که p و q هردو صفر نیستند. فرض کنید T زمان اولین بازگشت به وضعیت ۱ باشد وقتی زنجیر از ۱ شروع شده باشد.

الف) نشان دهید که $P(T \geq n) = p(1-q)^{n-2}$، برای $n \geq 2$.

ب) $E(T)$ را بیابید وتحقیق کنید $E(T) = 1/\pi_1$، که در آن $\boldsymbol{\pi}$ توزیع مانای زنجیر است.

۲۳.۳ زنجیر مارکوف k حالته با ماتریس انتقال

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ k-2 \\ k-1 \\ k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & k-2 & k-1 & k \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/k & 1/k & 1/k & \cdots & 1/k & 1/k & 1/k \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

را در نظر بگیرید. نشان دهید که زنجیر ارگودیک است و توزیع حدی را بیابید.

۲۴.۳ نشان دهید که توزیع مانا برای زنجیر ارنفست تعمیم‌یافته مثال ۱۹.۳، دوجمله‌ای با پارامترهای N و $1/2$ است.

۲۵.۳ مدل انتشار برنولی_ لاپلاس در تمرین ۱۲.۲ را بخوانید.

الف) توزیع مانا برای حالت‌های $k = 2$ و $k = 3$ را بیابید.

ب) برای حالت کلی، نشان دهید که $\pi_j = \binom{k}{j}^2 / \binom{2k}{k}$ برای $j = 0, 1, \ldots, k$، در معادله‌های توزیع مانا صدق می‌کند و بنابراین توزیع حدی یکتا زنجیر هست.

۲۶.۳ فرض کنید $(p_1, \ldots, p_k)$ یک بردار احتمالی و $\boldsymbol{P}$ ماتریس انتقال $k \times k$ تعریف شده توسط

$$P_{ij} = \begin{cases} p_j, & i = 1, \ldots, k-1, \\ 0, & i = k, j < k, \\ 1, & i = k, j = k. \end{cases}$$

باشد. همه توزیع‌های مانای زنجیر را مشخص کنید.

۲۷.۳ سینکلیر[1] (۲۰۰۵). زنجیر مارکوف نامتناهی روی اعداد صحیح نامنفی نشان داده شده توسط شکل ۱۶.۳ را در نظر بگیرید.

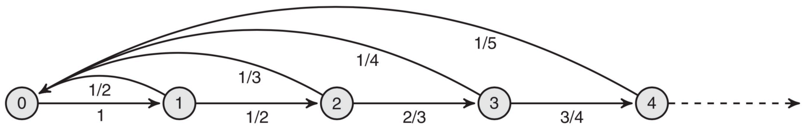
---

[1] Sinclair

الف) نشان دهید که زنجیر تحویل‌ناپذیر و نادوره‌ای است.

ب) با محاسبه اولین زمان بازگشت به ۰ وقتی زنجیر از ۰ شروع شده باشد، نشان دهید زنجیر بازگشتی است.

پ) نشان دهید که زنجیر بازگشتی پوچ است.



شکل ۱۶.۳

۲۸.۳ زنجیر مارکوف با ماتریس انتقال

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ \end{array} \\ \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \\ ۵ \\ ۶ \\ ۷ \end{array} & \begin{pmatrix} ۱/۳ & ۱/۳ & ۱/۳ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲/۳ & ۰ & ۱/۳ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲/۳ & ۱/۳ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱/۴ & ۰ & ۱/۲ & ۰ & ۱/۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱/۴ & ۰ & ۱/۴ & ۰ & ۱/۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱/۸ & ۱/۸ & ۱/۸ & ۱/۸ & ۱/۴ & ۱/۴ \end{pmatrix} \end{array},$$

را در نظر بگیرید. رده های هم‌ارزی را تعیین کنید. وضعیت‌ها را به‌عنوان گذرا و بازگشتی دسته‌بندی کنید. برای هر i و j، بدون استفاده از کامپیوتر $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$ را به‌دست آورید.

