (moment-generating function) متغیر تصادفی X مقدار موردانتظار e^{tX} می‌باشد که با $M_X(t)$ نشان داده می‌شود. یعنی:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f(x), & X \text{ discrete} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx, & X \text{ continuous} \end{cases}$$

❑تابع مولد گشتاور $M_X(t)$ فقط زمانی وجود خواهد داشت که مجموع یا انتگرال، در تعریف بالا **همگرا** (converges) باشد.

توابع مولد گشتاور
Moment-Generating Functions

❑اگر تابع مولد گشتاور یک متغیر تصادفی وجود داشته باشد، **آن تابع می‌تواند برای به دست آوردن تمامی گشتاورهای حول مبدأ آن متغیر تصادفی استفاده شود.**

❑فرض کنید که X یک متغیر تصادفی با تابع مولد گشتاور $M_X(t)$ باشد. در این صورت:

$$\mu'_r = E(X^r) = \frac{d^r M_X(t)}{dt^r}\Big|_{t=0}$$

توابع مولد گشتاور
Moment-Generating Functions

❑فرض کنید بتوانیم درون علامت‌های انتگرال و جمع مشتق‌گیری کنیم:

$$\frac{d^r M_X(t)}{dt^r} = \begin{cases} \sum_x x^r e^{tx} f(x), & X \text{ discrete} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{tx} f(x)dx, & X \text{ continuous} \end{cases}$$

حال اگر t = 0 قرار دهیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$\left.\frac{d^r M_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0} = E(X^r)$$

توابع مولد گشتاور
Moment-Generating Functions

❑**مثال: تابع مولد گشتاور برای یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای (Moment-Generating Function for a Binomial Random Variable):**

فرض کنید که X دارای توزیع دوجمله‌ای است به این معنی که:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0,1,\ldots,n$$

تابع مولد گشتاور را به دست آورید و از آن برای تأیید میانگین و واریانس متغیر تصادفی دوجمله‌ای که عبارت از $\mu = np$ و $\sigma^2 = np(1-p)$ می‌باشد، استفاده کنید.

توابع مولد گشتاور
Moment-Generating Functions

حل:

با استفاده از تعریف تابع مولد گشتاور داریم:

$$M_X(t)=\sum_{x=0}^{n} e^{tx}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pe^t)^x(1-p)^{n-x}$$

آخرین قسمت عبارت بالا بسط دوجمله‌ای (binomial expansion) $[pe^t+(1-p)]^n$ است، بنابراین:

$$\boxed{M_X(t)=[pe^t+(1-p)]^n}$$

توابع مولد گشتاور
Moment-Generating Functions

$$\boxed{M_X(t)=[pe^t+(1-p)]^n}$$

- با انجام مشتق اول و دوم، خواهیم داشت:

$$M'_X(t)=\frac{dM_X(t)}{dt}=npe^t[1+p(e^t-1)]^{n-1}$$

و

$$M''_X(t)=\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}=npe^t(1-p+npe^t)[1+p(e^t-1)]^{n-2}$$

اگر در $M'_X(t)$ مقدار $t=0$ قرار دهیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$M'_X(t)\,|_{t=0}=\mu'_1=\mu=np$$

توابع مولد گشتاور
Moment-Generating Functions

که همان میانگین متغیر تصادفی دوجمله‌ای X می‌باشد.

حال اگر در $M''_X(t)$ مقدار t = 0 قرار دهیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$M''_X(t) = \frac{d^2 M_X(t)}{dt^2} = npe^t(1-p+npe^t)[1+p(e^t-1)]^{n-2}$$

$$M''_X(t)|_{t=0} = \mu'_2 = np(1-p+np)$$

بنابراین، واریانس متغیر تصادفی دوجمله‌ای عبارت است از:

$$\sigma^2 = \mu'_2 - \mu^2 = np(1-p+np) - (np)^2 = np - np^2 = np(1-p)$$

توابع مولد گشتاور
Moment-Generating Functions

❑**مثال: تابع مولد گشتاور برای یک متغیر تصادفی نرمال (Moment-Generating Function for a Normal Random Variable):**

تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی نرمال را به دست آورید، و با استفاده از آن نشان دهید که میانگین و واریانس این متغیر تصادفی μ و σ^2 می‌باشد.

