

مقدمه‌ای بر نظریه قابلیت اعتماد

مجید اسدی

۱

ساختار سیستم‌ها

۱.۱ مقدمه

در دنیای امروز معمولاً با سیستم‌هایی سر و کار داریم که متشکل از تعدادی جزء است و بر اساس یک ساختار از قبل طراحی شده برای هدف معینی در کنار یکدیگر، قرار گرفته‌اند. هر یک از اجزاء به طور مستقل یا وابسته به یکدیگر وظایف‌ای را انجام داده و بسته به نوع اتصال اجزاء، سیستم وظیفه خود را انجام می‌دهد. از مثال‌هایی که می‌توان برای سیستم بر شمرد اتومبیل است که در یک اندازه متوسط آن حدود ۶۰۰ جزء (بسته به آن که چه چیز را در آن جزء بنامیم) وجود دارد. کامپیوتر خانگی نیز یک سیستم است که حدود ۳۰۰ جزء در آن وجود دارد و تلویزیون یک سیستم است که اجزاء آن تا ۱۰۰ قطعه می‌تواند باشد. سیستم‌هایی از این دست به سیستم‌هایی معروفند که آنها را منسجم می‌گویند.

در این فصل تابع ساختار سیستم منسجم را به عنوان تابعی از اجرای تشکیل دهنده آن تعریف می‌کنیم. ابتدا در بخش ۲.۱ تعریف دقیق تابع ساختار را به عنوان یک تابع دو مقداری معرفی می‌کنیم. در بخش ۳.۱ بعضی از توابع ساختار متداول در در قابلیت اعتماد مهندسی مانند ساختارهای موازی، متواالی و k^n را معرفی کرده و تابع ساختار آن‌ها را ارائه می‌کنیم. در بخش ۴.۱، با معرفی بردارهای مسیر مینیمال و بردارهای قطع کننده مینیمال، نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان توابع ساختار سیستم‌های منسجم را بر اساس این گونه بردارها نمایش داد.

۲.۱ سیستم و اجزای آن

در ادامه یک سیستم را در نظر می‌گیریم که شامل تعدادی جزء است و برای هدفی معین طراحی شده است. طبیعی است که فرض کنیم عملکرد سیستم تابعی است از عملکرد اجزای آن است. در اینجا فرض می‌کنیم سیستم دارای n (۱ $\leq n \leq 1$) جزء است و هر جزء در سیستم یا فعال است یا غیر فعال. برای توصیف این وضعیت یک متغیر دو مقداری x_i , $i=1,\dots,n$, به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر جزء } \mathbf{x} \text{ فعال باشد,} \\ 0 & \text{اگر جزء } \mathbf{x} \text{ غیر فعال باشد,} \end{cases}$$

با این نمایش فرض بر این است که جزء \mathbf{x} در سیستم یا به طور رضایت بخش کار می‌کند یا این که از کار افتاده است. همچنین فرض می‌کنیم که سیستم نیز در یکی از دو وضعیت فعال یا غیر فعال باشد. برای تعیین وضعیت سیستم بر حسب وضعیت اجزاء فرض می‌کنیم که وابستگی سیستم به اجزای آن توسطتابع دو مقداری $\varphi(\mathbf{x})$, که به تابع ساختار سیستم معروف است، مشخص شود که در آن $(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}$ و به آن بردار وضعیت سیستم گوییم. بنابراین بسته به وضعیت بردار \mathbf{x} داریم:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{اگر سیستم فعال باشد,} \\ 0 & \text{اگر سیستم غیر فعال باشد,} \end{cases}$$

شكل تابعی $\varphi(\mathbf{x})$ پس از آنکه نوع ارتباط بین اجزاء در سیستم معلوم شود قابل تعیین خواهد بود. نکه قابل ذکر در اینجا این است که بردار وضعیت $(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}$ برداری است که عناصر آن، x_i ، مقادیر صفر یا یک را (بسته به اینکه جزء \mathbf{x} غیر فعال یا فعال باشد) اختیار می‌کند. لذا در سیستمی با n جزء، تعداد 2^n وضعیت برای بردار وضعیت اجزاء وجود دارد. برای مثال در یک سیستم با ۳ جزء، $2^3 = 8$ بردار وضعیت وجود دارد که عبارتند از

(1,1,1)	(1,0,1)
(1,1,0)	(1,0,0)
(0,1,1)	(0,0,1)
(0,1,0)	(0,0,0)

لذا بسته به نوع ساختار سیستم هر بردار وضعیت منتج به این می‌شود که مقدار $\varphi(\mathbf{x})$ صفر یا یک شود. اگرچه از دیدگاه ریاضی تابع $\varphi(\mathbf{x})$ می‌تواند هیچ محدودیتی از نظر رفتار، نداشته

باشد، اما در اینجا با توجه به اینکه φ تابع ساختار سیستم است، خود را به توابعی محدود می‌کنیم که به آنها تابع یکنوا گوییم و در تعریف زیر صدق می‌کنند.

تعریف ۱.۱ سیستمی با تابع ساختار φ را در نظر بگیرید. سیستم را یکنوا گوییم هر گاه برای هر دو بردار وضعیت x و y که در آن $y \leq x$ داشته باشیم، $(y) \leq \varphi(x)$.

قرارداد $y \leq x$ بدین معنی است که $y_i \leq x_i$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، اما حداقل برای یک i $y_i < x_i$ یعنی حداقل برای یک i نامساوی اکید است.

بنابراین یک سیستم یکنواست هر گاه وضعیت یکی از اجزای سیستم از غیر فعال به وضعیت فعال تبدیل شود، وضعیت سیستم بدتر نخواهد شد.

تعریف ۲.۱ جزء n ام در سیستم را یک جزء نامربوط گوییم هر گاه به ازای هر x_j ، $j \neq i$

$$\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

با توجه به تعریف فوق، یک سیستم منسجم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳.۱ یک سیستم را منسجم گوییم هر گاه تابع ساختار آن یکنوا باشد و جزء نامربوط در آن وجود نداشته باشد.

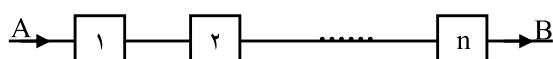
در ادامه بحث با سیستم‌های سروکار داریم که در تعریف سیستم منسجم صدق می‌کنند.

۳.۱ توابع ساختار سیستم‌های منسجم

از معروفترین توابع ساختار در مهندسی قابلیت اعتماد می‌توان از سیستم‌هایی با ساختار متوالی، ساختار موازی، ساختار k از n ... نام برد.

سیستم‌های متوالی

ساده‌ترین نوع ساختار در بین سیستم‌های منسجم سیستم متوالی است. یک سیستم را متوالی گوییم هر گاه فعال بودن سیستم مستلزم فعال بودن همه اجزای آن باشد. به عبارت دیگر، سیستم فعال است اگر و تنها اگر همه اجزای آن فعال باشند. یک مثال عینی از سیستم‌های متوالی مدارهای الکتریکی متوالی هستند که دارای نموداری به شکل زیر می‌باشند. طراحی این سیستم‌ها طوری است که باید از نقطه A به نقطه B جریان برقرار باشد. اگر بخواهد از نقطه A به نقطه B جریان برقرار باشد.



شکل ۱.۱ نموداری از یک سیستم متوالی

اگر چه سیستم‌های متواالی محدود به مدارهای الکتریکی نیست و مثال‌های متعدد دیگری در صنعت وجود دارد که ساختار آنها متواالی است، اما در حالت کلی برای نمایش ساختار چنین سیستم‌هایی از شکل ۱.۱ استفاده می‌کنند که برای فهم رابطه بین اجزای سیستم مفید است.

با توجه به تعریف سیستم متواالی، اگر سیستم دارای n جزء باشد و بردار وضعیت آن را با $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ نمایش می‌دهیم، آنگاه تابع ساختار سیستم، $\varphi(\mathbf{x})$ ، برابر است با

$$\varphi(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n x_i.$$

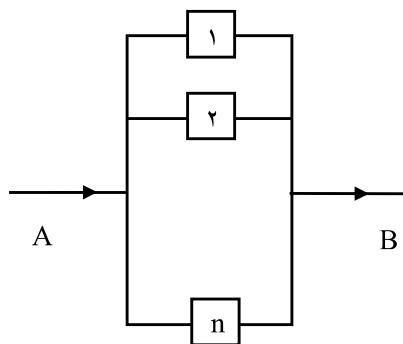
یا معادل آن

$$\varphi(\mathbf{x}) = \min(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

برای مثال سیستمی با ۳ جزء را در نظر بگیرید. آنگاه برای نمونه در حالت $(1, 1, 0)$ داریم $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ ، در حالت $(0, 1, 0)$ داریم $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ ، در حالت $(1, 0, 1)$ به دست می‌آوریم $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ و در حالت $(1, 1, 1)$ داریم $\varphi(\mathbf{x}) = 1$.

سیستم‌های موازی

از دیگر سیستم‌های متقابل در مهندسی قابلیت اعتماد، سیستم‌های با ساختار موازی هستند. بر اساس تعریف، سیستم موازی سیستمی را گویند که فعال بودن آن مستلزم فعال بودن حداقل یکی از اجزای آن باشد. به عبارت دیگر، سیستم هنگامی از کار می‌افتد که تمام اجزای آن غیر فعال باشند. شکل ۲.۱ نمودار یک سیستم موازی با n جزء را نشان می‌دهد.



شکل ۲.۱ نمودار سیستم موازی

مثالی از سیستم‌های موازی، ماهواره‌های مخابراتی هستند که در آن‌ها در هر کانال مخابراتی چند کانال به طور موازی جهت انتقال اطلاعات به هم متصل می‌شوند. به عبارت دیگر جهت اطمینان از انتقال اطلاعات، معمولاً سه یا چهار کانال مخابراتی به صورت موازی کنار هم قرار می‌گیرند تا در صورت از کار افتادن یکی از آنها بقیه انتقال اطلاعات کنند.

تابع ساختار یکی سیستم موازی با n جزء بر اساس تعریف سیستم عبارتست از

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1-x_i). \quad (1.1)$$

توجه کنید که با در نظر گرفتن تعریف سیستم موازی در عبارت فوق، اگر حداقل به ازای یک i ، $x_i = 1$ آنگاه $\varphi(\mathbf{x}) = 1$ در غیر اینصورت $\varphi(\mathbf{x}) = 0$.

به طور مشابه با سیستم متواالی، می‌توان نمایش زیر را برای تابع ساختار سیستم موازی نوشت که معادل با نمایش (1.1) است.

$$\varphi(\mathbf{x}) = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

به عنوان مثال در یک سیستم موازی با ۳ جزء اگر $\mathbf{x} = (1, 1, 0)$ آنگاه $\varphi(\mathbf{x}) = 1$ ، اگر $\mathbf{x} = (0, 0, 1)$ آنگاه $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ و اگر $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$ داریم $\varphi(\mathbf{x}) = 0$.

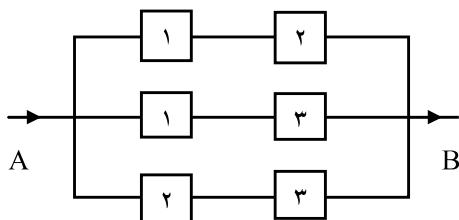
سیستم‌های موازی از ساده‌ترین نوع سیستم‌های منسجم هستند که اصطلاحاً به آن‌ها سیستم‌های افزونگی نیز می‌گویند. در اینگونه سیستم‌ها در کنار جزء مورد نظر، ممکن است یک یا چند جزء را، معمولاً با همان کیفیت، به صورت موازی قرار دهند. اینگونه اجزاء را اجزای افزوده گویند که خود غالباً دارای دو نوع هستند. یکی اجزای افزوده فعال که هنگام عملکرد جزء اصلی این اجزاء نیز به طور همزمان مشغول به فعالیت هستند و دیگری اجزای افزوده هستند که به صورت آماده باش با جزء اصلی به صورت موازی متصل می‌شوند و در صورت از کار افتادن جزء اصلی یکی از آنها شروع به فعالیت می‌کند تا وظیفه آن جزء را انجام دهد. طبیعی است که وجود اجزای افزوده در سیستم‌های موازی و دیگر سیستم‌ها باعث بالا رفتن قابلیت انجام فعالیت سیستم‌ها می‌شود.

سیستم‌های k از n

یک سیستم k از n ، به عنوان یک سیستم منسجم، تعیینی از سیستم‌های متواالی و موازی است. یک سیستم شامل n جزء را از n گوییم هر گاه فعال بودن آن مستلزم فعال بودن حداقل k جزء از n جزء آن باشد. تابع ساختار سیستم‌های k از n را نمی‌توان به فرم بسته مانند سیستم‌های متواالی و موازی ارائه کرد. نمایش جبری تابع ساختار سیستم‌های k از n با بردار وضعیت $(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}$ به صورت زیر است.

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^n x_i \geq k \\ 0 & \text{در غیر اینصورت،} \end{cases}$$

به عنوان مثالی از سیستم‌های k از n ، هواییمایی را در نظر بگیرید که ۳ موتور دارد و فرض کنید برای آنکه هواییما بتواند با موفقیت پرواز کند باید حداقل ۲ موتور از ۳ موتور آن فعال باشند. چنین هواییمایی به عنوان یک سیستم، سیستمی ۲ از ۳ است. یک نمودار توضیحی برای چنین سیستمی به شکل زیر خواهد بود. توجه کنید که نمودار تنها جنبه تحلیلی دارد چرا که یک جزء در سیستم تنها در یک موقعیت قرار می‌گیرد.



شکل ۳.۱ نمودار سیستم ۲ از ۳

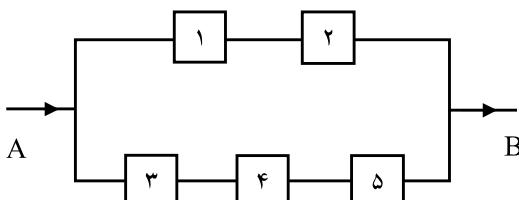
با توجه به شکل ملاحظه می‌شود برای آنکه سیستم کار کند با حداقل موتورهای ۱ و ۲ یا موتورهای ۱ و ۳ و یا موتورهای ۲ و ۳ با موفقیت کار کنند. بنابراین برای مثال، در این سیستم اگر $\mathbf{x} = (1, 1, 0)$ آنگاه $\varphi(\mathbf{x}) = 1$ ، اگر $\mathbf{x} = (0, 1, 1)$ آنگاه $\varphi(\mathbf{x}) = 1$ و اگر $\mathbf{x} = (0, 0, 1)$ داریم $\varphi(\mathbf{x}) = 0$.

ذکر این نکته ضروری است که، با توجه به تعریف سیستم‌های متواالی و موازی، مشاهده می‌شود که سیستم متواالی یک سیستم n از n است و یک سیستم موازی یک سیستم ۱ از n است.

سیستم‌های موازی-متواالی و سیستم‌های متواالی-موازی

دو نوع متدواال دیگر از سیستم‌های منسجم سیستم‌های موازی-متواالی و سیستم‌های متواالی-موازی هستند. سیستم‌های موازی-متواالی متشکل از تعدادی زیر سیستم هستند که در آن اجزای زیر سیستم‌ها به صورت متواالی به هم متصل شده و سپس زیر سیستم‌ها خود به صورت موازی به

هم متصل شده‌اند. به عنوان مثال نمودار ۴.۱ یک سیستم موازی-متوالی را نشان می‌دهد که دارای ۵ جزء است.

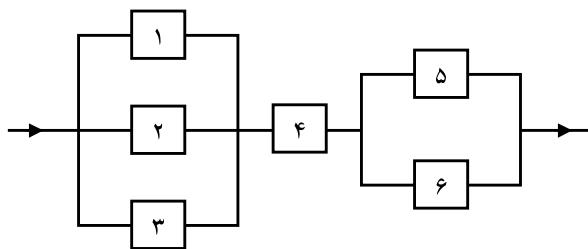


شکل ۴.۱ سیستم موازی-متوالی

در این سیستم اجزای ۱ و ۲ متوالی‌اند که تشکیل یک زیر سیستم را می‌دهند. اجزای ۳، ۴ و ۵ نیز متوالی‌اند که تشکیل یک زیر سیستم دیگر می‌دهند. حاصل این زیر سیستم‌ها به صورت موازی به یکدیگر متصل شده‌اند. بنابراین، بر اساس آنچه برای سیستم‌های موازی و متوالی بیان کردیم، تابع ساختار این سیستم برابر است با:

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, x_r, \dots, x_d) &= [1 - (1 - x_1 x_r)(1 - x_r x_4 x_5)] \\ &= \max[\min(x_1, x_r), \min(x_r, x_4, x_5)]\end{aligned}$$

به طور مشابه می‌توان یک سیستم متوالی-موازی را تعریف کرد. این سیستم‌ها را می‌توان متشکل از چند زیر سیستم دانست که در آن اجزای زیر سیستم‌ها به صورت موازی به یکدیگر متصل شده و سپس زیر سیستم‌های حاصل به صورت متوالی کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند. به عنوان مثال سیستمی با نمودار زیر را در نظر بگیرید.



شکل ۵.۱ سیستم متوالی-موازی

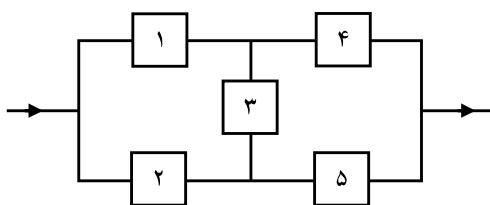
این سیستم دارای ۶ جزء است که در آن اجزای ۱، ۲ و ۳ به صورت موازی تشکیل یک زیر سیستم داده و حاصل با زیر سیستم تک جزئی ۴ متوالی شده و سپس حاصل این دو زیر سیستم با

زیر سیستمی متشکل از اجزای موازی ۵ و ۶ به صورت متواالی متصل شده است. تابع ساختار این سیستم برابر است با

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, x_2, \dots, x_6) &= [1 - (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)]x_4 [1 - (1 - x_5)(1 - x_6)] \\ &= \min[\max(x_1, x_2, x_3), x_4, \max(x_5, x_6)].\end{aligned}$$

۴.۲ نمایش ساختار سیستم‌ها بر اساس بردار مسیرها و قطع کننده‌های مینیمال

در مثال‌هایی که در بخش‌های قبل در مورد سیستم‌ها ارائه شد، دیدیم که سیستم‌های پایه در مهندسی قابلیت اعتماد به صورت متواالی، سری یا ترکیبی از چنین سیستم‌هایی است. اما در دنیای واقعی ممکن است با سیستم‌های مواجه شویم که شکل‌های پیچیده‌تری در مقایسه با سیستم‌های اشاره شده در بالا داشته باشند. در تحلیل سیستم‌های پیچیده‌تر یکی از ابزارهای مهم استفاده از نمایش ساختار سیستم‌ها بر مبنای بردارهای مسیر مینیمال و بردارهای قطع کننده‌های مینیمال است. قبل از آنکه تعریف اینگونه بردارها را ارائه کنیم به ذکر یک مثال می‌پردازیم. فرض کنید سیستمی با ۵ جزء دارای ساختاری با نمودار زیر باشد



شکل ۶.۱ سیستم پل

این سیستم، در مبحث قابلیت اعتماد، به سیستم پل معروف است. این سیستم هیچکدام از سیستم‌های موازی، متواالی یا k از n نیست. برای تحلیل این سیستم روش‌های مختلفی وجود دارد. اولین روش آن است که تمام بردارهای وضعیت \mathbf{x} را مشخص نموده و سپس تابع ساختار سیستم، $\varphi(\mathbf{x})$ ، را به ازای هر \mathbf{x} تعیین کنیم. در اینجا با توجه به اینکه تعداد اجزای سیستم $n = 5$ است، تعداد $2^5 = 32$ بردار وضعیت وجود دارد. جدول ۱.۱ بردارهای وضعیت سیستم و مقادیر تابع ساختار سیستم را به ازای هر بردار وضعیت نشان می‌دهد.

در این مثال، علیرغم آن که سیستم چندان پیچیده نیست، می‌بینیم که تعیین تمام بردارهای وضعیت برای سیستم و محاسبه تابع ساختار سیستم کار ساده‌ای نیست. بنابراین اگر سیستم

ساختاری پیچیده‌تر داشته باشد، محاسبه تمام بردارهای وضعیت و در نتیجه محاسبه تابع ساختار سیستم برای هر بردار وضعیت کار طاقت فرسایی خواهد بود. برای غلبه بر چنین مشکلاتی مفاهیم بردارهای قطع کننده مینیمال و بردارهای مسیر مینیمال بسیار مفید خواهد بود. در ادامه آنها را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴.۱ یک بردار وضعیت \mathbf{x} را یک **بردار مسیر گوییم** هر گاه $\varphi(\mathbf{x}) = 1$. مجموعه تمام اندیس‌هایی که در آنها $x_i = 1$ ، را **مجموعه مسیر گوییم**. به عبارت دیگر اگر $P = P(\mathbf{x})$ مجموعه مسیر باشد آنگاه $\{i \in \mathbb{N} : x_i = 1\} \subseteq P$. علاوه بر آن اگر به ازای دو بردار وضعیت \mathbf{x} و \mathbf{y} به طوری که $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ داشته باشیم $\varphi(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x}) = 1$ آنگاه بردار \mathbf{x} را بردار مسیر مینیمال و مجموعه مسیر متناظر را مجموعه مسیر مینیمال گوییم.

جدول ۱.۱ بردارهای وضعیت و تابع ساختار سیستم پل

\mathbf{x}	$\varphi(\mathbf{x})$	\mathbf{x}	$\varphi(\mathbf{x})$
(1,1,1,1,1)	1	(.,1,1,1,1)	1
(1,1,1,1,0)	1	(.,1,1,1,0)	1
(1,1,1,0,1)	1	(.,1,1,1,0)	1
(1,1,1,0,0)	0	(.,1,1,0,0)	0
(1,1,0,1,1)	1	(.,1,0,1,1)	1
(1,1,0,1,0)	1	(.,1,0,1,0)	0
(1,1,0,0,1)	1	(.,1,0,0,1)	1
(1,1,0,0,0)	0	(.,1,0,0,0)	0
(1,0,1,1,1)	1	(.,0,1,1,1)	0
(1,0,1,1,0)	1	(.,0,1,1,0)	0
(1,0,1,0,1)	1	(.,0,1,0,1)	0
(1,0,1,0,0)	0	(.,0,1,0,0)	0
(1,0,0,1,1)	1	(.,0,0,1,1)	0
(1,0,0,1,0)	1	(.,0,0,1,0)	0
(1,0,0,0,1)	1	(.,0,0,0,1)	0
(1,0,0,0,0)	0	(.,0,0,0,0)	0

بر اساس این تعریف یک مسیر مینیمال، یک بردار وضعیت است که به ازای آن سیستم فعال است و اگر حداقل یکی از اجزای فعال آن بردار غیر فعال شود سیستم نیز غیر فعال خواهد شد. اکنون ببینیم در مورد سیستم پل بردارهای مسیر مینیمال چگونه‌اند. یک بررسی ساده نشان می‌دهد که این سیستم دارای ۴ بردار مسیر مینیمال است که همراه با مجموعه مسیرهای مینیمال متناظر آن‌ها در جدول ۲.۱ آمده‌اند.

جدول ۲.۱ بردارها و مجموعه‌های مسیر مینیمال

مجموعه مسیر مینیمال (P)	بردار مسیر مینیمال (x)
$P_1 = \{1, 4\}$	$x_1 = \{1, 0, 0, 1, 0\}$
$P_2 = \{2, 5\}$	$x_2 = \{0, 1, 0, 0, 1\}$
$P_3 = \{1, 3, 5\}$	$x_3 = \{1, 0, 1, 0, 1\}$
$P_4 = \{2, 3, 4\}$	$x_4 = \{0, 1, 1, 1, 0\}$

اکنون به استدلال زیر توجه کنید. اگر بخواهد سیستم پل فعال باشد باید حداقل یکی از ۴ بردار مسیر مینیمال آن اتفاق یافتد. در مسیر مینیمال اول باید هر دو جزء اول و چهارم فعال باشند. این بدین معنی است که جزء اول و چهارم را می‌توان مانند یک زیر سیستم متوالی در نظر گرفت. اگر تابع ساختار این زیر سیستم را با (x, P_1) نمایش دهیم داریم

$$\rho_1(x) = \prod_{i \in P_1} x_i = x_1 x_4.$$

در مسیر مینیمال دوم باید هر دو جزء ۲ و ۵ فعال باشند. یعنی این دو جزء را می‌توان یک زیر سیستم متوالی در نظر گرفت. اگر تابع ساختار آن را با (x, P_2) نمایش دهیم داریم

$$\rho_2(x) = \prod_{i \in P_2} x_i = x_2 x_5.$$

به همین ترتیب برای بردارهای مینیمال سوم و چهارم داریم

$$\rho_3(x) = \prod_{i \in P_3} x_i = x_1 x_3 x_5,$$

و

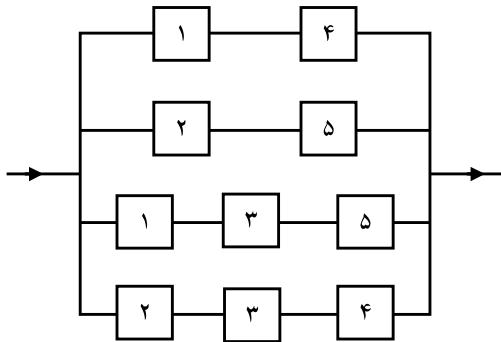
$$\rho_4(x) = \prod_{i \in P_4} x_i = x_2 x_3 x_4.$$

حال با توجه به این که عملکرد سیستم پل مستلزم عملکرد حداقل یکی از این زیر سیستم‌ها است، این بدین معنی است که زیر سیستم‌ها به صورت موازی به هم متصل شده‌اند. لذا تابع ساختار سیستم با توجه به ساختار سیستم موازی برابر است با

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= 1 - \prod_{j=1}^4 (1 - \rho_j(\mathbf{x})) \\ &= 1 - \prod_{j=1}^4 (1 - \prod_{i \in p_j} x_i) \\ &= 1 - (1 - x_1 x_4)(1 - x_1 x_5)(1 - x_2 x_3 x_5)(1 - x_2 x_3 x_4).\end{aligned}\quad (2.1)$$

شکل ۷.۱ نمودار سیستم پل را بر حسب بردارهای مسیر مینیمال نشان می‌دهد.

یکی دیگر از روش‌های بدست آوردن تابع ساختار سیستم‌ها استفاده از مفهوم بردارهای قطع کننده مینیمال است که در ادامه به آن می‌پردازیم.



شکل ۷.۲ نمودار ساختار سیستم پل بر حسب مسیرهای مینیمال

تعریف ۵.۱ یک بردار وضعیت \mathbf{x} را یک بردار قطع کننده گوییم هر گاه $\varphi(\mathbf{x}) = 0$. مجموعه تمام اندیس‌هایی که در آن‌ها $x_i = 0$ را مجموعه قطع کننده گوییم. به عبارت دیگر اگر $C = C(\mathbf{x})$ مجموعه قطع کننده باشد، آنگاه $\{i, x_i = 0\}$ علاوه بر آن اگر \mathbf{x} و \mathbf{y} دو بردار وضعیت باشند به طوریکه $\mathbf{y} < \mathbf{x}$ و $\varphi(\mathbf{y}) = 1$ آنگاه بردار قطع کننده \mathbf{x} را یک بردار قطع کننده مینیمال گوییم.

با توجه به تعریف، یک بردار قطع کننده مینیمال برداری است که به ازای آن سیستم از کار می‌افتد و اگر حداقل یکی از اجزای آن بردار فعال شود، سیستم به کار می‌افتد.

با یک بررسی ساده نتیجه می‌گیریم که بردارهای قطع کننده مینیمال و مجموعه قطع کننده متناظر در سیستم پل به صورت جدول ۳.۱ خواهند بود.

جدول ۳.۱ بردارها و مجموعه‌های قطع کننده مینیمال

مجموعه قطع کننده مینیمال (C)	مسیر قطع کننده مینیمال (x)
$C_1 = \{1, 2\}$	$x_1 = \{0, 0, 1, 1, 1\}$
$C_4 = \{4, 5\}$	$x_4 = \{1, 1, 1, 0, 0\}$
$C_5 = \{1, 3, 5\}$	$x_5 = \{1, 0, 1, 0, 0\}$
$C_6 = \{2, 3, 4\}$	$x_6 = \{1, 0, 0, 0, 1\}$

اکنون با استدلال زیر می‌توان تابع ساختار سیستم پل را بر اساس بردارهای قطع کننده مینیمال آن نوشت. اگر بخواهد سیستم فعال باشد باید در بردار قطع کننده x_i جزء اول یا دوم فعال باشد و در بردار قطع کننده x_i ، جزء چهارم یا پنجم فعال باشد و ... بنابراین ملاحظه می‌شود که می‌توان تابع ساختار سیستم را مشکل از زیر سیستم‌هایی در نظر گرفت که به صورت متواالی به هم متصل شده‌اند که در آن هر زیر سیستم دارای اجزایی است که به صورت موازی کنار هم قرار گرفته‌اند.

در این مثال چهار زیر سیستم (به تعداد بردارهای قطع کننده مینیمال) وجود دارد که عبارتند از

$$k_1(x) = 1 - \prod_{j \in C_1} (1 - x_j) = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2),$$

$$k_4(x) = 1 - \prod_{j \in C_4} (1 - x_j) = 1 - (1 - x_4)(1 - x_5),$$

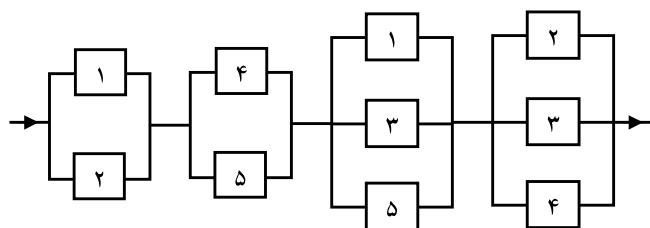
$$k_5(x) = 1 - \prod_{j \in C_5} (1 - x_j) = 1 - (1 - x_1)(1 - x_5)(1 - x_6),$$

$$k_6(x) = 1 - \prod_{j \in C_6} (1 - x_j) = 1 - (1 - x_6)(1 - x_5)(1 - x_4).$$

و بنابراین تابع ساختار سیستم به صورت زیر قابل نمایش است؛

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \prod_{i=1}^6 k_i(x) \\ &= \prod_{i=1}^6 (1 - \prod_{j \in C_i} (1 - x_j)). \end{aligned} \tag{۳.۱}$$

شکل ۸.۱ نمودار تحلیلی تابع ساختار سیستم پل را بر اساس بردار قطع کننده‌های مینیمال سیستم نشان می‌دهد.



شکل ۸.۲ ساختار سیستم پل بر حسب قطع کننده‌های مینیمال

اگر طرف راست تساوی‌های (۲.۱) و (۳.۱) را ساده سازی کنیم آنگاه (با توجه به اینکه برای هر متغیر دو مقداری $x_i = x_i^1$ عبارت‌های حاصل با هم برابر خواهند شد.

از نتایج به دست آمده در مورد سیستم پل در جمع بندی به این نتیجه می‌رسیم که تابع ساختار سیستم که در جدول ۱.۱ به طور مشروح ارائه شد دارای دو نمایش معادل است که بر مبنای بردارهای مسیر مینیمال و بردارهای قطع کننده مینیمال به دست می‌آید. بنابراین مجدداً به این نکته تأکید می‌کنیم که استفاده از بردارهای مسیر مینیمال و بردارهای قطع کننده مینیمال را قادر می‌سازد که تابع ساختار سیستم پل را به ترتیب به صورت ساختارهای موازی-متوالی و یا متوالی-موازی بنویسیم. در حالت اول اجزای فعال داخل مسیرهای مینیمال به صورت متوالی به هم متصل و سپس زیر سیستم‌های حاصل به صورت موازی کنار هم قرار می‌گیرند و در حالت دوم اجزای فعال داخل قطع کننده‌های مینیمال به صورت موازی و سپس زیر سیستم‌های حاصل به صورت متوالی به هم متصل می‌شوند. این واقعیت یک نتیجه کلی است که در مورد سیستم‌های منسجم دلخواه صادق است. بنابراین، قضیه کلی زیر را خواهیم داشت که اثبات آن از آنچه در مورد سیستم پل استدلال کردیم حاصل می‌شود و لذا آن را به خواننده واگذار می‌کنیم.

قضیه ۱.۱ یک سیستم منسجم دلخواه با تابع ساختار $\varphi(\mathbf{x})$ را در نظر بگیرید.
الف) اگر P_1, P_2, \dots, P_l مجموعه مسیرهای مینیمال سیستم باشند آنگاه

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{i=1}^l \left(1 - \prod_{j \in P_i} x_j\right).$$

ب) اگر C_1, C_2, \dots, C_k مجموعه قطع کننده‌های مینیمال سیستم باشند آنگاه

$$\varphi(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^k (1 - \prod_{j \in C_i} (1 - x_j)).$$

لازم به ذکر است که طرف راست تساوی‌ها در قضیه ۱.۱ پس از ساده سازی عبارات (با توجه به اینکه برای $i, m \geq 1$, $x_i^m = x_i$) به نتیجه یکسان منتهی می‌شود.

با توجه به تعریف سیستم‌های موازی و متواالی و قضیه ۱.۱، تابع ساختار سیستم منسجم را می‌توان به صورت زیر نیز نمایش داد.

$$\varphi(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq i \leq p} \min_{j \in P_i} x_i,$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \min_{1 \leq i \leq k} \max_{j \in C_i} x_i$$

قبل از اینکه این فصل را به پایان برسانیم دو قضیه زیر را در ارتباط با ساختار سیستم‌های منسجم ارائه می‌کنیم که در تحلیل قابلیت اعتماد سیستم‌ها مفید هستند. ابتدا قرارداد زیر را معرفی می‌کنیم.

$$\prod_{i=1}^n x_i = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i),$$

$$x_i \amalg x_r = 1 - (1 - x_i)(1 - x_r),$$

$$\mathbf{x} \amalg \mathbf{y} = (x_1 \amalg y_1, \dots, x_n \amalg y_n),$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1 \cdot y_1, \dots, x_n \cdot y_n).$$

قضیه ۲.۱ فرض کنید φ تابع ساختار یک سیستم منسجم با n جزء باشد، آنگاه

$$\prod_{i=1}^n x_i \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq \prod_{i=1}^n x_i$$

اثبات.