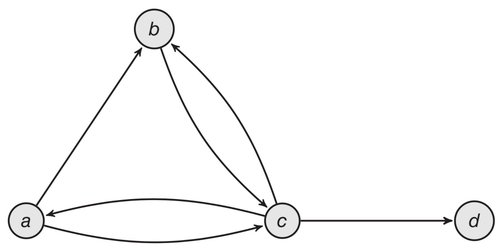
۲۹.۳ زنجیر مارکوف با ماتریس انتقال

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{array} & \begin{pmatrix} ۰/۶ & ۰/۲ & ۰ & ۰ & ۰/۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۵ & ۰/۵ \\ ۰ & ۰ & ۰/۳ & ۰/۷ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰/۳ & ۰/۴ & ۰/۳ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰/۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۹ \\ ۰ & ۰/۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۸ & ۰ \end{pmatrix} \end{array},$$

را در نظر بگیرید رده‌های هم‌ارزی را تعیین کرده، وضعیت‌های گذرا و بازگشتی را دسته‌بندی کنید و دوره‌های هر وضعیت را مشخص کنید.

۳۰.۳ یک گراف دوبخشی است اگر مجموعه رأس‌ها را بتوان با دو رنگ سیاه و سفید رنگ‌آمیزی کرد به‌طوری که هر یال در گراف یک رأس سیاه و یک رأس سفید را به‌هم وصل می‌کند. شکل ۷.۳(a) را به‌عنوان یک مثال از گراف دوبخشی ببینید. نشان دهید برای قدم‌زدن تصادفی ساده روی یک گراف همبند، قدم‌زدن دوره‌ای است اگر و تنها اگر گراف دوبخشی باشد.

۳۱.۳ برای گراف شبکه در شکل ۱۷.۳، رتبه‌صفحه را برای گره‌های شبکه، با به‌کار بردن ضریب میرایی $p = ۰/۹۰$ به‌دست آورید. مثال ۲۱.۳ را ببینید.



شکل ۱۷.۳

۳۲.۳ فرض کنید $X_۰, X_۱, \ldots$ یک زنجیر مارکوف ارگودیک با ماتریس انتقال $\boldsymbol{P}$ و توزیع مانای $\boldsymbol{\pi}$ باشد. فرآیند دومتغیره $Z_۰ = (X_۰, X_۰)$ با $Z_n = (X_n, X_{n-۱}),\ n \geq ۱$ را تعریف کنید.

الف) یک استدلال شهودی ارائه دهید که چرا $Z_۰, Z_۱, \ldots$ یک زنجیر مارکوف است.

ب) احتمال‌های انتقال را برحسب $\boldsymbol{P}$ بنویسید. یعنی،

$$P\left(Z_n = (i,j) | Z_{n-۱} = (s,t)\right).$$

پ) توزیع حدی را پیدا کنید.

۳۳.۳ فرض کنید $\boldsymbol{P}$ یک ماتریس تصادفی باشد. نشان دهید که اگر $\boldsymbol{P}^N$ مثبت باشد، آنگاه $\boldsymbol{P}^{N+m}$ برای هر $m \geq ۰$ مثبت است.

۳۴.۳ فرض کنید $\boldsymbol{P}$ ماتریس انتقال یک زنجیر تحویل‌ناپذیر ولی نه الزاماً یک زنجیر مارکوف

ارگودیک باشد. برای $\circ < p < ۱$، قرار دهید

$$\widetilde{\boldsymbol{P}} = p\boldsymbol{P} + (۱ - p)\boldsymbol{I},$$

که در آن $\boldsymbol{I}$ ماتریس همانی است. نشان دهید $\widetilde{\boldsymbol{P}}$ یک ماتریس تصادفی برای یک زنجیر مارکوف ارگودیک با توزیع مانای همانند $\boldsymbol{P}$ هست. یک استدلال شهودی ارائه کنید که چگونه زنجیر $\widetilde{\boldsymbol{P}}$ در مقایسه با زنجیر $\boldsymbol{P}$ تکامل می‌یابد.