حل: تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی نرمال عبارت است از:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-[x^2-2(\mu+t\sigma^2)x+\mu^2]/(2\sigma^2)} dx$$

توابع مولد گشتاور
Moment-Generating Functions

اگر مربع را در نما کامل کنیم (complete the square)، داریم:

$$x^2 - 2(\mu + t\sigma^2)x + \mu^2 = [x - (\mu + t\sigma^2)]^2 - 2\mu t\sigma^2 - t^2\sigma^4$$

و بنابراین:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\{[x-(\mu+t\sigma^2)]^2 - 2\mu t\sigma^2 - t^2\sigma^4\}/(2\sigma^2)} dx$$

$$= e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)[x-(\mu+t\sigma^2)]^2/\sigma^2} dx$$

توابع مولد گشتاور
Moment-Generating Functions

فرض کنید: $u = [x - (\mu + t\sigma^2)] / \sigma$، آنگاه $dx = \sigma du$ و سپس می‌توان نوشت:

$$M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$

ازآنجایی‌که انتگرال برابر سطح کل زیر چگالی نرمال استاندارد می‌باشد، یعنی برابر 1، لذا تابع مولد گشتاور یک متغیر تصادفی نرمال برابر است با:

$$\boxed{M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}}$$

توابع مولد گشتاور
Moment-Generating Functions

$$\boxed{M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}}$$

دو بار مشتق گرفتن از این تابع بر مبنای t و در نتیجه آن t = o قرار دادن، نتیجه زیر را حاصل خواهد کرد:

$$\left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \mu_1' = \mu \quad \text{and} \quad \left.\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \mu_2' = \sigma^2 + \mu^2$$

بنابراین، واریانس متغیر تصادفی نرمال عبارت است از:

$$\sigma^2 = \mu_2' - \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

توابع مولد گشتاور
Moment-Generating Functions

- توابع مولد گشتاور دارای ویژگی‌های بسیار مهم و مفیدی می‌باشند.
- یکی از مهمترین این ویژگی‌ها، **ویژگی یگانگی (یکتایی) (منحصربه‌فردی)** (uniqueness property) است. به این معنی که، تابع مولد گشتاور یک متغیر تصادفی، زمانی که وجود دارد، **یگانه** است.
- بنابراین، اگر دو متغیر تصادفی X و Y داشته باشیم و تابع مولد گشتاور آن‌ها به ترتیب $M_X(t)$ و $M_Y(t)$ باشد، و اگر برای تمامی مقادیر t تابع مولد گشتاور آن‌ها مساوی باشد، یعنی $M_X(t) = M_Y(t)$، به این معنی است که X و Y دارای توزیع احتمال یکسان می‌باشند.
- برخی از دیگر ویژگی‌های مفید تابع مولد گشتاور به صورت زیر خلاصه شده است.

توابع مولد گشتاور
Moment-Generating Functions

❑ویژگی‌های توابع مولد گشتاور (Properties of Moment Generating Functions):

اگر X یک متغیر تصادفی و a یک عدد ثابت باشد، آنگاه:

$$(1) \quad M_{X+a}(t) = e^{at} M_X(t)$$

$$(2) \quad M_{aX}(t) = M_X(at)$$

اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل به ترتیب با توابع مولد گشتاور به صورت $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), \ldots, M_{X_n}(t)$ باشند، و اگر $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ باشد، آنگاه تابع مولد گشتاور Y عبارت است از:

$$(3) \quad M_Y(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdot \ldots \cdot M_{X_n}(t)$$

توابع مولد گشتاور
Moment-Generating Functions

❑ویژگی (۱) از

$$M_{X+a}(t) = E[e^{t(X+a)}] = e^{at} E(e^{tX}) = e^{at} M_X(t)$$

پیروی می‌کند.

❑ ویژگی (۲) از

$$M_{aX}(t) = E[e^{t(aX)}] = E[e^{(at)X}] = M_X(at)$$

پیروی می‌کند.

❑ ویژگی (۳) در شرایطی که متغیرهای تصادفی X پیوسته هستند، عبارت است از:

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E[e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x_1+x_2+\cdots+x_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

توابع مولد گشتاور
Moment-Generating Functions

❑ازآنجاییکه Xها مستقل هستند، لذا

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \cdots \cdot f_{X_n}(x_n)$$

❑حال می‌توان نوشت:

$$M_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx_1} f_{X_1}(x_1)\, dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx_2} f_{X_2}(x_2)\, dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx_n} f_{X_n}(x_n)\, dx_n$$
$$= M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdot \cdots \cdot M_{X_n}(t)$$

❑برای زمانی که Xها گسسته هستند، همین رویکرد را دنبال می‌کنیم، با این تفاوت که فقط به جای انتگرال از جمع (سیگما) استفاده می‌کنیم.