فرض کنیم $\prod_{i=1}^n x_i = 1$ آنگاه $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$. در نتیجه طبق تعریف سیستم‌های

منسجم $\varphi(\mathbf{x}) = 1$. اگر $\prod_{i=1}^n x_i < 1$ آنگاه نامساوی بدیهی

است. بنابراین نامساوی سمت چپ اثبات می‌شود. اگر $\prod_{i=1}^n x_i = 0$ یا معادل با آن

$1 - \prod_{i=1}^n (1-x_i) = 0$. لذا در $\varphi(x) = 0$.

این حالت $\prod_{i=1}^n x_i = 1$. اگر $\varphi(x) \leq \prod_{i=1}^n x_i$. این نامساوی بدینه است در نتیجه نامساوی

راست نیز اثبات می‌شود.

نتیجه ۱.۱ این قضیه بیان می‌کند که تابع ساختار هر سیستم منسجم دلخواه همواره بین توابع ساختار سیستم‌های متوالی و موازی قرار می‌گیرد.

قضیه ۳.۱ فرض کنید φ تابع ساختار یک سیستم منسجم باشد. آنگاه

$$\varphi(x \sqcup y) \geq \varphi(x) \sqcup \varphi(y)$$

ب) $\varphi(x \cdot y) \leq \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

اثبات.

الف) به ازای هر i داریم $x_i \sqcup y_i \geq x_i$ ، بنابراین با توجه به اینکه φ تابعی صعودی است داریم $\varphi(x \sqcup y) \geq \varphi(x) \sqcup \varphi(y)$. به طور مشابه به دست می‌آوریم $\varphi(x \sqcup y) \geq \max[\varphi(x), \varphi(y)]$

$$\varphi(x \sqcup y) \geq \max[\varphi(x), \varphi(y)]$$

$$\equiv \varphi(x) \sqcup \varphi(y)$$

ب) به شیوه‌ای مشابه با قسمت الف اثبات می‌شود و لذا اثبات آن را به خواننده واگذار می‌کنیم.
بنابراین اثبات قضیه کامل است.

قسمت (الف) در قضیه ۳.۲ یک نتیجه مهم در مورد ساختار سیستم را بیان می‌کند و آن این است که افزونگی (موازی سازی) در سطح مؤلفه‌های یکی سیستم مؤثرتر است از افزونگی در سطح سیستم است.

۵.۱ مسایل

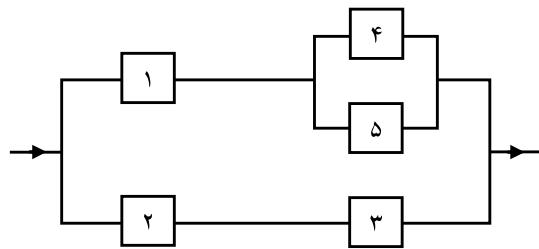
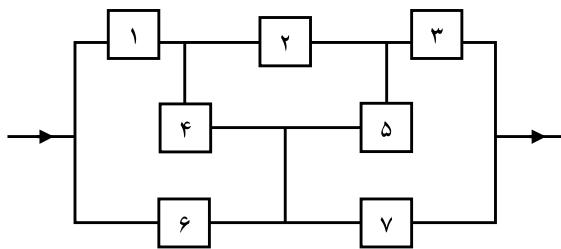
۱. در هر یک از سیستم‌های زیر بردارهای مسیر مینیمال و بردارهای قطع کننده مینیمال را تعیین کنید.

الف) یک سیستم متوالی با ۳ جزء

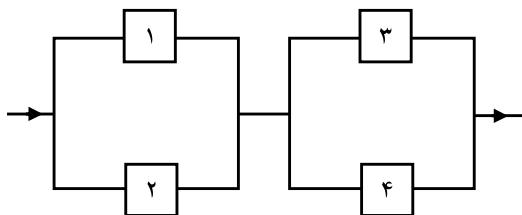
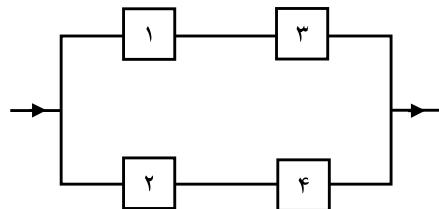
ب) یک سیستم موازی با ۳ جزء

ج) یک سیستم ۲ از ۳.

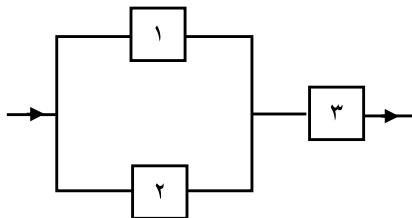
۲. بردارهای مسیر مینیمال و بردارهای قطع کننده مینیمال سیستم‌هایی با نمودار زیر را تعیین کنید.



۳. بردارهای مسیر مینیمال و بردارهای قطع کننده مینیمال سیستم‌های زیر را به دست آورده و با هم مقایسه کنید. تابع ساختار هر یک از دو سیستم را مشخص کنید.



۴. فرض کنید φ تابع ساختار سیستمی با نمودار زیر باشد. در قضیه ۳.۱
- (الف) نمودار $\varphi(x)\amalg\varphi(y)$ و $\varphi(x)\varphi(y)$ را مشخص کنید.
- (ب) نمودار $\varphi(x,y)$ و $\varphi(y,x)$ را مشخص کنید.



۵. در قضیه ۳.۱ ثابت کنید که در قسمت (الف) تساوی اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر سیستم موازی باشد و در قسمت (ب) تساوی برقرار است اگر و تنها اگر سیستم متواالی باشد.

۶. ثابت کنید در یک سیستم منسجم با تابع ساختار $\varphi = \varphi(1, 1, \dots, 1) = \varphi(0, 0, \dots, 0)$ و $\varphi(1, 0, \dots, 0) = \varphi(0, 1, \dots, 0)$.

۷. نمادهای زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Q}_{(1_i, \mathbf{x})} = (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$$\text{Q}_{(\cdot_i, \mathbf{x})} = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

و ثابت کنید تابع ساختار φ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد

$$\varphi(\mathbf{x}) = x_i \varphi_{(1_i, \mathbf{x})} + (1 - x_i) \varphi_{(\cdot_i, \mathbf{x})}$$

۸. مثالی از یک سیستم ارائه کنید که در آن یک جزء نامربوط وجود داشته باشد.

۹. فرض کنید C_1, C_2, \dots, C_r و C_d به طور مستقل از یکدیگر عمل می‌کنند. همچنین فرض کنید سیستم i که با k_i نمایش می‌دهیم به صورت زیر ساخته شده باشد
- k_i شامل اجزای C_1, \dots, C_r و C_d است که متواالی‌اند
- k_i شامل اجزای C_1, \dots, C_r و C_d است که موازی‌اند

اگر C_d شامل k_i است

اگر سیستم k متشکل از k_1, k_2, \dots, k_r و k_d باشند که متواالی‌اند

(الف) نمودار سیستم k را رسم کنید.

(ب) بردارهای مسیر مینیمال و بردارهای قطع کننده مینیمال k را تعیین کنید.

قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم

۱.۲ مقدمه

در فصل اول تابع ساختار سیستم‌های منسجم را تعریف کرده و ساختارهای پایه در قابلیت اعتماد مانند ساختارهای موازی-متوالی، k از n و ... را معرفی کردیم. با معرفی مفاهیم بردارهای مسیر و قطع کننده مینیمال دیدیم که چگونه می‌توان تابع ساختار یک سیستم منسجم را بر حسب مسیرها و قطع کننده‌های مینیمال نمایش داد. در این فصل قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ابتدا، در بخش در بخش ۲.۲، قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم را بر حسب قابلیت اعتماد اجزای آن در حالتی که اجزای سیستم مستقل هستند به دست می‌آوریم. سپس دو روش برای محاسبه قابلیت اعتماد سیستم ارائه می‌کنیم. روش اول استفاده از بردارهای مسیر و بردارهای قطع کننده مینیمال است. روش دوم استفاده از قضیه‌ی تجزیه است که بعضًا محاسبات قابلیت اعتماد سیستم‌های پیچیده را ساده‌تر می‌کند. در بخش ۳.۲، معیاری ارائه می‌کنیم که با استفاده از آن اهمیت نسبی قابلیت اعتماد سیستم را اندازه‌گیری می‌کیم. بخش ۴.۲ قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم را در حالتی که اجزای سیستم وابسته هستند (استقلال آماری ندارند) مورد مطالعه قرار می‌دهد. در این بخش، با توجه به این که محاسبه قابلیت اعتماد در حالت وابستگی اجزاء مشکل است، کران‌هایی برای قابلیت اعتماد سیستم ارائه می‌کنیم که از نقطه نظر محاسباتی ساده‌تر هستند و در مقاصد عملی کاربردهایی فراوانی دارند.

۲.۲ قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم با اجزای مستقل

در ادامه فرض می‌کنیم سیستم منسجم دارای n جزء است که به طور مستقل عمل می‌کنند (حالاتی که اجزاء وابسته‌اند در بخش‌های بعد مورد بررسی قرار می‌گیرد). فرض می‌کنیم $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ بردار وضعیت اجزاء باشد و تابع ساختار سیستم را همانند قبل با $\varphi(\mathbf{x})$ نمایش می‌دهیم. همچنین فرض می‌کنیم وضعیت جزء i نام، یک متغیر تصادفی دو مقداری باشد که دارای تابع جرم احتمال زیر است،

$$P(X_i = x_i) = \begin{cases} p_i & \text{اگر } x_i = 1 \\ & \text{(جزء نام فعال باشد)،} \\ 1 - p_i & \text{اگر } x_i = 0 \\ & \text{(جزء نام غیر فعال باشد)،} \end{cases}$$

به طوریکه $0 \leq p_i \leq 1$.

p_i را قابلیت اعتماد جزء i نام گوییم. بنابراین قابلیت اعتماد جزء i نام برابر است با احتمال اینکه جزء i نام فعال باشد. توجه کنید که

$$\begin{aligned} p_i &= P(X_i = 1) \\ &= E(X_i) \end{aligned}$$

که در آن E نشان دهنده "آمید ریاضی" (مقدار متوسط) X_i است. به طور مشابه قابلیت اعتماد سیستم (با توجه به اینکه تابع ساختار سیستم دو مقداری است) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$P(\varphi(\mathbf{X}) = 1) = E(\varphi(\mathbf{X}))$$

از آنجایی که φ تابعی از بردار \mathbf{x} است، قابلیت اعتماد سیستم تابعی از قابلیت اعتماد اجزای آن یعنی تابعی از بردار $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ است که این تابع را با $h(\mathbf{p})$ نمایش می‌دهیم.

$$h(\mathbf{p}) = E(\varphi(\mathbf{X}))$$

اگر $p_1 = p_2 = \dots = p_n$ از علامت $h(p)$ استفاده می‌کنیم.

در ادامه قابلیت اعتماد سیستم‌های پایه در قابلیت اعتماد، در حالاتی که اجزاء مستقل‌اند، را محاسبه می‌کنیم.

۱.۲.۲ سیستم متواالی

فرض کنید ساختار سیستم متواالی باشد و اجزای آن مستقل از یکدیگر عمل کنند اگر جزو i ام دارای قابلیت p_i باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} h(\mathbf{p}) &= E(\varphi(\mathbf{X})) \\ &= E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \prod_{i=1}^n E(X_i) \quad \text{از فرض استقلال} \\ &= \prod_{i=1}^n p_i. \end{aligned}$$

با توجه به این نمایش ملاحظه می‌شود که قابلیت اعتماد سیستم متواالی تابعی صعودی از قابلیت اعتماد اجزای آن است (البته این مسئله برای هر سیستم منسجمی درست است) و تابعی نزولی از تعداد اجزای سیستم است. در حالت خاص اگر $i = 1, 2, \dots, n$ ، $p_i = p$ داریم

$$h(p) = p^n.$$

۲.۲.۲ سیستم موازی

فرض کنید $\varphi(\mathbf{x})$ تابع ساختار یک سیستم موازی با اجزای مستقل باشد به طوریکه قابلیت اعتماد جزو i ام p_i است، آنگاه

$$\begin{aligned} h(\mathbf{p}) &= E(\varphi(\mathbf{X})) \\ &= E\left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i)\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n E(1 - X_i) \quad \text{از فرض استقلال} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i). \end{aligned}$$

از نتیجه حاصل مشاهده می‌شود که قابلیت اعتماد یک سیستم موازی تابعی صعودی از قابلیت اعتماد اجزای آن و تابعی صعودی از تعداد اجزای سیستم است. در حالت خاص که $p_i = p$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ داریم

$$h(p) = 1 - (1 - p)^n.$$

۳.۲.۲ سیستم از n ک از k

قابلیت اعتماد سیستم‌های k از n در حالت کلی شکل ساده‌ای ندارد. در حالت خاص اگر اجزای سیستم مستقل و دارای قابلیت یکسان باشند، یعنی $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$ داریم،

$$\begin{aligned} h(\mathbf{p}) &= E(\varphi(\mathbf{X})) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq k\right) \\ &= \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}. \end{aligned}$$

که نساوی اخیر از این واقعیت نتیجه می‌شود که تحت فرض‌های موجود، $\sum_{i=1}^n X_i$ دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای n و p است. به راحتی مشاهده می‌شود که برای مقدار ثابت n ، تابع قابلیت اعتماد سیستم بر حسب k نزولی است و برای k ثابت تابع قابلیت اعتماد سیستم تابعی صعودی از n است. همچنین می‌توان نشان داد که $h(p)$ تابعی صعودی از p است که اثبات آن به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

مثال ۱.۲ فرض کنید سیستم خنک کننده یک راکتور اتمی دارای ۳ پمپ آب است. همچنین فرض کنید پمپ‌ها به طور مستقل از یکدیگر و هر یک با قابلیت اعتماد ۰/۹۵ در یک فاصله ۱۰۰۰ ساعتی کار می‌کنند. اگر برای خنک کردن راکتور لازم باشد حداقل ۲ پمپ عمل کنند.

قابلیت اعتماد سیستم خنک کننده را محاسبه کنید.

حل. اگر $h(0/95)$ قابلیت اعتماد سیستم در فاصله زمانی ۱۰۰۰ ساعتی باشد آنگاه داریم،

$$\begin{aligned} h(0/95) &= \sum_{j=1}^n \binom{3}{j} (0/95)^j (0/05)^{3-j} \\ &= 0.992 \end{aligned}$$

توجه کنید که در اینجا قابلیت اعتماد سیستم از قابلیت اعتماد هر یک از اجزای آن بیشتر است.

۴.۲.۲ سیستم‌های منسجم کلی تو

در بخش قبل دیدیم، در حالتی که اجزای سیستم مستقل از یکدیگر کار کنند، چگونه می‌توان قابلیت اعتماد سیستم‌های موازی-متوالی و k از n را محاسبه نمود. در مورد سیستم‌های پیچیده‌تر اغلب محاسبه قابلیت اعتماد ممکن است کار طاقت فرسایی باشد به ویژه اگر تعداد اجزای سیستم زیاد باشد. به عنوان مثال سیستم پل در فصل ۱ را دوباره در نظر بگیرید. همانطور

که در جدول ۱.۱ ملاحظه شد، سیستم پل دارای $=32$ بردار وضعیت بود که برای ۱۶ حالت از بردارهای وضعیت سیستم فعال بود. برای محاسبه قابلیت اعتماد سیستم باید $P(\varphi(\mathbf{X}) = 1)$ را در هر یک از این ۱۶ حالت محاسبه کرده و سپس مقادیر حاصل را با هم جمع کنیم. به عنوان مثال اگر اجزاء مستقل از هم و به ترتیب با قابلیت‌های p_1, p_2, \dots, p_5 فعال باشند آنگاه قابلیت اعتماد سیستم به ازای بردارهای وضعیت مختلف برابر $h(\mathbf{p})$ خواهد بود که در جدول زیر ارائه شده است.

\mathbf{x}	$\varphi(\mathbf{x})$	$h(\mathbf{p})$
(1,1,1,1,1)	1	$p_1 p_2 p_3 p_4 p_5$
(1,1,1,1,0)	1	$p_1 p_2 p_3 p_4 (1-p_5)$
⋮	⋮	⋮
(0,1,0,0,1)	1	$(1-p_1) p_2 (1-p_3) (1-p_4) p_5$

اگر مقادیر حاصل را جمع کنیم، پس از انجام عملیات جبری دست و پاگیر، به این نتیجه می‌رسیم که قابلیت اعتماد سیستم برابر است با

$$h(\mathbf{p}) = p_1 p_2 + p_1 p_5 + p_2 p_3 + p_2 p_5 + p_3 p_4 - p_1 p_2 p_3 p_4 \\ - p_1 p_2 p_5 p_3 - p_1 p_3 p_4 p_5 - p_2 p_3 p_4 p_5 - p_3 p_4 p_5 p_2 + 2 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5.$$

اگر اجزای سیستم علاوه بر اینکه مستقل عمل می‌کنند دارای قابلیت یکسان نیز باشند آنگاه

$$h(\mathbf{p}) = 2p^1 + 3p^3 - 5p^4 + 2p^5.$$

همانطور که ملاحظه شد محاسبه قابلیت اعتماد سیستم در این حالت با وجود اینکه دارای فقط ۵ جزو است کار ساده نمی‌باشد. در ادامه دو روش برای محاسبه قابلیت اعتماد ارائه می‌کنیم که محاسبات را به طور چشمگیری کاهش می‌دهند.

روش اول: استفاده از بردارهای مسیر و بردارهای قطع کننده مینیمال است. همانطور که در فصل دوم دیدیم تابع ساختار سیستم بر اساس بردارهای مسیر و بردارهای قطع کننده به صورت زیر قابل نمایش است.

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= 1 - \prod_{i=1}^l \left(1 - \prod_{j \in P_i} x_j \right) \\ &= \prod_{i=1}^k \left(1 - \prod_{j \in C_i} (1 - x_j) \right). \end{aligned}$$

بنابراین قابلیت اعتماد سیستم برابر است با

$$\begin{aligned}
 h(\mathbf{p}) &= E(\varphi(\mathbf{X})) \\
 &= E\left(1 - \prod_{i=1}^l \left(1 - \prod_{j \in P_i} X_j\right)\right) && \text{بر حسب بردارهای مسیر مینیمال} \\
 &= E\left(\prod_{i=1}^k \left(1 - \prod_{j \in C_i} (1 - X_j)\right)\right). && \text{بر حسب بردارهای قطع کننده مینیمال}
 \end{aligned}$$

باید توجه داشت که چون ممکن است یک جزء در چند بردار مسیر مینیمال یا چند بردار قطع کننده مینیمال ظاهر شود در وحله اول امید ریاضی را نمی‌توان داخل عبارت کروش برد. لذا ابتدا باید عبارات داخل کروش را حتی الامکان ساده سازی نمود به طوریکه مجاز باشیم امید ریاضی عبارات حاصلضرب را به صورت حاصلضرب امید ریاضی بنویسیم. برای روشن تر شدن مطلب دوباره مثال پل را در نظر بگیرید. همانطور که دیدیم سیستم دارای چهار مسیر مینیمال با مجموعه‌های مینیمال $\{1, 4\}$ ، $p_1 = \{2, 5\}$ ، $p_2 = \{1, 3, 5\}$ و $p_3 = \{2, 3, 4\}$ است. لذا

تابع ساختار آن برابر است با

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - (1 - x_1 x_4)(1 - x_1 x_5)(1 - x_2 x_3 x_5)(1 - x_2 x_3 x_4).$$

اگر عبارت سمت راست را (با توجه به اینکه $x_i^* = x_i$) ساده کنیم بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
 \varphi(\mathbf{x}) &= x_1 x_4 + x_1 x_5 + x_2 x_3 x_5 + x_2 x_3 x_4 - x_1 x_2 x_3 x_4 \\
 &\quad - x_1 x_2 x_3 x_5 - x_1 x_2 x_4 x_5 - x_1 x_3 x_4 x_5 + 2x_1 x_2 x_3 x_4 x_5.
 \end{aligned}$$

در نتیجه $h(\mathbf{p})$ قابلیت اعتماد سیستم، برابر است با

$$\begin{aligned}
 h(\mathbf{p}) &= E(\varphi(\mathbf{X})) = p_1 p_4 + p_1 p_5 + p_2 p_3 p_5 + p_2 p_3 p_4 - p_1 p_2 p_3 p_4 \\
 &\quad - p_1 p_2 p_3 p_5 - p_1 p_2 p_4 p_5 - p_1 p_3 p_4 p_5 - p_2 p_3 p_4 p_5 + 2p_1 p_2 p_3 p_4 p_5
 \end{aligned}$$

اگر تابع ساختار را بر حسب قطع کننده‌های مینیمال نمایش داده و ساده سازی کنیم مقدار قابلیت اعتماد سیستم همین مقدار خواهد شد.

روش ۵: برای محاسبه قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم، که منجر به ساده تر شدن محاسبات می‌شود، استفاده از قضیه‌ای است به نام قضیه تجزیه^۱ که در ادامه آن را بیان و اثبات می‌کنیم.

قبل از آن نمادهای زیر را معرفی می‌کنیم، (تمرین ۷ فصل اول را ببینید)

^۱ Decomposition theorem

$$(\cdot_i, \mathbf{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$$(\cdot_i, \mathbf{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

و

$$(\cdot_i, \mathbf{p}) = (p_1, p_2, \dots, p_{i-1}, 1, p_{i+1}, \dots, p_n)$$

$$(\cdot_i, \mathbf{p}) = (p_1, p_2, \dots, p_{i-1}, 0, p_{i+1}, \dots, p_n)$$

قضیه ۱.۲ (قضیه تجزیه) یک سیستم منسجم شامل n جزء با تابع ساختار $\varphi(\mathbf{x})$ را در نظر بگیرید. آنگاه تابع قابلیت اعتماد سیستم را می‌توان به صورت زیر نمایش داد.

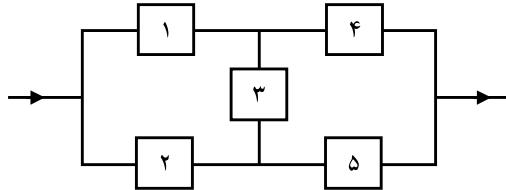
$$h(\mathbf{p}) = p_i h(\cdot_i, \mathbf{p}) + (1 - p_i) h(\cdot_i, \mathbf{p}).$$

که در آن (\cdot_i, \mathbf{p}) قابلیت اعتماد یک سیستم منسجم با n جزء را نشان می‌دهد که جزء i ام آن کاملاً قابل اعتماد است (همواره فعال است) و (\cdot_i, \mathbf{p}) قابلیت اعتماد یک سیستم منسجم با n جزء را نشان می‌دهد که جزء i ام آن از کار افتاده است.
اثبات.

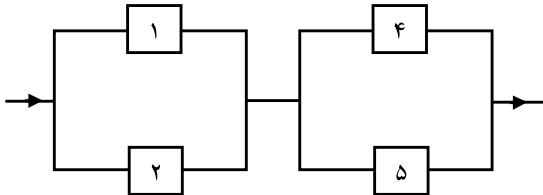
از تمرین ۷ فصل اول می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} h(\mathbf{p}) &= E(\varphi(\mathbf{X})) = E[X_i \varphi(\cdot_i, \mathbf{X}) + (1 - X_i) \varphi(\cdot_i, \mathbf{X})] \\ &= E(X_i) E(\varphi(\cdot_i, \mathbf{X})) + E(1 - X_i) E(\varphi(\cdot_i, \mathbf{X})) \\ &= p_i h(\cdot_i, \mathbf{p}) + (1 - p_i) h(\cdot_i, \mathbf{p}). \end{aligned}$$

برای توضیح این قضیه بار دیگر مثال پل را در نظر بگیرید. همانطور که دیدیم نمودار این سیستم به شکل زیر است.



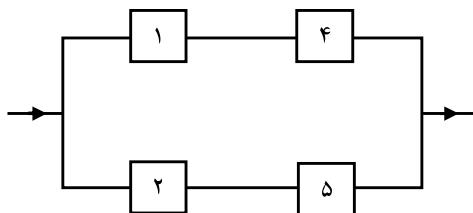
دوباره فرض می‌کنیم اجزاء به طور مستقل و با قابلیت اعتماد p_i ، $i = 1, 2, \dots, 5$ ، کار می‌کنند. برای محاسبه قابلیت اعتماد سیستم فرض می‌کنیم جزء سوم همواره فعال است (کاملاً قابل اعتماد است). در این صورت سیستم پل به یک سیستم متواالی-موازی با چهار جزء با اجزای ۱، ۲، ۴ و ۵ تبدیل می‌شود که نمودار آن در شکل زیر آمده است.



قابلیت اعتماد این سیستم برابر است با

$$h(1_r, \mathbf{p}) = [1 - (1 - p_1)(1 - p_2)][1 - (1 - p_4)(1 - p_5)].$$

اکنون فرض می‌کنیم جزء سوم در سیستم پل از کار افناهه است (توجه کنید با این فرض یک عدم اتصال در موقعیت جزء سوم به وجود می‌آید). در این حالت سیستم پل به یک سیستم موازی-متواالی با چهار جزء ۱، ۲، ۴ و ۵ به صورت زیر تبدیل می‌شود.



برای چنین سیستمی قابلیت اعتماد برابر است با

$$h(1_r, \mathbf{p}) = 1 - (1 - p_1 p_4)(1 - p_2 p_5).$$

بنابراین با توجه به قضیه تجزیه قابلیت اعتماد سیستم برابر است با عبارت زیر که با نتیجه قبلی یکسان است.

$$\begin{aligned} h(\mathbf{p}) &= p_r h(1_r, \mathbf{p}) + (1 - p_r) h(1_r, \mathbf{p}) \\ &= p_1 p_4 + p_1 p_5 + p_1 p_2 p_5 + p_1 p_2 p_4 - p_1 p_2 p_4 p_5 - p_1 p_2 p_5 p_4 \\ &\quad - p_1 p_2 p_4 p_5 - p_1 p_2 p_4 p_5 - p_1 p_2 p_4 p_5 + 2 p_1 p_2 p_4 p_5. \end{aligned}$$

۳.۲ اهمیت نسبی قابلیت اعتماد اجزاء سیستم

همانطور که دیدیم قابلیت اعتماد یک سیستم تابعی از قابلیت اعتماد اجزای آن است. بنابراین در تعیین مقدار قابلیت سیستم طبیعی است این سؤال مطرح شود که نقش هر یک از اجزاء در قابلیت اعتماد سیستم چقدر است؟ یا به عبارت دیگر آیا بعضی از اجزاء در تعیین قابلیت اعتماد سیستم از بعضی دیگر اهمیت بیشتری دارند؟ اگر بتوان معیاری ارائه کرد که اهمیت نسبی قابلیت اعتماد اجزاء را مشخص کند آنگاه مهندسین و طراحان سیستم قادر خواهند بود که با استفاده از آن در طراحی و یا اصلاح سیستم اجزاء مهم‌تر را بیشتر مورد توجه قرار دهیم. در مهندسی قابلیت اعتماد معیارهای مختلفی برای اندازه‌گیری اهمیت نسبی قابلیت اعتماد اجزاء ارائه شده است که در میان آن‌ها معیاری که در ادامه تعریف می‌شود نقش مهمی را ایفاء می‌کند. قبل از ارائه تعریف اهمیت نسبی قابلیت اعتماد اجزاء قضیه زیر را ثابت می‌کنیم که نشان می‌دهد تابع

قابلیت اعتماد سیستم منسجم بر حسب p_i , $i = 1, 2, \dots, n$, تابعی صعودی است.

قضیه ۲.۲ اگر $h(\mathbf{p})$ تابع قابلیت اعتماد یک سیستم منسجم با تابع ساختار $\varphi(\mathbf{x})$ باشد که در آن به ازای هر i , $i = 1, 2, \dots, n$, آنگاه $h(\mathbf{p})$ تابعی اکیداً صعودی از p_i است. اثبات.

از قضیه تجزیه دیدیم که $h(\mathbf{p})$ را می‌توان به صورت زیر نوشت،

$$h(\mathbf{p}) = p_i h(\cdot_i, \mathbf{p}) + (1 - p_i) h(\cdot_{\bar{i}}, \mathbf{p}).$$

بنابراین با مشتق گیری بر حسب p_i , $i = 1, 2, \dots, n$, به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_i} h(\mathbf{p}) &= h(\cdot_i, \mathbf{p}) - h(\cdot_{\bar{i}}, \mathbf{p}) \\ &= E(\varphi(\cdot_i, \mathbf{X}) - \varphi(\cdot_{\bar{i}}, \mathbf{X})). \end{aligned}$$

چون φ یک تابع صعودی است داریم $E(\varphi(\cdot_i, \mathbf{X}) - \varphi(\cdot_{\bar{i}}, \mathbf{X})) \geq 0$. علاوه بر آن چون سیستم منسجم است، عضو نامربوط در آن وجود ندارد. بنابراین یک بردار وضعیت \mathbf{x}^* وجود دارد که به ازای آن $\varphi(\cdot_i, \mathbf{x}^*) - \varphi(\cdot_{\bar{i}}, \mathbf{x}^*) = 1$. از طرفی چون طبق فرض به ازای هر i , $i = 1, 2, \dots, n$ \mathbf{x}^* با احتمال مثبت اتفاق می‌افتد. بنابراین

$$E(\varphi(\cdot_i, \mathbf{X}) - \varphi(\cdot_{\bar{i}}, \mathbf{X})) > 0.$$

■

و در نتیجه $\frac{\partial h(\mathbf{p})}{\partial p_i} > 0$ و اثبات کامل می‌شود.
اکنون تعریف اهمیت نسبی قابلیت اعتماد اجزاء را ارائه می‌کنیم.

تعريف ۱.۲ فرض کنید φ تابع ساختار یک سیستم منسجم شامل n جزء با تابع قابلیت اعتماد $h(\mathbf{p})$ باشد. بنابر تعريف اهمیت نسبی قابلیت اعتماد جزء i ام که با $I_h(i)$ نمایش می‌دهیم برابر است با

$$I_h(i) = \frac{\partial}{\partial p_i} h(\mathbf{p}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

از قضیه قبل توجه داریم که $I_h(i) > 0$. از طرفی به راحتی می‌توان نشان داد که $I_h(i) < 1$ بنابراین معیار اهمیت قابلیت اعتماد اجزای سیستم همواره مقداری در فاصله $(0, 1)$ اختیار می‌کند. پس با توجه به تعريف منطقی است فرض کنیم که در یک سیستم اگر برای دو جزء i و j ، $I_h(i) \geq I_h(j)$ آنگاه جزء i از اهمیت نسبی بیشتری در سیستم نسبت به جزء j ام برخوردار است. برای روشن تر شدن مطلب مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۲.۲ فرض کنید ساختار سیستم متواالی باشد که اجزای آن به طور مستقل عمل می‌کنند. همانطور که قبلاً دیدیم تابع قابلیت اعتماد سیستم برابر است با

$$h(\mathbf{p}) = \prod_{j=1}^n p_j.$$

در نتیجه

$$I_h(i) = \frac{\partial}{\partial p_i} h(\mathbf{p}) = \frac{\partial}{\partial p_i} \prod_{j=1}^n p_j = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_j$$

بنابراین در یک سیستم متواالی با اجزای مستقل اهمیت نسبی قابلیت اعتماد هر جزء برابر است با حاصلضرب قابلیت اعتماد اجزای دیگر. اگر فرض کنیم اجزاء سیستم طوری شماره‌گذاری شوند که

$$p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$$

آنگاه به راحتی ملاحظه می‌شود که

$$I_h(1) \geq I_h(2) \geq \dots \geq I_h(n).$$

بنابراین ضعیف‌ترین جزء در سیستم از بقیه اجزاء مهم‌تر است. اگر فرض کنیم ساختار سیستم موازی است که در آن اجزاء مستقل‌اند، آنگاه قابلیت اعتماد سیستم برابر است با

$$h(\mathbf{p}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i).$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} I_h(i) &= \frac{\partial}{\partial p_i} h(\mathbf{p}) \\ &= \frac{\partial}{\partial p_i} \left(1 - \prod_{j=1}^n (1 - p_j) \right) \\ &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (1 - p_j). \end{aligned}$$

بنابراین با فرض اینکه اجزای سیستم طوری شماره‌گذاری شده‌اند که ملاحظه می‌شود که

$$I_h(1) \leq I_h(2) \leq \cdots \leq I_h(n).$$

یعنی در سیستم جزئی که بیشترین قابلیت اعتماد را دارد از بقیه اجزاء مهم‌تر است. این نتیجه‌ای است که به طور شهودی انتظار آن را داشتیم.

۴.۲ قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم با اجزای وابسته

تاکنون فرض کردیم که سیستم شامل اجزایی است که به طور مستقل عمل می‌کنند. اگرچه فرض استقلال متغیرها در اغلب مطالعات آماری در سادگی محاسبات و تحلیل‌ها می‌تواند مفید واقع شود اما در عمل ممکن است این فرض واقع بینانه نباشد. به ویژه هنگامی که با سیستم‌ها سر و کار داریم معمولاً غیر منطقی است که فرض کنیم اجزاء سیستم مستقل از یکدیگر عمل می‌کنند. برای روشن‌تر شدن مطلب مثال‌های زیر را در نظر بگیرید.

(الف) در سیستم‌های منسجم، اغلب بردارهای مسیر مینیمال دارای اجزاء مشترک هستند. بنابراین اگر یک جزء در یک مسیر فعال (غیر فعال) باشد در مسیر دیگر نیز چنین است. بنابراین منطقی است فرض کنیم که بردارهای مسیر مینیمال (به عنوان زیر سیستم) به هم وابسته‌اند.

ب) هنگامی که یک سیستم در محیطی مورد استفاده قرار می‌گیرد، تأثیر شرایط محیطی بر همه اجزاء یکسان است. به عبارت دیگر اگر فعالیت یک جزء بر اثر شرایط محیطی رو به تحیل رود آنگاه متحمل است که اجزاء دیگر نیز همین وضعیت را داشته باشند.

ج) در اجزایی از سیستم که بار وارد شده به سیستم را به طور مشترک تحمل می‌کنند، شکست یک جزء باعث افزایش بار به دیگر اجزاء می‌شود.