۳۵.۳ فرض کنید $\boldsymbol{Q}$ یک ماتریس تصادفی $k \times k$ باشد. در نظر بگیرید $\boldsymbol{A}$ یک ماتریس $k \times k$ باشد که هر درایه‌اش $۱/k$ است. برای $\circ < p < ۱$، قرار دهید

$$\boldsymbol{P} = p\boldsymbol{Q} + (۱ - p)\boldsymbol{A}.$$

نشان دهید که $\boldsymbol{P}$ ماتریس انتقال برای یک زنجیر مارکوف ارگودیک است.

۳۶.۳ فرض کنید $X_\circ, X_۱, \ldots$ یک زنجیر مارکوف ارگودیک روی $\{۱, \ldots, k\}$ با توزیع مانای $\boldsymbol{\pi}$ باشد. فرض کنید زنجیر مانا باشد.

الف) $\operatorname{Cov}(X_m, X_{m+n})$ را بیابید.

ب) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Cov}(X_m, X_{m+n})$ را بیابید.

۳۷.۳ نشان دهید همه زنجیرهای دوحالته، به‌جز برای زنجیر بدیهی که ماتریس انتقال آن ماتریس همانی است، برگشت‌پذیر زمان هستند.

۳۸.۳ شما ۵ تاس را پرتاب می‌کنید و آنهایی را که ۶ مشاهده شده‌اند کنار می‌گذارید. تاس‌های باقیمانده را دوباره پرتاب و تاس‌هایی که ۶ مشاهده شده‌اند را کنار بگذارید. این کار را تا زمانی که همه‌ی شش‌ها ظاهر شوند ادامه دهید.

الف) برای زنجیر مارکوف مربوطه ماتریس انتقال را نمایش دهید که در آن X_n تعداد ۶ها بعد از n پرتاب است. همچنین تمرین ۱۱.۲ را ببینید.

ب) به‌طور متوسط، چند بار طول می‌کشد قبل از اینکه شما همه ۶ها را مشاهده کنید.

۳۹.۳ نشان دهید اگر $X_\circ, X_۱, \ldots$ برگشت‌پذیر باشد در آن‌صورت برای زنجیر مانا داریم

$$P(X_\circ = i_\circ, X_۱ = i_۱, \ldots, X_n = i_n) = P(X_n = i_\circ, X_{n-۱} = i_۱, \ldots, X_\circ = i_n),$$

برای هر $i_\circ, i_۱, \ldots, i_n$.

۴۰.۳ قدم‌زدن تصادفی اریب روی یک $n-$دوری را در نظر بگیرید که در یک جهت با احتمال p و در جهت دیگر با احتمال $۱ - p$ حرکت می‌کند، تعیین کنید آیا قدم‌زدن برگشت‌پذیر زمان است.

۴۱.۳ نشان دهید زنجیر مارکوف با ماتریس انتقال

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} ۱/۶ & ۱/۶ & ۰ & ۲/۳ \\ ۱/۵ & ۲/۵ & ۲/۵ & ۰ \\ ۰ & ۱/۳ & ۱/۶ & ۱/۲ \\ ۴/۹ & ۰ & ۱/۳ & ۲/۹ \end{pmatrix} \end{array},$$

برگشت‌پذیر است. این زنجیر می‌تواند توسط یک قدم‌زدن تصادفی روی یک گراف وزن‌دار نشان داده شود. گرافی را نمایش دهید که وزن‌های آن اعداد صحیح باشند.