❑لازم به ذکر است که ویژگی سوم به صورت خاص از اهمیت برخوردار می‌باشد. در بسیاری مواقع نیاز است که توزیع جمع دو و یا بیشتر از دو متغیر تصادفی را به دست آوریم و لذا نتیجه بالا کار را برای ما بسیار ساده می‌کند. این مسئله مهم در مثال زیر نشان داده شده است.

توابع مولد گشتاور
Moment-Generating Functions

❑**مثال: توزیع جمع متغیرهای تصادفی پوآسون (Distribution of a Sum of Poisson Random Variables):**

فرض کنید که X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی پوآسون مستقل به ترتیب با پارامترهای λ_1 و λ_2 باشند. توزیع احتمال $Y = X_1 + X_2$ را به دست آورید.

حل:

تابع مولد گشتاور یک متغیر تصادفی پوآسون با پارامتر λ عبارت است از:

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

بنابراین، توابع مولد گشتاور X_1 و X_2 به ترتیب عبارتند از:

$$M_{X_1}(t) = e^{\lambda_1(e^t - 1)} \text{ and } M_{X_2}(t) = e^{\lambda_2(e^t - 1)}$$

توابع مولد گشتاور
Moment-Generating Functions

با استفاده از ویژگی سوم، تابع گشتاور $Y = X_1 + X_2$ عبارت است از:

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)}e^{\lambda_2(e^t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}$$

نتیجه عبارت بالا به عنوان تابع مولد گشتاور یک متغیر تصادفی پوآسون، با پارامتر $\lambda_1 + \lambda_2$ شناخته می‌شود.

- بنابراین، نشان دادیم که جمع دو متغیر تصادفی پوآسون مستقل با پارامترهای λ_1 و λ_2، خود نیز یک متغیر تصادفی پوآسون است که پارامتر آن برابر جمع دو پارامتر دو متغیر تصادفی می‌باشد، یعنی $\lambda_1 + \lambda_2$.

برخی از اصطلاحات آماری مفید

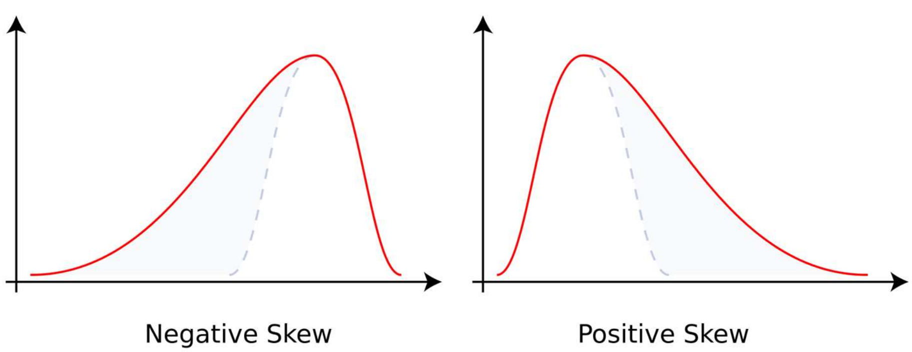
- pdf = probability density function = تابع چگالی احتمال
- cdf = cumulative distribution function = تابع توزیع تجمعی
- pmf = probability mass function = تابع جرم احتمال
- mgf = moment-generating function = تابع مولد گشتاور
- γ_1 = skewness = چولگی
- γ_2 = kurtosis = درجه اوج، تیزی اوج، کشیدگی
- σ^2 = variance = واریانس = پراش
- cov(X,Y)= covariance = کوواریانس = همپراشی

کوواریانس
Covariance

$$\boxed{\operatorname{cov}(X,Y) = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])\right], \quad \textbf{(Eq.1)}}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])\,(Y - \mathrm{E}[Y])] \\ &= \mathrm{E}[XY - X\,\mathrm{E}[Y] - \mathrm{E}[X]Y + \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]] \\ &= \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] + \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] \\ &= \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]\end{aligned}$$

چولگی
Skewness



$$\gamma_1 = Skewness(x) = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right]$$