در هر یک از ۳ مورد فوق مشاهده می‌شود که به طور شهودی نوعی وابستگی بین اجزاء و زیر سیستم‌ها وجود دارد. یعنی فعال بودن (غیر فعال بودن) یک جزء یا زیر سیستم باعث افزایش احتمال فعال بودن (غیر فعال بودن) اجزاء و یا زیر سیستم‌های دیگر می‌شود. نکته قابل توجه این است که در صورت وجود وابستگی بین اجزاء این وابستگی غالباً از نوع مثبت است. در ادامه این بخش مفهوم وابستگی را در حالت کلی تعریف می‌کنیم و بعضی از خواص آن را بدون اثبات مطرح می‌کنیم.

اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند، متداول‌ترین معیار برای اندازه‌گیری وابستگی بین X و Y کوواریانس بین X و Y است. خاطر نشان می‌کنیم که کوواریانس بین X و Y به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

اگر X و Y وابستگی مثبت داشته باشند آنگاه $\text{Cov}(X, Y) \geq 0$. در متون آماری صورت‌های قوی‌تری از مفهوم وابستگی مثبت (که در ادامه به آن تنها وابستگی گوییم) ارائه شده است که در حالت چند متغیره به تعریف زیر اشاره می‌کنیم. (برای جزئیات بیشتر می‌توان به کتاب بارلو و پروشان (۱۹۸۱) مراجعه کرد).

تعریف ۲.۲ متغیرهای تصادفی T_1, T_2, \dots, T_n را وابسته گوییم هر گاه برای تمام توابع صعودی دو مقداری P و Δ داشته باشیم

$$\text{Cov}(P(\mathbf{T}), \Delta(\mathbf{T})) \geq 0$$

که در آن $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_n)$

بر اساس تعریف فوق، متغیرهای تصادفی وابسته در خواص چند متغیره زیر صدق می‌کنند که آن‌ها را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

- (۱) زیر مجموعه‌های یک مجموعه از متغیرهای وابسته خود وابسته‌اند.
- (۲) مجموعه‌های شامل یک متغیر تصادفی وابسته وابسته است.

- (۳) توابع صعودی از متغیرهای تصادفی وابسته، وابسته‌اند.
 (۴) اگر دو مجموعه از متغیرهای تصادفی وابسته از هم مستقل باشند، آنگاه اجتماع آنها یک مجموعه از متغیرهای تصادفی وابسته خواهد بود.

از دو رابطه ۲ و ۴ به راحتی ملاحظه می‌شود که مجموعه متغیرهای تصادفی مستقل وابسته هستند.

اکنون با استفاده از نتایج فوق قابلیت اعتماد سیستم‌های موازی و متوالی را در حالتی که اجزای آنها وابسته باشند مورد بررسی قرار می‌دهیم. قضیه زیر را در نظر بگیرید.

قضیه ۳.۲ اگر X_1, X_2, \dots, X_n متغیرهای تصادفی دو مقداری وابسته باشند آنگاه

$$P\left(\prod_{i=1}^n X_i = 1\right) \geq \prod_{i=1}^n P(X_i = 1) \quad \text{(الف)}$$

$$P\left(\prod_{i=1}^n X_i = 1\right) \leq \prod_{i=1}^n P(X_i = 1) \quad \text{(ب)}$$

اثبات.

(الف) توجه کنید که X_1, X_2, \dots, X_n توابعی صعودی از $\prod_{i=1}^n X_i$ هستند. بنابراین از بند (۳) خواص متغیرهای تصادفی وابسته، X_1, X_2, \dots, X_n وابسته‌اند. در نتیجه

$$\text{Cov}\left(X_1, \prod_{i=1}^n X_i\right) = E\left(X_1 \prod_{i=1}^n X_i\right) - E(X_1)E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) \geq 0.$$

اگر همین استدلال را به طور مکرر به کار ببریم به دست می‌آوریم:

$$E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) \geq \prod_{i=1}^n E(X_i)$$

و یا

$$P\left(\prod_{i=1}^n X_i = 1\right) \geq \prod_{i=1}^n P(X_i = 1)$$

و اثبات قسمت (الف) کامل می‌شود.

■ (ب) اثبات قسمت (ب) مشابه قسمت (الف) است و به خواننده واگذار می‌شود.
 توجه داریم که تابع ساختار یک سیستم متوالی را نشان می‌دهد. بنابراین، نتیجه قسمت الف بیان می‌کند که قابلیت اعتماد سیستم، $P\left(\prod_{i=1}^n X_i = 1\right)$ در حالتی که اجزاء وابسته‌اند

همواره بزرگتر یا مساوی است از قابلیت اعتماد سیستم، $\prod_{i=1}^n P(X_i = 1)$ ، در حالتی که اجزاء سیستم مستقل‌اند. به عبارت دیگر $(\prod_{i=1}^n P(X_i = 1)) \leq \prod_{i=1}^n P(X_i = 1)$ یک کران پایین برای مقدار واقعی قابلیت اعتماد سیستم با جزاء وابسته است. همین استدلال برای قسمت (ب) نیز برقرار است. یعنی قابلیت اعتماد یک سیستم موازی با اجزای وابسته همواره کمتر یا مساوی از قابلیت اعتماد یک سیستم موازی با اجزای مستقل است.

توجه کنید که حتی در حالت‌های ساده مانند ساختارهای متواالی و موازی زمانی که اجزاء وابسته‌اند، معمولاً به راحتی قادر به محاسبه دقیق قابلیت اعتماد سیستم نیستیم و تنها می‌توانیم به تعیین کران‌هایی برای قابلیت اعتماد سیستم پیردازیم. در مسائل عملی نیز در بسیاری از موارد محاسبه دقیق قابلیت اعتماد سیستم ضروری نیست و تعیین کران‌هایی برای قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم برای مقاصد عملی کفایت می‌کند. قضیه زیر کران‌های ساده‌ای برای قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم ارائه می‌کند.

قضیه ۴.۲ فرض کنید $\varphi(\mathbf{x})$ تابع ساختار یک سیستم منسجم با n جزء باشد که در آن اجزای سیستم وابسته و قابلیت اعتماد هر یک به ترتیب p_1, p_2, \dots, p_n است. آنگاه $h(\mathbf{p})$ ، تابع قابلیت اعتماد سیستم، در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\prod_{i=1}^n p_i \leq h(\mathbf{p}) \leq \prod_{i=1}^n p_i.$$

اثبات.

از قضیه ۲.۱ دیدیم که تابع ساختار سیستم منسجم در نامساوی‌های زیر صدق می‌کند

$$\prod_{i=1}^n x_i \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq \prod_{i=1}^n x_i.$$

اگر از طرفین عبارت اخیر امید ریاضی بگیریم خواهیم داشت

$$E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) \leq E(\varphi(\mathbf{X})) \leq E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)$$

اکنون با توجه به قضیه ۳.۳ داریم

$$\prod_{i=1}^n p_i \leq E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)$$

$$E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) \leq \prod_{i=1}^n p_i$$

و لذا نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

نتیجه ۴.۲ بیان می‌کند که قابلیت اعتماد هر سیستم منسجم با n جزء وابسته همواره از قابلیت اعتماد سیستم متواالی با n جزء مستقل بیشتر و از قابلیت اعتماد سیستم موازی با n جزء مستقل کمتر است.

کران‌های بدست آمده در قضیه ۴.۳ را می‌توان اصلاح کرد. قضیه زیر کران‌هایی برای قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم ارائه می‌کند که از نتایج به دست آمده از قضیه ۴.۳ دقیق‌ترند اما محاسبه آن‌ها مستلزم عملیات یعنی استفاده از بردارهای مسیر و بردارهای قطع کننده مینیمال است.

قضیه ۵.۲ فرض کنید $(\mathbf{x})\varphi$ تابع ساختار یک سیستم منسجم باشد که شامل n جزء وابسته با قابلیت‌های p_1, p_2, \dots, p_n است. فرض کنید $P_l(\mathbf{x}), P_r(\mathbf{x}), \dots, P_l(\mathbf{x})$ مجموعه مسیرهای مینیمال و $C_k(\mathbf{x}), C_r(\mathbf{x}), \dots, C_l(\mathbf{x})$ مجموعه قطع کننده‌های مینیمال سیستم باشد. اگر $h(\mathbf{p})$ تابع قابلیت اعتماد سیستم باشد آنگاه

$$\prod_{i=1}^k P(C_i(\mathbf{X}) = 1) \leq h(\mathbf{p}) \leq \prod_{i=1}^l P(P_i(\mathbf{X}) = 1)$$

اثبات.

توجه کنید که $C_k(\mathbf{x}), \dots, C_r(\mathbf{x}), C_l(\mathbf{x})$ توابعی صعودی از \mathbf{x} هستند. چون X_n, \dots, X_r, X_l متغیرهای وابسته‌اند از بند (۳) خواص متغیرهای تصادفی وابسته که در بالا اشاره شد، $C_k(\mathbf{x}), \dots, C_r(\mathbf{x}), C_l(\mathbf{x})$ متغیرهای تصادفی وابسته خواهند بود. بنابراین

$$\begin{aligned} h(\mathbf{p}) &= P(\varphi(\mathbf{x}) = 1) \\ &= P\left(\prod_{i=1}^k C_i(\mathbf{X}) = 1\right) \\ &\geq \prod_{i=1}^k P(C_i(\mathbf{X}) = 1) \end{aligned} \quad ۴.۲$$

و در نتیجه کران پایین $h(\mathbf{p})$ بدست می‌آید. به طور مشابه می‌توان نشان داد که

$$\begin{aligned}
 h(\mathbf{p}) &= P(\varphi(\mathbf{x}) = 1) \\
 &= P\left(\prod_{i=1}^l P_i(\mathbf{X}) = 1\right) \\
 &\geq \prod_{i=1}^l P(P_i(\mathbf{X}) = 1). \quad \text{از قسمت (ب) قضیه ۳.۲}
 \end{aligned}$$

در حالتی که اجزاء سیستم منسجم مستقل از هم باشند کران‌هایی ارائه شده در قضیه ۵.۲ را می‌توان به فرم صریح‌تر به صورت زیر ارائه کرد.

نتیجه ۲.۲ اگر $\varphi(\mathbf{x})$ تابع ساختار یک سیستم منسجم با اجزای مستقل باشد آنگاه

$$\prod_{i=1}^k \prod_{j \in C_i} p_j \leq h(\mathbf{p}) \leq \prod_{i=1}^l \prod_{j \in P_i} p_j.$$

اثبات.

با توجه به اینکه اجزاء مستقل‌اند برای i این مسیر مینیمال، $i = 1, 2, \dots, l$ داریم

$$P(P_i(\mathbf{X}) = 1) = \prod_{j \in P_i} p_j$$

بنابراین از قضیه ۵.۳ داریم

$$h(\mathbf{p}) \leq \prod_{i=1}^l \prod_{j \in P_i} p_j$$

کران پایین با استدلال مشابه به دست می‌آید و لذا نتیجه کامل است.

در ادامه دوباره سیستم پل را در نظر بگیرید و فرض کنید اجزای سیستم مستقل از هم با احتمال یکسان p عمل می‌کنند. قرار دهید

$$h_{mc} = \prod_{i=1}^k \prod_{j \in C_i} p_j, \quad h_{mp} = \prod_{i=1}^l \prod_{j \in P_i} p_j, \quad h_p = \prod_{i=1}^n p_i, \quad h_s = \prod_{i=1}^n p_i$$

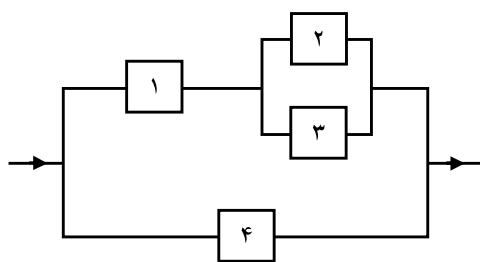
در جدول ۱.۲ مقادیر دقیق قابلیت اعتماد سیستم، کران‌های بالا و پایین قابلیت اعتماد سیستم، h_c از قضیه ۴.۲ و کران بالا و پایین قابلیت اعتماد سیستم، h_{mp} و h_{mc} بر اساس قضیه ۵.۲ به ازای مقادیر مختلف p نمایش داده شده است.

جدول ۱.۲ کران بالا و پایین قابلیت اعتماد سیستم در سیستم پل

p	h_s	h_{mc}	$h(p)$	h_{mp}	h_p
۰/۹۹	۰/۹۵۱	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
۰/۹۵	۰/۷۷۴	۰/۹۹۵	۰/۹۹۵	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
۰/۹۰	۰/۵۹۱	۰/۹۷۸	۰/۹۷۹	۰/۹۹۷	۱/۰۰۰
۰/۷۵	۰/۲۳۷	۰/۸۵۲	۰/۸۶۱	۰/۹۳۶	۰/۹۹۹
۰/۶۰	۰/۰۷۵	۰/۶۱۸	۰/۶۶۰	۰/۷۴۸	۰/۹۹۰
۰/۵۰	۰/۰۳۱	۰/۴۳۱	۰/۵۰۰	۰/۵۶۹	۰/۹۹۹

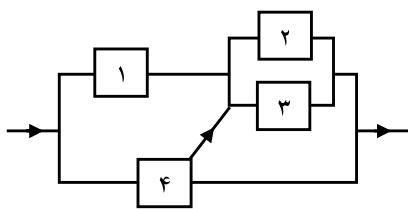
۵.۲ مسایل

۱. سیستمی را با نمودار زیر در نظر بگیرید

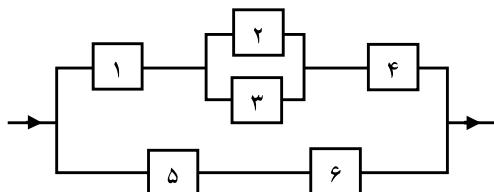
الف)تابع ساختار سیستم، $\varphi(x)$ را تعیین کنید.ب) فرض کنید اجزای سیستم به طور مستقل به ترتیب با قابلیت‌های $p_1 = 0/9$ ، $p_2 = 0/8$ ، $p_3 = 0/9$ و $p_4 = 0/85$ عمل کنند. قابلیت اعتماد سیستم $h(p)$ را محاسبه کنید.

ج) کران‌های قابلیت اعتماد سیستم را بر مبنای قضیه ۴.۲ و ۵.۲ تعیین کنید.

۲. قابلیت اعتماد یک سیستم ۳ از ۴ را که اجزای آن به طور مستقل و با قابلیت اعتماد یکسان $0/8$ کار می‌کنند محاسبه کنید.۳. با استفاده از قضیه تجزیه قابلیت اعتماد سیستمی با نمودار زیر را تحت این شرایط که اجزاء مستقل و با قابلیت $0/8$ ، فعالیت می‌کنند محاسبه کنید.

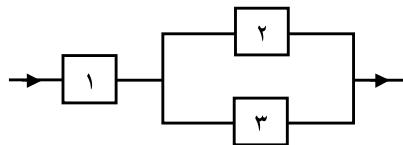


۴. با استفاده از بردارهای مسیر مینیمال و بردارهای قطع کننده مینیمال قابلیت اعتماد سیستم را با نمودار زیر به دست آورید که در آن اجزای سیستم به طور مستقل با احتمال 0.9 فعالیت می‌کنند.



۵. در یک سیستم ۲ از ۳ که اجزاء به طور مستقل و با قابلیت‌های p_1 ، p_2 و p_3 کار می‌کنند، اهمیت نسبی اجزاء را تعیین و بر حسب مقادیر p_i ، $i=1,2,3$ ، در مورد آنها بحث کنید.

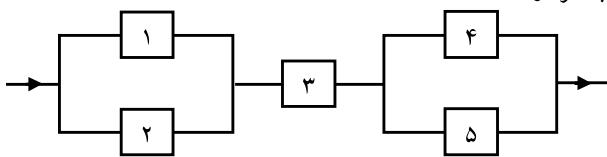
۶. سیستمی با نمودار زیر را در نظر بگیرید. اهمیت نسبی قابلیت اعتماد اجزاء را با این فرض که اجزاء به طور مستقل و به ترتیب با قابلیت 0.95 ، 0.90 و 0.99 فعالیت کنند تعیین کنید.



۷. برای سیستم‌های زیر با اجزای وابسته کران بالا و پایین قابلیت اعتماد را بر اساس قضایای ۴.۳ و ۵.۳ به دست آورید.

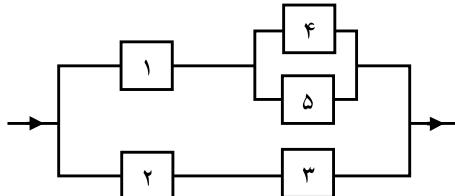
الف) سیستم ۲ از ۳

ب) سیستمی با نمودار



۸. یک سیستم را در نظر بگیرید که شامل ۳ دستگاه خنک کننده یکسان است که هر یک شامل دو لوله جزیان آب هستند که لوله‌ها به طور موازی کنار یکدیگر متصل شده‌اند. برای عملکرد سیستم لازم است که حداقل ۲ تا از ۳ خنک کننده کار کنند. قابلیت اعتماد هر یک از لوله‌ها ۰/۶ است و به طور مستقل عمل می‌کنند. قابلیت اعتماد سیستم را تعیین کنید.

۹. سیستمی با نمودار زیر را در نظر بگیرید.



الف) بردارها و مجموعه‌های مسیر مینیمال سیستم را تعیین کنید.

ب) بردارها و مجموعه‌های قطع کننده مینیمال سیستم را تعیین کنید.

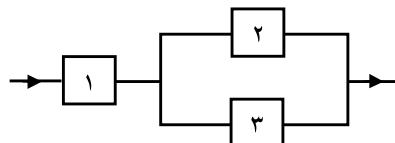
ج) با فرض آنکه اجزای سیستم مستقل و هر یک با قابلیت ۰/۸ کار کنند، قابلیت اعتماد سیستم را تعیین کنید.

۱۰. با توجه به قضیه ۳.۲ ثابت کنید

$$h(\mathbf{p}_r \amalg \mathbf{p}_s) \geq h(\mathbf{p}_r) \amalg h(\mathbf{p}_s)$$

$$h(\mathbf{p}_r, \mathbf{p}_s) \geq h(\mathbf{p}_r) \cdot h(\mathbf{p}_s)$$

ج) صحت درستی نتایج (الف) و (ب) را در سیستمی با نمودار زیر بررسی کنید که در آن اجزاء مستقل و هر یک با احتمال p عمل می‌کنند.



۱۱. فرض کنید φ یک ساختار منسجم باشد. p_1, p_2, p_r, p_s مجموعه مسیرهای مینیمال و k_s, k_r, k_t, k_l مجموعه قطع کننده‌های مینیمال باشد. اگر اجزای سیستم وابسته باشند ثابت کنید.

$$\max_{1 \leq r \leq l} \prod_{i \in p_r} p_i \leq h(\mathbf{p}) \leq \min_{1 \leq j \leq s} \prod_{i \in k_s} p_i$$

۳

قابلیت اعتماد وابسته به زمان و مفاهیم سالخوردگی

۱.۳ مقدمه

در فصل قبل قابلیت اعتماد سیستم را به عنوان تابعی از قابلیت اعتماد اجزای آن مورد بحث قرار دادیم. وضعیتی را که در آن فصل مورد بررسی قرار دادیم، برای اجزاء سیستم و در نتیجه برای سیستم دو وضعیت کارکرد یا عدم کارکرد را در نظر می‌گرفت. در این فصل علاوه‌بر این قابلیت اعتماد سیستم را به عنوان تابعی از زمان مورد مطالعه قرار دهیم. بدین منظور، فرض می‌کنیم اجزای سیستم و در نتیجه خود سیستم دارای طول عمر هستند. طول عمر سیستم یک متغیر تصادفی است که بر اساس یک الگوی احتمال مقدار می‌گیرد. با فرض معلوم بودن مدل احتمال طول عمر سیستم قادریم در هر لحظه از زمان احتمال کارکرد سیستم را محاسبه کنیم. در همین ارتباط کمیت‌های مهمی را جهت بررسی خواص متغیر طول عمر سیستم معرفی کرده و ویژگی‌ها و ارتباط بین آنها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در بخش ۲.۳، قابلیت اعتماد را به عنوان تابعی از زمان تعریف می‌کنیم و خصوصیات آن را بررسی می‌کنیم. در بخش ۳.۳ به معرفی تابع نرخ خطر که از مفاهیم اساسی تحلیل داده‌های طول عمر است می‌پردازیم و مثال‌هایی در ارتباط با آن ارائه می‌کنیم. نشان می‌دهیم که رابطه بین تابع نرخ خطر با توزیع احتمال جامعه مورد بررسی یک است. بخش ۴.۳ یکی دیگر از مفاهیم اساسی را در مطالعات طول عمر به نام میانگین عمر باقیمانده معرفی می‌کنیم و خواص آن را بررسی می‌کنیم. در بخش ۵.۳ بعضی از مفاهیم مهم سالخوردگی سیستم‌ها را معرفی و نتایجی در مورد آنها

ارائه می‌کنیم. در بخش ۶.۳ به طور مختصر اندازه‌های قابلیت اعتماد سیستم را در حالتی که طول عمر آن گستاخ باشد ارائه می‌کنیم. در نهایت بخش ۷.۳ قابلیت اعتماد سیستم را به عنوان تابعی از قابلیت اعتماد اجزای آن در هر لحظه از زمان مورد مطالعه قرار می‌دهد.

۲.۳ تابع قابلیت اعتماد

فرض کنید یک سیستم، یک قطعه الکتریکی یا هر وسیله‌ای شئ دیگر دارای طول عمر T باشد. طبیعی است که T یک متغیر تصادفی است که می‌تواند در فاصله $(0, \infty)$ مقدار بگیرد. متغیر T می‌تواند پیوسته و یا گستاخ باشد. به عبارت دیگر سیستم می‌تواند طول عمری داشته باشد که هر مقدار را در فاصله $(0, \infty)$ اختیار کند یا می‌تواند طول عمر آن را طوری تعریف کرد که مقادیر شمارش پذیر (مثلًاً اعداد طبیعی) را در فاصله $(0, \infty)$ اختیار کند. به عنوان مثال اگر سیستم را لامپ فلورست در نظر بگیریم طول عمر آن یک متغیر تصادفی T است که هر مقدار را در فاصله $(0, \infty)$ می‌گیرد. اگر سیستم را مثلًاً یک دستگاه فتوکپی در نظر بگیریم طول عمر آن T ، را می‌توان تعداد کمی‌هایی در نظر گرفت که قبل از خرابی گرفته است. در ادامه این فصل فرض می‌کنیم متغیر تصادفی T پیوسته است (هر گاه T گستاخ باشد صراحتاً به آن اشاره می‌کنیم).

تابع توزیع احتمال T را با $F(t)$ نمایش می‌دهیم. طبق تعریف $F(t)$ برابر است با

$$F(t) = P(T \leq t)$$

تابع توزیع F در سه خاصیت زیر صدق می‌کند.

الف) F تابعی غیر نزولی است.

ب) $F(\infty) = 1$ و $F(0) = 0$.

ج) از راست پیوسته است.

فرض می‌کنیم T دارای تابع چگالی f باشد. در این صورت f در رابطه زیر صدق می‌کند

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$

واضح است که $f(t)$ در دو شرط زیر صادق است و هر تابع که دارای دو شرط زیر باشد را

می‌توان به عنوان یک تابع چگالی احتمال استفاده کرد.

الف) به ازای هر $t \geq 0$,

$$\int_0^\infty f(t) dt = 1$$

هر عبارت احتمالی در ارتباط با متغیر طول عمر را می‌توان با استفاده از $f(t)$ و یا $F(t)$ تعیین کرد.

اما تابع محوری در مبحث قابلیت اعتماد جهت تعیین خواص متغیر طول عمر T ، تابع قابلیت اعتماد است. تابع قابلیت اعتماد $R(t)$ در لحظه t ، $(t > 0)$ ، که آن را با $R(t)$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(x)dx \\ = 1 - F(x)$$

با این تعریف واضح است که $R(0) = 1$ ، یعنی در زمان $t = 0$ قابلیت اعتماد سیستم ۱ است و $R(\infty) = 0$ یعنی در دراز مدت (هنگامی که $t \rightarrow \infty$) سیستم از کار می‌افتد. همچنین $R(t)$ یک تابع غیر صعودی است به این معنی که اگر $t_1 < t_2 < \dots$ آنگاه $R(t_1) \geq R(t_2) \geq R(t_3) \dots$ و این یعنی در زمان t قابلیت اعتماد سیستم کمتر از زمان t نیست. برای توضیح بیشتر مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۱.۳ فرض کنید T طول عمر یک سیستم الکتریکی بر حسب سال باشد که تابع چگالی آن به صورت زیر است،

$$f(t) = \frac{1}{(t+1)^2}, \quad t > 0$$

- الف) تابع قابلیت اعتماد T را به دست آورید.
 - ب) قابلیت اعتماد سیستم در $t = 2$ سال چقدر است؟
 - ج) چقدر احتمال دارد که طول عمر قطعه بین ۶ ماه و ۲ سال باشد؟
- حل. الف) تابع قابلیت اعتماد T برابر است با

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(x)dx \\ = \int_t^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx \\ = \left(\frac{1}{1+x} \right)^t, \quad t > 0$$

. $R(2) = \left(\frac{1}{1+2} \right)^2 = \frac{1}{9}$

ب) احتمال مطلوب برابر است با $\frac{1}{9}$

ج) در این حالت احتمال مطلوب مساوی است با

$$P(0.5 < T < 2) = R(0.5) - R(2)$$

$$= \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

مثال ۲.۳ فرض کنید طول عمر یک باطری بر حسب سال یک متغیر تصادفی T است که تابع چگالی آن برابر است با

$$f(t) = 2te^{-t}, \quad t > 0.$$

الف) تابع قابلیت اعتماد T را به دست آورید.

ب) قابلیت اعتماد باطری در $t = 18$ ماه چقدر است؟

حل. الف) تابع قابلیت اعتماد سیستم برابر است با

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(x) dx$$

$$= \int_t^{\infty} 2xe^{-x} dx$$

$$= e^{-t}, \quad t > 0.$$

ب) قابلیت اعتماد مورد نظر مساوی است با

$$R(1/5) =$$

$$= e^{-(1/5)^2}$$

$$\approx 0.1.$$

۳.۳ تابع نرخ خطر

تابع نرخ خطر یکی از مهمترین معیارها در مطالعات قابلیت اعتماد و مباحث طول عمر است. فرض کنید T طول عمر یک سیستم باشد که تابع چگالی آن $f(t)$ و تابع قابلیت آن $R(t)$ است. اکنون این سؤال اساسی را مطرح می‌کنیم که اگر فرض کنیم سیستم در زمان t ($0 < t$) هنوز فعال است، چقدر احتمال دارد که بلافارسله بعد از زمان t از کار بیافتد؟ به عبارت دیگر، برای مقدار کوچک δ ، علاقه‌مندیم احتمال شرطی زیر را محاسبه کنیم.

$$P(t < T < t + \delta | T > t) = \frac{P(t < T < t + \delta)}{P(T > t)}, \quad t > 0, \delta > 0.$$

مشروط بر آن که $P(T > t) > 0$. اگر احتمال شرطی فوق را برابر δ تقسیم کرده و حد حاصل را هنگامی که $\delta \rightarrow \infty$ محاسبه کنیم، کمیتی حاصل می‌شود که به آن تابع نرخ خطر معروف است. لذا تعریف زیر را داریم

تعریف ۱.۳ تابع نرخ خطر متغیر تصادفی طول عمر T که آن را با $h(t)$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{P(t < T < t + \delta)}{\delta P(T > t)} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{R(t) - R(t + \delta)}{\delta R(t)} \\ &= \frac{f(t)}{R(t)}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

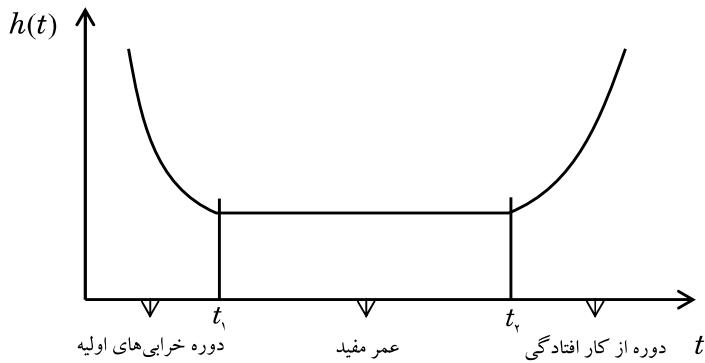
که در آن تساوی اخیر از این واقعیت ناشی می‌شود که

$$f(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{R(t) - R(t + \delta)}{\delta}.$$

تابع نرخ خطر، که در مباحث قابلیت اعتماد و طول عمر به تابع "نرخ شکست" نیز معروف است، نقش محوری در اغلب تحلیل‌های بقا ایفاء می‌کند. باید توجه داشت که تابع نرخ خطر احتمال از کار افتادن سیستم نیست (یعنی لزوماً مقداری بین صفر و یک را اختیار نمی‌کند). این کیت در واقع نرخ از کار افتادگی سیستم را در زمان t نشان می‌دهد و معیاری برای اندازه‌گیری سالخوردگی سیستم است. اگر (t) تابعی صعودی از t باشد، بدین معنی است که سیستم با گذشت زمان دچار سالخوردگی شده و قابلیت اعتماد آن کم می‌شود. اگر (t) نزولی باشد آنگاه سیستم با گذشت زمان دچار سالخوردگی منفی می‌شود، بدین معنی که قابلیت اعتماد آن بیشتر می‌شود. اغلب پدیده‌های طول عمر دارای نرخ خطری هستند که با افزایش زمان صعود می‌کنند و البته متغیرهای طول عمری نیز وجود دارند که با افزایش زمان نرخ خطر آن‌ها کاهش پیدا می‌کند. یکی از الگوهای معروف تابع نرخ خطر، که در مهندسی قابلیت اعتماد کاربردهای فراوانی داشته و پدیده‌های متنوعی را می‌توان با آن تفسیر کرد، الگوی نرخ خطر U -شکل (یا وانی شکل) است. در این الگو تابع نرخ خطر دارای نموداری به صورت شکل ۱.۳ است. همانطور که ملاحظه می‌شود، نرخ خطر سیستم ابتدا برای یک دوره نزولی خواهد بود که به آن دوره خرابی‌های اولیه می‌گویند. در یک دوره زمانی نرخ خطر تقریباً ثابت است که به آن دوره

عمر مفید سیستم می‌گویند. سپس نرخ خطر شروع به صعود می‌کند که به آن دوره از کار افتادگی می‌گویند.

این الگو اغلب برای تحلیل طول عمر محصولات مختلف صنعتی (و حتی تحلیل طول عمر موجودات زنده دیگر مانند انسان) بسیار مفید است. برای مثال هنگامی که یک تولید کننده اتومبیل محصولات خود را وارد بازار می‌کند در ابتدای استفاده از اتومبیل ها نرخ خطر اتومبیل آنها بالاست و نیاز به آب بندی و رسیدگی دارند. پس از دوران آب بندی نرخ خطر اتومبیل تقریباً ثابت است و برای یک دوره نسبتاً طولانی اتومبیل بدون خرابی عمل می‌کند. سپس دوره از کار افتادگی اتومبیل می‌شود که نرخ از کار افتادگی با گذشت زمان صعود خواهد کرد.



شکل ۱.۳ الگوی نرخ خطر U-شکل

اگر $t_1 \leq t_2$ ، نقاطی باشند که در آنها رفتار تابع تغییر می‌کند، t_1 و t_2 را نقاط تغییر تابع نرخ خطر گویند. واضح است که اگر $t_1 = 0$ و $t_2 = \infty$ آنگاه نرخ خطر صعودی و اگر $t_1 = 0$ و $t_2 = \infty$ آنگاه تابع نرخ خطر نزولی خواهد بود. اکنون مثال‌های زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۳.۳ فرض کنید متغیر طول عمر T دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f(t) = (2t+1)e^{-(t+t^*)}, \quad t > 0.$$

آنگاه تابع قابلیت اعتماد T برابر است با

$$\begin{aligned} R(t) &= \int_t^\infty (2x+1)e^{-(x+x^*)} dx \\ &= e^{-(t+t^*)}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

در این صورت تابع نرخ خطر T برابر است با

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{f(t)}{R(t)} \\ &= \frac{(2t+1)e^{-(t+t')}}{e^{-(t+t')}} \\ &= 2t+1 \end{aligned}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود $h(t)$ تابعی صعودی از t است.
مثال ۴.۳ فرض کنید متغیر طول عمر T دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f(t) = \frac{3}{(1+t)^4}, \quad t > 0.$$

آنگاه تابع قابلیت اعتماد T برابر است با

$$R(t) = \frac{1}{(1+t)^3}, \quad t > 0.$$

در نتیجه تابع نرخ خطر آن برابر است با

$$h(t) = \frac{3}{1+t}.$$

در این مدل تابع نرخ خطر بر حسب زمان نزولی است.
یکی از دلایل اهمیت تابع نرخ خطر، علاوه بر مفهوم شهودی آن که نرخ از کار افزادگی T را نشان می‌دهد، رابطه یک به یک آن با تابع توزیع طول عمر T است. این واقعیت در قضیه زیر نشان داده شده است.

قضیه ۱.۳ فرض کنید T یک متغیر طول عمر باشد که تابع چگالی آن f ، تابع قابلیت اعتماد آن R و تابع نرخ خطر آن h است، آنگاه $(h(t))$ بر حسب $R(t)$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$R(t) = e^{-\int_0^t h(x)dx}, \quad t > 0. \quad (1.3)$$

اثبات.

اگر از رابطه $h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$ در فاصله $(0, t)$ انتگرال بگیریم به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
 \int_0^t h(x)dx &= \int_0^t \frac{f(x)}{R(x)} dx \\
 &= -\ln R(x) \Big|_0^t \\
 &= -\ln R(t) + \ln R(0) \\
 &= -\ln R(t)
 \end{aligned}$$

که در آن تساوی اخیر از این واقعیت نتیجه می‌شود که $R(0) = 1$. بنابراین اثبات قضیه کامل

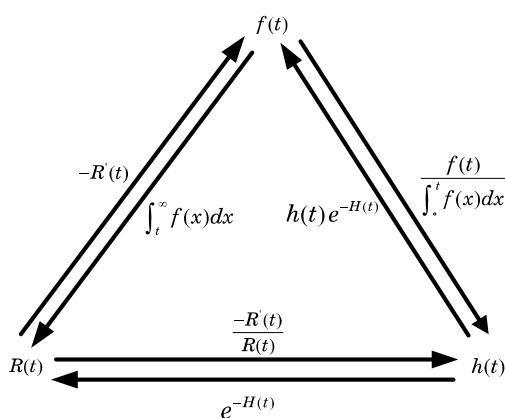
■

اگر از طرفین (۱.۳) بر حسب t مشتق بگیریم به راحتی ملاحظه می‌شود تابع چگالی احتمال $f(t)$ ، بر حسب $h(t)$ به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$f(t) = h(t) e^{-\int_0^t h(x)dx}.$$

تبصره ۱.۳ کمیت $H(t) = \int_0^t h(x)dx = -\ln R(t)$ را تابع نرخ خطر تجمعی می‌گویند.

