تمرین‌های فصل دوم: مدل‌های ریسک فردی

۱- امید ریاضی و واریانس $X = IB$ را در صورتی که احتمال ادعای خسارت برابر ۰,۱ باشد بدست آورید. ابتدا فرض کنید که B با احتمال ۱ برابر ۵ باشد و سپس فرض کنید $B \sim U(0,10)$ باشد.

۲- تابع توزیع تجمعی F را در نظر بگیرید:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{x}{4} & 2 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

متغیرهای تصادفی مستقل I، X و Y را که $I \sim Ber(p)$ و X یک متغیر تصادفی گسسته و Y یک متغیر تصادفی پیوسته است، را طوری تعیین کنید که $Z = I(X) + (1 - I)Y$ دارای تابع توزیع تجمعی F باشد.

۳- تابع توزیع تجمعی $S = X_1 + X_2$ را که در آن X_k ها مستقل و دارای توزیع نمایی با پارامتر k هستند را تعیین کنید. این کار را به دو روش پیچش و تابع مولد گشتاور انجام دهید و با استفاده از تجزیه کسرها تابع چگالی حاصل را شناسایی کنید.

۴- چولگی توزیع پواسن و گاما را بدست آورید.

۵- نشان دهید که نتایج حاصل از تقریب گامای انتقال یافته و تقریب NP مانند تقریب نرمال (CLT) می‌باشد اگر μ و σ^2 ثابت و $\gamma \to 0$.

۶- یک پرتفوی بیمه‌ای ۲هزار بیمه‌نامه عمر یک ساله است. نیمی از آن‌ها دارای پرداخت $b_1 = 1$ و احتمال فوت یکساله $q_1 = 0.01$ هستند. نیمی دیگر دارای پرداخت $b_2 = 2$ و احتمال فوت $q_2 = 0.05$ است. با استفاده از CLT کمترین سرباری را که باید به حق بیمه خالص اضافه شود تا تضمین کند که احتمال تجاوز کردن کل پرداخت‌ها از کل حق بیمه‌های دریافتی حداکثر ۵ درصد باشد را بدست آورید.

۵- یک بیمه‌گر به دنبال یک بیمه اتکایی بهینه برای پرتفویی شامل ۲۵۰۰۰ بیمه‌نامه زندگی یک‌ساله است که بصورت زیر گروه‌بندی شده است:

مبلغ بیمه شده b_k=	تعداد بیمه‌نامه‌ها n_k=
۲	۱۰۰۰۰
۳	۸۰۰۰
۴	۷۰۰۰

احتمال مرگ در طول سال برای هر بیمه شده برابر $q_k = 0.02$ است و بیمه‌نامه مستقل از هم هستند. بیمه‌گر می‌خواهد با تعیین بهترین سطح نگهداشت که بیشترین پرداخت برای هر بیمه‌نامه است احتمال توانایی تأمین تعهدات مالی‌اش را بهینه کند. و همچنین بخش باقیمانده ادعای خسارت بوسیله بیمه‌گر اتکایی پرداخت می‌شود. پس از جمع‌آوری حق‌بیمه‌ها، بیمه‌گر یک سرمایه B واحدی دارد که باید از آن ادعای خسارت و حق بیمه اتکایی را بپردازد. فرض کنید این حق بیمه ۱۲۰ درصد حق بیمه خالص است.

الف: احتمال اینکه B برای سطح نگهداشت $d \in [3,4]$ ناکافی باشد را محاسبه نمایید.

ب: با استفاده از تقریب NP برای $d = 3$ احتمال اینکه $B = 1500$ ناکافی باشد چقدر است.

ج: برنامه‌ای بنویسید که موارد الف و ب را محاسبه نماید.

۶- رابطه زیر را اثبات نمایید و چولگی تابع $\Gamma(\alpha, \beta)$ را بدست آوردید.

$$k = E[X]t + \frac{1}{2}Var[X]t^2 + \frac{1}{6}E\left[\left(X - E(X)\right)^3\right]t^3 + O\ (t^4).$$