چولگی
Skewness

$$\gamma_1 = Skewness(x) = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right]$$

$$\gamma_1 = E\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right]^3 = \frac{E[X^3] - 3\mu E[X^2] + 3\mu^2 E[X] - \mu^3}{\sigma^3}$$

$$\mathrm{skew}(X) = \frac{\mathbb{E}\left(X^3\right) - 3\mu\mathbb{E}\left(X^2\right) + 2\mu^3}{\sigma^3} = \frac{\mathbb{E}\left(X^3\right) - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3}$$

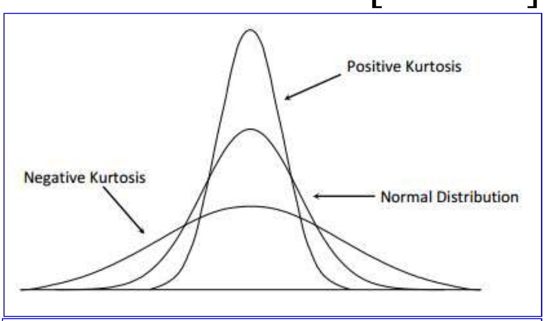
$$\mu = E(X) = G'(0)$$

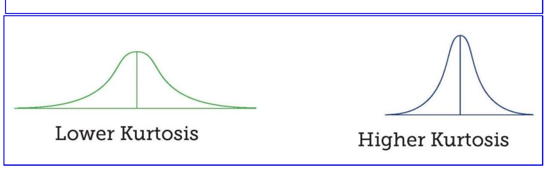
$$E(X^2) = G''(0)$$

$$E(X^3) = G^{(3)}(0)$$

کشیدگی (درجه اوج) (تیزی اوج)
Kurtosis
(The Sharpness of the Peak of a Frequency-Distribution Curve)

$$\gamma_2 = Kurtosis(x) = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right]$$





کشیدگی (درجه اوج) (تیزی اوج)
Kurtosis
(The Sharpness of the Peak of a Frequency-Distribution Curve)

$$\gamma_2 = Kurtosis(x) = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right]$$

$$\gamma_2 = E\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right]^4 = \frac{E[X^4] - 4\mu E[X^3] + 6\mu^2 E[X^2] - 4\mu^3 E(X) + \mu^4}{\sigma^4}$$

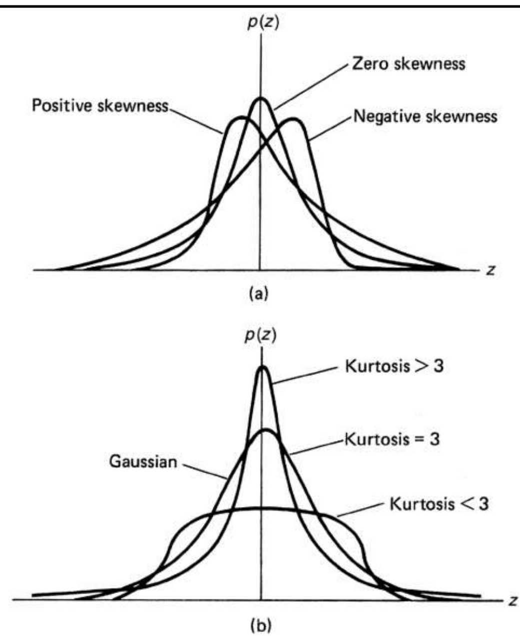
$$\mathrm{kurt}(X) = \frac{\mathbb{E}\left(X^4\right) - 4\mu\mathbb{E}\left(X^3\right) + 6\mu^2\mathbb{E}\left(X^2\right) - 3\mu^4}{\sigma^4} = \frac{\mathbb{E}\left(X^4\right) - 4\mu\mathbb{E}\left(X^3\right) + 6\mu^2\sigma^2 + 3\mu^4}{\sigma^4}$$

$$\mu = E(X) = G'(0)$$

$$E(X^2) = G''(0)$$

$$E(X^3) = G^{(3)}(0)$$

$$E(X^4) = G^{(4)}(0)$$



(a) Probability density functions for random distributions with different skewness, and for (b) symmetrical distributions (zero skewness) with different kurtosis.