۴۲.۳ قدم‌زدن تصادفی روی $\{۰, ۱, ۲, \ldots\}$ با یک مرز انعکاسی را در نظر بگیرید. اگر قدم‌زن در وضعیت ۰ باشد با احتمال ۱ به وضعیت ۱ می‌رود. در غیر این‌صورت با احتمال p به سمت چپ و با احتمال $۱ - p$ به سمت راست حرکت می‌کند. برای چه مقادیری از p زنجیر برگشت‌پذیر است. برای چنین pیی، توزیع مانا را به‌دست آورید.

۴۳.۳ یک زنجیر مارکوف دارای ماتریس انتقال زیر است

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} ۱/۲ & ۱/۴ & ۰ & ۱/۴ \\ p & ۰ & ۱ - p & ۰ \\ ۰ & ۱/۴ & ۱/۲ & ۱/۴ \\ q & ۰ & ۱ - q & ۰ \end{pmatrix}$$

الف) برای چه مقادیری از p و q این زنجیر ارگودیک است؟

ب) برای چه مقادیری از p و q این زنجیر برگشت‌پذیر است؟

۴۴.۳ زنجیرهای مارکوف برای مدل‌بندی کردن تعویض‌های نوکلئوپید و جهش‌ها در دنباله‌های DNA مورد استفاده قرار می‌گیرد. کیمورا[۱] ماتریس انتقال زیر را برای چنین مدلی ارائه

---

[۱] Kimura

می‌دهد.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & g & c & t \end{array} \\ \boldsymbol{P} = \begin{array}{c} a \\ g \\ c \\ t \end{array} & \begin{pmatrix} ۱-p-۲r & p & r & r \\ p & ۱-p-۲r & r & r \\ q & q & ۱-p-۲r & p \\ q & q & p & ۱-p-۲q \end{pmatrix}, \end{array}$$

بردار $\boldsymbol{x}$ی را پیدا کنید که در معادلات جامع تعادل صدق می‌کند. نشان دهید که زنجیر برگشت‌پذیر است و توزیع مانا را پیدا کنید. صحت نتایج به‌دست آمده را برای حالت $p = ۰/۲$، $q = ۰/۱$ و $r = ۰/۳$ بررسی کنید.

۴۵.۳ اگر $\boldsymbol{P}$ ماتریس انتقال زنجیر مارکوف برگشت‌پذیر باشد، نشان دهید $\boldsymbol{P}^۲$ نیز ماتریس انتقال زنجیر مارکوف برگشت‌پذیر است. نتیجه‌گیری کنید $\boldsymbol{P}^n$ ماتریس انتقال یک زنجیر مارکوف برگشت‌پذیر برای $n \geq ۱$ است.

۴۶.۳ برای زنجیر مارکوف داده شده با ماتریس انتقال $\boldsymbol{P}$ و توزیع مانای $\boldsymbol{\pi}$، زمان برگشتی یک زنجیر مارکوف با ماتریس انتقال $\widetilde{\boldsymbol{P}}$ تعریف شده توسط زیر داده می‌شود

$$\widetilde{P}_{ij} = \frac{\pi_j P_{ji}}{\pi_i}, \quad \forall i, j.$$

الف) نشان دهید یک زنجیر مارکوف با ماتریس انتقال $\boldsymbol{P}$ برگشت‌پذیر است اگر و فقط اگر $\boldsymbol{P} = \widetilde{\boldsymbol{P}}$.

ب) نشان دهید که زنجیر مارکوف زمان برگشتی، دارای توزیع مانای یکسان با زنجیر اصلی است.

۴۷.۳ زنجیر مارکوف با ماتریس انتقال

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} ۱ & ۲ & ۳ \end{array} \\ \boldsymbol{P} = \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{array} & \begin{pmatrix} ۱/۳ & ۰ & ۲/۳ \\ ۱/۲ & ۱/۲ & ۰ \\ ۱/۶ & ۱/۳ & ۱/۲ \end{pmatrix}, \end{array}$$

را در نظر بگیرید. ماتریس انتقال را برای زنجیر زمان برگشتی پیدا کنید. (تمرین ۴۶.۳ را ببینید.)