شکل ۲.۳ رابطه بین $h(t)$ ، $f(t)$ و $R(t)$ را نشان می‌دهد.



شکل ۲.۳ رابطه بین $h(t)$ ، $f(t)$ و $R(t)$

قضیه زیر نشان می‌دهد که اگر نرخ خطر یک سیستم از نرخ خطر سیستمی دیگر کمتر باشد آنگاه سیستم اول قابل اعتمادتر از سیستم دوم است.

قضیه ۲.۳ فرض کنید T و f متغیرهای طول عمر به ترتیب با تابع چگالی f و R قابلیت اعتماد و R باشند. اگر به ازای هر آنگاه $h(t) \leq h_r(t)$ و $R_r(t) \geq R_r(t)$

اثبات.

فرض اینکه برای $t < 0$ ، $h_r(t) \leq h_r(t)$ نتیجه می‌دهد،

$$\int_0^t h_r(x) dx \leq \int_0^t h_r(x) dx$$

و این معادل است با اینکه به ازای هر $t < 0$ ، $-\ln R_r(t) \leq -\ln R_r(t)$ و این یعنی به ازای $t < 0$ ، $R_r(t) \geq R_r(t)$ و اثبات کامل می‌شود. ■

قبل از آنکه این بخش را به پایان برسانیم به این نکته اشاره می‌کنیم که، گاهی اوقات در مدل سازی‌های آماری ممکن است بخواهیم که تعیین کنیم آیا یک تابع خاص را می‌توان به عنوان تابع نرخ خطر در نظر گرفت. روش تعیین این مسئله ساده است. به طور کلی هر تابع $h(t)$ که در دو خاصیت زیر صدق کند بک تابع نرخ خطر خواهد بود.

(الف) برای هر $t \geq 0$ ، $h(t) \geq 0$

(ب) $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = \infty$ و $\lim_{t \rightarrow 0} H(t) = 0$

که در آن $H(t) = \int_0^t h(x) dx$ تابع نرخ تجمعی است.

۴.۳ میانگین و میانگین باقیمانده عمر

یک مشخصه مهم متغیر طول عمر T ، همانند هر نوع متغیر تصادفی دیگر، متوسط $E(T)$ می‌باشد که در قابلیت اعتماد به آن "میانگین تازمان خرابی" یا "متوسط طول عمر" سیستم می‌گویند. در اینجا متوسط T را با $E(T)$ نمایش می‌دهیم و طبق تعریف برابر است با

$$E(T) = \int_0^\infty xf(x) dx$$

قضیه زیر نشان می‌دهد که چگونه با استفاده از تابع قابلیت اعتماد می‌توان $E(T)$ را محاسبه کرد.

قضیه ۳.۳ اگر T متغیر تصادفی پیوسته با تابع قابلیت اعتماد $R(t)$ و تابع چگالی احتمال باشد آنگاه در صورت وجود $f(t)$ ، $E(T)$

$$E(T) = \int_0^\infty R(x) dx$$

اثبات. داریم

$$\begin{aligned}
 E(T) &= \int_0^\infty xf(x)dx \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b xf(x)dx \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-bR(b) + \int_0^b R(x)dx \right] \quad \text{با انتگرال گیری جزء به جزء} \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} (-bR(b)) + \int_0^\infty R(x)dx \\
 &\text{کافیست نشان دهیم} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} (-bR(b)) = 0. \text{ داریم}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 bR(b) &= b \int_b^\infty f(x)dx \\
 &\leq \int_b^\infty xf(x)dx
 \end{aligned}$$

چون $E(T) \leq \infty$ است سمت راست نامساوی، هنگامی که $b \rightarrow \infty$ ، به سمت صفر میل می‌کند. در نتیجه $bR(b)$ نیز هنگامی که $b \rightarrow \infty$ به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین

$$E(T) = \int_0^\infty R(x)dx$$

مثال ۵.۳ در مثال ۱.۳ و ۲.۳ متوسط طول عمر قطعات را به دست آورید.
حل. در مثال ۱.۳ داریم

$$\begin{aligned}
 E(T) &= \int_0^\infty \frac{1}{(1+t)^r} dt \\
 &= \frac{1}{1+t} \Big|_0^\infty \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

یعنی متوسط طول عمر قطعه برابر یک سال است.
مثال ۲.۳، $E(T)$ برابر است با

$$\begin{aligned}
 E(T) &= \int_0^\infty e^{-t} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{r}} \\
 &= \cdot / 886 \text{ سال} \equiv 323
 \end{aligned}$$

که در آن انتگرال با استفاده از روش مختصات قطبی به راحتی نتیجه می‌شود. مثال‌های ۱.۳ و ۲.۳ به ترتیب حالت خاص توزیع پارتو و توزیع وایل هستند که از مدل‌های معروف در قابلیت اعتمادند. در فصل بعد به طور مشروح در مورد این مدل‌ها و مدل‌های دیگر آماری بحث می‌کنیم.

یکی از دیگر معیارهای مهم در مطالعات قابلیت اعتماد و مباحث طول عمر، میانگین عمر باقیمانده است. فرض کنید T متغیر تصادفی طول عمر با تابع قابلیت اعتماد $R(t)$ باشد. فرض کنید سیستمی با طول عمر T در زمان $t = 0$ مورد استفاده قرار بگیرد و در زمان $t > 0$ سیستم هنوز فعال باشد. آنگاه عمر باقیمانده سیستم تحت این شرط که $T > t$ عبارتست از

$$T_t = T - t | T > t$$

خواص متغیر تصادفی عمر باقیمانده T_t می‌تواند برای مهندسان قابلیت اعتماد مهم باشد. اگر تابع قابلیت اعتماد T_t را با $R(x|t)$ نشان دهیم آنگاه برای $x > t$ داریم

$$\begin{aligned} R(x|t) &= P(T_t > x) \\ &= P(T - t > x | T > t) \\ &= \frac{P(T > x + t)}{P(T > t)} \\ &= \frac{R(x+t)}{R(t)}, \quad x, t > 0. \end{aligned}$$

واضح است که $R(x|t)$ به عنوان یک تابع پویا از زمان قابلیت اعتماد شرطی سیستم را در هر لحظه از زمان نشان می‌دهد. در نقطه $t = 0$ ، داریم $R(x|0) = R(x)$. اگر میانگین T_t را، به عنوان تابعی از t ، با $m(t) = E(T_t)$ نمایش دهیم از قضیه ۳.۳ داریم،

$$\begin{aligned} m(t) &= E(T_t) \\ &= E(T - t | T > t) \\ &= \int_0^\infty R(x|t) dx \\ &= \int_0^\infty \frac{R(x+t)}{R(t)} dx \\ &= \int_t^\infty \frac{R(u)}{R(t)} du \end{aligned}$$

که در آن تساوی اخیر از تغییر متغیر $x+t=u$ حاصل می‌شود. تابع $m(t)$ را میانگین عمر باقیمانده T می‌گویند و در واقع متوسط عمر باقیمانده T را در هر لحظه از زمان نشان می‌دهد.

$$m(\cdot) = E(T)$$

مثال ۶.۳ فرض کنید توزیع طول عمر یک لامپ الکتریکی برحسب ماه به صورت زیر باشد.

$$F(t) = 1 - \frac{(3-t)^3}{9}, \quad 0 < t < 3$$

الف) تابع نرخ خطر F' را تعیین کنید.

ب) قابلیت اعتماد این لامپ در زمان $t=2$ ماه چقدر است؟

ج) میانگین باقیمانده عمر لامپ را به دست آورید.

د) اگر بدانیم که لامپ در زمان $t=1$ هنوز کار می‌کند، چقدر احتمال دارد که یک ماه دیگر کار کند؟

حل. الف) تابع چگالی احتمال طول عمر لامپ برابر است با

$$f(t) = \frac{1}{9}(3-t), \quad 0 < t < 3$$

در نتیجه تابع نرخ خطر لامپ مساوی است با

$$h(t) = \frac{1}{3-t}, \quad 0 < t < 3$$

به راحتی ثابت می‌شود که $h(t)$ تابعی صعودی از t است.

ب) تابع قابلیت اعتماد لامپ مساوی است با

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - F(t) \\ &= \frac{(3-t)^3}{9}, \end{aligned}$$

و بنابراین در زمان $t=2$ قابلیت اعتماد لامپ برابر است با

$$R(2) = \frac{(3-2)^3}{9} = \frac{1}{9}.$$

ج) میانگین عمر باقیمانده T به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} m(t) &= \int_t^{\infty} \frac{R(x)}{R(t)} dx \\ &= \int_t^{\infty} \frac{(3-x)}{(3-t)} dx \\ &= 1 - \frac{t}{3}, \quad 0 < t < 3. \end{aligned}$$

(۵) احتمال مطلوب برابر است با

$$\begin{aligned} P(T-1>1|T>1) &= \frac{P(T>2)}{P(T>1)} \\ &= \frac{R(2)}{R(1)} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

در قضیه زیر نشان می‌دهیم که رابطه بین توزیع احتمال T و میانگین باقیمانده آن یک به یک است.

قضیه ۴.۳ فرض کنیم متغیر تصادفی طول عمر T دارای قابلیت اعتماد $R(t)$ و میانگین عمر باقیمانده $m(t)$ باشد. آنگاه برای $t > 0$

$$R(t) = \frac{m(\cdot)}{m(t)} e^{-\int_t^{\cdot} \frac{dx}{m(x)}}, \quad t > 0.$$

اثبات.

با توجه به تعریف $m(t)$ داریم

$$\frac{1}{m(t)} = \frac{R(t)}{\int_t^{\infty} R(x) dx}$$

اگر از طرفین رابطه اخیر در فاصله (t, \cdot) انتگرال بگیریم به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \int_t^{\cdot} \frac{1}{m(x)} dx &= \int_t^{\cdot} \frac{R(x)}{\int_t^{\infty} R(u) du} dx \\ &= -\ln \left[\int_t^{\infty} R(u) du \right]_{\cdot}^t \\ &= -\ln \frac{\int_t^{\infty} R(u) du}{m(\cdot)}. \end{aligned}$$

$$\frac{\int_t^{\infty} R(u)du}{m(\cdot)} = e^{-\int_t^{\infty} \frac{dx}{m(x)}}.$$

با مشتق گیری از طرفین این رابطه بر حسب t به دست می‌آوریم

$$R(t) = \frac{m(\cdot)}{m(t)} e^{-\int_t^{\infty} \frac{dx}{m(x)}}.$$

و اثبات کامل می‌شود.

قضیه زیر رابطه بین تابع میانگین عمر باقیمانده $m(t)$ و تابع نرخ خطر $h(t)$ را نشان می‌دهد.

قضیه ۵.۳ اگر $m(t)$ و $h(t)$ به ترتیب میانگین عمر باقیمانده و تابع نرخ خطر T باشند آنگاه،

$$h(t) = \frac{1 + m'(t)}{m(t)}$$

اثبات.

برای اثبات ادعا کافی است از $m(t)$ بر حسب t مشتق بگیریم. اگر چنین کنیم به دست می‌آوریم:

$$m'(t) = \frac{-R'(t) + f(t) \int_t^{\infty} R(x)dx}{R'(t)} \\ = -1 + h(t)m(t)$$

و در نتیجه اثبات کامل است.

در بررسی خصوصیات یک متغیر تصادفی و توزیع احتمال آن، به ویژه یک متغیر طول عمر، مشخصه‌های دیگری نیز وجود دارند که هر یکی می‌تواند در جایگاه خود مهم باشد. یکی از آن‌ها واریانس متغیر طول عمر T است. اگر $V(T)$ واریانس T باشد. آنگاه معیاری است برای اندازه‌گیری میزان پراکندگی T ، حول میانگین آن و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$V(T) = E(T - E(T))^2.$$

به راحتی می‌توان نشان داد که $V(T)$ به صورت زیر نیز قابل نمایش است که از نقطه نظر محاسباتی می‌تواند مفید واقع شود.

$$V(T) = E(T^2) - (E(T))^2.$$

جذر مثبت $\sqrt{V(T)}$ ، یعنی $V(T)$ به انحراف استاندارد (انحراف معیار) معروف است و در بسیاری از تحلیل‌های استنباطی به ویژه در تعیین فواصل اطمینان کاربرد دارد. انحراف استاندارد دارای مقیاس اندازه‌گیری است با متغیر T یکسان می‌باشد. برای مثال اگر T بحسب ساعت باشد، انحراف استاندارد نیز بحسب ساعت خواهد بود.
یکی دیگر از شاخص‌های مهم در مباحث آمار، صدک $p \times 100$ ، ($1 < p < 0$)، توزیع است که با t_p نمایش می‌دهیم. صدک t_p مقداری از متغیر T است که از حل معادله زیر به دست می‌آید

$$F(t_p) = p.$$

در واقع مقدار t_p ، در یک توزیع طول عمر، زمانی را نشان می‌دهد که در آن زمان به نسبت p ار واحدهای جامعه دچار از کار افتادگی می‌شود یا به تعبیر دیگر احتمال از کار افتدن یک واحد قبل از t_p مساوی p است. مقدار t_p را به چند کمتر از 100×1 نیز می‌شناسند. در حالی که $t_{0.5} = 0.5$ ، $t_{0.95} = 1.96$ برابر با میانه توزیع است. میانه توزیع یکی از شاخص‌های مرکزی توزیع است که مرکز توزیع را نشان می‌دهد، از این نقطه نظر که 50% درصد مقادیر توزیع از آن کمتر و 50% درصد مقادیر توزیع از آن بیشتر است.
یک کمیت مهم دیگر در توزیع‌های طول عمر، ضریب تغییرات می‌باشد که با $C.V$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$C.V = \frac{\sqrt{V(T)}}{E(T)}$$

هر چه قدر کهتابع چگالی متغیر کمتر باشد، مقدار $C.V$ کمتر خواهد شد.
مثال ۲.۳ فرض کنید متغیر تصادفی T دارای توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f(t) = \frac{1}{5} e^{-\frac{t}{5}}, \quad t > 0.$$

- الف) انحراف استاندارد T را تعیین کنید.
- ب) میانه توزیع را به دست آورید.
- ج) مقدار $C.V$ چقدر است؟

۵۲ قابلیت اعتماد وابسته به زمان و مفاهیم سالخوردگی

حل. الف) به راحتی می‌توان نشان داده که میانگین T برابر است با $E(T) = 5$. از طرفی با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء داریم

$$E(T) = \int_0^\infty t^5 \frac{1}{5} e^{-\frac{t}{5}} dt \\ = 5.$$

و بنابراین

$$V(T) = E(T^2) - (E(T))^2 \\ = 50 - 25 \\ = 25$$

در نتیجه انحراف استاندارد T مساوی است با $\sqrt{V(T)} = 5$.

ب) تابع توزیع T برابر است با

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{5}}, t > 0.$$

میانه توزیع، $t_{0.5}$ ، از معادله زیر به دست می‌آید

$$1 - e^{-\frac{t_{0.5}}{5}} = 0.5$$

این معادله به راحتی نتیجه می‌دهد

$$t_{0.5} = 1/5$$

ج) با توجه به نتایج (الف) CV توزیع برابر است با

$$CV = \frac{\sqrt{V(T)}}{E(T)} = \frac{\sqrt{25}}{5} \\ = 1$$

۵.۳ مفاهیم سالخوردگی

یک مفهوم مهم در نظریه قابلیت اعتماد که در بخش‌های مختلف آن مطرح می‌شود، مفهوم سالخوردگی است. به طور شهودی، سالخوردگی به معنی افزایش نرخ از کارافتادگی در طول زمان است. از این نقطه نظر، یک معیار مناسب برای اندازه گیری سالخوردگی مفهوم نرخ خطر

است. اگر نرخ خطر صعودی باشد، متغیر طول عمر دچار سالخوردگی می‌شود و اگر تابع نرخ خطر نزولی باشد متغیر طول عمر دچار سالخوردگی منفی خواهد بود بدین معنی که سیستم مربوطه با گذشت زمان جوانتر می‌شود. اگر نرخ خطر بر حسب زمان ثابت باشد، اصطلاحاً می‌گوییم سیستم دچار سالخوردگی نمی‌شود. به راحتی اثبات می‌شود وضعیت اخیر زمانی اتفاق می‌افتد که توزیع تحت بررسی نمایی باشد که در فصل بعد در مورد آن بحث می‌کنیم. با توجه به بحث فوق بعضی از مفاهیم سالخوردگی را به شکل دقیق به صورت زیر معرفی می‌کنیم.

تعريف ۲.۳ فرض کنید F تابع توزیع متغیر تصادفی طول عمر T باشد. F را متعلق به کلاس توزیع‌های با نرخ خطر صعودی (نزولی) گوییم هرگاه تابع نرخ خطر آن، $(h(t),$ تابعی غیر نزولی (غیر صعودی) از t باشد.

تبصره ۲.۳ از علامت اختصاری IFR استفاده می‌کنیم بر آنکه نشان دهیم F متعلق به کلاس توزیع‌های با نرخ خطر صعودی (نزولی) است.

قضیه زیر رابطه بین کلاس توزیع‌های IFR و DFR را با رفتار $R(x|t)$ ، قابلیت اعتماد شرطی، نشان می‌دهد.

قضیه ۶.۳ توزیع F متعلق به کلاس توزیع‌های IFR است اگر و تنها اگر تابع قابلیت اعتماد شرطی آن، $R(x|t)$ ، بر حسب t نزولی (صعودی) باشد.

اثبات.

اگر از تابع $R(x|t) = \frac{R(t+x)}{R(t)}$ مشتق بگیریم (در صورت وجود مشتق) برای مقدار ثابت x به دست می‌آوریم.

$$(R(x|t))' = \frac{-f(t+x)R(t) + f(t)R(t+x)}{(R(t))'^2}$$

$R(x|t)$ نزولی (صعودی) است اگر و تنها اگر $(R(x|t))' \leq (\geq) 0$ (این معادل است با این که

$$\frac{f(t)}{R(t)} \leq (\geq) \frac{f(t+x)}{R(t+x)}, \quad t, x > 0.$$

و این یعنی

$$h(t) \leq (\geq) h(t+x)$$

ولذا اثبات کامل است. ■

نتیجه این قضیه بیان می کند اگر سیستم دچار سالخوردگی (سالخوردگی منفی) شود آنگاه با آنکه قابلیت اعتماد شرطی آن با گذشت زمان کمتر (بیشتر) شود و بالعکس. یکی دیگر از کلاس های مهم توزیع ها، کلاس توزیع های میانگین باقیمانده عمر صعودی (نزولی) است. تعریف زیر این مفهوم را ارائه می کند.

یکی دیگر از مفاهیم سالخوردگی قابلیت اعتماد که به ویژه در تعمیر و نگهداری سیستم ها مهم است، مفهوم "نو بهتر از استفاده شده" و "نو بدتر از استفاده شده" است که در زیر به تعریف آنها می پردازیم

تعریف ۳.۳ توزیع طول عمر F را "نو بهتر از استفاده شده" ("نو بدتر از استفاده شده") گوییم هر گاه به ازای هر x و y نامنفی، تابع قابلیت اعتماد آن در نامساوی زیر صدق کند.

$$R(x+y) \leq (\geq) R(x)R(y) \quad (2.3)$$

از علامت اختصاری NWU (NBU) استفاده می کنیم برای آن که نشان دهیم F متعلق به کلاس توزیع های نو بهتر از استفاده شده (نو بدتر از استفاده شده) است.

نامساوی (۲.۳) معادل است با این که بگوییم قابلیت اعتماد شرطی سیستم $R(x|y)$ (یعنی سیستم با سن y) از قابلیت اعتماد سیستم نو $R(x)$ کمتر (بیشتر) است.

به راحتی می توان نشان داد که اگر DFR (IFR ، F) باشد آنگاه NBU است. (اثبات به دانشجو و اگذار می شود)

تعریف ۴.۳ فرض کنید تابع توزیع احتمال F دارای میانگین عمر باقیمانده $m(t)$ باشد. گوییم F متعلق به کلاس توزیع های با میانگین عمر باقیمانده نزولی (صعودی) است اگر و تنها اگر $m(t)$ تابعی نزولی (صعودی) بر حسب t باشد.

از علامت اختصاری $IMRL$ ($DMRL$) استفاده می کنیم برای آنکه نشان دهیم F متعلق به کلاس توزیع های با میانگین عمر باقیمانده نزولی (صعودی) است. اکنون قضیه زیر را اثبات می کنیم.

قضیه ۷.۳ اگر DFR (IFR ، F) باشد آنگاه $IMRL$ ($DMRL$) است.

اثبات.

در قضیه ۶.۳ دیدیم که DFR (IFR ، F) است اگر و تنها اگر به ازای x ثابت

$$\frac{R(t+x)}{R(t)} \text{ تابعی نزولی (صعودی) از } t \text{ باشد. به عبارت دیگر } DFR \text{ (IFR ، F) است}$$

اگر و تنها اگر به ازای $t_1 < t_2$ داشته باشیم

$$\frac{R(x+t_1)}{R(t_1)} \leq (\geq) \frac{R(x+t_r)}{R(t_r)}$$

اگر از طرفین رابطه اخیر روی مقادیر x در فاصله $(0, \infty)$ انتگرال بگیریم به دست می‌آوریم

$$\int_{\cdot}^{\infty} \frac{R(x+t_1)}{R(t_1)} dx \leq (\geq) \int_{\cdot}^{\infty} \frac{R(x+t_r)}{R(t_r)} dx$$

و این یعنی $(\leq) m(t_r) \geq (\leq) m(t_1)$ و اثبات کامل می‌شود.

از این قضیه نتیجه می‌گیریم که اگر سیستم دچار سالخوردگی (سالخوردگی منفی) شود آنگاه میانگین عمر باقیمانده آن با گذشت زمان کمتر (بیشتر) می‌شود. باید توجه داشت که عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست. یعنی نمی‌توان نتیجه گرفت که اگر $m(t)$ بر حسب زمان نزولی (صعودی) باشد آنگاه $h(t)$ بر حسب زمان صعودی (نزولی) است.

۶.۳ متغیرهای طول عمر گستته

در دنیای واقعی وضعیت‌هایی به وجود می‌آید که در آن‌ها متغیر تصادفی طول عمر را می‌توان گستته در نظر گرفت. برای مثال اگر T طول عمر یک اتومبیل باشد، T را می‌توان مقدار کیلومترهایی در نظر گرفت که اتومبیل قبل از خرابی طی کرده است. همچنین گاهی اوقات جهت سهولت تحلیل‌ها بهتر است یک متغیر تصادفی پیوسته را به متغیر تصادفی گستته تبدیل کرد. برای مثال اگر T طول عمر یک کامپیوتر خانگی باشد، آنگاه واضح است که T یک متغیر تصادفی پیوسته است که هر مقدار در فاصله $(0, \infty)$ را اختیار می‌کند. اگر فرض کنیم T تعداد روزهایی باشد که کامپیوتر قبل از خرابی عمل می‌کند، آنگاه T یک متغیر تصادفی خواهد بود که مقادیر $1, 2, \dots, n$ را اختیار می‌کند.

در ادامه فرض کنیم T متغیر طول عمر گستته باشد که روی مجموعه $S = \{1, 2, \dots\}$ مقدار بگیرد. فرض کنید $f(t)$ تابع جرم احتمال T باشد. یعنی

$$f(t) = P(T = t), \quad t \in S$$

اگر $F(t)$ تابع توزیع T باشد آنگاه

$$F(t) = P(T \leq t), \quad t \in S$$

ولذا تابع قابلیت اعتماد آن برابر خواهد بود با

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - F(t) \\ &= P(T > t) \end{aligned}$$

تابع نرخ خطر T را با $h(t)$ نمایش می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} h(t) &= P(T = t | T \geq t) \\ &= \frac{P(T = t)}{P(T \geq t)} \\ &= \frac{f(t)}{R(t-1)}, \quad t \in S \end{aligned}$$

توجه کنید که در حالت گسسته، $h(t)$ یک احتمال شرطی است و همواره مقدار آن بین صفر و یک است.

تابع توزیع F را می‌توان با استفاده از $h(t)$ به دست آورد. بدین منظور به ازای $t \in S$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} 1 - h(t) &= 1 - \frac{f(t)}{P(T \geq t)} \\ &= \frac{P(T \geq t+1)}{P(T \geq t)} \end{aligned}$$

اگر این معادله بازگشتی را حل کنیم به دست می‌آوریم

$$P(T \geq t) = \prod_{i=1}^{t-1} [1 - h(i)], \quad t = 1, 2, \dots$$

و بنابراین تابع جرم احتمال T برابر است با

$$\begin{aligned} f(r) &= P(T \geq t) - P(T \geq t+1) \\ &= \prod_{i=1}^{t-1} [1 - h(i)] - \prod_{i=1}^t [1 - h(i)] \\ &= h(t) \prod_{i=1}^{t-1} [1 - h(i)] \end{aligned}$$

در حالت گسسته میانگین T را بر حسب تابع قابلیت اعتماد $R(t)$ به صورت زیر می‌توان محاسبه کرد. ابتدا توجه کنید که میانگین T بر حسب $f(t)$ برابر است با

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{t=1}^{\infty} t f(t) \\ &= f(1) + 2f(2) + 3f(3) + \dots \end{aligned}$$

سمت راست رابطه اخیر را می‌توان به صورت زیر دوباره نویسی کرد.

$$\begin{aligned} &f(1) + f(2) + f(3) + \dots \\ &f(2) + f(3) + f(4) + \dots \\ &f(3) + f(4) + \dots \\ &\vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

سطر اول نمایش فوق برابر است با $P(T \geq 1)$ ، سطر دوم برابر است با $P(T \geq 2)$ و ... در نتیجه $E(T)$ که برابر با جمع سطرهای نمایش فوق است، مساوی خواهد شد با

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{t=1}^{\infty} P(T \geq t) \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} R(t-1) \end{aligned} \tag{۳.۲}$$

اکنون فرض کنید $T_t = (T - t \mid T \geq t)$ عمر باقیمانده T باشد آنگاه

$$\begin{aligned} P(T_t \geq x) &= P(T - t \geq x \mid T \geq t) \\ &= \frac{P(T \geq x+t)}{P(T \geq t)} \\ &= \frac{R(x+t-1)}{R(t-1)} \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه اخیر و نمایش (۳.۲) عمر باقیمانده T ، که با $m(t) = m(t)$ نمایش می‌دهیم، برابر است با

$$\begin{aligned} m(t) &= \sum_{x=1}^{\infty} P(T \geq x) \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{R(x+t-1)}{R(t-1)} \\ &= \frac{\sum_{u=t-1}^{\infty} R(u)}{R(t-1)}, \quad t = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

مثال ۸.۳ فرض کنید متغیر طول عمر T دارای جرم احتمال زیر باشد که در آن T تعداد ماههایی است که سیستم قبل از اولین خرابی کار می‌کند.

$$f(t) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^t, \quad t = 0, 1, \dots$$

در این حالت تابع قابلیت اعتماد T برابر است با

$$\begin{aligned} R(t) &= P(T > t) \\ &= \sum_{x=t+1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^x = \left(\frac{2}{3} \right)^{t+1} \end{aligned}$$

تابع نرخ خطر T مساوی است با

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{f(t)}{R(t-1)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^t}{\left(\frac{2}{3} \right)^t} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

که مقداری ثابت است و به t بستگی ندارد. میانگین باقیمانده عمر به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} m(t) &= \frac{\sum_{x=t+1}^{\infty} R(x)}{R(t-1)} \\ &= \frac{\sum_{x=t+1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^{x+1}}{\left(\frac{2}{3} \right)^t}, \quad t = 0, 1, \dots \\ &= 3 \end{aligned}$$

میانگین باقیمانده عمر نیز در این حالت مقدار ۳ است که به t بستگی ندارد. این نشان می‌دهد به طور متوسط در هر لحظه از زمان که سیستم فعال باشد، مدت عملکرد آن ۳ ماه است. این توزیع حالت خاص توزیع هندسی است.

۷.۳ توزیع طول عمر سیستم‌های منسجم

در فصل دوم قابلیت اعتماد سیستم‌ها را در حالت ایستا مورد بررسی قرار دادیم. بدین معنی که فرض کردیم یک جزء در سیستم دو وضعیت دارد، یا کار می‌کند یا از کار افتاده است. به همین دلیل برای سیستم نیز دو وضعیت در نظر گرفتیم. متغیرهای مورد بررسی در حالت ایستا مقادیر ۰ یا ۱ را اختیار می‌کردند. در این بخش می‌خواهیم وضعیتی را مورد بررسی قرار دهیم که در آن برای هر یک از اجزای سیستم و در نتیجه برای سیستم طول عمر قائل شویم. در مطالعه چنین وضعیتی قادر خواهیم بود که قابلیت اعتماد سیستم را، در هر لحظه از زمان، به عنوان تابعی از قابلیت اعتماد اجزای سیستم به صورت دقیق محاسبه کنیم یا کران‌هایی برای آن ارائه کنیم.

فرض کنید φ تابع ساختار یک سیستم با n جزء باشد و فرضیات زیر را در نظر بگیرید.
 الف) فرض کنید جزء i ام، $i=1, 2, \dots, n$ ، دارای طول عمر T_i باشد که دارای تابع توزیع $f_i(t)$ ، تابع چگالی $F_i(t)$ و تابع قابلیت اعتماد $R_i(t)$ است.
 ب) T_i ها متغیرهای تصادفی مستقل‌اند، $i=1, 2, \dots, n$.

ج) در زمان $t=0$ همه اجزاء فعال هستند. اجزایی که از کار می‌افتد تعییر یا تعویض نمی‌شوند و در همان حالت باقی می‌مانند.

برای تعریف طول عمر سیستم فرض کنید متغیرهای تصادفی دو مقداری $X_i(t)$ ، $i=1, 2, \dots, n$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$X_i(t) = \begin{cases} 1, & T_i > t \\ 0, & T_i \leq t \end{cases}$$

و بردار وضعیت سیستم را با $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ نمایش می‌دهیم. اکنون تعریف زیر را داریم.

تعریف ۵.۳ طول عمر سیستم مقداری از t است که در آن سیستم برای اولین بار وارد وضعیت از کار افتادگی می‌شود. اگر این مقدار را با T نمایش دهیم آنگاه

$$T = \inf\{t; \varphi(\mathbf{X}(t)) = 0\}.$$

۶۰ قابلیت اعتماد وابسته به زمان و مفاهیم سالخوردگی

اگر $R(t) = P(T > t)$ قابلیت اعتماد سیستم باشد آنگاه برای به دست آوردن $R(t)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم. فرض کنید $h(\mathbf{p})$ تابع قابلیت اعتماد سیستم در حالت ایستا باشد یعنی

$$h(\mathbf{p}) = E(\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)).$$

آنگاه بسته به نوع ساختار سیستم تابعی مانند ψ وجود دارد که

$$h(\mathbf{p}) = \psi(p_1, p_2, \dots, p_n).$$

با توجه به این که تابع قابلیت اعتماد سیستم در زمان t برابر است با

$$R(t) = \psi(R_1(t), R_2(t), \dots, R_n(t))$$

برای توضیح بیشتر مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۹.۳ سیستم متوالی: فرض کنید ساختار φ متوالی با n جزء است که به طور مستقل کار می‌کنند. اگر T_1, T_2, \dots, T_n طول عمر اجزای سیستم باشند آنگاه طول عمر سیستم برابر است با $T = \min(T_1, T_2, \dots, T_n)$. در این حالت قابلیت اعتماد سیستم به طور مستقیم به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} R(t) &= P(T > t) \\ &= P(\min(T_1, T_2, \dots, T_n) > t) \\ &= \prod_{i=1}^n P(T_i > t) \quad \text{از فرض استقلال} \\ &= \prod_{i=1}^n R_i(t) \end{aligned}$$

توجه کنید که قابلیت اعتماد سیستم در حالت ایستا برابر بود با $p_i = R_i(t)$. اگر در تساوی آخر قرار دهیم $R(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t)$

در حالتی که به ازای هر t ، آنگاه به دست می‌آوریم

$$R(t) = \left(R_i(t) \right)^n$$

توجه کنید که در این حالت تابع نرخ خطر سیستم برابر است با

$$h(t) = nh_i(t), \quad t > 0.$$

یعنی، در حالتی که اجزای سیستم هم توزیع باشند، نرخ خطر سیستم برابر است با n برابر نرخ خطر هر یک از اجزای آن. اگر h_i تابعی صعودی (تزویی) از t باشد آنگاه $h(t)$ نیز چنین است.

مثال ۱۰.۳ سیستم موازی: فرض کنید ساختار φ موازی با n جزء است که به طور مستقل عمل می‌کنند. اگر طول عمر اجزای سیستم T_1, T_2, \dots, T_n باشند آنگاه طول عمر سیستم برابر است با $T = \max(T_1, T_2, \dots, T_n)$ و قابلیت اعتماد سیستم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} R(t) &= P(T > t) \\ &= P(\max(T_1, T_2, \dots, T_n) > t) \\ &= P(\max(T_1, T_2, \dots, T_n) \leq t) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n P(T_i \leq t) \quad \text{از فرض استقلال} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(T_i > t)) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t)). \end{aligned} \quad (4.3)$$

نتیجه اخیر را می‌توانستیم از این واقعیت به دست آوریم که در حالت ایستا، قابلیت اعتماد سیستم برابر بود با

$$h(\mathbf{p}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i).$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $p_i = R_i(t)$ آنگاه $R(t)$ برابر خواهد شد با (۴.۳). اگر به ازای هر $i = 1, 2, \dots, n$ ، $R_i(t) = R(t)$ باشد آنگاه قابلیت اعتماد مساوی است با،

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - (1 - R_i(t))^n \\ &= 1 - (F_i(t))^n, \quad t > 0. \end{aligned}$$

که در آن F_i تابع توزیع مشترک اجزاء است. در این حالت تابع نرخ خطر سیستم به صورت زیر به دست می‌آید. تابع چگالی طول عمر سیستم مساوی است با

$$f(t) = nf_{\wedge}(t)F_{\wedge}^{n-1}(t), \quad t > .$$

در نتیجه تابع نرخ خطر سیستم برابر است:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{nf_{\wedge}(t)F_{\wedge}^{n-1}(t)}{1 - F_{\wedge}^n(t)} \\ &= \frac{nf_{\wedge}(t)F_{\wedge}^{n-1}(t)}{(1 - F_{\wedge}(t)) \sum_{i=1}^n F_{\wedge}^{i-1}(t)} \\ &= h_{\wedge}(t)L(t) \end{aligned}$$

که در آن

$$L(t) = \frac{nF_{\wedge}^{n-1}(t)}{\sum_{i=1}^n F_{\wedge}^{i-1}(t)}.$$

به راحتی می‌توان نشان داد که $1 \leq L(t) < h_{\wedge}(t)$ و این یعنی تابع نرخ خطر یک سیستم موازی همواره کمتر یا مساوی است از نرخ خطر هر یک از اجزای سیستم.