چولگی و کشیدگی یک منحنی توزیع
Skewness VS Kurtosis

تابع مولد گشتاور، چولگی و کشیدگی توزیع‌های مهم
Moment-Generating Function (mgf), Skewness, and Kurtosis of Important Distributions

- توزیع یکنواخت گسسته

$$\gamma_1 = Skewness\ (x) = 0$$

$$\gamma_2 = Kurtosis\ (x) = \frac{6[(b-a+1)^2+1]}{5[(b-a+1)^2-1]} = \frac{-6(n^2+1)}{5(n^2-1)}$$

$$mgf = M_X(t) = \frac{e^t(1-e^{nt})}{n(1-e^t)} = \frac{e^{at}-e^{(b+1)t}}{(b-a+1)(1-e^t)} = \frac{e^{at}-e^{(b+1)t}}{n(1-e^t)}$$

تابع مولد گشتاور، چولگی و کشیدگی توزیع‌های مهم
Moment-Generating Function (mgf), Skewness, and Kurtosis of Important Distributions

- توزیع دوجمله‌ای

$$\gamma_1 = Skewness\ (x) = \frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$$

$$\gamma_2 = Kurtosis\ (x) = \frac{6p^2-6p+1}{np(1-p)}$$

$$mgf = M_X(t) = (1-p+pe^t)^n$$

تابع مولد گشتاور، چولگی و کشیدگی توزیع‌های مهم
Moment-Generating Function (mgf), Skewness, and Kurtosis of Important Distributions

❑ توزیع هندسی

$$\gamma_1 = Skewness\ (x) = \frac{2-p}{\sqrt{1-p}}$$

$$\gamma_2 = Kurtosis\ (x) = 6 + \frac{p^2}{1-p}$$

$$mgf = M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

تابع مولد گشتاور، چولگی و کشیدگی توزیع‌های مهم
Moment-Generating Function (mgf), Skewness, and Kurtosis of Important Distributions

❑ توزیع دوجمله‌ای منفی

$$\gamma_1 = Skewness\ (x) = \frac{2-p}{\sqrt{r\,(1-p)}}$$

$$\gamma_2 = Kurtosis\ (x) = \frac{6}{r} + \frac{p^2}{r(1-p)}$$

$$mgf = M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r$$

تابع مولد گشتاور، چولگی و کشیدگی توزیع‌های مهم
Moment-Generating Function (mgf), Skewness, and Kurtosis of Important Distributions

❑ توزیع فوق‌هندسی

$$\gamma_1 = Skewness\ (x) = \frac{(N-2K)(N-1)^{\frac{1}{2}}(N-2n)}{[nK(N-K)(N-n)]^{\frac{1}{2}}(N-2)}$$

$\gamma_2 = Kurtosis\ (x)$

$$= \frac{\left[(N-1)N^2\big(N(N+1)-6K(N-K)-6n(N-n)\big)+6nK(N-K)(N-n)(5N-6)\right]}{nK(N-K)(N-n)(N-2)(N-3)}$$

$$mgf = M_x(t) = \frac{\binom{N-K}{n}\,{}_2F_1(-n,-K;N-K-n+1;e^t)}{\binom{N}{n}}$$

${}_2F_1 =$ تابع فوق هندسی تعمیم یافته

تابع مولد گشتاور، چولگی و کشیدگی توزیع‌های مهم
Moment-Generating Function (mgf), Skewness, and Kurtosis of Important Distributions

❑ توزیع پوآسون

$$\gamma_1 = Skewness\ (x) = \lambda^{-\frac{1}{2}}$$

$$\gamma_2 = Kurtosis\ (x) = \lambda^{-1}$$

$$mgf = M_X(t) = \exp[\lambda(e^t-1)]$$

تابع مولد گشتاور، چولگی و کشیدگی توزیع‌های مهم
Moment-Generating Function (mgf), Skewness, and Kurtosis of Important Distributions

❑توزیع یکنواخت پیوسته

$$\gamma_1 = Skewness\ (x) = 0$$

$$\gamma_2 = Kurtosis\ (x) = -\frac{6}{5}$$

$$mgf = M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} \quad t \neq 0$$

$$mgf = M_X(t) = 1 \quad t = 0$$

تابع مولد گشتاور، چولگی و کشیدگی توزیع‌های مهم
Moment-Generating Function (mgf), Skewness, and Kurtosis of Important Distributions