۴۸.۳ یک زنجیر مارکوف با ماتریس انتقال

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۱-\alpha & \alpha & ۰ \\ ۰ & ۱-\beta & \beta \\ \gamma & ۰ & ۱-\gamma \end{pmatrix} \end{array},$$

در نظر بگیرید که در آن $۰ < \alpha, \beta, \gamma < ۱$. ماتریس انتقال زنجیر زمان برگشتی را بیابید. (تمرین ۴۶.۳ را ببینید.)

۴۹.۳ یک زنجیر جاذب با t وضعیت گذرا و $k-t$ وضعیت بازگشتی در نظر بگیرید. برای وضعیت گذرای i و وضعیت جاذب j، احتمال اینکه زنجیر از i شروع شود و جذب j شود را با B_{ij} نمایش می‌دهیم و ماتریس حاصل $t \times (k-t)$ را با $\boldsymbol{B}$ نمایش می‌دهیم. با استفاده از تحلیل گام اول نشان دهید $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-۱}\boldsymbol{R}$.

۵۰.۳ روش زیر را برای بُرزدن یک دسته کارت در نظر بگیرید. دو کارت را به‌طور یکنواخت تصادفی از این دسته کارت برداشته و سپس جای آنها را با هم عوض می‌کنیم. اگر دو کارت یکسان انتخاب شود، دسته کارت تغییر نخواهد کرد. این روش را بُرزدن تصادفی پس و پیش (پس و پیش سازی) می‌نامند.

الف) استدلال کنید زنجیر ارگودیک است و توزیع مانای زنجیر یکنواخت است.

ب) ماتریس انتقال ۶×۶ برای یک دسته کارت سه‌تایی را نمایش دهید.

پ) به‌طور متوسط چه تعداد بُرزدن نیاز است تا ترتیب اصلی دسته کارت وارونه گردد؟

۵۱.۳ یک دسته کارت kتایی به روش تصادفی‌ـ به‌ـ بالا، یعنی کارت بالایی به‌صورت کاملاً تصادفی در داخل دسته کارت قرار داده شود. (بعد از یک بُرزدن، کارت روی دسته کارت با احتمال $۱/k$ در جایی که قرار دارد، قرار می‌گیرد.) فرض کنید که کارت شماره ۱۰ سبز رنگ روی دسته کارت قرار دارد. زنجیر مارکوف X_n، موقعیت کارت شماره ۱۰ سبز رنگ پس از n بُرزدن با $X_۰ = ۱$ را در نظر بگیرید. فضای حالت به‌صورت $\{۱, \ldots, k\}$ است. با فرض $k = ۶$،

الف) ماتریس انتقال را به‌دست آورید و تعداد بُرزدن‌های مورد انتظار برای اینکه کارت شماره ۱۰ سبز رنگ دوباره روی دسته کارت قرار بگیرد را محاسبه کنید.

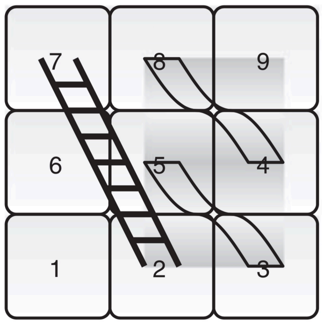
ب) تعداد بُرزدن‌های مورد انتظار برای اینکه کارت زیر دسته کارت به روی دسته کارت بیاید

را پیدا کنید.

۵۲.۳ یک صفحه تعدیل شده از بازی مار و پله در شکل ۱۸.۳ نمایش داده شده است. این بازی با یک تاس چهار وجهی انجام می‌شود.

الف) زمان مورد انتظار برای انجام این بازی را به‌دست آورید.

ب) فرض کنید بازیکن در مربع شماره ۶ باشد، احتمال اینکه بازیکن خود را در خانه شماره ۳ ببیند قبل از اینکه بازی به اتمام برسد، بیابید.