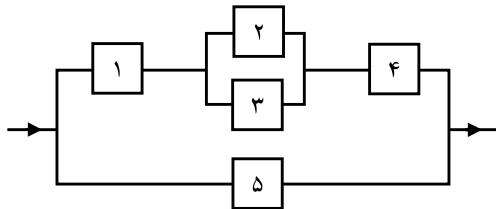
مثال ۱۱.۳ سیستم‌های (۱) از n : برای چنین سیستم‌هایی اگر طول $T_n, T_{n-1}, \dots, T_1, T_0$ عمر اجزاء باشند، آنگاه با توجه به تعریف سیستم، طول عمر سیستم برابر است با $T = T_{kn}$ که در آن $T_{kn}, T_{kn-1}, \dots, T_1, T_0$ این آماره ترتیبی متناظر با متغیرهای $T_n, T_{n-1}, \dots, T_1, T_0$ است. اگر فرض کنیم $R_i(t) = R_i(t)$ ها، $i = 1, 2, \dots, n$ مستقل و هم توزیع با قابلیت اعتماد مشترک آنگاه قابلیت اعتماد سیستم به صورت زیر به دست می‌آید. قابلیت اعتماد سیستم در حالت ایستا برابر است با

$$h(\mathbf{p}) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^{n-i} (1-p)^i$$

بنابراین با قرار دادن $p = R_i(t)$ قابلیت اعتماد سیستم در زمان t به دست می‌آید. یعنی

$$\begin{aligned} R(t) &= P(T_{kn} > t) \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (R_i(t))^{n-i} (1 - R_i(t))^i, \quad t > . \end{aligned}$$

مثال ۱۲.۳ سیستمی را با نمودار ۳.۳ را در نظر بگیرید و فرض کنید که اجزای سیستم دارای طول عمر T_i ، $i=1, 2, \dots, n$ هستند که از یکدیگر مستقل و دارای قابلیت اعتماد $R_i(t)$ هستند. مطلوب است تعیین تابع قابلیت اعتماد طول عمر سیستم.



شکل ۳.۳ نمودار مثال ۱۲.۳

حل. ابتدا توجه کنید که سیستم دارای ۳ مجموعه مسیر مینیمال به صورت $P_1 = \{1, 2, 4\}$ ، $P_2 = \{1, 3, 4\}$ و $P_3 = \{5\}$ است. بنابراین تابع ساختار سیستم برابر است $\varphi(\mathbf{x}) = 1 - [(1 - x_1 x_2 x_4)(1 - x_1 x_3 x_4)(1 - x_5)]$.

به راحتی می‌توان نشان داد که قابلیت اعتماد سیستم در این حالت، با فرض $p_i = p$ ، برابر است با

$$\begin{aligned} h(p) &= E(\varphi(\mathbf{X})) \\ &= p^1 + 2p^2 - 3p^3 + p^5. \end{aligned}$$

بنابراین قابلیت اعتماد سیستم که در آن اجزاء مستقل و دارای قابلیت مشترک $R_i(t)$ هستند برابر است با

$$R(t) = R_1(t) + 2R_2(t) - 3R_3(t) + R_5(t).$$

ذکر این نکته لازم است که طول عمر سیستم را در مثال ۹.۳ می‌توان به راحتی با عملگرهای مینیمم-ماکزیمم تعیین کرد. اگر T طول عمر سیستم باشد، با یک بررسی ساده می‌توان نشان داد،

$$T = \max \left\{ T_5, \min \left(T_1, T_4, \max (T_2, T_3) \right) \right\}.$$

اکنون با استفاده از متغیر تصادفی T می‌توان قابلیت اعتماد سیستم را محاسبه کرد. با محاسبات ساده می‌توان نشان داد که

$$R(t) = P(T > t) = R_i^*(t) + 2R_i^r(t) - 3R_i^s(t) + R_i^d(t).$$

به طور کلی طول عمر یک سیستم منسجم را می‌توان به صورت زیر نمایش داد. فرض کنید طول عمر اجزای سیستم T_n, T_{n-1}, \dots, T_1 باشد. آنگاه

$$\begin{aligned} T &= \min_{1 \leq j \leq k} \max_{i \in C_j} T_i \\ &= \max_{1 \leq j \leq l} \min_{i \in P_j} T_i \end{aligned}$$

که در آن P_j, P_{j-1}, \dots, P_1 و C_j, C_{j-1}, \dots, C_1 به ترتیب نشان دهنده مجموعه مسیرها و قطع کننده‌های مینیمال سیستم هستند.

مشابه کران‌هایی که برای قابلیت اعتماد سیستم در حالت ایستا به دست می‌آوریم، در اینجا نیز می‌توان کران‌های قابلیت اعتماد را برای طول عمر سیستم‌ها تعیین کرد. بدین منظور قضیه زیر را در نظر بگیرید که اثبات آن را به خواننده واگذار می‌کنیم.

قضیه ۸.۳ فرض کنید T_n, T_{n-1}, \dots, T_1 طول عمر اجزای یک سیستم منسجم باشند که مستقل از یکدیگر عمل می‌کنند. قابلیت اعتماد جزء i ام را با $R_i(t)$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، نمایش دهید. اگر P_j, P_{j-1}, \dots, P_1 مجموعه مسیرهای مینیمال و C_k, C_{k-1}, \dots, C_1 مجموعه قطع کننده‌های مینیمال سیستم باشند و قابلیت اعتماد سیستم را با $R(t)$ نمایش دهیم آنگاه

$$\prod_{i=1}^k \left(1 - \prod_{j \in C_i} (1 - R_j(t)) \right) \leq R(t) \leq 1 - \prod_{i=1}^l \left(1 - \prod_{j \in P_i} R_j(t) \right).$$

۸.۳ مسائل

۱.تابع توزیع طول عمر یک قطعه الکتریکی بر حسب ماه به صورت زیر است،

$$F(t) = \begin{cases} \frac{t^4}{256}, & 0 < t < 4 \\ 1, & t \geq 4 \end{cases}$$

الف) تابع نرخ خطر این قطعه را به دست آورید.

ب) میانگین عمر قطعه را تعیین کنید.

ج) قابلیت اعتماد قطعه در زمان $t = 2$ چقدر است؟

۲. فرض کنید تابع نرخ خطر یک متغیر طول عمر T برابر است با

$$h(t) = \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{1+t^\alpha}, t > 0, \alpha > 1$$

الف) تابع قابلیت اعتماد T را تعیین کنید.

ب) برای $\alpha = 2$ ، با فرض اینکه سیستمی با طول عمر T در زمان $t=2$ هنوز فعال است، احتمال آن را محاسبه کنید که ۲ واحد زمان دیگر کار کند.

۳. فرض کنید که تابع خطر یک سیستم به صورت زیر باشد،

$$h(t) = \begin{cases} h_1, & 0 \leq t \leq t_1 \\ h_2, & t_1 < t < \infty \end{cases}$$

یعنی نرخ خطر تا زمان t_1 مقدار ثابت h_1 است و بعد از زمان t_1 مقدار آن ثابت h_2 است به طوریکه $h_1 < h_2$.

الف) تابع قابلیت اعتماد سیستم را به دست آورید.

ب) نمودار تابع قابلیت اعتماد را رسم کنید.

ج) قابلیت اعتماد سیستم در زمان $t_1 = \frac{1}{2}$ (سال) به ازای $h_1 = \frac{1}{2}$ و $h_2 = \frac{1}{3}$ و $t = 6$ چقدر است؟

د) چقدر احتمال دارد که سیستم حداقل ۹ سال و حداکثر ۱۰ سال عمر کند؟

۴. یکی دیگر از مفاهیم سالخوردگی بر مبنای تابع نرخ خطر تجمعی ($H(t) = -\ln R(t)$)

تعریف می شود. گوییم متغیر تصادفی طول عمر T ، دارای نرخ خطر تجمعی صعودی (نزولی)

است و با علامت $DFRA$ ($IFRA$) نمایش می دهیم هر گاه $\frac{H(t)}{t}$ تابعی صعودی (نزولی)

از t باشد. ثابت کنید هرگاه DFR (IFR) T باشد آنگاه $DFRA$ ($IFRA$) است.

۵. فرض کنید $(h_1(t), h_2(t))$ توابع نرخ خطر دو سیستم باشند و تابع قابلیت اعتماد آنها را

به ترتیب با $R_1(t)$ و $R_2(t)$ نمایش دهید. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه به ازای هر

$$\frac{R_1(t)}{R_2(t)}$$

تابعی نزولی از t باشد.

۶. فرض کنید $h_i(t)$ و $h_j(t)$ توابع نرخ خطر دو سیستم باشند و به ازای هر t ، $h_i(t) \leq h_j(t)$. ثابت کنید $m_i(t) \geq m_j(t)$ ، که در آن $m_i(t)$ و $m_j(t)$ به ترتیب میانگین‌های عمر باقیمانده سیستم‌ها هستند.

۷. فرض کنید تابع میانگین باقیمانده عمر یک سیستم به صورت $m(t) = at + b$ باشد که در $\infty > a > -1$ و $b > 0$.

الف) تابع قابلیت اعتماد سیستم را به دست آورید.

ب) نشان دهید که سیستم DFR است.

ج) فرض کنید $\theta(t) = \frac{m(t)}{m(0)}$ ، نشان دهید که تابع قابلیت اعتماد سیستم در تساوی زیر صدق می‌کند.

$$R(\theta(t)x + t) = R(t)R(x)$$

۸. فرض کنید T_1, T_2, \dots, T_n متغیرهای طول عمر مستقل و به ترتیب دارای توابع نرخ خطر باشند. نشان دهید که نرخ خطر یک سیستم متوالی با طول عمرهای $h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t), h(t)$ برابر است با، T_i

$$h(t) = \sum_{i=1}^n h_i(t)$$

۹. فرض کنید یک سیستم موازی دارای n جزء است که در آن اجزاء دارای طول عمرهای مستقل و هم توزیع‌اند. ثابت کنید که اگر توزیع مشترک اجزاء IFR باشد آنگاه توزیع طول عمر سیستم IFR است.

۱۰. کلاس مهم دیگری از توزیع‌های طول عمر، کلاس توزیع‌های $IFRA$ ($DFRA$) است. توزیع طول عمر F را متعلق به کلاس توزیع‌های با "متوسط نرخ خطر صعودی" (متوسط نرخ خطر نزولی) گوییم و با $\frac{H(t)}{t}$ تابعی غیر $DFRA$ ($IFRA$) نمایش می‌دهیم هر گاه $H(t) = -\ln R(t)$ تابع نرخ خطر تجمعی F نزولی (غیر صعودی) از t باشد که در آن $R(t) = e^{-H(t)}$ باشد آن است که

$$(R(t))^{\frac{1}{t}}$$

۱۱. ثابت کنید که رابطه زیر بین کلاس توزیع‌های طول عمر برقرار است.

$$\begin{aligned} IFR &\Rightarrow IFRA \Rightarrow NBU \\ DFR &\Rightarrow DFRA \Rightarrow NWU \end{aligned}$$

۱۲. فرض کنید T یک متغیر تصادفی طول عمر با تابع توزیع F باشد و C را یک مقدار ثابت در نظر بگیرید و قرار دهید $E(X) = \min(C, T)$. X را تعیین کنید.

۱۳. فرض کنید T_1 و T_2 دو متغیر تصادفی طول عمر مستقل و به ترتیب دارای توزیع‌های F و G باشند. اگر f و g به ترتیب توابع چگالی متناظر با T_1 و T_2 باشند.

(الف) $P(T_1 > T_2)$ را تعیین کنید.

(ب) اگر $T_1^t = (T_1 - t | T_1 > t)$ و $T_2^t = (T_2 - t | T_2 > t)$ به ترتیب عمر باقیمانده متناظر با T_1 و T_2 باشند، $\rho(t) = P(T_1^t > T_2^t)$ را به دست آورید.

(ج) اگر $G(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}$ ، $t > 0$ و $F(t) = 1 - e^{-\lambda_2 t}$ ، احتمالات ارائه شده در (الف) و (ب) را به دست آورید.

۱۴. فرض کنید دو متغیر طول عمر مستقل T_1 و T_2 دارای توابع قابلیت اعتماد زیر باشند

$$R_{T_1}(t) = 1 - 2t, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \quad R_{T_2}(t) = 1 - \frac{t}{2}, \quad 0 \leq t \leq 2$$

(الف) میانگین طول عمر یک سیستم متواالی متشكل از T_1 و T_2 را تعیین کنید.

(ب) میانگین طول عمر سیستم موازی متشكل از T_1 و T_2 را تعیین کنید.

۱۵. تابع نرخ خطر سیستمی دارای شکل زیر می‌باشد

$$h(t) = \alpha \mu t^{\alpha-1} + \beta \gamma t^{\gamma-1}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \mu > 0, \gamma > 0$$

قابلیت اعتماد سیستم را تعیین کنید. آیا می‌توان نتیجه گرفت که سیستم دارای ساختار متشكل از دو جزء است؟

۱۶. فرض کنید T_1 و T_2 سه متغیر طول عمر مستقل باشند که به ترتیب دارای توابع قابلیت اعتماد $R_{T_1}(t) = e^{-t^2}$, $t > 0$ و $R_{T_2}(t) = e^{-\sqrt{t}}$, $t > 0$ باشند. اگر T طول عمر سیستمی متواالی مشکل از T_1 و T_2 باشد، آنگاه الف) قابلیت اعتماد سیستم را تعیین کنید.

ب) به صورت تحلیلی یا نموداری نشان دهید که تابع نرخ خطر سیستم U -شکل است.

۱۷. فرض کنید T دارای تابع نرخ خطر $h(t) = \frac{t}{t+1}$, $t > 0$ باشد.

الف) نشان دهید که T متعلق به کلاس IFR است.
ب) تابع قابلیت اعتماد T را تعیین کنید.
ج) میانگین عمر باقیمانده T را به دست آورد و در مورد رفتار آن بحث کنید.

۱۸. فرض کنید یک قطعه الکتریکی دارای طول عمری است که تابع قابلیت اعتماد آن بر حسب ماه به صورت زیر است

$$R(t) = \frac{4}{(t+2)^2}, t > 0.$$

الف) میانگین عمر باقیمانده T را در زمان $t = 3$ ماه تعیین کنید.

ب) نمودار میانگین عمر باقیمانده، $m(t)$, رارسم کنید.

۱۹. ثابت کنید اگر T یک متغیر طول عمر با میانگین عمر باقیمانده $m(t)$ و تابع قابلیت اعتماد $R(t)$ باشد آنگاه میانگین آن μ را می توان به صورت زیر نوشت

$$\mu = \int_0^t R(x) dx + R(t)m(t)$$

تعییر این رابطه چیست؟

۲۰. فرض کنید تابع نرخ خطر سیستمی به صورت زیر باشد

$$h(t) = \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt[4]{t}}, t > 0.$$

الف) تابع قابلیت اعتماد سیستم را تعیین کنید.

ب) نشان دهید که $(t, h(t))$, U -شکل است.

۲۱. قضیه ۸.۳ را اثبات کنید.

۲۲. یکی از مفاهیم مهم در تحلیل داده‌های عمر، مفهوم نرخ مخاطره‌های متناسب است. فرض کنیم T_1 و T_2 ، دو متغیر تصادفی طول عمر و به ترتیب دارای نرخ خطرهای h_1 و h_2 باشند. گوییم T_1 و T_2 دارای نرخ مخاطره‌های متناسب هستند، هر گاه ثابت نامنفی مانند c وجود داشته باشد به طوریکه

$$h_2(t) = ch_1(t)$$

- (الف) ثابت کنید T_1 و T_2 دارای نرخ مخاطره‌های متناسب هستند اگر و تنها اگر $R_1(t) = (R_2(t))^c$ که در آن R_1 و R_2 به ترتیب توابع قابلیت اعتماد T_1 و T_2 هستند.
- (ب) ثابت کنید T_1 و T_2 دارای نرخ خطرهای متناسب هستند اگر و تنها اگر $\rho(t)$ در قسمت (ب) تمرین ۱۳ مقداری ثابت باشد (یعنی به t بستگی نداشته باشد).

۲۳. فرض کنید T_1 و T_2 طول عمرهای مستقل دو جزء یک سیستم متوالی باشند که به ترتیب دارای نرخ خطرهای h_1 و h_2 هستند.

(الف) اگر T طول عمر سیستم باشد، ثابت کنید به ازای $t > 0$

$$P(T_1 = T \mid T = t) = \frac{h_1(t)}{h_1(t) + h_2(t)}$$

- (ب) ثابت کنید اگر T_1 و T_2 دارای نرخ مخاطره‌های متناسب باشند آنگاه احتمال ارائه شده در قسمت (الف) به t بستگی ندارد.

۴

توزیع‌های طول عمر

۱.۵ توزیع نمایی

توزیع نمایی یکی از مهم‌ترین توزیع‌های آماری است که در مدل سازی و تحلیل داده‌های طول عمر به کار می‌رود. از جمله دلایل مهم کاربرد فراوان توزیع نمایی در قابلیت اعتماد یکی فرم ساده محاسباتی این توزیع و دیگری خواص منحصر به فرد این مدل است.
متغیر تصادفی طول عمر T دارای توزیع نمایی است و به طور خلاصه می‌نویسیم $T \sim E(\theta)$
اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0, \lambda > 0.$$

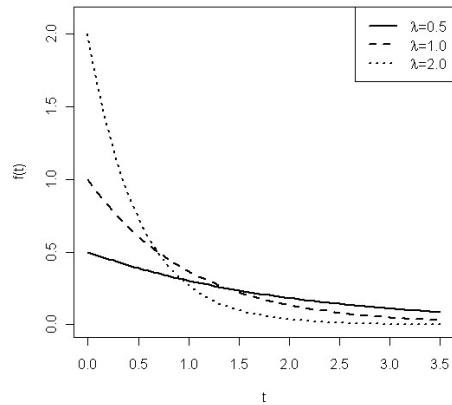
در این صورت تابع قابلیت اعتماد T برابر است با

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= e^{-\lambda t}, \quad t > 0, \lambda > 0. \end{aligned}$$

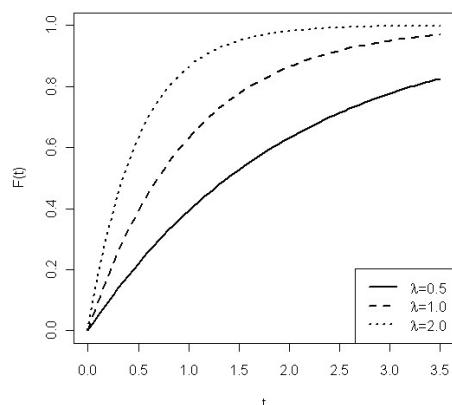
و در نتیجه تابع توزیع آن مساوی است با

$$F(t) = 1 - \lambda e^{-\lambda t}$$

λ تنها پارامتر این توزیع است که یک پارامتر مقیاس است. اگر λ معلوم باشد، هر عبارت احتمالی در مورد سیستمی با طول عمر T می‌توان محاسبه کرد. اما در مسایل کاربردی، معمولاً λ مجهول است و باید از داده برآورد شود. شکل‌های ۱.۵ و ۲.۵ به ترتیب نمودارهای $f(t)$ و $F(t)$ را برای چند مقدار λ نشان می‌دهند.



شکل ۱.۵ نمودار تابع چگالی احتمال توزیع نمایی



شکل ۲.۵ نمودار تابع توزیع تجمعی توزیع نمایی
تابع نرخ خطر توزیع نمایی، $h(t)$ برابر است با

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{f(t)}{R(t)} \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

ملاحظه می‌شود که $h(t)$ به t بستگی ندارد. یعنی تابع نرخ خطر سیستمی که دارای توزیع نمایی است با گذشت زمان تغییر نمی‌کند و همواره مساوی مقدار ثابت λ است. این خصوصیت یکی از مشخصه‌های منحصر به فرد توزیع نمایی است. به عبارت دیگر اگر تابع نرخ خطر یک متغیر تصادفی پیوسته T همواره ثابت، مثلاً λ باشد، آنگاه به راحتی اثبات می‌شود که توزیع متغیر باید نمایی باشد. دلیل درستی این مطلب از این واقعیت ناشی می‌شود که اگر تابع قابلیت اعتماد T باشد، آنگاه $R(t)$

$$\begin{aligned} R(t) &= e^{-\int_0^t h(x)dx} \\ &= e^{-\int_0^t \lambda dx} \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

نتیجه بحث فوق قضیه زیر است.

قضیه ۱.۵ در بین توزیع‌های پیوسته، توزیع نمایی تنها مدل احتمالی است که نرخ خطر آن ثابت است.

در دنیای واقعی می‌توان پدیده‌هایی یافت که برای آن‌ها فرض ثابت بودن نرخ خطر را می‌توان کم و بیش پذیرفت. برای مثال شکست یک قطعه الکتریکی مانند لامپ با گذشت زمان بر اثر سالخوردگی لامپ نیست بلکه امری کاملاً اتفاقی است. ام در مورد انسان طبیعی است که با گذشت زمان هنگامی که فرد دچار سالخوردگی می‌شود، نرخ خطر آن نیز افزایش می‌یابد. بنابراین برای مصنوعاتی مانند قطعات الکتریکی فرض ثابت بودن نرخ خطر در طول زمان غیر منطقی به نظر نمی‌رسد.

مثال ۱.۵ فرض کنید نوعی ترانزیستور دارای نرخ خطر ثابت $\lambda = 0.04$ (در هزار ساعت) باشد.

الف) چقدر احتمال دارد که یکی از نوع ترانزیستورها قبل از ۱۵۰۰۰ ساعت استفاده از کار بیافتد.

ب) چه مدت زمان باید منتظر ماند که در آن احتمال شکست برابر 10% شود.

حل. الف) ابتدا توجه کنید که باید λ را به واحد زمان بنویسیم. بنابراین در اینجا باید λ را در 10^{-5} ضرب کنیم. بنابراین $10 \times 10^{-5} = 0.00001$ و در نتیجه احتمال مطلوب برابر است با

$$\begin{aligned} F(15000) &= 1 - e^{-(0.00001 \times 15000)} \\ &= 0.9999 \\ &= 0.9999 \end{aligned}$$

ب) باید مقدار t را طوری تعیین کنیم که $F(t) = 0.9999$. بنابراین t به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} t &= \frac{-\ln(1 - 0.9999)}{0.00001} \\ &= 25126 \text{ ساعت} \end{aligned}$$

یکی دیگر از خواص منحصر به فرد توزیع نمایی که در واقع بسیاری از ویژگی‌های دیگر این توزیع را باعث می‌شود، حاصلیت فقدان حافظه است. بنابر تعریف یک متغیر تصادفی پیوسته T گوییم دارای خاصیت فقدان حافظه است اگر و تنها اگر به ازای هر دو مقدار t_1 و t_2 از تکیه‌گاه T داشته باشیم

$$P(T > t_1 + t_2 | T > t_1) = P(T > t_2)$$

به عبارت دیگر اگر $R(t)$ تابع قابلیت اعتماد T باشد، آنگاه T دارای خاصیت فقدان حافظه است اگر و تنها اگر

$$R(t_1 + t_2) = R(t_1)R(t_2), \quad t_1, t_2 > 0$$

قضیه زیر نشان می‌دهد که توزیع نمایی دارای خاصیت فقدان حافظه است.

$$R(t_1 + t_2) = R(t_1)R(t_2), \quad t_1, t_2 > 0$$

قضیه ۲.۵ اگر $T \sim E(\lambda)$ برای هر دو مقدار t_1 و t_2 داریم

$$R(t_1 + t_r) = R(t_1)R(t_r)$$

اثبات.

اگر $T \sim E(\lambda)$ داریم

$$\begin{aligned} R(t_1 + t_r) &= e^{-\lambda(t_1 + t_r)} \\ &= e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda t_r} \\ &= R(t_1)R(t_r) \end{aligned}$$

و بنابراین اثبات کامل است.

در متون پیشرفته تر ثابت می شود که در بین توزیع های پیوسته، توزیع نمایی، تنها مدل آماری است که در خاصیت فقدان حافظه صدق می کند.

از نقطه نظر سالخوردگی، خاصیت فقدان حافظه نشان می دهد که یک سیستم با توزیع طول عمر نمایی هرگز دچار سالخوردگی نمی شود. یعنی اگر بدانیم که سیستم در زمان t هنوز کار می کند، آنگاه احتمال اینکه به اندازه t واحد زمان دیگر کار کند برابر است برابر است با احتمال اینکه سیستم در وضعیت نو بودن به اندازه t واحد زمان کار کند. بنابراین از دیدگاه قابلیت اعتماد اگر سیستم دارای توزیع نمایی باشد آنگاه

(الف) چون سیستم استفاده شده مانند یک سیستم نو عمل می کند، نیازی به ارائه و طرح برنامه برای تعویض و نگهداری سیستم نیست.

(ب) در برآورده میانگین طول عمر، صدک های توزیع، قابلیت اعتماد و غیره، داده های لازم می توانند بر مبنای اینکه واحد چه مدت زمان کار کرده و اینکه تعداد شکست ها چقدر بوده است جمع آوری شوند و سن هر یک از واحدهای مورد بررسی مهم نیست.
با توجه به خاصیت فقدان حافظه به راحتی نتیجه می گیریم که میانگین عمر باقیمانده توزیع نمایی نیز مقداری ثابت است و به زمان بستگی ندارد. دلیل درستی این مطلب این است که

$$\begin{aligned} m(t) &= E(T - t | T > t) \\ &= \int_t^\infty R(x | t) dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty R(x)dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda$$

گشتاور مرتبه k ام توزیع نمایی، یعنی $E(T^k)$ به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} E(T^k) &= \int_0^\infty \lambda t^k e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\lambda^k} \int_0^\infty x^k e^{-x} dx \quad \text{با تبدیل } \lambda t = x \\ &= \lambda^{-k} \Gamma(k+1) \end{aligned}$$

که در آن $\Gamma(k+1) = \int_0^\infty x^k e^{-x} dx$

در خاصیت زیر صدق می‌کند.

$$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k)$$

به ویژه برای $k = 1, 2, \dots$ داریم

$$E(T^k) = \frac{k!}{\lambda^k}$$

بنابراین واریانس توزیع نمایی برابر است با

$$\begin{aligned} V(T) &= E(T^2) - (E(T))^2 \\ &= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد ضریب تغییرات این توزیع که بنابر تعریف مساوی است با $\frac{\sqrt{V(T)}}{E(T)}$ برابر با ۱ است.

اگر صد ک مرتبه p ام توزیع نمایی را با $E_p(\lambda)$ نمایش دهیم آنگاه

$$E_p(\lambda) = \frac{-\ln(1-p)}{\lambda}$$

بنابراین میانه توزیع نمایی برابر خواهد شد با $E_p(\lambda) = 0.693\lambda^{-1}$. این نشان می‌دهد که برای مثال اگر میانگین زمان کارکرد یک سیستم ۱۰۰ ساعت باشد آنگاه ۵۰ درصد چنین سیستم‌هایی طول عمر کمتر از $69.3/3$ ساعت خواهد داشت. دلیل چنین اتفاقی چو له بودن زیاد توزیع است. همچنین به راحتی می‌توان نشان داد که مُد این توزیع (یعنی مقدار که تابع چگالی در آنجا ماکریم خود را اختیار می‌کند) برابر صفر است. نتایج بدست آمده در مورد این توزیع را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم.

جدول ۱.۵ خواص توزیع نمایی

مقدار	نام مشخصه
$1 - e^{-\lambda t}$	تابع توزیع $F(t)$
$\lambda e^{-\lambda t}$	تابع چگالی $f(t)$
$e^{-\lambda t}$	تابع قابلیت اعتماد $R(t)$
λ	تابع نرخ خطر $h(t)$
λ	تابع میانگین عمر باقیمانده $m(t)$
λ^{-1}	میانگین $E(T)$
λ^{-1}	واریانس $V(T)$
$0.693\lambda^{-1}$	میانه
.	مُد

یکی از خواص جالب توزیع نمایی در قضیه زیر بیان و اثبات می‌شود که نشان می‌دهد در یک مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل نمایی، کمترین مقدار نمونه نیز دارای توزیع نمایی است. قضیه ۳.۵ اگر T_1, T_2, \dots, T_n متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با تابع توزیع

$$F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}, t_i > 0, \lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$$

$\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ باشد آنگاه متغیر $T = \min(T_1, T_2, \dots, T_n)$ نیز دارای توزیع نمایی با پارامتر λ باشد آنگاه است.

اثبات.

اگر $R(t)$ تابع قابلیت اعتماد T باشد آنگاه

$$\begin{aligned} R(t) &= P(T > t) \\ &= P(\min(T_1, T_2, \dots, T_n) > t) \\ &= \prod_{i=1}^n P(T_i > t) \quad \text{از استقلال } T_i \text{ ها} \\ &= \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i t} \\ &= e^{-\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)t} \end{aligned}$$

$$F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}, t_i > 0, \lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$$

■ یعنی T دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ است و اثبات کامل می‌شود.

یک نتیجه صریح این قضیه این است که از اجزای یک سیستم متوالی دارای طول عمرهای نمایی و به ترتیب با نرخ خطرهای $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ باشند، آنگاه طول عمر سیستم نیز نمایی با

$$\text{نرخ خطر} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{است.}$$

در مطالعات قابلیت اعتماد، گاهی اوقات با مسایلی سر و کار داریم که در آن‌ها آمیزه¹ توزیع‌ها مطرح می‌شود. فرض کنید $T_i, i = 1, 2, \dots, n$ ، متغیرهای تصادفی مستقل باشند با تابع چگالی $f_i(t)$. گوییم متغیر تصادفی Y آمیزه‌ای از T_1, T_2, \dots, T_n است اگر تابع چگالی آن، $f(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t), 0 \leq \alpha_i \leq 1, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ برابر باشد با

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t), 0 \leq \alpha_i \leq 1, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

¹ Mixture

از جمله مثال‌هایی که در آن آمیزه توزیع‌ها ظاهر می‌شود آن است که فرض کنید تولیدات روزانه یک کارخانه که توسط چند دستگاه بکسان تولید می‌شوند با هم در یک مکان به صورت آمیخته نگهداری شوند. فرض کنید α_i نسبت تولیدات ماشین i ام باشد که طول عمر محصول تولیدی آن T_i است، $i = 1, 2, \dots, n$. هنگامیکه مشتری یکی از این محصولات را خریداری می‌کند توزیع طول عمر آمیزه توزیع T_i ‌ها خواهد بود.

قضیه زیر نتیجه جالبی را در مورد آمیزه توزیع‌های توزیع‌های نمایی نشان می‌دهد.

قضیه ۶.۵ فرض کنید T_i که در آن T_i ‌ها مستقل‌اند، $i = 1, 2, \dots, n$ ، آنگاه آمیزه T ‌ها دارای توزیع DFR است.

اثبات.

اگر T آمیزه T_i ‌ها باشد آنگاه تابع نرخ خطر T برابر است با

$$h_T(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-\lambda_i t}}$$

اگر از $h_T(t)$ بر حسب t مشتق بگیریم به دست می‌آوریم

$$\frac{dh_T(t)}{dt} = \frac{-\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}\right)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-\lambda_i t}\right) + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-\lambda_i t}\right)^2}$$

فرض کنید $b_i = \alpha_i^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda_i t}{2}}$ ، $a_i = \alpha_i^{\frac{1}{2}} \lambda_i e^{-\frac{\lambda_i t}{2}}$ آنگاه با استفاده از نامساوی کشی-شورتر که بیان می‌کند برای اعداد حقیقی a_i و b_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ ،

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

نتیجه می‌گیریم که $\frac{dh_T(t)}{dt}$ و در نتیجه T دارای توزیع DFR است.

قبل از اینکه این بخش را به اتمام برسانیم، به این نکته اشاره می‌کنیم که در توزیع نمایی $E(\lambda)$ می‌تواند یک پارامتر مکان نیز وارد کرد. به عبارت دیگر، توزیع نمایی با دو پارامتر λ و θ که با $E(\lambda, \theta)$ نمایش می‌دهیم دارای چگالی زیر است

$$f(t) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}(t-\theta)}, \quad t > \theta$$

در قابلیت اعتماد پارامتر θ مثبت است و به آن پارامتر ضمانت گویند. برای یک متغیر طول عمر با تابع چگالی فوق، مطمئن هستیم که مقدار طول عمر همواره از θ بیشتر است. مقدار θ برای تولید کنندگان محصولات برآورده چه دقیق‌تر θ می‌تواند مهم باشد. در این توزیع نرخ خطر دوباره λ است اما میانگین طول عمر برابر با $\theta + \frac{1}{\lambda}$ خواهد بود و واریانس آن نیز $\frac{1}{\lambda^2}$ است.

۱۰.۵ آماره‌های ترتیبی توزیع نمایی

آماره‌های ترتیبی نقش به سزاوی در مطالعات طول عمر و تحلیل داده‌های قابلیت اعتماد دارند. در این بخش پس از معرفی آماره‌های ترتیبی، این آماره‌ها را در حالتی که توزیع تحت بررسی نمایی است مورد مطالعه قرار می‌دهیم. فرض کنید T_1, T_2, \dots, T_n نمونه‌های تصادفی به حجم n از توزیعی پیوسته با تابع توزیع F ، تابع چگالی f و تابع بقای R باشد. مقادیر مرتب شده نمونه را که با $T_{1:n} \leq T_{2:n} \leq \dots \leq T_{n:n}$ نمایش می‌دهیم آماره‌های ترتیبی نمونه گوییم. درین دلایل مختلف اهمیت آماره‌های ترتیبی در قابلیت اعتماد، به دو دلیل زیر اشاره می‌کنیم.