❑توزیع نرمال

$$\gamma_1 = \text{Skewness (x)} = 0$$

$$\gamma_2 = Kurtosis\ (x) = 0\ or\ 3$$

$$mgf = M_X(t) = exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}$$

تابع مولد گشتاور، چولگی و کشیدگی توزیع‌های مهم
Moment-Generating Function (mgf), Skewness, and Kurtosis of Important Distributions

❑ توزیع نمایی

$$\gamma_1 = Skewness\ (x) = 2$$

$$\gamma_2 = Kurtosis\ (x) = 6$$

$$mgf = M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \qquad for \qquad t < \lambda$$

تابع مولد گشتاور، چولگی و کشیدگی توزیع‌های مهم
Moment-Generating Function (mgf), Skewness, and Kurtosis of Important Distributions

❑ توزیع ارلنگ

$$\gamma_1 = Skewness\ (x) = \frac{2}{\sqrt{r}}$$

$$\gamma_2 = Kurtosis\ (x) = \frac{6}{r}$$

$$mgf = M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-r} \qquad \text{for} \qquad \text{t} < \lambda$$

تابع مولد گشتاور، چولگی و کشیدگی توزیع‌های مهم
Moment-Generating Function (mgf), Skewness, and Kurtosis of Important Distributions

❑ توزیع گاما

$$\gamma_1 = Skewness\ (x) = \frac{2}{\sqrt{r}}$$

$$\gamma_2 = Kurtosis\ (x) = \frac{6}{r}$$

$$mgf = M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-r} \qquad \text{for} \qquad t < \lambda$$

تابع مولد گشتاور، چولگی و کشیدگی توزیع‌های مهم
Moment-Generating Function (mgf), Skewness, and Kurtosis of Important Distributions

❑ توزیع ویبول

$$\gamma_1 = Skewness\ (x) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{3}{\beta}\right)\delta^3 - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3}$$

$$\gamma_2 = Kurtosis\ (x) = -3 + \frac{\delta^4\Gamma\left(1 + \frac{4}{\beta}\right) - 4\gamma_1\sigma^3\mu - 6\mu^2\sigma^2 - \mu^4}{\sigma^4}$$

$$mgf = M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\delta^n}{n!}\Gamma\left(1 + \frac{n}{\beta}\right) \qquad for \quad \beta \geq 1$$

تابع مولد گشتاور، چولگی و کشیدگی توزیع‌های مهم
Moment-Generating Function (mgf), Skewness, and Kurtosis of Important Distributions

❑ **توزیع لاگ نرمال**

$$\gamma_1 = Skewness\ (x) = \left(e^{\omega^2} + 2\right)\sqrt{e^{\omega^2} - 1}$$

$$\gamma_2 = Kurtosis\ (x) = e^{4\omega^2} + 2e^{3\omega^2} + 3e^{2\omega^2} - 6$$

$$mgf = M_X(t) = \text{وجود ندارد}$$

❑ تابع مولد گشتاور فقط در نیمه منفی محور تعریف شده است. برای مقادیر مثبت t انتگرال واگرا می‌شود. در نتیجه، تابع مولد گشتاور تعریف نشده است.

❑ علت: توزیع لاگ‌نرمال به طور منحصر به فردی به وسیله گشتاورهایش تعریف نمی‌شود.

تابع مولد گشتاور، چولگی و کشیدگی توزیع‌های مهم
Moment-Generating Function (mgf), Skewness, and Kurtosis of Important Distributions

❑ **توزیع بتا**

$$\gamma_1 = Skewness\ (x) = \frac{2(\beta - \alpha)\sqrt{\alpha + \beta + 1}}{(\alpha + \beta + 2)\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$\gamma_2 = Kurtosis\ (x) = \frac{6[(\alpha - \beta)^2(\alpha + \beta + 1) - \alpha\beta(\alpha + \beta + 2)]}{\alpha\beta(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + 3)}$$

$$mgf = M_X(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{r=0}^{k-1}\frac{\alpha + r}{\alpha + \beta + r}\right)\frac{t^k}{k!}$$