شکل ۱۸.۳

۵۳.۳ وقتی یک بازی لیگ ملی فوتبال با تساوی تمام می‌شود تحت قانون گل طلایی[1] (قانون وقت اضافه گل طلایی) دو تیم پانزده دقیقه اضافه با هم بازی می‌کنند و تیمی که اولین گل را می‌زند، برنده بازی می‌شود. یک تحلیل زنجیر مارکوف از گل طلایی در جونز[2] (۲۰۰۴) ارائه شده است. با فرض اینکه دو تیم A و B همسان باشند، یک زنجیر مارکوف جاذب چهار حالته با وضعیتهای PA: مالکیت توپ با تیم A، PB: مالکیت توپ با تیم B، A: برنده شدن تیم A و B: برنده شدن تیم B، حاصل می‌شود. ماتریس انتقال به‌صورت زیر است

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ PA \\ PB \\ A \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} PA & PB & A & B \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} \text{۰} & \text{۱} - p & p & \text{۰} \\ \text{۱} - p & \text{۰} & \text{۰} & p \\ \text{۰} & \text{۰} & \text{۱} & \text{۰} \\ \text{۰} & \text{۰} & \text{۰} & \text{۱} \end{array}\right) \end{array},$$

[1] sudden-death [2] Jones

که در آن p احتمال این است که تیم B گل بزند وقتی مالکیت توپ را دارد. اینکه کدام تیم در وقت اضافه توپ را در اختیار داشته باشد با پرتاب سکه مشخص می‌شود.

الف) اگر تیم A توپ را در وقت اضافه دریافت کند، احتمال اینکه A برنده شود را پیدا کنید.

ب) یک فرآیند جایگزین وقت اضافه با گل طلایی، قاعده ی نخست_به_شش[1] است. یعنی تیمی که زودتر به امتیاز ۶ می‌رسد برنده بازی است. دو تیمی را که با هم مسابقه می‌دهند در نظر بگیرید. فرض کنید α برابر احتمال اینکه یک تیم امتیاز تاچ داون(عبور دادن توپ از خط دروازه حریف که ۶ امتیاز دارد) را بگیرد و β برابر احتمال اینکه یک تیم امتیاز گل میدانی(عبور دادن توپ از دروازه با ضربه پا و کسب ۳ امتیاز) را به‌دست آورد، باشد. برای سادگی در نظر بگیرید که امتیازات صرفاً از طریق تاچ داون و گل میدانی حاصل شود. یک مدل زنجیر مارکوف ۱۰ حالته برای بازی وقت اضافه به‌دست آورید.

پ) برای فصل NFL سال ۲۰۰۲، ۶۰۴۹ مالکیت توپ، ۱۲۷۰ تاچ داون و ۷۳۷ گل میدانی به دست آمده است. با استفاده از این داده‌ها، احتمال اینکه A برنده بازی شود را برای هر دو قاعده وقت اضافه با هم مقایسه کنید.

۵۴.۳ یک موش در ماز شکل ۱۹.۳ با شروع از خانه‌ی A قرار داده شده است. یک تکه پنیر در خانه I قرار دارد. از هر خانه، موش به خانه مجاور از طریق یک در باز حرکت می‌کند و تمامی درهای در دسترس با احتمال مساوی انتخاب می‌شوند.

الف) به‌طور متوسط موش چند خانه را ملاقات می‌کند قبل از اینکه پنیر را پیدا کند.

ب) به‌طور متوسط موش چند بار خانه A را ملاقات می‌کند قبل از اینکه پنیر را پیدا کند.