(الف) در یک سیستم $(n-k+1)$ از n ، طول عمر سیستم برابر با $T_{k:n}$ است. به طور کلی تر ثابت می‌شود که طول عمر یک سیستم منسجم با n جزء، یکی از مقادیر مرتب شده طول عمر اجزای آن است.

(ب) در برآورده متوسط طول عمر مثلاً یک قطعه الکتریکی، هنگامی که قرار است n داده تولید کنیم باید n قطعه را در زمان $t=0$ وارد آزمایش می‌کنیم و زمان شکست آنها را ثبت $T_{n:n}, T_{(n-1):n}, \dots, T_{(n-k+1):n}$ می‌کنیم. واضح است که زمان شکست قطعات مقادیر آماره‌های ترتیبی $T_{k:n}$ خواهد بود.

به راحتی می‌توان نشان داد که تابع قابلیت اعتماد تابع چگالی احتمال k آمن آماره ترتیبی، $T_{k:n}$ ، به ترتیب برابرند با

$$R_{k:n}(t) = P(T_{k:n} > t) = \sum_{j=1}^{k-1} \binom{n}{j} (F(t))^{j-1} (1-F(t))^{n-k}$$

و

$$f_{k:n}(t) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} (F(t))^{k-1} (1-F(t))^{n-k} f(t)$$

تفاضل بین دو آماره ترتیبی متوالی $T_{k:n} - T_{k-vn}$ ، با $k = 1, 2, \dots, n$ ، که به آنها فاصله^۱ بین دو آماره ترتیبی گوییم و با D_k نمایش می‌دهیم نقش مهمی در آزمون‌های طول عمر بازی می‌کند که در فصل‌های بعد به آن اشاره می‌کنیم. در حالتی که توزیع تحت بررسی نمایی است فاصله‌های n_k خواص بسیار جالبی دارند که در قضیه زیر به آن‌ها اشاره می‌کنیم.

قضیه ۷.۵ فرض کنید D_1, D_2, \dots, D_n فاصله‌های متوالی بین آماره‌هایی بر اساس یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی $E(\lambda)$ باشد آنگاه

(الف) به ازای $k = 1, 2, \dots, n$

$$P(D_k \leq t) = 1 - e^{-(n-k+1)\lambda t}, t > 0,$$

یعنی توزیع فاصله‌های D_k نیز نمایی اند با نرخ خطر $\lambda^{(1)}(n-k+1)$. بنابراین

$$E(D_k) = \frac{1}{(n-k+1)\lambda}$$

و

$$V(D_k) = \frac{1}{[(n-k+1)\lambda]^2}$$

(ب) مستقل از یکدیگر هستند.

اثبات.

■ اثبات قضیه به عنوان تمرین به دانشجو و آگذار می‌شود.

قضیه ۷.۵ دو نتیجه فوری زیر را در پی خواهد داشت.

^۱ Spacing

نتیجه ۱.۵ تحت شرایط قضیه ۷.۵، فاصله‌های نرمال شده^۱، $D_1, D_2, \dots, (n-1)D_n$ از $E(\lambda)$ توزیع نمایی (که متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان $E(\lambda)$ هستند).

نتیجه ۲.۵ اگر $T_{v,n} \leq T_{v,n} \leq \dots \leq T_{n,n}$ آماره‌های ترتیبی نمونه‌های تصادفی به حجم n از توزیع نمایی $E(\lambda)$ باشند آنگاه برای $n = 1, 2, \dots, n$ داریم

$$E(T_{k:n}) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-k+1} \right)$$

و

$$V(T_{k:n}) = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \dots + \frac{1}{(n-k+1)^2} \right)$$

در آزمون‌های طول عمر کمیتی به نام زمان کل آزمون^۲ که آن را با TTT نمایش می‌دهیم نقش محوری ایفا می‌کند. فرض کنید در برآورد متوسط طول عمر یک قطعه الکتریکی لامپ‌های تولیدی یک کارخانه، n لامپ را در زمان $t = 0$ روشن کرده و منتظر می‌مانیم تا لامپ‌ها از کار افتاده و زمان شکست آن‌ها را ثبت می‌کنیم. طبیعی است که زمان شکست لامپ‌ها آماره‌های ترتیبی $T_{n,n}, T_{v,n}, T_{v,v}$ خواهند بود که در آن $T_{v,n}$ زمان اولین شکست، $T_{n,n}, \dots, T_{k-v,n}$ زمان آخرین شکست در بین لامپ‌ها خواهد بود. فرض کنید $T_{k-v,n} \leq t \leq T_{k:n}$. آنگاه زمان کل آزمایش در فاصله $(t, 0)$ برابر است با

$$\begin{aligned} TTT &= nT_{v,n} + (n-1)(T_{v,n} - T_{v,n}) + \dots \\ &\quad + (n-k+1)(T_{k:n} - T_{k-v,n}) + (n-k)(t - T_{k:n}) \end{aligned}$$

دلیل درستی این مطلب را می‌توان به صورت زیر بیان کرد. در زمان اولین شکست، $T_{v,n}$ ، با توجه به اینکه n لامپ در آزمایش بوده‌اند، برابر با $nT_{v,n}$ است؛ زمان صرف شده از اولین تا دومین شکست برابر $T_{v,n} - T_{v,n}$ است که در اینجا $(n-1)$ لامپ داریم و بنابراین زمان کل آزمایش تا دومین شکست برابر با $(T_{v,n} - T_{v,n})(n-1)$ است و الی آخر ... بنابراین زمان کل آزمایش در فاصله $(t, 0)$ برابر با TTT ارائه شده فوق خواهد بود. در حالت خاص که $t = T_{k:n}$ ، کمیت TTT اهمیت ویژه‌ای دارد. به ویژه در این حالت زمانی که توزیع تحت بررسی نمایی است. توزیع TTT را می‌توان به راحتی تعیین کرد. بدین منظور قضیه زیر را بیان می‌کنیم که اثبات آن را به دانشجویان واگذار می‌کنیم.

¹ Normalized spacing

² Total time on test

قضیه ۸.۵ اگر توزیع طول عمر قطعات تحت آزمایش نمایی ($E(\lambda)$ باشد، آنگاه زمان کل آزمایش

$$TTT = \sum_{i=1}^k (n-i+1)(T_{i:n} - T_{i-vn})$$

دارای توزیع گاما با تابع چگالی احتمال زیر است

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(k)} \lambda^{k-1} t^{k-1} e^{-\lambda t}, t > 0, \lambda > 0.$$

در مورد توزیع گاما و ویژگی‌های آن در بخش‌های آن در بعد صحبت می‌کنیم.

۲.۵ توزیع وایل

توزیع وایل^۱ یکی از معروفترین مدل‌های طول عمر است که به دلیل انعطاف پذیری آن کاربردهای فراوانی در تحلیل داده‌های قابلیت اعتماد دارد. بسیاری از پژوهش‌های صورت گرفته در مدل سازی داده‌های قابلیت، مقاومت مواد و ... با توزیع وایل سروکار دارند. گوییم متغیر تصادفی T دارای توزیع وایل با پارامترهای λ و β است و با علامت $W(\lambda, \beta)$ نمایش می‌دهیم اگر تابع توزیع آن به صورت زیر باشد

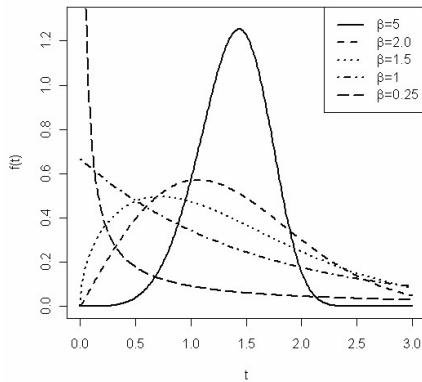
$$F(t; \lambda, \beta) = 1 - e^{-(\lambda t)^\beta}, t > 0, \beta > 0, \lambda > 0.$$

که در آن λ پارامتر مقیاس در توزیع و β پارامتر شکل توزیع است. تابع چگالی توزیع برابر است با

$$f(t; \lambda, \beta) = \beta \lambda^\beta t^{\beta-1} e^{-(\lambda t)^\beta}, t > 0, \lambda > 0, \beta > 0.$$

شکل ۳.۵ نمودار تابع چگالی احتمال $W(\lambda, \beta)$ را برای $\lambda = 1/5$ و مقادیر مختلف β نشان می‌دهد.

^۱ Weibull distribution



شکل ۳.۵ تابع چگالی وایل برای $\lambda = 1/5$ و مقادیر مختلف β

واضح است که به ازای $\beta = 1$ توزیع وایل به توزیع نمایی تبدیل می‌شود.

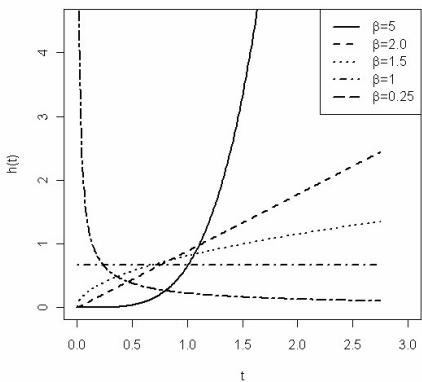
تابع قابلیت اعتماد و تابع نرخ خطر توزیع وایل به ترتیب برابرند با

$$R(t) = e^{-(\lambda t)^\beta}, t > 0,$$

و

$$h(t) = \beta \lambda^\beta t^{\beta-1}$$

شکل ۴.۵ نمودار تابع نرخ خطر توزیع وایل را به ازای $\lambda = 1/5$ و مقادیر مختلف β نشان می‌دهد.



شکل ۴.۵ نمودار تابع نرخ خطر توزیع وایل

این واقعیت که تابع نرخ خطر توزیع وایبل به فرم بسته $h(t) = \beta\lambda^\beta t^{\beta-1}$ ارائه می‌شود یکی از خواص مهم توزیع وایبل است. واضح است که، الف) به ازای $\beta > 1$ تابع نرخ خطر بر حسب زمان صعودی است و این یعنی توزیع *IFR* است.

ب) به ازای $\beta = 1$ تابع نرخ خطر بر حسب زمان ثابت است.

ج) به ازای $\beta < 1$ تابع نرخ خطر بر حسب زمان نزولی است و این یعنی توزیع *DFR* است. با توجه به این موارد توزیع وایبل را برای مدل سازی انواع داده‌ها می‌توان به کار برد. میانگین توزیع وایبل برابر است با

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \Gamma(1 + \beta^{-1})$$

که در آن $(\alpha) \Gamma(\alpha)$ تابع گاما است. واریانس توزیع وایبل به صورت زیر ارائه می‌شود.

$$V(T) = \frac{1}{\lambda^2} [\Gamma(1 + 2\beta^{-1}) - \Gamma^2(1 + \beta^{-1})]$$

بررسی صحت عبارت میانگین و واریانس به عنوان تمرین به دانشجو و اگذار می‌شود. جهت سهولت در محاسبه میانگین و واریانس توزیع وایبل مقادیر $(\Gamma(1 + 2\beta^{-1}) - \Gamma^2(1 + \beta^{-1})) / \Gamma(1 + \beta^{-1})$ و $\Gamma(1 + \beta^{-1}) - \Gamma^2(1 + 2\beta^{-1}) / \Gamma(1 + 2\beta^{-1})$ به ازای مقادیر مختلف β در جدول ۱.۵ آورده شده است. با توجه به مقادیر $V(T)$ و $E(T)$ در این توزیع، به راحتی ملاحظه می‌شود که ضریب تغییر

$$\text{توزيع} = \frac{\sqrt{V(T)}}{E(T)}$$

برابر است با

$$C.V = \left[\frac{\Gamma(1 + 2\beta^{-1})}{\Gamma^2(1 + \beta^{-1})} - 1 \right]^{1/2}$$

یکی دیگر از خواص توزیع وایبل آن است که برای یک مجموعه مستقل از متغیرهای تصادفی این توزیع، مینیمم مجموعه نیز دارای توزیع وایبل است. این واقعیت به صورت دقیق در قضیه ۹.۵ آمده است.

جدول ۱.۵ مقادیر $(\Gamma(1 + 2\beta^{-1}) - \Gamma^2(1 + \beta^{-1}) / \Gamma(1 + \beta^{-1})$ و $\Gamma(1 + \beta^{-1}) - \Gamma^2(1 + 2\beta^{-1}) / \Gamma(1 + 2\beta^{-1})$

β	$\Gamma(1+\beta^{-1})$	$\Gamma(1+2\beta^{-1})$	$\Gamma(1+2\beta^{-1}) - \Gamma'(1+\beta^{-1})$
0/75	1/19.64	4/0.1220	2/0.9458
1/00	1/0.....	2/0.....	1/0.....
1/25	0/93138	1/42982	0/06210
1/50	0/90.274	1/19.64	0/37599
1/75	0/89.62	1/0.99.7	0/27587
2/00	0/88623	1/0....	0/2146.
2/25	0/88573	0/9580.1	0/17349
2/50	0/88726	0/93138	0/14410
2/75	0/88986	0/9140.9	0/12224
3/00	0/89298	0/90.275	0/10.533
3/25	0/89633	0/89034	0/0.9193
3/50	0/89975	0/89.62	0/0.8107
3/75	0/90.312	0/88776	0/0.7213
4/00	0/90.640	0/88623	0/0.6499
4/25	0/90.956	0/88573	0/0.5834
4/50	0/91257	0/88573	0/0.5294
4/75	0/91544	0/88623	0/0.4828
5/00	0/91817	0/88776	0/0.4423
5/25	0/920.75	0/88847	0/0.4.68
5/50	0/92320	0/88986	0/0.3759
5/75	0/92552	0/89137	0/0.3478
6/00	0/92772	0/89298	0/0.3232
6/25	0/92980	0/89464	0/0.3011
6/50	0/93178	0/89633	0/0.2812
6/75	0/93366	0/8980.4	0/0.2633
7/00	0/93554	0/89975	0/0.2470

قضیه ۹.۵ فرض کنید $T_i, i=1, 2, \dots, n$ ، متغیرهای تصادفی مستقل باشند به طوریکه آنگاه $T = \min(T_1, T_2, \dots, T_n)$ که در $T \sim W(\lambda, \beta)$ اگر قرار دهیم

$$\lambda = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

اثبات. داریم

$$P(T > t) = P(\min(T_1, T_2, \dots, T_n) > t)$$

$$= \prod_{i=1}^n P(T_i > t)$$

$$= \prod_{i=1}^n e^{-(\lambda_i t)^\beta}$$

$$= e^{-t^\beta \sum_{i=1}^n \lambda_i^\beta}$$

$$= e^{-t \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}}$$

■ يعني $T \sim W(\lambda, \beta)$ که در آن $\lambda = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}$ و بنابراین اثبات کامل می‌شود.

در قضیه ۹.۵ اگر $T = \min(T_1, T_2, \dots, T_n), i=1, 2, \dots, n$ آنگاه $T_i \sim W(\lambda, \beta)$ دارای توزیع $W(n^{\frac{1}{\beta}}, \lambda, \beta)$ است.

نتیجه قضیه ۹.۵ به خاصیت ضعیف‌ترین اتصال^۱ معروف است. این خاصیت به ویژه در مطالعه مقاومت مواد، مانند مفتول‌های فلزی و الیاف مصنوعی و غیره کاربرد دارد. برای مثال فرض کنید که یک زنجیر فلزی از n حلقه تشکیل شده است که در آن میزان مقاومت حلقه‌های زنجیر در برابر کشش دارای توزیع $W(\lambda_i, \beta), i=1, 2, \dots, n$ است. اگر زنجیر از دو طرف کشیده شود، پارگی زنجیر در حلقه‌ای اتفاق می‌افتد که ضعیف‌ترین اتصال باشد. بنابراین از قضیه ۹.۵ نتیجه می‌گیریم که با فرض استقلال توزیع مقاومت زنجیر در برابر کشش

$$\lambda = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} W(\lambda, \beta)$$

^۱ Weakest link

اهمیت توزیع وایل در مطالعه مقاومت و قدرت مواد فراتر از نتیجه‌ای است که در بالا به آن اشاره شده. به طور کلی تر فرض کنید T_1, T_2, \dots, T_n متغیرهای تصادفی مستقل باشند به طوریکه تابع توزیع آنها در نزدیکی صفر به صورت زیر باشد

$$P(T_k \leq t) = ct^d(1 + o(1)), t > 0.$$

که در آن $c > 0$ و $d > 0$ تابعی است که برای n های بزرگ به صفر میل می‌کند. اگر قرار دهیم $T = a_n(T_1, T_2, \dots, T_n)$ که در آن $a_n = n^{1/d}$ ثابت نرمال ساز است، آنگاه ثابت می‌شود که هنگامیکه $T \rightarrow \infty$ در توزیع به توزیع وایل $W(c^{1/d}, d)$ میل می‌کند. بنابراین اگر فرض کنیم برای مثال یک مفتول فلزی از بین نهایت اتصال به وجود آمده است که در آنها اتصال‌ها دارای مقاومتی هستند که توزیع وایل دارند آنگاه تحت شرایطی نه چندان دست و پاگیر توزیع استقامت فلز نیز وایل خواهد بود.

مثال ۲.۵ یک کارخانه اتومبیل سازی در موتور یک مدل خودرو از ۵ لوله خنک کننده متفاوت برای سرد کردن موتور استفاده می‌کند. سازنده لوله‌های سرد کننده از تجربه می‌داند که طول عمر لوله‌ها بر حسب ماه از توزیع وایل با پارامتر شکل $\beta = 1/8$ پیروی می‌کند. اگر پارامتر مقیاس طول عمر هر یک از خنک کننده‌ها به ترتیب $0.01, 0.02, 0.04, 0.05$ و 0.05 باشد،

- الف) توزیع طول عمر اولین از کار افتادگی، T ، در بین لوله‌های خنک کننده را تعیین کنید.
- ب) متوسط طول عمر اولین از کار افتادگی چقدر است؟
- ج) میانه طول عمر اولین از کار افتادگی چقدر است؟
- د) چقدر احتمال دارد که هیچ یک از لوله‌ها در اولین سال استفاده از کار نیافتد؟

حل. الف) از قضیه ۹.۵ می‌دانیم که طول عمر اولین از کار افتادگی (با شرط استقلال لوله‌ها)، $W(\lambda, 1/8)$ است که در آن

$$\begin{aligned} \lambda &= \left[(0.01)^{1/8} + (0.02)^{1/8} + (0.04)^{1/8} + (0.05)^{1/8} \right]^{-1} \\ &= 0.074 \end{aligned}$$

- ب) میانگین طول عمر اولین از کار افتادگی با توجه به جدول ۱.۲، برابر است با،

$$\begin{aligned} E(T) &= \frac{1}{\lambda} \Gamma\left(1 + \frac{1}{1/\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{0.074} \times 0.89 \\ &= 12.02 \end{aligned}$$

(ج) اگر $T \sim W(\lambda, \beta)$ باشد آنگاه به راحتی می‌توان نشان داد که میانه توزیع برابر است با $\frac{1}{\lambda} (\ln 2)^{\frac{1}{\beta}}$. بنابراین در این مثال میانه اولین از کار افتادگی برابر است با

$$\begin{aligned} \text{میانه} &= \frac{1}{0.074} (\ln 2)^{\frac{1}{0.89}} \\ &= 11.02 \end{aligned}$$

(د) قابلیت اعتماد اولین طول عمر در ماه ۱۲، برابر است با

$$\begin{aligned} R(12) &= e^{-(0.074 \times 12)^{0.89}} \\ &= 0.82 \end{aligned}$$

از خواص دیگر توزیع وایل این است که لگاریتم متغیر تصادفی وایل دارای توزیعی است که به آن توزیع مقدار غایی^۱ نوع اول گویند. این نتیجه در قضیه زیر آمده است.

قضیه ۱۰.۵ فرض کنید $X \sim W(\lambda, \beta)$ و قرار دهید $T = \ln X$. آنگاه تابع توزیع T متعلق به خانواده توزیع مقدار غایی نوع اول است که تابع توزیع آن به صورت زیر است.

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-e^{\frac{(t-\mu)}{\sigma}}}, \quad -\infty < t < +\infty$$

$$\text{که در آن } \sigma = \frac{1}{\beta} \text{ و } \mu = -\ln \lambda$$

اثبات.

اثبات قضیه به عنوان تمرین به دانشجویان واگذار می‌شود.

^۱ Extreme value distribution

توزیع مقدار غایی نوع اول متعلق به کلاسی از توزیع‌های آماری است که به خانواده توزیع‌های مکان-مقیاس معروفند. به طور کلی اگر فرض کیم X دارای توزیع $F(x; \mu, \sigma)$ باشد که در آن $\sigma > 0$ ، آنگاه گوییم F متعلق به خانواده توزیع مکان-مقیاس است اگر توزیعی مانند F وجود داشته باشد که به پارامتر بستگی ندارد و $F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = F(x, \mu, \sigma)$. مثال‌هایی از این خانواده، علاوه بر توزیع مقدار غایی نوع اول توزیع نمایی دو پارامتری، توزیع نرمال، توزیع لجستیک وغیره است. یکی از دلایل اهمیت این خانواده از توزیع‌ها آن است که استنبط آماری در مورد پارامترهای آن نسبت به خانواده توزیع‌های دیگر راحت‌تر صورت می‌گیرد. یک حالت خاص مهم دیگر از توزیع وایل، هنگامی حاصل می‌شود که قرار دهیم $\beta = 2$. در این حالت توزیع وایل را، توزیع رایلی^۱ گویند. توزیع رایلی دارای تابع قابلیت اعتماد

$$R(t, \lambda) = e^{-(\lambda t)^{\beta}}$$

و تابع چگالی احتمال

$$f(t, \lambda) = 2\lambda t e^{-(\lambda t)^{\beta}}$$

است. بنابراین تابع نرخ خطر آن برابر با $h(t) = 2\lambda t^{\beta-1}$ است که تابعی خطی از t می‌باشد. جدول ۳.۵ بعضی از خواص تابع چگالی احتمال و تابع نرخ خطر توزیع وایل را بر اساس پارامتر شکل β را نشان می‌دهد.

جدول ۳.۵ خواص توزیع وایل

پارامتر β	تابع چگالی احتمال	تابع نرخ خطر
$\beta < 1$	از منفی بینهایت به صورت نمایی نزولی می‌کند.	از منفی بینهایت به صورت نمایی نزولی می‌کند.
$\beta = 1$	شروع به نزول λ به صورت نمایی از مقدار می‌کند.	مقدار آن ثابت است.
$\beta > 1$	ابتدا صعود کرده و سپس شروع به نزول می‌کند.	صعودی است.
$\beta = 1$	توزیع وایلی	به صورت خطی صعود می‌کند.

^۱ Rayleigh distribution

$\beta < 1$	شکل زنگوله‌ای (نرمال) دارد.	به سرعت صعود می‌کند.
$\beta > 1$	خیلی شبیه توزیع مقدار غایی نوع اول دارد.	صعودی با نرخ صعود بسیار بالا

در جدول ۴.۵ برخی از مشخصات توزیع وایل را جهت دسترسی سریع‌تر ارائه می‌کنیم.

جدول ۴.۵ برخی از مشخصات توزیع وایل

نام مشخصه	مقدار
تابع توزیع	$1 - e^{-(\lambda t)^\beta}$
تابع قابلیت اعتماد	$e^{-(\lambda t)^\beta}$
تابع چگالی احتمال	$\beta \lambda^{\beta-1} t^\beta e^{-(\lambda t)^\beta}$
تابع نرخ خطر	$\beta \lambda^{\beta-1} t^\beta$
میانگین	$E(T) = \lambda^{-1} \Gamma(1 + \beta^{-1}) + \theta$
واریانس	$V(T) = \lambda^{-2} \left[\Gamma(1 + 2\beta^{-1}) - \Gamma^2(1 + \beta^{-1}) \right]$
میانه	$\lambda^{-1} (\ln 2)^{\beta^{-1}}$

قبل از آن که این بخش را به پایان برسانیم، به این نکته اشاره می‌کنیم که در توزیع وایل می‌توان یک پارامتر مکان نیز داشت. در این حالت توزیع وایل دارای تابع توزیعی به فرم زیر خواهد بود

$$F(t, \lambda, \beta, \theta) = 1 - e^{-(\lambda(t-\theta))^\beta}, \quad t \geq \theta, \lambda > 0, \beta > 0.$$

که در آن در مطالعات طول عمر $\theta > 0$. برای یک متغیر طول عمر با چنین توزیعی مطمئن هستیم که مقادیر طول عمر از θ بیشتر است. اگر T دارای توزیع وایل با سه پارامتر باشد آنگاه

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \Gamma(1 + \beta^{-1}) + \theta$$

و

$$V(T) = \frac{1}{\lambda^2} \left[\Gamma(1 + 2\beta^{-1}) - \Gamma^2(1 + \beta^{-1}) \right]$$

۳.۵ توزیع گاما

فرض کنید سیستمی از n جزء تشکیل شده است که اجزای آن عملکرد مشابه دارند. عملکرد سیستم مستلزم عملکرد یکی از اجزاء است. هنگامی جزء اول از کار می‌افتد جزء دوم به صورت خود کار شروع به فعالیت می‌کند. در صورت از کار افتادگی جزء دوم، سومین جزء فعال می‌شود و الی آخر. هنگامی سیستم از کار می‌افتد که جزء n از کار بیافتد. در این صورت اگر فرض کیم طول عمر اجزاء به ترتیب T_1, T_2, \dots, T_n است. آنگاه طول عمر سیستم، T برابر است با

$$T = T_1 + T_2 + \dots + T_n$$

چنین سیستمی "به سیستم آماده باش" با n جزء معروف است. به ازای $n=2$ طول عمر سیستم از فرمول پیچش، توزیع طول عمر مجموعه دو متغیر تصادفی، به صورت زیر به دست می‌آید که در آن فرض می‌کنیم T_1 و T_2 مستقل‌اند با توزیع مشترک f وتابع چگالی مشترک

$$F_1(t) = \int_0^t F(u)f(t-u)du$$

اکنون اگر سومین جزء وارد عمل شود، با انجام یک پیچش دیگر F_2 را به دست می‌آوریم و با ادامه این روند، F_n توزیع طول عمر سیستم برای $n \geq 1$ ، (با F_1)، به صورت زیر به دست می‌آید.

$$F_n(t) = \int_0^t F_{n-1}(u)f(t-u)du$$

معمولًاً محاسبه پیچش F_n برای توزیع‌های مختلف مانند توزیع وایل پیچیده است و باید به طریق عددی محاسبه شود. اما اگر فرض کنیم T_i ها دارای توزیع نمایی $E(\lambda)$ هستند آنگاه، $T_i \sim E(\lambda)$ و $n=2$ را به شکل بسته می‌توان به دست آورد. بدین منظور فرض کنید $i=1, 2$. آنگاه

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-u)}(1-e^{-\lambda u})du \\ &= 1 - \lambda t e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

که تساوی اخیر از انتگرال‌گیری جزء به جزء حاصل شده است. اگر f_r تابع چگالی احتمال متناظر با F_r باشد آنگاه،

$$f_r(t) = \lambda^r t e^{-\lambda t}, t > 0, \lambda > 0.$$

با ادامه این روند به ازای $n, n \geq 2$ ، تابع توزیع طول عمر سیستم، F_n ، با $n-1$ جزء آماده باش برابر خواهد شد با

$$F_n(t) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^i}{i!}$$

و بنابراین قابلیت اعتماد سیستم مساوی است با

$$R_n(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^i}{i!}$$

سمت راست تساوی اخیر حاوی نتیجه جالبی در نظریه توزیع‌ها است. اگر X متغیر تصادفی پواسن با میانگین λt باشد، آنگاه $R_n(t)$ در واقع برابر است با

$$R_n(t) = P(X < n-1)$$

با مشتق گیری از $F_n(t)$ بر حسب t ، تابع چگالی احتمال طول عمر سیستم به صورت زیر به دست می‌آید،

$$f_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \lambda^n e^{-\lambda t}, t > 0, \lambda > 0, n = 1, 2, \dots, n.$$

این توزیع در متون آماری به توزیع ارلانگ^۱ معروف است.

مثال ۳.۵ فرض کنید قطعه‌ای از یک دستگاه دارای توزیع نمایی با نرخ خطر ۰/۰۰۰۲ است. برای اطمینان از عملکرد دستگاه قطعه‌ای دیگر در کنار قطعه اول به صورت آماده باش قرار می‌دهیم. در زمانی که تابع توزیع قطعه مساوی ۰/۰۱ است وجود قطعه آماده باش چقدر نرخ خطر را کاهش می‌دهد؟ در مورد زمان‌هایی که تابع توزیع ۰/۰۱ یا ۰/۰۵ است چه می‌توان گفت؟

^۱ Erlang distribution

حل. با توجه به مقدار $\lambda = 0.0002$ ، زمان مورد نظر که در آن تابع توزیع برابر 0.1 است از رابطه زیر بدست می‌آید،

$$0.1 = 1 - e^{-\lambda t}$$

که به راحتی مشاهده می‌شود، $t = 502/5$.
اگر مقدار تابع نرخ خطر سیستم را محاسبه کنیم به دست می‌آوریم،

$$\begin{aligned} h_r(t) &= \frac{f_r(t)}{1 - F_r(t)} \\ &= \frac{\lambda^r t e^{-\lambda t}}{\lambda t e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{\lambda^r t}{\lambda t + 1} \end{aligned}$$

اگر $h_r(t)$ را در $t = 502/5$ و $\lambda = 0.0002$ محاسبه کنیم به دست می‌آوریم،

$$h_r(502/5) = 1/99 \times 10^{-7}$$

که نشان می‌دهد با بودن قطعه آماده باش حدود 100 برابر نرخ خطر کاهش پیدا می‌کند. به راحتی می‌توان نشان داد که این کاهش برای زمانی که تابع توزیع $1/50$ یا 0.01 است به ترتیب حدود 10 برابر و حدود $2/4$ برابر خواهد بود.

توزیع ارلانز، خود حالت خاص یک توزیع معروفی به نام توزیع گاما¹، است که به دلیل انعطاف پذیری آن می‌تواند یک مدل مناسب برای انواع داده‌های طول عمر باشد. توزیع گاما (در ساده‌ترین حالت) دارای دو پارامتر مقیاس و شکل است و تابع چگالی آن به صورت زیر می‌باشد،

$$f(t, \alpha, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}, t > 0, \alpha, \lambda > 0.$$

که در آن λ پارامتر مقیاس و α پارامتر شکل توزیع است و

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

¹ Gamma distribution

همانطور که قبل اشاره شد، $\Gamma(\alpha)$ به تابع گاما معروف است و با استفاده از انگرال گیری جزء به جزء می‌توان نشان داد که $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$. به ویژه در حالتی که α عدد طبیعی باشد آنگاه $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$

با توجه به رابطه $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$ ، کافی است برای محاسبه $\Gamma(\alpha)$ ، به ازای هر $\alpha > 0$ ، مقدار $\Gamma(\alpha)$ را برای $\alpha < 1$ داشته باشیم. جدول ۵.۵ مقادیر $\Gamma(\alpha)$ را برای بعضی مقادیر $\alpha < 1$ ارائه می‌کند.

جدول ۵.۵ مقادیر $\Gamma(\alpha)$

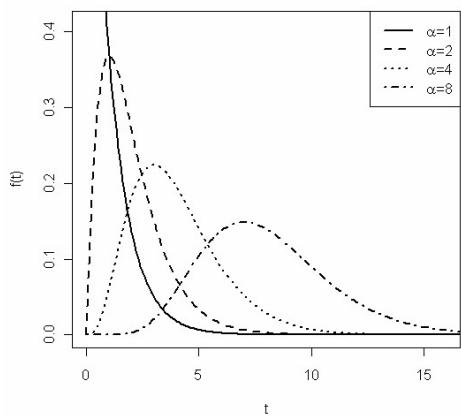
α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$
۰/۰۱	۹۹/۴۳۲۶	۰/۲۶	۳/۴۷۸۵	۰/۵۱	۱/۷۳۸۴	۰/۷۶	۱/۲۱۲۳
۰/۰۲	۴۹/۴۴۲۲	۰/۲۷	۳/۳۴۲۶	۰/۵۲	۱/۷۰۵۸	۰/۷۷	۱/۱۹۹۷
۰/۰۳	۳۲/۷۸۵۰	۰/۲۸	۳/۲۱۶۹	۰/۵۳	۱/۶۷۴۷	۰/۷۸	۱/۱۸۷۵
۰/۰۴	۲۴/۴۶۱۰	۰/۲۹	۳/۱۰۰۱	۰/۵۴	۱/۶۴۴۸	۰/۷۹	۱/۱۷۵۷
۰/۰۵	۱۹/۴۷۰۱	۰/۳۰	۲/۹۹۱۶	۰/۵۵	۱/۶۱۶۱	۰/۸۰	۱/۱۶۴۲
۰/۰۶	۱۶/۱۴۵۷	۰/۳۱	۲/۸۹۰۳	۰/۵۶	۱/۵۸۸۶	۰/۸۱	۱/۱۵۳۲
۰/۰۷	۱۳/۷۷۳۶	۰/۳۲	۲/۷۹۵۸	۰/۵۷	۱/۵۶۲۳	۰/۸۲	۱/۱۴۲۵
۰/۰۸	۱۱/۹۹۶۶	۰/۳۳	۲/۷۰۷۲	۰/۵۸	۱/۵۳۶۹	۰/۸۳	۱/۱۳۲۲
۰/۰۹	۱۰/۶۱۶۲	۰/۳۴	۲/۶۲۴۲	۰/۵۹	۱/۵۱۲۶	۰/۸۴	۱/۱۲۲۲
۰/۱۰	۹/۵۱۳۵	۰/۳۵	۲/۵۴۶۱	۰/۶۰	۱/۴۸۹۲	۰/۸۵	۱/۱۱۲۵
۰/۱۱	۸/۶۱۲۷	۰/۳۶	۲/۴۷۷۷	۰/۶۱	۱/۴۶۶۷	۰/۸۶	۱/۱۰۳۱
۰/۱۲	۷/۸۶۲۳	۰/۳۷	۲/۴۰۳۶	۰/۶۲	۱/۴۴۵۰	۰/۸۷	۱/۰۹۴۱
۰/۱۳	۷/۲۳۰۲	۰/۳۸	۲/۳۳۸۳	۰/۶۳	۱/۴۲۴۲	۰/۸۸	۱/۰۸۵۳
۰/۱۴	۶/۶۸۸۷	۰/۳۹	۲/۲۷۶۵	۰/۶۴	۱/۴۰۴۱	۰/۸۹	۱/۰۷۶۸
۰/۱۵	۶/۶۲۰۳	۰/۴۰	۲/۲۱۸۲	۰/۶۵	۱/۳۸۴۸	۰/۹۰	۱/۰۶۸۶
۰/۱۶	۵/۸۱۱۳	۰/۴۱	۲/۱۶۲۸	۰/۶۶	۱/۳۶۶۲	۰/۹۱	۱/۰۶۰۷
۰/۱۷	۵/۴۵۱۲	۰/۴۲	۲/۱۱۰۴	۰/۶۷	۱/۳۴۸۲	۰/۹۲	۱/۰۵۳۰
۰/۱۸	۵/۱۳۱۸	۰/۴۳	۲/۰۶۰۵	۰/۶۸	۱/۳۳۰۹	۰/۹۳	۱/۰۴۵۶
۰/۱۹	۴/۸۴۹۸	۰/۴۴	۲/۰۱۳۲	۰/۶۹	۱/۳۱۴۲	۰/۹۴	۱/۰۳۸۴
۰/۲۰	۴/۵۹۰۸	۰/۴۵	۱/۹۶۸۱	۰/۷۰	۱/۲۹۸۱	۰/۹۵	۱/۰۳۱۵
۰/۲۱	۴/۳۵۹۹	۰/۴۶	۱/۹۲۵۲	۰/۷۱	۱/۲۸۲۵	۰/۹۶	۱/۰۲۴۷
۰/۲۲	۴/۱۵۰۵	۰/۴۷	۱/۸۸۴۳	۰/۷۲	۱/۲۶۷۵	۰/۹۷	۱/۰۱۸۲
۰/۲۳	۳/۹۵۹۸	۰/۴۸	۱/۸۴۵۳	۰/۷۳	۱/۲۵۳۰	۰/۹۸	۱/۰۱۱۹
۰/۲۴	۳/۷۸۵۵	۰/۴۹	۱/۸۰۸۱	۰/۷۴	۱/۲۳۹۰	۰/۹۹	۱/۰۰۵۹

بنابراین به راحتی ملاحظه می‌شود که اگر α اعداد طبیعی را اختیار کند، توزیع لاگرانژ حالت خاص توزیع گاما خواهد شد. در ادامه برای آنکه نشان دهیم متغیر تصادفی T دارای توزیع گاما با پارامترهای α و λ است از علامت $T \sim G(\alpha, \lambda)$ استفاده می‌کنیم.