مد توزیع یکنواخت گسسته
Discrete uniform distribution mode

Mode = N/A = Not Available

مد توزیع دوجمله‌ای
Binomial distribution mode

$\text{Mode} = (n + 1)\,p \quad \text{or} \quad [(n + 1)\,p] - 1$

مد توزیع هندسی
Geometric distribution mode

$$\text{Mode} = 1$$

مد توزیع دوجمله‌ای منفی
Negative binomial distribution mode

$$Mode = \frac{p(r-1)}{1-p} \qquad \text{if} \quad r > 1$$

$$\text{Mode} = 0 \quad \text{if} \quad r \leq 1$$

مد توزیع فوق‌هندسی
Hypergeometric distribution mode

$$Mode = \left[\frac{(n+1)(K+1)}{N+2}\right]$$

مد توزیع پوآسون
Poisson distribution mode

$$\text{Mode} = \lambda - 1, \lambda$$

$$\lceil \lambda \rceil - 1, \lfloor \lambda \rfloor$$

For non-integer λ, it is the largest integer less than λ. For integer λ, $x = \lambda$ and $x = \lambda - 1$ are both the mode.

مد توزیع یکنواخت پیوسته
Continuous uniform distribution mode

Mode = any value in (a, b)

مد توزیع نرمال
Normal distribution mode

Mode = μ

مد توزیع نمایی
Exponential distribution mode

$$\mathrm{Mode} = 0$$

مد توزیع ارلنگ
Erlang distribution mode

$$Mode = \frac{1}{\lambda}(r-1) \qquad for \quad r \geq 1$$

مد توزیع گاما
Gamma distribution mode

$$Mode = \frac{1}{\lambda}(r-1) \qquad\qquad for \quad r \geq 1$$

مد توزیع ویبول
Weibull distribution mode

$$Mode = \delta\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} \qquad\qquad \beta > 1$$

$$\mathrm{Mode} = 0 \qquad\qquad \beta = 1$$

مد توزیع لاگ‌نرمال
Lognormal distribution mode

$$Mode = e^{\theta - \omega^2}$$

مد توزیع بتا
Beta distribution mode

$$Mode = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2} \quad \text{for } \alpha, \beta > 1$$

خلاصه توزیع‌های احتمال رایج
Summary of Common Probability Distributions

Summary of Common Probability Distributions

Name	Probability Distribution	Mean	Variance
Discrete			
Uniform	$\frac{1}{n}, a \le b$	$\frac{(b+a)}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
Binomial	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	np	$np(1-p)$
	$x = 0, 1, \ldots, n, 0 \le p \le 1$		
Geometric	$(1-p)^{x-1} p$ $x = 1, 2, \ldots, 0 \le p \le 1$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
Negative binomial	$\binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r} p^r$ $x = r, r+1, r+2, \ldots, 0 \le p \le 1$	r/p	$r(1-p)/p^2$

خلاصه توزیع‌های احتمال رایج
Summary of Common Probability Distributions

Summary of Common Probability Distributions

Name	Probability Distribution	Mean	Variance
Discrete			
Hypergeometric	$\frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ $x = \max(0, n-N+K), 1, \ldots$ $\min(K, n), K \le N, n \le N$	np where $p = \frac{K}{N}$	$np(1-p)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
Poisson	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \ldots, 0 < \lambda$	λ	λ

خلاصه توزیع های احتمال رایج
Summary of Common Probability Distributions

Summary of Common Probability Distributions

Name	Probability Distribution	Mean	Variance
Continuous			
Uniform	$\frac{1}{b-a}, a \le x \le b$	$\frac{(b+a)}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normal	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $-\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, 0 < \sigma$	μ	σ^2
Exponential	$\lambda e^{-\lambda x}, 0 \le x, 0 < \lambda$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Erlang	$\frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!}, 0 < x, r = 1, 2, \ldots$	r/λ	r/λ^2
Gamma	$\frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}, 0 < x, 0 < r, 0 < \lambda$	r/λ	r/λ^2

خلاصه توزیع های احتمال رایج
Summary of Common Probability Distributions

Summary of Common Probability Distributions

Name	Probability Distribution	Mean	Variance
Continuous			
Weibull	$\frac{\beta}{\delta}\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta-1} e^{-(x/\delta)^\beta}$ $0 < x, 0 < \beta, 0 < \delta$	$\delta\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$	$\delta^2\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \delta^2\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]^2$
Lognormal	$\frac{1}{x\omega\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-[\ln(x)-\theta]^2}{2\omega^2}\right)$	$e^{\theta+\omega^2/2}$	$e^{2\theta+\omega^2}(e^{\omega^2}-1)$
Beta	$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ $0 \le x \le 1, 0 < \alpha, 0 < \beta$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$


Thank You
موفق باشید!
165