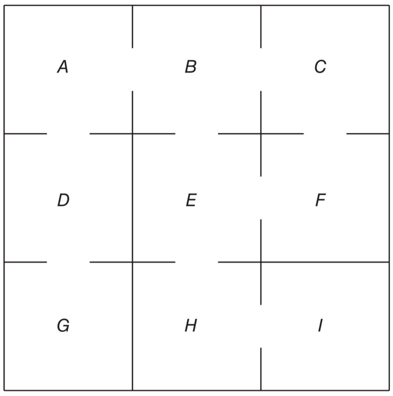
۵۵.۳ در یک دنباله از پرتاب‌های سکه ناارِیب، به‌طور متوسط چند پرتاب مورد نیاز است تا اولین بار الگوی $\mathtt{H-H-T-H}$ مشاهده شود.

۵۶.۳ یک سکه اریب دارای احتمال مشاهده شیر ۱/۳ و احتمال مشاهده خط ۲/۳ است. چنانچه سکه مرتباً پرتاب شود، به‌طور متوسط تعداد پرتاب‌های لازم برای ظاهر شدن الگوی $\mathtt{H-T-T-H-H-T-H}$ را پیدا کنید.

۵۷.۳ در پرتاپ‌های مکرر سکه، مجموعه تمام الگوهای سه عضوی را در نظر بگیرید:

$$\{\mathtt{HHH}, \mathtt{HHT}, \mathtt{HTH}, \mathtt{HTT}, \mathtt{THH}, \mathtt{THT}, \mathtt{TTH}, \mathtt{TTT}\}.$$

[1] first-to-six rule



شکل ۱۹.۳ موش در ماز.

کدام الگوها به‌طور متوسط برای ظاهر شدن در نمونه‌گیری تکراری، بیشترین زمان را طول می‌کشد. کدام یک کوتاه‌ترین زمان را طول می‌کشد؟

۵۸.۳ یک دنباله از ۰ها و ۱ها توسط زنجیر مارکوف با احتمال انتقال

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \end{array},$$

تولید شده‌اند. اولین عنصر از دنباله با انداختن یک سکه ناااریب تعیین می‌شود. به‌طور متوسط چند گام نیاز است تا اینکه الگوی ۱-۱-۰-۰ ظاهر شود.

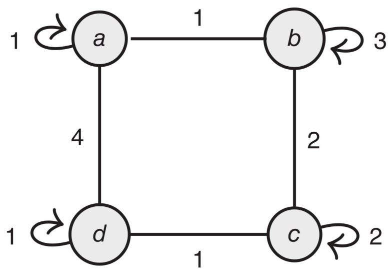
۵۹.۳ قدم‌زدن تصادفی روی گراف وزن‌دار شکل ۲۰.۳ را در نظر بگیرید.

الف) اگر قدم‌زن از a شروع کند، تعداد گام‌های مورد انتظار برای برگشتن به a را بیابید.

ب) اگر قدم‌زن از a شروع کند، تعداد گام‌های مورد انتظار برای اولین اصابت به وضعیت b را بیابید.

پ) اگر قدم‌زن از a شروع کند، احتمال اینکه قدم‌زن وضعیت b را قبل از وضعیت c ملاقات کند چقدر است.

۶۰.۳ برای یک زنجیرمارکوف شروع شده از i، پنجمین زمان که فرآیند وضعیت i را ملاقات می‌کند، با T نمایش می‌دهیم. آیا T زمان توقف است؟ توضیح دهید.



شکل ۲۰.۳

۶۱.۳ زنجیر مارکوف آب و هوایی $X_۰, X_۱, \ldots$ مثال ۳.۲ را در نظر بگیرید. فرض کنید T اولین زمانی باشد که ۴۰ روز بارانی در یک ردیف وجود داشته باشد. آیا زنجیر $X_T, X_{T+۱}, X_{T+۲}, \ldots$ یک زنجیر مارکوف است؟ شرح دهید.

۶۲.۳ فرض کنید S یک متغیر تصادفی ثابت صحیح مثبت با احتمال ۱ باشد. نشان دهید S یک زمان توقف است. نتیجه‌گیری کنید که خاصیت مارکوفی از ویژگی قوی مارکوفی پیروی می‌کند.