واضح است که اگر در توزیع گاما $\alpha = 1$ ، یعنی $T \sim G(1, \lambda)$ دارای توزیع نمایی با پارامتر λ است. همچنین می‌توان نشان داد که اگر $T \sim G(\alpha, \lambda)$ آنگاه میانگین و واریانس T به ترتیب برابر است با $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ و $V(T) = \frac{1}{\lambda^2}$ و در نتیجه ضریب تغییرات توزیع برابر خواهد شد با،

$$C.V = \frac{\sqrt{V(T)}}{E(T)} \\ = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

تابع چگالی گاما برای λ ثابت به ازای مقادیر کوچک α چوله به راست و هر چقدر مقدار α بزرگتر می‌شود شکل توزیع متقاضن تر خواهد شد. شکل ۵.۵ تابع چگالی $G(\alpha, \lambda)$ به ازای $\lambda = 1$ و بعضی از مقادیر α در شکل ۵.۵ آمده است.



شکل ۵.۵ نمودار تابع چگالی احتمال $G(\alpha, \lambda)$ به ازای مقادیر مختلف α

تابع توزیع $G(\alpha, \lambda)$ برابر است با،

$$F(t, \alpha, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t y^{\alpha-1} e^{-\lambda y} dy$$

که در آن تابع انتگرال ارائه شده به تابع گاما ناقص معروف است که برای محاسبه آن از روش‌های عددی استفاده می‌شود و در متون آماری جداولی نیز برای آن ارائه شده است. به ویژه اگر α عدد طبیعی باشد برای محاسبه $F(t, \alpha, \lambda)$ می‌توان از جداول توزیع پواسن استفاده کرد.

همانطور که اشاره شد توزیع گاما می‌تواند به عنوان مدل مناسبی برای انواع داده‌های طول عمر به کار برود. صحت این ادعا در قضیه زیر نشان داده می‌شود.

قضیه ۱۱.۵ اگر $h(t)$ تابع نرخ خطر $G(\alpha, \lambda)$ باشد آنگاه

الف) برای $\alpha > 1$, $h(t)$ تابعی صعودی از زمان است.

ب) برای $\alpha = 1$, $h(t)$ ثابت است.

ج) برای $\alpha < 1$, $h(t)$ تابعی نزولی از زمان است.

اثبات.

داریم

$$h(t) = \frac{t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\int_t^\infty x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx}$$

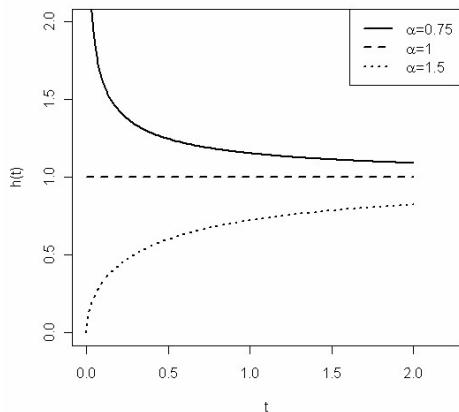
بنابراین

$$\begin{aligned} (h(t))^{-1} &= \int_t^\infty \left(\frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} e^{-\lambda(x-t)} dx \\ &= \int_0^\infty \left(1 + \frac{u}{t} \right)^{\alpha-1} e^{-\lambda u} du \quad , x-t=u \end{aligned}$$

با تغییر متغیر

بنابراین رفتار $(h(t))$ (و در نتیجه رفتار $\varphi(t)$) به رفتار تابع $\varphi(t) = \left(1 + \frac{u}{t}\right)^{\alpha-1}$ انتگرال بستگی دارد. اگر $\alpha > 1$, $\varphi(t)$ بر حسب t نزولی و در نتیجه $h(t)$ تابعی صعودی از t است. اگر $\alpha = 1$, $\varphi(t)$ ثابت و لذا $h(t)$ ثابت است و اگر $\alpha < 1$, $\varphi(t)$ تابعی صعودی از t و در نتیجه $h(t)$ تابعی نزولی از t است.

نمودار $(h(t))$ به ازای $\lambda = 1$ و مقادیر مختلف α در شکل ۶.۵ آمده است.



شکل ۶.۵ نمودار $(h(t))$ به ازای $\lambda = 1$ و مقادیر مختلف α

یکی دیگر از حالات خاص توزیع گاما را معرفی می‌کنیم که به توزیع کای دو^۱ معروف است و نقش مهمی در تحلیل داده‌ها در بسیاری از شاخه‌های آمار دارد. اگر در توزیع گاما قرار دهیم $G\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ را توزیع کای دو با n درجه آزادی گویند که تابع چگالی احتمال آن برابر است با،

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}, t > 0, n = 1, 2, \dots$$

جدول ۶.۵ فرمول‌ها و بعضی از خواص توزیع $G(\alpha, \lambda)$ را به طور خلاصه ارائه می‌کند.

^۱ Chi-square distribution

جدول ۶.۵ فرمول‌ها و بعضی از خواص توزیع $G(\alpha, \lambda)$

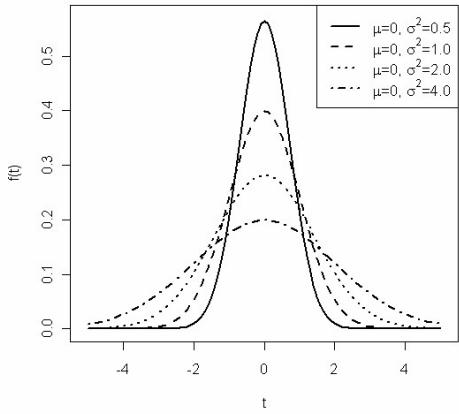
نام	فرمول یا خاصیت
تابع چگالی	$f(t, \alpha, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}, t > 0, \alpha, \lambda > 0.$
تابع توزیع	$F(t, \alpha, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t y^{\alpha-1} e^{-\lambda y} dy$
تابع قابلیت اعتماد	$R(t, \alpha, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t\lambda}^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-\lambda y} dy$
تابع نرخ خطر	$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$
برای $\alpha > 1$, بر حسب t صعودی	
برای $\alpha = 1$, بر حسب t ثابت	
برای $\alpha < 1$, بر حسب t نزولی	
پارامتر شکل توزیع, اگر α کوچک باشد شکل توزیع چوله, $\alpha > 1$ بزرگ باشد توزیع متقارن است.	
عدد طبیعی $\alpha = \text{گاما مجموع } \alpha$ متغیر تصادفی مستقل نمایی است.	توزیع گاما به توزیع ارلاندر تبدیل می‌شود. در این حالت توزیع
$\frac{\alpha}{\lambda}$ میانگین	
$\frac{\alpha}{\lambda^2}$ واریانس	

۴.۵ توزیع نرمال

متغیر تصادفی T دارای توزیع نرمال است اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد،

$$f(t, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < t < +\infty$$

که در آن $\mu \in (-\infty, +\infty)$ پارامتر مکان و $\sigma > 0$ پارامتر مقیاس توزیع است. از نماد $T \sim N(\mu, \sigma^2)$ استفاده می‌کنیم برای آن که نشان دهیم T دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 است. اگر $T \sim N(\mu, \sigma^2)$ آنگاه $E(T) = \mu$ و $V(T) = \sigma^2$. تابع چگالی $N(\mu, \sigma^2)$ حول μ متناظر است و پارامتر σ میزان تخت یا قله بودن نمودار چگالی احتمال را کنترل می‌کند. شکل ۷.۵ نمودار تابع چگالی احتمال توزیع نرمال را به ازای مقادیر مختلف σ و μ ثابت نشان می‌دهد.



شکل ۷.۵ تابع چگالی احتمال $N(\mu, \sigma^2)$ به ازای $\mu = 0$ و مقادیر مختلف σ

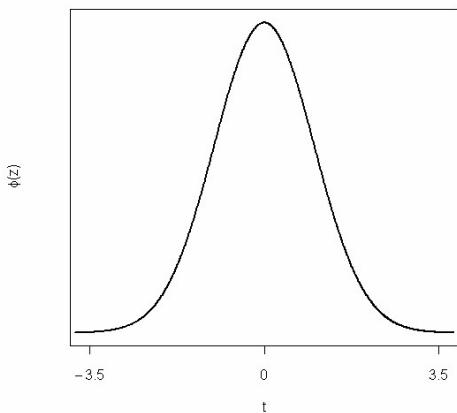
در حالتی که $\mu = 0$ و $\sigma = 1$ توزیع نرمال را نرمال استاندارد می‌گویند. در این حالت تابع چگالی احتمال $N(0, 1)$ را که با $\varphi(z)$ نمایش می‌دهیم برابر است با،

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, -\infty < z < +\infty$$

و تابع توزیع آن را که با $\Phi(z)$ نمایش می‌دهیم مساوی است با،

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

نمودار تابع چگالی نرمال استاندارد در شکل ۸.۵ آمده است.



شکل ۸.۵ تابع چگالی احتمال نرمال استاندارد

برای متغیر نرمال استاندارد مقادیر احتمال بیشتر از $\frac{3}{5}$ و $-\frac{3}{5}$ - قابل چشم پوشی هستند و بنابراین تقریباً تمام جرم احتمال در فاصله $(-\frac{3}{5}, \frac{3}{5})$ قرار دارد.
همچنین به راحتی می‌توان نشان داد که صدک $100p$ ام توزیع نرمال استاندارد برابر است با،

$$t_p = \mu + z_p \sigma$$

اگر $Z = \frac{T - \mu}{\sigma} \sim N(\mu, \sigma^2)$ می‌توان آن را به نرمال استاندارد تبدیل کرد. بنابراین تابع توزیع و تابع قابلیت اعتماد T به ترتیب برابر خواهد شد با،

$$F(t, \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)$$

و

$$R(t, \mu, \sigma) = 1 - \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)$$

بنابراین هر عبارت احتمالی در مورد T را می‌توان بر حسب Z نوشت. ولذا کافی است بتوان تابع توزیع Z را محاسبه کرد. تابع توزیع Z به صورت بسته قابل محاسبه نیست. با استفاده از روش‌های عددی توزیع $N(0,1)$ به ازای مقادیر مختلف در فاصله $(-\frac{3}{5}, \frac{3}{5})$ محاسبه شده است. جدول ۷.۵ تابع توزیع $\Phi(z)$ را برای مقادیر مختلف z در فاصله $(-\frac{3}{5}, \frac{3}{5})$ ارائه می‌کند. برای مقادیر منفی z از تقارن توزیع می‌توان از رابطه $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ استفاده کرد.

مثال ۴.۵ یک مدار الکتریکی شامل سه مقاومت است که به صورت متوالی به هم متصل شده‌اند فرض کنید میزان مقاومت الکتریکی این سه نوع مقاومت بر حسب اهم دارای توزیع نرمال باشد به طوریکه $R_1 \sim N(100/0.9)$ و $R_2 \sim N(150/0.25)$ و $R_3 \sim N(50/0.24)$. چقدر احتمال دارد که میزان کل مقاومت مدار در فاصله $5 \pm 75\%$ قرار گیرد.

حل. میزان کل مقاومت سیستم، $R_c = R_1 + R_2 + R_3$ ، برابر است با $E(R_c) = E(R_1) + E(R_2) + E(R_3)$. این واقعیت مهم در مورد توزیع نرمال وجود دارد که با فرض استقلال، مجموع متغیرهای تصادفی نرمال دارای توزیع نرمال است. بنابراین R_c دارای توزیع نرمال است با میانگین،

$$\begin{aligned} E(R_c) &= E(R_1) + E(R_2) + E(R_3) \\ &= 75 \end{aligned}$$

و واریانس،

$$\begin{aligned} V(R_c) &= V(R_1) + V(R_2) + V(R_3) \\ &= 0.25 + 0.9 + 0.24 \\ &= 3/58 \end{aligned}$$

بنابراین احتمال مطلوب برابر است با،

$$\begin{aligned} P(71/25 < R_c < 78/75) &= \Phi\left(\frac{78/75 - 75}{\sqrt{3/58}}\right) - \Phi\left(\frac{71/25 - 75}{\sqrt{3/58}}\right) \\ &= 0.976 - 0.024 \\ &= 0.952 \end{aligned}$$

جدول ۷.۵ برای مقادیر مختلف z در فاصله $(-\frac{3}{5}, \frac{3}{5})$

توزيع نرمال ۳۳

Z	۰/۰۰	۰/۰۱	۰/۰۲	۰/۰۳	۰/۰۴	۰/۰۵	۰/۰۶	۰/۰۷	۰/۰۸	۰/۰۹
۰/۰	۰/۰۵۰۰	۰/۰۵۴۰	۰/۰۵۸۰	۰/۰۵۱۲۰	۰/۰۵۱۶۰	۰/۰۵۱۹۹	۰/۰۵۲۳۹	۰/۰۵۲۷۹	۰/۰۵۳۱۹	۰/۰۵۳۵۹
۰/۱	۰/۰۵۴۸	۰/۰۵۴۳۸	۰/۰۵۴۷۸	۰/۰۵۱۷	۰/۰۵۵۷	۰/۰۵۴۹۶	۰/۰۵۶۳۶	۰/۰۵۶۷۵	۰/۰۵۷۱۴	۰/۰۵۷۵۳
۰/۲	۰/۰۵۷۹۳	۰/۰۵۸۲۲	۰/۰۵۸۷۱	۰/۰۵۹۰	۰/۰۵۹۴۸	۰/۰۵۹۷	۰/۰۶۰۲۶	۰/۰۶۰۶۴	۰/۰۶۱۰۳	۰/۰۶۱۴۱
۰/۳	۰/۰۶۱۷۹	۰/۰۶۲۱۷	۰/۰۶۲۵۵	۰/۰۶۲۹۳	۰/۰۶۳۳۱	۰/۰۶۳۶۸	۰/۰۶۴۰۶	۰/۰۶۴۴۳	۰/۰۶۴۸۰	۰/۰۶۵۱۷
۰/۴	۰/۰۶۵۵۶	۰/۰۶۵۹۱	۰/۰۶۶۲۸	۰/۰۶۶۴۶	۰/۰۶۷۰۰	۰/۰۶۷۳۶	۰/۰۶۷۷۷	۰/۰۶۸۰۸	۰/۰۶۸۴۴	۰/۰۶۸۷۹
۰/۵	۰/۰۶۹۱۵	۰/۰۶۹۵۰	۰/۰۶۹۸۵	۰/۰۷۱۹	۰/۰۷۰۵۷	۰/۰۷۱۸۸	۰/۰۷۱۲۳	۰/۰۷۱۵۷	۰/۰۷۱۹۰	۰/۰۷۲۲۴
۰/۶	۰/۰۷۲۵۷	۰/۰۷۲۹۱	۰/۰۷۳۲۴	۰/۰۷۳۵۷	۰/۰۷۳۸۹	۰/۰۷۴۲۲	۰/۰۷۴۵۴	۰/۰۷۴۸۶	۰/۰۷۵۱۷	۰/۰۷۵۴۹
۰/۷	۰/۰۷۵۰۰	۰/۰۷۶۱۱	۰/۰۷۶۴۲	۰/۰۷۶۳	۰/۰۷۷۰۴	۰/۰۷۷۳۴	۰/۰۷۷۵۶	۰/۰۷۷۹۴	۰/۰۷۸۲۳	۰/۰۷۸۵۲
۰/۸	۰/۰۷۸۱۱	۰/۰۷۹۱۰	۰/۰۷۹۳۹	۰/۰۷۹۶۷	۰/۰۷۹۹۵	۰/۰۸۰۲۳	۰/۰۸۰۵۱	۰/۰۸۰۷۸	۰/۰۸۱۰۶	۰/۰۸۱۳۳
۰/۹	۰/۰۸۱۵۹	۰/۰۸۱۸۶	۰/۰۸۲۱۲	۰/۰۸۲۳۸	۰/۰۸۲۶۷	۰/۰۸۲۸۹	۰/۰۸۳۱۵	۰/۰۸۳۴۰	۰/۰۸۳۶۵	۰/۰۸۳۸۹
۱/۰	۰/۰۸۱۵۹	۰/۰۸۴۳۸	۰/۰۸۴۶۱	۰/۰۸۴۸۵	۰/۰۸۵۰۸	۰/۰۸۵۳۱	۰/۰۸۵۵۴	۰/۰۸۵۷۷	۰/۰۸۵۹۹	۰/۰۸۶۲۱
۱/۱	۰/۰۸۶۴۳	۰/۰۸۶۹۵	۰/۰۸۶۸۶	۰/۰۸۷۰۸	۰/۰۸۷۲۹	۰/۰۸۷۴۹	۰/۰۸۷۷۰	۰/۰۸۷۹۰	۰/۰۸۸۱۰	۰/۰۸۸۳۰
۱/۲	۰/۰۸۸۹	۰/۰۸۸۹	۰/۰۸۸۸	۰/۰۸۹۷	۰/۰۹۰۲۵	۰/۰۹۰۴۴	۰/۰۹۰۵۷	۰/۰۹۰۸۰	۰/۰۹۰۹۷	۰/۰۹۰۱۵
۱/۳	۰/۰۹۰۳۲	۰/۰۹۰۴۹	۰/۰۹۰۶۶	۰/۰۹۰۸۲	۰/۰۹۰۹۹	۰/۰۹۱۱۵	۰/۰۹۱۳۱	۰/۰۹۱۴۷	۰/۰۹۱۶۲	۰/۰۹۱۷۷
۱/۴	۰/۰۹۱۹۷	۰/۰۹۲۰۷	۰/۰۹۲۲۷	۰/۰۹۲۴۶	۰/۰۹۲۵۱	۰/۰۹۲۶۵	۰/۰۹۲۷۹	۰/۰۹۲۹۷	۰/۰۹۳۰۶	۰/۰۹۳۱۹
۱/۵	۰/۰۹۳۳۲	۰/۰۹۳۴۵	۰/۰۹۳۵۷	۰/۰۹۳۷۰	۰/۰۹۳۸۲	۰/۰۹۳۹۴	۰/۰۹۴۰۶	۰/۰۹۴۱۸	۰/۰۹۴۲۹	۰/۰۹۴۴۱
۱/۶	۰/۰۹۴۵۲	۰/۰۹۴۶۳	۰/۰۹۴۷۴	۰/۰۹۴۸۴	۰/۰۹۴۹۵	۰/۰۹۵۰۵	۰/۰۹۵۱۵	۰/۰۹۵۲۵	۰/۰۹۵۳۵	۰/۰۹۵۴۵
۱/۷	۰/۰۹۵۰۷	۰/۰۹۵۴۷	۰/۰۹۵۷۳	۰/۰۹۵۸۲	۰/۰۹۵۹۱	۰/۰۹۶۰۹	۰/۰۹۶۱۸	۰/۰۹۶۱۶	۰/۰۹۶۲۵	۰/۰۹۶۳۳
۱/۸	۰/۰۹۶۴۱	۰/۰۹۶۴۹	۰/۰۹۶۵۶	۰/۰۹۶۶۷	۰/۰۹۶۷۱	۰/۰۹۶۷۸	۰/۰۹۶۸۶	۰/۰۹۶۹۳	۰/۰۹۶۹۹	۰/۰۹۷۰۶
۱/۹	۰/۰۹۷۱۳	۰/۰۹۷۱۹	۰/۰۹۷۲۶	۰/۰۹۷۲۷	۰/۰۹۷۳۸	۰/۰۹۷۴۴	۰/۰۹۷۵۰	۰/۰۹۷۵۶	۰/۰۹۷۶۱	۰/۰۹۷۶۷
۱/۱۰	۰/۰۹۷۷۷	۰/۰۹۷۷۸	۰/۰۹۷۸۳	۰/۰۹۷۸۸	۰/۰۹۷۹۳	۰/۰۹۷۹۸	۰/۰۹۸۰۳	۰/۰۹۸۰۸	۰/۰۹۸۱۲	۰/۰۹۸۱۷
۲/۱	۰/۰۹۸۲۱	۰/۰۹۸۲۶	۰/۰۹۸۳۰	۰/۰۹۸۳۴	۰/۰۹۸۳۸	۰/۰۹۸۴۲	۰/۰۹۸۴۶	۰/۰۹۸۵۰	۰/۰۹۸۵۴	۰/۰۹۸۵۷
۲/۲	۰/۰۹۸۶۱	۰/۰۹۸۶۴	۰/۰۹۸۶۸	۰/۰۹۸۷۱	۰/۰۹۸۷۵	۰/۰۹۸۷۸	۰/۰۹۸۸۱	۰/۰۹۸۸۴	۰/۰۹۸۸۷	۰/۰۹۸۹۰
۲/۳	۰/۰۹۸۹۴	۰/۰۹۸۹۷	۰/۰۹۸۹۸	۰/۰۹۸۹۸	۰/۰۹۹۱	۰/۰۹۹۴	۰/۰۹۹۰۷	۰/۰۹۹۰۹	۰/۰۹۹۱۱	۰/۰۹۹۱۴
۲/۴	۰/۰۹۹۱۸	۰/۰۹۹۲۰	۰/۰۹۹۲۷	۰/۰۹۹۲۵	۰/۰۹۹۲۷	۰/۰۹۹۲۹	۰/۰۹۹۳۱	۰/۰۹۹۳۲	۰/۰۹۹۳۴	۰/۰۹۹۳۶
۲/۵	۰/۰۹۹۳۸	۰/۰۹۹۴۰	۰/۰۹۹۴۱	۰/۰۹۹۴۳	۰/۰۹۹۴۵	۰/۰۹۹۴۷	۰/۰۹۹۴۹	۰/۰۹۹۵۱	۰/۰۹۹۵۲	
۲/۶	۰/۰۹۹۵۳	۰/۰۹۹۵۵	۰/۰۹۹۵۶	۰/۰۹۹۵۷	۰/۰۹۹۵۷	۰/۰۹۹۵۹	۰/۰۹۹۶۰	۰/۰۹۹۶۱	۰/۰۹۹۶۲	۰/۰۹۹۶۴
۲/۷	۰/۰۹۹۶۵	۰/۰۹۹۶۶	۰/۰۹۹۶۷	۰/۰۹۹۶۸	۰/۰۹۹۶۹	۰/۰۹۹۷۰	۰/۰۹۹۷۱	۰/۰۹۹۷۲	۰/۰۹۹۷۳	۰/۰۹۹۷۴
۲/۸	۰/۰۹۹۷۴	۰/۰۹۹۷۵	۰/۰۹۹۷۶	۰/۰۹۹۷۷	۰/۰۹۹۷۷	۰/۰۹۹۷۸	۰/۰۹۹۷۹	۰/۰۹۹۷۹	۰/۰۹۹۸۰	۰/۰۹۹۸۱
۲/۹	۰/۰۹۹۸۱	۰/۰۹۹۸۲	۰/۰۹۹۸۲	۰/۰۹۹۸۳	۰/۰۹۹۸۷	۰/۰۹۹۸۷	۰/۰۹۹۸۵	۰/۰۹۹۸۵	۰/۰۹۹۸۶	۰/۰۹۹۸۶
۲/۱۰	۰/۰۹۹۸۷	۰/۰۹۹۸۷	۰/۰۹۹۸۷	۰/۰۹۹۸۸	۰/۰۹۹۸۸	۰/۰۹۹۸۹	۰/۰۹۹۸۹	۰/۰۹۹۸۹	۰/۰۹۹۹۰	۰/۰۹۹۹۰
۳/۱	۰/۰۹۹۹۰	۰/۰۹۹۹۱	۰/۰۹۹۹۱	۰/۰۹۹۹۱	۰/۰۹۹۹۲	۰/۰۹۹۹۲	۰/۰۹۹۹۲	۰/۰۹۹۹۲	۰/۰۹۹۹۳	۰/۰۹۹۹۳
۳/۲	۰/۰۹۹۹۳	۰/۰۹۹۹۳	۰/۰۹۹۹۴	۰/۰۹۹۹۴	۰/۰۹۹۹۴	۰/۰۹۹۹۴	۰/۰۹۹۹۴	۰/۰۹۹۹۵	۰/۰۹۹۹۵	
۳/۳	۰/۰۹۹۹۵	۰/۰۹۹۹۵	۰/۰۹۹۹۵	۰/۰۹۹۹۶	۰/۰۹۹۹۶	۰/۰۹۹۹۶	۰/۰۹۹۹۶	۰/۰۹۹۹۶	۰/۰۹۹۹۷	
۳/۴	۰/۰۹۹۹۷	۰/۰۹۹۹۷	۰/۰۹۹۹۷	۰/۰۹۹۹۷	۰/۰۹۹۹۷	۰/۰۹۹۹۷	۰/۰۹۹۹۷	۰/۰۹۹۹۷	۰/۰۹۹۹۸	
۳/۵	۰/۰۹۹۹۸	۰/۰۹۹۹۸	۰/۰۹۹۹۸	۰/۰۹۹۹۸	۰/۰۹۹۹۸	۰/۰۹۹۹۸	۰/۰۹۹۹۸	۰/۰۹۹۹۸	۰/۰۹۹۹۸	

توزيع نرمال به شکل معمول آن به دو دلیل زیر نمی‌تواند به عنوان یک مدل طول عمر مورد استفاده قرار گیرد. یکی اینکه متغیر تصادفی نرمال مقادیر منفی را نیز اختیار می‌کند در حالی که

متغیرهای طول عمر نامنفی‌اند. اما اگر $\mu < 35$ آنگاه دم منفی توزیع نرمال قابل چشم پوشی است و لذا می‌توان مقدار ثابت a ، ثابت نرمال ساز است و باعث می‌شود که $f(t, \mu, \sigma)$ برای $t > 0$ یک چگالی احتمال می‌شود. اگر مقدار μ خیلی بزرگتر از ۳۵ شود آنگاه a مقداری نزدیک به ۱ خواهد داشت و در نتیجه $f(t, \mu, \sigma)$ همان توزیع معمولی نرمال خواهد شد. تابع قابلیت اعتماد در این حالت برابر است با،

$$R(t, \mu, \sigma) = \frac{1 - \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)}{a}, t > 0.$$

و در نتیجه تابع نرخ خطر توزیع نرمال بی‌سر مساوی خواهد شد،

$$h(t) = \frac{e^{\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}\left[1 - \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\right]}, t > 0.$$

قضیه زیر نشان می‌دهد که $h(t)$ تابعی صعودی از t است.

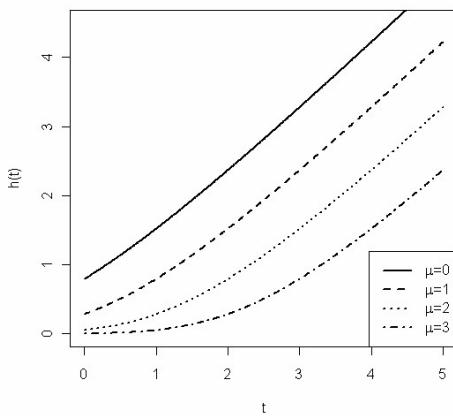
قضیه ۱۲.۵ توزیع نرمال بی‌سر شده یک توزیع *IFR* است.
اثبات.

برای اثبات این قضیه از این واقعیت استفاده می‌کنیم اگر توزیع احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته دارای چگالی احتمالی باشد که لگاریتم آن مقعر است، آنگاه آن توزیع *IFR* است.
(برای اثبات به بارلو و پروشان (۱۹۸۱) مراجعه کنید). داریم

$$\log f(t, \mu, \sigma) = -\log(a\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

به راحتی ملاحظه می‌شود که سمت راست این تساوی یک تابع مقعر در فاصله $(0, \infty]$ است و

■ در نتیجه با توجه به مطالب فوق توزیع نرمال بی‌سر شده یک توزیع *IFR* است.
فصل ۹.۵ نمودار تابع نرخ خطر $h(t)$ را به ازای مقادیر مختلف μ نشان می‌دهد.

شکل ۹.۵ تابع نرخ خطر توزیع نرمال به ازای مقادیر مختلف μ

۵.۵ توزیع لگ نرمال

یکی دیگر از توزیع‌های مهم در قابلیت اعتماد توزیع لگ نرمال^۱ است. متغیر تصادفی T دارای توزیع لگ نرمال است و با نماد $T \sim LN(\mu, \sigma^2)$ نمایش می‌دهیم اگر $Y = \ln T$ دارای توزیع نرمال باشد. بنابراین تابع توزیع $LN(\mu, \sigma^2)$ برابر است با،

$$F(t, \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right), t > 0, \mu \in (-\infty, +\infty), \sigma > 0.$$

در نتیجه تابع چگالی $LN(\mu, \sigma^2)$ عبارت است از،

$$f(t, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma t \sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}}, t > 0.$$

توزیع لگ نرمال کاربردهای وسیعی در قابلیت اعتماد، مقاومت مواد به طور کلی پدیده‌های تصادفی که توزیع احتمال آن‌ها دارای چولگی زیاد است دارد.

^۱Log-normal distribution

اگرچه μ و σ همان پارامترهای توزیع نرمال هستند. اما برخلاف توزیع نرمال، پارامتر μ میانگین و پارامتر σ واریانس توزیع نیست. می‌توان نشان داد که میانگین و واریانس توزیع به ترتیب برابرند با $LN(\mu, \sigma^2)$

$$E(T) = e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)}$$

و

$$V(T) = e^{\left(\mu + \sigma^2\right)} \left(e^{\sigma^2} - 1 \right)$$

(صحت درستی روابط اخیر به دانشجو و اگذار می‌شود).
در نتیجه ضریب تغییرات توزیع برابر خواهد شد با،

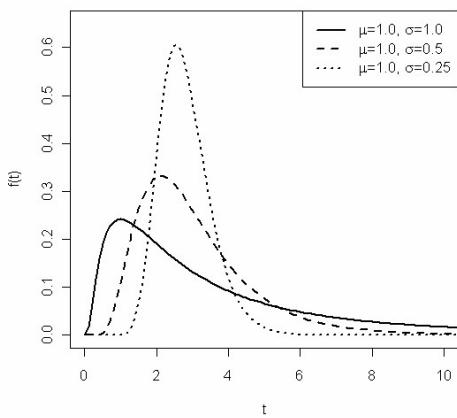
$$\begin{aligned} C.V. &= \frac{\sqrt{V(T)}}{E(T)} \\ &= \left(e^{\sigma^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\approx \sigma \quad \text{برای } \sigma < 0.5 \end{aligned}$$

در توزیع $LN(\mu, \sigma^2)$ اگر $\sigma \geq 1$ آنگاه درصد خرابی‌ها در ابتدای بازه زمان زیاد است و سپس با گذشت زمان شروع به کاهش می‌کند. مقادیر کم σ ، (≤ 0.5)، نشان‌دهنده افزایش نرخ شکست با گذشت زمان است و توزیع شبیه توزیع نرمال خواهد بود. برای مقادیر σ نزدیک به ۱ تابع نرخ خطر به صورت تقریباً یکنواخت عمل می‌کند.
جدول ۸.۵ مقادیر ضریب تغییرات را به ازای مقادیر مختلف σ نشان می‌دهد.

جدول ۷.۵ ضریب تغییرات توزیع لگ نرمال

σ	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲	۰/۲۵	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷
$C.V.$	۰/۱	۰/۱۵۱	۰/۲۰۲	۰/۲۵۴	۰/۳۰۷	۰/۴۱۶	۰/۵۳۳	۰/۶۵۸	۰/۷۹۵

شکل ۱۰.۵ نمودار تابع چگالی لگ نرمال را به ازای $\mu = 1$ و مقادیر مختلف σ نشان می‌دهد.