۶۳.۳ `R`: سرعت‌های ساعتی باد در شمال غربی ترکیه توسط مدل‌های مارکوف در ساهین و سن[۱] (۲۰۰۱) مدل بندی شده‌اند. وضعیت‌های زنجیر هفت سطح سرعت باد هستند. ماتریس انتقال به‌صورت زیر است

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \\ ۵ \\ ۶ \\ ۷ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۰/۷۵۶ & ۰/۱۱۳ & ۰/۱۲۹ & ۰/۰۰۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰/۱۷۴ & ۰/۸۲۱ & ۰/۰۰۴ & ۰/۰۰۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰/۱۴۱ & ۰/۰۰۱ & ۰/۷۷۶ & ۰/۰۸۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰/۰۰۳ & ۰ & ۰/۱۹۲ & ۰/۷۵۳ & ۰/۰۵۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰/۰۰۲ & ۰/۲۲۷ & ۰/۷۳۵ & ۰/۰۳۶ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۰۰۷ & ۰/۳۶۷ & ۰/۶۰۴ & ۰/۰۲۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۰۵۳ & ۰/۱۵۸ & ۰/۷۸۹ \end{pmatrix} \end{array}.$$

الف) توزیع حدی را پیدا کنید (i) با به‌دست آوردن توان‌های بالای ماتریس (ii) با به‌کار بردن تابع `stationary` در فایل `utilities.R` . چند بار (چه نسبتی) بالاترین سرعت باد اتفاق می‌افتد؟ چه نسبتی کمترین سرعت اتفاق می‌افتد؟

---
[۱] Sahin and Sen

ب) زنجیر را برای ۱۰۰۰۰ گام شبیه سازی کنید و نسبت زمانی که زنجیر هر وضعیت را ملاقات می‌کند، برآورد کنید.

۶۴.۳ R: تکامل اکوسیستم جنگل در آمریکا و کانادا در استریگل[۱] و همکاران (۲۰۱۲) با استفاده از زنجیرهای مارکوف مورد مطالعه قرار گرفت. تغییرات ۵ ساله در وضعیت خاک جنگل با زنجیر مارکوف ۱۲ حالته مدل‌بندی شده است. ماتریس انتقال را می‌توان در فایل R اسکریپت `forest.R` یافت. چند سال طول می‌کشد تا یک اکوسیستم از حالت ۱ به حالت ۱۲ منتقل شود.

۶۵.۳ R: مسئله ورشکستگی قمارباز را برای یک قمارباز که با سرمایه ۵ دلار شروع می‌کند، شبیه‌سازی کنید. بازی زمانی تمام می‌شود که سرمایه فرد به ۵۰ دلار برسد یا ورشکست شود. کد خود را برای شبیه‌سازی احتمال اینکه فرد در نهایت ورشکست شود، به‌کار ببرید و نتیجه را با احتمال دقیق مقایسه کنید.

۶۶.۳ R: زمان اصابت مورد انتظار برای قدم‌زدن تصادفی روی شش وجهی تمرین ۱۹.۳ را شبیه سازی کنید.

۶۷.۳ R: بازی تاس تمرین ۳۸.۳ را شبیه‌سازی کنید. از نظر عددی امید ریاضی تئوری تعداد پرتاب‌های مورد نیاز برای به‌دست آوردن همه‌ی شش‌ها بررسی کنید.

۶۸.۳ R: تابع `reversal(mat)` را بنویسید که ورودی آن ماتریس انتقال یک زنجیر مارکوف تحویل‌ناپذیر و خروجی ماتریس انتقال زنجیر برگشتی باشد.

۶۹.۳ R: بازی صفحه‌ای خود را طراحی کنید که به‌عنوان یک زنجیر مارکوف مدل بندی شود. سوال‌های موردنظر را بپرسید و جواب‌های آن را با استفاده از شبیه‌سازی و یا تحلیل دقیق بیابید.

---

[۱] Strigul