شکل ۱۰.۵ نمودار چگالی $LN(\mu, \sigma^2)$ برای $\mu = 1$ و مقادیر مختلف σ

می توان نشان داد صدک p_{100} توزیع برابر است با،
 $t_p = e^{(\mu + z_p \sigma)}$

که در آن z_p صدک p_{100} توزیع نرمال استاندارد است. بنابراین با توجه به اینکه در توزیع نرمال استاندارد z_p میانه توزیع لگ نرمال برابر است با،

$$t_{0.5} = e^\mu$$

جدول ۸.۵ مقدار میانگین، واریانس و میانه توزیع $LN(\mu, \sigma^2)$ را به ازای مقادیر مختلف μ و σ ارائه می کند.

جدول ۸.۵ میانگین، واریانس و میانه توزیع لگ نرمال به ازای مقادیر مختلف μ و σ

	$\sigma = 0.5$		$\sigma = 1$		$\sigma = 2$	
	$\mu = 0$	$\mu = 1$	$\mu = 0$	$\mu = 1$	$\mu = 0$	$\mu = 1$
میانگین	۱/۱۳	۳/۰۸	۱/۶۵	۴/۴۸	۷/۳۹	۲۰/۰۹
واریانس	۰/۳۶	۲/۶۹	۴/۶۷	۳۴/۵۱	۲۹۲۶/۳۶	۲۱۶۲۳/۰۴
میانه	۱/۰۰	۲/۷۲	۱/۰۰	۲/۷۲	۱/۰۰	۲/۷۲

اگر $h(t)$ تابع نرخ خطر توزیع لگ نرمال باشد، آنگاه

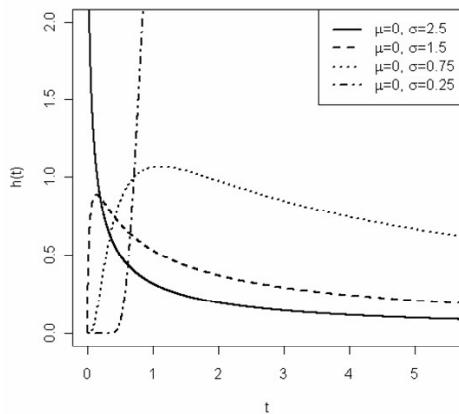
$$h(t) = \frac{\varphi}{\sigma t [1 - \Phi]}$$

که در آن φ و Φ به ترتیب تابع چگالی و تابع توزیع نرمال هستند که آرگومان آنها است. با یک بررسی نه چندان پیچیده می‌توان نشان داد که $\rightarrow \frac{\ln t - \mu}{\sigma}$ هنگامی که $t \rightarrow \infty$ یک توزیع $LN(\mu, \sigma^2)$ یا IFR نیست. می‌توان نشان داد که تابع $h(t)$ دارای یک ماکریم t^* است که از معاده مشتق زیر به دست می‌آید،

$$\frac{\ln t - \mu}{\sigma} + \sigma - \frac{\varphi}{1 - \Phi} = 0.$$

قبل از مقدار t^* تابع $h(t)$ صعودی و بعد از t^* تابع $h(t)$ نزولی است. مقدار مقدار t^* را به فرم بسته نمی‌توان تعیین کرد و برای محاسبه کردن آن باید از روش‌های عددی استفاده کرد. شکل ۱۱.۵ نمودار تابع نرخ خطر توزیع $LN(\mu, \sigma^2)$ را به ازای مقدار $\mu = 0$ و مقادیر مختلف σ نشان می‌دهد.

با توجه به رفتار تابع نرخ خطر $h(t)$, بدیهی است که توزیع لگ نرمال به عنوان یک مدل طول عمر هنگامی مفید واقع می‌شود که به مقادیر بزرگ t علاقه‌مند نیستیم. به عبارت دیگر مدل لگ نرمال برای سیستم‌هایی که طول عمر آنها در یک فاصله محدود از زمان قرار می‌گیرد و یعنی بر اثر نقص یا فرسودگی از کار می‌افتدند مدلی مناسب خواهد بود. به عنوان مثال تعداد کیلومترهایی که یک اتومبیل قبل از اولین خرابی کار می‌کند می‌تواند با توزیع لگ نرمال مدل سازی شود. مثال زیر را در نظر بگیرید.



شکل ۱۱.۵ نمودار تابع نرخ خطر توزیع $LN(\mu, \sigma^2)$ برای $\mu = 0$ و مقادیر مختلف σ

مثال ۵.۵ یک شرکت تولید کننده اتومبیل مخصوصاً خود را به مدت ۳۶ ماه یا کمتر، هر کدام زودتر اتفاق بیافتد، گارانتی می‌کند. مسافتی که هر خودرو بر حسب ماه کار می‌کند یک متغیر تصادفی T است که دارای توزیع لگ نرمال با پارامتر $\mu = 6/5 + \ln 36$ و پارامتر $\sigma = 0.68$ است که در آن t تعداد ماههایی است که خودرو مورد استفاده قرار می‌گیرد. درصد خودروهایی که ۳۶ هزار کیلومتر را در ۳۶ ماه طی می‌کنند چقدر است؟

حل. داریم

$$\begin{aligned} P(T > 36) &= 1 - \Phi\left[\frac{\ln(36) - 6/5 - \ln(36)}{0.68}\right] \\ &= 0.437 \end{aligned}$$

بنابراین، در آخر زمان گارانتی، ۴۳/۷٪ از اتومبیل‌ها دوره گارانتی را بدون نقص می‌گذرانند. جدول ۹.۵ خلاصه نتایج مربوط به توزیع لگ نرمال را ارائه می‌کند.

جدول ۹.۵ خلاصه نتایج مربوط به توزیع نرمال

نام	فرمول یا خاصیت
تابع چگالی احتمال	$f(t, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma t \sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}}$
تابع توزیع	$F(t, \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)$
تابع قابلیت اعتماد	$R(t, \mu, \sigma) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)$
تابع نرخ خطر ابتداء صعود و سپس نزول می‌کند.	$h(t) = \frac{f(t, \mu, \sigma)}{F(t, \mu, \sigma)}$
میانه	e^μ
میانگین	$E(T) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} = \text{میانه} \times e^{\frac{\sigma^2}{2}}$
واریانس	$V(T) = e^{(\mu + \sigma^2)} (e^{\sigma^2} - 1) = \text{میانه} \times e^{\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$

در پایان این بخش به این نکته اشاره می‌کیم که توزیع لگ نرمال می‌تواند یک پارامتر مکان نیز داشته باشد در این حالت تابع چگالی احتمال متغیر به صورت زیر خواهد بود،

$$f(t, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma(t-\theta)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\ln(t-\theta)-\mu}{\sigma^2}}, t > \theta, \mu \in (-\infty, +\infty), \sigma > 0.$$

برای متغیری با چنین توزیع احتمال، در فاصله (θ, \cdot) شکست نخواهیم داشت.

۶.۵ چند توزیع پیوسته دیگر

توزیع‌های دیگری نیز وجود دارند که می‌توانند در مبحث قابلیت اعتماد و مطالعات بقا به کار روند. یکی از این توزیع‌ها توزیع لجستیک^۱ است. متغیر تصادفی T دارای توزیع لجستیک با پارامتر مکان μ و پارامتر مقیاس σ است اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد،

$$f(t, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} e^{\frac{(t-\mu)}{\sigma}}, -\infty < t < +\infty$$

$$\left(1 + e^{\frac{(t-\mu)}{\sigma}} \right)^{-1}$$

این توزیع مانند توزیع نرمال متقاضن است با این تفاوت که دم‌های طویل‌تر است. تابع قابلیت اعتماد آن برابر است با،

$$R(t, \mu, \sigma) = \frac{1}{1 + e^{\frac{(t-\mu)}{\sigma}}}$$

و بنابراین تابع نرخ خطر آن به فرم بسته زیر ارائه می‌شود،

$$h(t) = \frac{1}{\sigma} \frac{e^{\frac{(t-\mu)}{\sigma}}}{1 + e^{\frac{(t-\mu)}{\sigma}}}, -\infty < t < +\infty \quad (1.5)$$

که همواره تابعی صعودی از t است.

اگر فرض کنیم متغیر تصادفی طول عمر T طوری باشد که لگاریتم آن دارای توزیع لجستیک به شکل رابطه (۱.۵) است آنگاه T دارای توزیعی خواهد بود که تابع چگالی آن برابر است با

¹ Logistic distribution

$$f(t, \alpha, \beta) = \frac{\alpha \beta^\alpha t^{\alpha-1}}{(1 + (\beta t)^\alpha)}$$

که در آن $\sigma^{-1} = \alpha$ و $e^{-\mu} = \beta$. این توزیع را لگ لجستیک گویند. می‌توان نشان داد که تابع قابلیت اعتماد و تابع نرخ خطر آن به ترتیب برابرند با

$$R(t, \alpha, \beta) = \frac{1}{1 + (\beta t)^\alpha}$$

و

$$h(t) = \frac{\alpha \beta^\alpha t^{\alpha-1}}{1 + (\beta t)^\alpha}$$

تابع نرخ خطر $h(t)$ در اینجا به ازای $\alpha > 1$ دارای یک ماکریسم است و به ازای $1 \leq \alpha \leq 1$ تابع نرخ خطر همواره نزولی است. (صحت این مطلب به داشتجویان و اگذار می‌شود).

نقشه قوت توزیع‌های لجستیک نسبت به توزیع‌های نرمال و لگ نرمال، فرم محاسباتی ساده‌تر تابع چگالی و تابع قابلیت اعتماد و تابع نرخ خطر آن‌ها است.

یکی دیگر از توزیع‌هایی که در قابلیت اعتماد می‌تواند مفید واقع شود توزیع پارتو^۱ است. در متون آماری توزیع پارتو به شکل‌های متنوعی ارائه شده است. ما در اینجا توزیع پارتو را به صورتی در نظر می‌گیریم که در آن یک پارامتر شکل و یک پارامتر مقیاس وجود دارد. متغیر تصادفی T را دارای توزیع پارتو با پارامتر مقیاس β و پارامتر شکل α گوییم اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد،

$$f(t, \alpha, \beta) = \frac{\alpha \beta^\alpha}{(\beta + t)^{\alpha+1}}, t > 0, \alpha > 0, \beta > 0.$$

در این صورت تابع قابلیت اعتماد توزیع برابر است با،

$$R(t, \alpha, \beta) = \left(\frac{\beta}{\beta + t} \right)^\alpha, t > 0.$$

در این توزیع اندازه‌های قابلیت اعتماد مانند تابع نرخ خطر و میانگین عمر باقیمانده شکل‌های بسیار ساده‌ای دارند. به راحتی ملاحظه می‌شود که تابع نرخ خطر آن مساوی است با،

^۱ Pareto distribution

$$h(t) = \frac{\alpha}{\beta + t}$$

که همواره تابعی نزولی از t است.
میانگین عمر باقیمانده این توزیع به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} m(t) &= \int_t^{\infty} \frac{R(x, \alpha, \beta)}{R(t, \alpha, \beta)} dx \\ &= \int_t^{\infty} \frac{(\beta + x)^{-\alpha}}{(\beta + t)^{-\alpha}} dx \\ &= \beta + t \end{aligned}$$

بنابراین میانگین عمر باقیمانده توزیع پارتو تابعی خطی از زمان است.
یکی از حالاتی که توزیع پارتو در نظریه قابلیت مطرح می‌شود به صورت زیر است. فرض کنید
یک متغیر تصادفی T دارای توزیع نمایی $E(\lambda)$ باشد. همچنین فرض کنید λ خود مقدار
یک متغیر تصادفی باشد که دارای توزیع $G(\alpha, \beta)$ است. یعنی با فرض معلوم بودن λ توزیع T
برابر است با،

$$f(t, \lambda) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0, \lambda > 0.$$

و λ دارای تابع چگالی احتمال زیر است،

$$g(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta \lambda}, \lambda > 0.$$

که در آن α و β مقادیر معلوم‌اند. با این فرضیات اگر $f(t, \lambda)$ را تابع چگالی احتمال شرطی
 T به شرط λ بگیریم. آنگاه تابع چگالی احتمال توانم T و λ برابر خواهد شد با
 $f(t, \lambda)g(\lambda)$. بنابراین تابع چگالی احتمال غیر شرطی T برابر است با،

$$f(t) = \int_0^{\infty} f(t, \lambda)g(\lambda)d\lambda$$

که در واقع یک توزیع آمیزه است. داریم،

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-\lambda t} \beta^\alpha \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta \lambda}}{\Gamma(\alpha)} d\lambda \\
 &= \beta^\alpha \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha e^{-(\beta+t)\lambda}}{\Gamma(\alpha)} d\lambda \\
 &= \frac{\alpha \beta^\alpha}{(\beta+t)^{\alpha+1}} \int_0^\infty \frac{(\beta+t)^{\alpha+1} \lambda^\alpha e^{-(\beta+t)\lambda}}{\Gamma(\alpha+1)} d\lambda \\
 &= \frac{\alpha \beta^\alpha}{(\beta+t)^{\alpha+1}}, \quad t > 0.
 \end{aligned}$$

بنابراین توزیع غیر شرطی T توزیع پارتو با پارامترهای α و λ است.

۷.۵ مسائل

۱. یکی سیستم رادار شامل ۳ ایستگاه است که دارای توزیع یکسان و مستقل از یکدیگرند. سیستم رادار فعال است اگر و تنها اگر حداقل دو ایستگاه آن فعال باشد. با فرض اینکه توزیع طول عمر ایستگاه‌ها نمایی $E(\lambda)$ باشد میانگین مدت زمانی که سیستم فعال است را پیدا کنید.

۲. طول عمر یک سیستم الکترونیکی در صنعت هوا فضا را می‌توان با استفاده از توزیع نمایی که میانگین آن ۳۲۰۰۰ ساعت است مدل سازی کرد.

(الف) تابع نرخ خطر سیستم چقدر است؟

(ب) چقدر احتمال دارد که سیستم در ۱۶۰۰۰ ساعت دیگر از بین برود؟

(ج) اگر سیستم در زمان ۸۰۰۰ فعال باشد چقدر احتمال دارد که ۱۰۰ ساعت دیگر از بین برود؟

اگر سیستم در زمان ۸۰۰۰ فعال باشد چقدر احتمال دارد که ۱۰۰ ساعت دیگر از بین برود؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۳. فرض کنید T_1 و T_2 دو متغیر تصادفی مستقل نمایی‌اند که میانگین‌های آن‌ها به ترتیب β_1 و β_2 است.

(الف) فرض کنید $T = \min(T_1, T_2)$. نشان دهید که T دارای توزیع نمایی است با میانگین

$$\beta^* = \frac{\beta_1}{2}$$

$$\beta_h = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right) \right]^{-1}$$

میانگین همساز β_1 و β_2 است.

ب) یک سیستم شامل دو جزء مستقل است که به صورت متوالی به یکدیگر متصل شده‌اند. هر یک از اجزاء دارای توزیع نمایی و به ترتیب دارای میانگین‌های $\beta_1 = 500$ (ساعت) و $\beta_2 = 1000$ (ساعت) هستند. قابلیت اعتماد سیستم در $t = 300$ ساعت چقدر است؟

۴. فرض کنید $T = T_1 + T_2 + \dots + T_k$ یک مجموع تصادفی از متغیرهای تصادفی مستقل نمایی $E(\lambda)$ باشد که در آن k یک متغیر تصادفی مستقل از T_i ها است و دارای تابع جرم احتمال هندسی به صورت زیر می‌باشد،

$$P(k=r) = p(1-p)^{r-1}, r=1,2,\dots$$

ثابت کنید $T \sim E(p\lambda)$.

۵. فرض کنید T_1 و T_2 دو متغیر تصادفی طول عمر باشند که مستقل از یکدیگر و به ترتیب دارای توزیع نمایی با پارامترهای λ_1 و λ_2 باشد به طوری که $\lambda_1 \neq \lambda_2$. قرار دهید

$$T = T_1 + T_2$$

الف) نشان دهید که

$$R(t) = P(T > t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 t})$$

ب) تابع نرخ خطر T را به دست آورید و نمودار آن را به عنوان تابعی از زمان برای مقادیر مختلف λ_1 و λ_2 رسم کنید.

۶. سیستمی دارای نرخ خطر $h(t) = kt$ است که در آن $k > 0$ و زمان t بحسب ساعت می‌باشد.

الف) قابلیت اعتماد سیستم را در ساعت ۲۰۰۰ کار کرد به دست آورید (فرض کنید $k = 2 \times 10^{-9}$)

ب) میانگین طول عمر سیستم را به ازای $k = 2 \times 10^{-9}$ به دست آورید.

ج) اگر سیستم پس از ۲۰۰۰ ساعت کار کرد هنوز فعال باشد، چقدر احتمال دارد که ۲۰۰۰ ساعت دیگر کار کند. مقدار k مانند حالت الف بگیرید.

۷. اگر $T \sim LN(\mu, \sigma^2)$ ، آنگاه نشان دهید که،

$$V(T) = (e^{\mu+\sigma^2})(e^{\sigma^2}-1), E(T) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$$

۸. فرض کنید T یک متغیر طول عمر با تابع قابلیت اعتماد $R(t)$ باشد که توزیع آن IFR است و میانگین آن μ می‌باشد. ثابت کنید برای $t < \mu$

$$R(t) \geq e^{-\frac{t}{\mu}}$$

۹. فرض کنید T_1 و T_2 دو متغیر تصادفی طول عمر مستقل و به ترتیب دارای نرخ خطر $h_1(t)$ و $h_2(t)$ باشند. ثابت کنید،

$$P(T_1 < T_2 | \min(T_1, T_2) = t) = \frac{h_1(t)}{h_1(t) + h_2(t)}$$

۱۰. قضیه ۴.۵ را اثبات کنید.

۱۱. قضیه ۵.۵ را اثبات کنید.

۱۲. یک سیستم موازی مشکل از دو جزء با توزیع‌های نمایی $E(1)$ و $E(5)$ را در نظر بگیرید که در آن اجزاء مستقل از یکدیگرند. تابع نرخ خطر سیستم را به دست آورید و تحقیق کنید که آیا رفتار آن بر حسب t یکنواست.

۱۳. فرض کنید $E(T) = 1$ ، $T \sim W(\lambda, \beta)$ و $V(T) = 0.16$. مقادیر λ و β را به دست آورید.

۱۴. فرض کنید جزء a به صورت متوالی به دو جزء b و c که موازی‌اند متصل شده است. اگر $T_a \sim W(1, 2)$ و اجزای b و c دارای طول عمر نمایی با نرخ خطر مشترک ۲ باشند تابع نرخ خطر سیستم را به دست آورید. فرض کنید طول عمر اجزاء مستقل از یکدیگر باشند.

۱۵. تابع توزیع یک سیستم متوالی شامل دو جزء مستقل را به دست آورید که در آن طول عمر جزء اول دارای توزیع $E(\lambda_1)$ و طول عمر جزء دوم دارای توزیع $W(0.9, 6.4)$ است.

۱۶. پمپ آب یک نوع اتومبیل دارای طول عمری است که توزیع واibil با پارامتر شکل ۱/۷ و پارامتر مقیاس ۲۶۵۰۰ دارد.
 (الف) اگر زمان گارانتی پمپ ۳۶۰۰۰ کیلومتر باشد، چند درصد از پمپ‌های مورد استفاده در این نوع اتومبیل دوره گارانتی را بدون شکست طی می‌کند.
 (ب) تابع نرخ خطر را به دست آورید.

ج) اگر پمپ اتومبیل در کیلومتر ۳۶۰۰۰ هنوز سالم باشد، چقدر احتمال دارد که بعد از ۱۰۰۰ کیلومتر از کار بیافتد؟

۱۷. طول عمر یک دستگاه الکتریکی توزیع وایل (Weibull) دارد.

الف) چقدر احتمال دارد که طول عمر دستگاه از ۱۰۰۰ ساعت بیشتر شود؟

ب) میانگین و واریانس طول عمر دستگاه را پیدا کنید.

ج) میانه طول عمر دستگاه چقدر است؟

۱۸. سیستمی را مشکل از دو جزء در نظر بگیرید که به طور مستقل عمل می‌کنند و تابع نرخ خطر آن‌ها به ترتیب مقادیر ثابت λ_1 و λ_2 باشند. چقدر احتمال دارد که جزء اول قبل از جزء دوم در سیستم از کار بیافتد؟ این نتیجه را به حالتی که سیستم دارای n جزء مستقل با تابع نرخ خطر ثابت $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ است تعمیم دهید و احتمال آن را محاسبه کنید که جزء اول زودتر از بقیه در سیستم از بین برود.

۱۹. توزیع آمیخته زیر را در نظر بگیرید.

$$f(t) = \lambda_1 \alpha e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 (1-\alpha) e^{-\lambda_2 t}, \quad t > 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0$$

میانگین طول عمر سیستمی با این توزیع را به دست آورید. در مورد رفتار میانگین عمر باقیمانده سیستم چه می‌توان گفت؟

۲۰. کارخانه‌ای نوعی حسگر گاز تولید می‌کند که تجربه نشان داده است که توزیع طول عمر این حسگرهای نمایی با نرخ خطر λ می‌باشد که در آن λ خود مقدار یک متغیر تصادفی Λ است که دارای توزیع گاما با میانگین $E(\Lambda) = 1/15 \times 10^{-5}$ (بر حسب معکوس ساعت) و واریانس $V(\Lambda) = 16 \times 10^{-11}$ است. متوسط زمان از کار افتادن این محصول را بر حسب سال محاسبه کنید.

۲۱. فرض کنید طول عمر یک سیستم بر حسب ساعت دارای توزیع $(1/15 \times 10^{-5}) / (2/25, 1/15 \times 10^{-5})$ باشد.

الف) چقدر احتمال دارد که سیستم ۶ ماه بدون شکست فعال باشد؟

ب) میانگین طول عمر سیستم چقدر است؟

ج) میانه طول عمر سیستم چقدر است؟

د) اگر سیستم در آخر ماه ششم هنوز کار کند، چقدر احتمال دارد که ۶ ماه دیگر کار کند؟

ه) با استفاده از یک نرم افزار کامپیوتری، نمودار میانگین عمر باقیمانده سیستم را رسم کنید.

۲۲. زمان شکست یک نوع دیود الکترونیکی دارای توزیع لگ نرمال با پارامترهای $\mu = ۱۲/۳$ و $\sigma = ۱/۲$ است.

الف) نمودار تابع نرخ خطر توزیع را رسم کنید.

ب) در چه نقطه‌ای از زمان تابع نرخ خطر شروع به نزول می‌کند.

ج) قابلیت اعتماد دیود را در زمان ۱۵۰۰۰۰ (ساعت) تعیین کنید.

د) چند درصد از چین دیودهای قبل از ۵۰۰۰۰ (ساعت) از کار می‌افتد؟

۲۳. مقاومت یک مقنول فلزی، T ، دارای توزیع $LN(\mu, \sigma^2)$ است. مقدار μ چقدر باشد که $P(T \leq ۱۵۸) = ۰/۵$.

۲۴. فرض کنید یک سیستم دارای توزیع نرمال بی سر شده با پارامترهای $\mu = ۵$ و $\sigma = ۲$ باشد. قابلیت اعتماد سیستم را در زمان $t = ۳$ تعیین کنید. تابع نرخ خطر در زمان $t = ۰$ چقدر است؟

۲۵. کارخانه تولید لاستیک اتومبیل، محصولاتی تولید می‌کند که به طور متوسط ۵۰۰۰۰ کیلومتر کار می‌کنند. فرض کنید در صد محصولات بیش از ۷۰ هزار کیلومتر کار کنند. اگر توزیع طول عمر لاستیکی نرمال باشد،

الف) انحراف استاندارد محصولات را پیدا کنید.

ب) چقدر احتمال دارد که یک لاستیک تولیدی بیش از ۶۰ هزار کیلومتر کار کند.

ج) با فرضیات فوق چقدر احتمال دارد که یک محصول طول عمر منفی داشته باشد؟

۲۶. ثابت کنید اگر T_{n_1}, \dots, T_i, T_n متغیرهای تصادفی لگ نرمال باشند با پارامترهای μ_i و σ_i دارای توزیع لگ نرمال است با پارامترهای $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i$ و $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$.

۲۷. اگر $T \sim W(\lambda, \beta)$ نشان دهید،

$$E(T^k) = \frac{1}{\lambda^k} \Gamma\left(1 + \frac{k}{\beta}\right), k = 1, 2, \dots$$

۵

روش‌های استنباط پارامتری در قابلیت اعتماد

۱.۶ مقدمه

در فصل‌های قبل تابع قابلیت اعتماد متناظر با یک متغیر تصادفی طول عمر را تعریف کرده و بعضی از شاخص‌های مهم سالخوردگی نظیر تابع خطر و میانگین عمر باقیمانده را معرفی کردیم. در مطالعه خواص متغیرهای طول عمر، اگر مدل احتمالی متغیر یعنی تابع چگالی احتمال آن، f ، کاملاً معلوم باشد، آنگاه قادر خواهیم بود که قابلیت اعتماد آن، تابع نرخ خطر و سایر شاخص‌های آماری متناظر با آن را تعیین نموده و در مورد رفتار تصادفی آن بحث نماییم. این امر نه تنها باعث می‌شود که رفتار تصادفی یک سیستم با توزیع f را کاملاً شناخت بلکه باعث می‌شود که آن را با سیستم‌های دیگر مقایسه کرد.

در دنیای واقعی، در مطالعه خواص تصادفی طول عمر یک سیستم، ممکن است با وضعیت‌هایی روبرو شویم که در آن‌ها توزیع طول عمر سیستم کاملاً معلوم نباشد. در وضعیت متدائل به صورت زیر است.

(الف) اولین وضعیت هنگامی است که توزیع طول عمر کاملاً نامعلوم باشد. در این حالت نقش آماردان آن است که با گرفتن مشاهداتی در مورد نحوه عملکرد سیستم در طول زمان، توزیع طول عمر را تخمین زده و سپس در مورد رفتار تصادفی و خواص سالخوردگی آن بحث نمایید. این نوع استنباط آماری اصطلاحاً به استنباط ناپارامتری یا روش‌های ناپارامتری معروف است.

ب) وضعیت دیگری که اتفاق می‌افتد این است که آماردان ممکن است از قبل ساختار احتمالی (توزیعی) طول عمر سیستم را بداند. به عنوان مثال ممکن است، از تجربیات قبلی یا مطالعات دیگر بداند که توزیع طول عمر سیستم مورد بررسی واپس است، اما پارامترهای توزیع برآش مجهول باشد. در این حالت با گرفتن مشاهداتی از آن توزیع باید پارامترهای مجهول توزیع را برآورد کند. چنین وضعیتی را اصطلاحاً، استنباط پارامتری یا روش‌های پارامتری گویند.

حالاتی دیگری نیز اتفاق می‌افتد که در آن وضعیت موجود بین آمار پارامتری و ناپارامتری قرار می‌گیرد. در متون پیشرفته آماری روش‌هایی مطرح می‌شود که به آنها شبه پارامتری می‌گویند. یکی از این روش‌ها که به ویژه در مطالعات طول عمر مهم است روش مدل رگرسیونی کاکس است که بحث در مورد آن از هدف این متن خارج است. اما در فصل‌های بعد یکی دیگر از روش‌های استنباط را مطرح می‌کنیم که به نوعی بین دو روش پارامتری و ناپارامتری قرار می‌گیرد. این روش که در فصل ۸ در مورد آن بحث می‌کنیم روش نمودار احتمال است.

در این فصل روش‌های پارامتری برآورد را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در بخش ۲.۶، ابتدا نگاهی اجمالی به مبحث برآورد پارامترها انداده و دو روش برآورد نقطه‌ای و برآورد فاصله‌ای را مرور می‌کنیم. در بخش ۳.۶ خصوصیات داده‌های قابلیت اعتماد را معرفی کرده و سپس انواع شیوه‌های سانسور شدن داده را ارائه می‌کنیم. بخش ۴.۶ روش گشتاوری برآورد پارامتر را ارائه می‌کند. به ویژه نشان می‌دهیم که چگونه این روش را برای داده‌های سانسور در بعضی حالات خاص می‌توان به کار برد. در بخش ۵.۶ برآورد به روش ماکزیمم درستمنایی را ارائه می‌کنیم. این روش به دلیل ویژگی‌های منحصر به فرد خود یکی از متدائل‌ترین روش‌ها در برآورد پارامتر است. به ویژه این روش برای شیوه‌های مختلف سانسور کارائی دارد. بخش ۶.۶ در مورد نحوه به دست آوردن فاصله‌های اطمینان تقریبی بحث می‌کند. در بخش‌های ۷.۶ تا ۹.۶ با ارائه مثال‌های متنوع نشان می‌دهیم که چگونه روش درستمنایی ماکزیمم را می‌توان در برآورد مدل‌های معروف مانند نمایی، واپل، و لگ نرمال تحت شیوه‌های مختلف نمونه‌گیری به کار برد.

۲.۶ نگاهی اجمالی به برآورد پارامترها

همانطور که اشاره کردیم، توزیع طول عمر یک سیستم ممکن است به یک یا چند پارامتر مجهول بستگی داشته باشد. لذا جهت تعیین شاخص‌های طول عمر سیستم، لازم است که پارامترها را برآورد کنیم. بدین منظور ابتدا باید با استفاده از یک شیوه نمونه‌گیری، که معمول‌ترین نوع آن نمونه‌گیری تصادفی ساده است، داده‌هایی از توزیع مورد نظر استخراج

می‌کنیم. ارائه برآوردگرهایی با استفاده از داده‌های به دست آمده و مطالعه خواص آن‌ها یکی از اهداف استنباط آماری است. فرض کنید $f(x, \theta)$ توزیع طول عمر تحت بررسی باشد که در آن θ متعلق به فضای پارامتر Θ است. اگر $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی باشد، گوییم تشکیل یک نمونه تصادفی می‌دهد هر گاه T_i ‌ها مستقل بوده و دارای توزیع یکسان باشند. فرض کنید بخواهیم تابعی از θ ، مثلاً $g(\theta)$ را برآورد کنیم. بدین منظور تابعی از مشاهدات نمونه را که دارای ساخت یکسان با $g(\theta)$ است به عنوان برآوردگر به کار می‌بریم. تعریف دقیق برآوردگر به صورت زیر است.

تعریف ۱.۶ فرض کنید $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{T})$ تابعی از نمونه تصادفی (T_1, T_2, \dots, T_n) باشد. گوییم $\hat{\theta}$ یک برآوردگر $g(\theta)$ است هر گاه مقادیر $\hat{\theta}$ در فضای مقادیر $g(\theta)$ باشد.

برای مثال فرض کنید هدف برآورد نسبت خرابی‌های یک دستگاه تولید نوعی قطعات صنعتی باشد. چون این نسبت مقدار بین صفر و یک را می‌گیرد، هر برآوردگر آن نیز باید طوری تعریف شود که مقداری در همین فاصله بگیرد.

با توجه به اینکه \mathbf{T} مقادیر تصادفی را در نمونه‌های مختلف می‌گیرد و $\hat{\theta}$ تابعی از \mathbf{T} خود نیز یک متغیر تصادفی خواهد بود. بنابراین $\hat{\theta}$ دارای یک توزیع احتمال است که به آن توزیع نمونه‌ای $\hat{\theta}$ می‌گوییم. برای مثال فرض کنید $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ نمونه تصادفی از توزیع $E(\theta)$ باشد که در آن θ مجهول است. آنگاه یک برآوردگر طبیعی برای میانگین جامعه، $g(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$ است. همانطور که در فصل ۵ دیدیم مجموع n متغیر تصادفی مستقل از توزیع نمایی $E(\theta)$ ، دارای توزیع گاما $G(n, \theta)$ است. بنابراین می‌توان نشان داد که توزیع نمونه‌ای $\hat{\theta}$ ، $G(n, n\theta)$ است. از هر نمونه به نمونه دیگر مقداری متفاوت را اختیار می‌کند. متوسط مقداری که $\hat{\theta}$ در نمونه‌های مختلف می‌گیرد میانگین توزیع $G(n, n\lambda)$ است. به عبارت دیگر، با توجه به میانگین توزیع گاما،

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}) &= n \frac{1}{n\theta} \\ &= \frac{1}{\theta}, \end{aligned}$$

که همان میانگین T_i ‌ها است. اصطلاحاً در اینجا گوییم $\hat{\theta}$ برآوردگر ناریب است. به طور کلی برآوردگر $\hat{\theta}(\mathbf{T})$ را یک برآوردگر ناریب $g(\theta)$ گوییم هر گاه،

$$E(T) = g(\theta)$$

معمولًاً ناریبی یکی از مطلوبیت‌های یک برآوردگر می‌باشد. به طور شهودی مفهوم ناریبی بیان می‌کند متوسط مقادیری که یک برآوردگر در نمونه‌های مختلف می‌گیرد مساوی است با پارامتر مورد نظر. جهت اندازه‌گیری دقت یک برآورد کننده عیارهای مختلفی تعریف شده است. متداولترین معیار برای اندازه‌گیری دقت برآوردگر متوسط توان دوم خطاست. اگر $\hat{\theta}$ برآوردگر $(\hat{g}(\theta))$ باشد، آنگاه متوسط توان دوم خطای آن که با $MSE_{\theta}(\hat{\theta})$ نشان می‌دهیم برابر است با،

$$MSE_{\theta}(\hat{\theta}) = E_{\theta}(\hat{\theta} - g(\theta))^2$$

هر چقدر که $MSE_{\theta}(\hat{\theta})$ مقدار کمتری داشته باشد برآوردگر $\hat{\theta}$ دقیق خواهد بود. در حالتی که $\hat{\theta}$ برای $g(\theta)$ برآوردگری ناریب باشد، به راحتی نشان داده می‌شود که $MSE_{\theta}(\hat{\theta})$ همان واریانس برآوردگر $\hat{\theta}$ است. در مثال توزیع نمایی دیدیم که برآوردگر $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$ ناریب است. واریانس $\hat{\theta}$ ، با توجه به فرمول واریانس توزیع گاما، برابر است با:

$$\begin{aligned} V(\hat{\theta}) &= n \frac{1}{(n\theta)^2} \\ &= \frac{1}{n\theta^2} \end{aligned}$$

ملحوظه می‌شود که با افزایش حجم نمونه، $V(\hat{\theta})$ کاهش پیدا کرده و در نتیجه دقت برآوردگر $\hat{\theta}$ افزایش پیدا می‌کند. این روش برآورد $(\hat{g}(\theta))$ را برآورد نقطه‌ای گویند. در متون استنباط آماری روش‌های متنوعی برای برآورد نقطه‌ای پارامترهای مجھول توزیع ارائه شده است. دو روش متداول در آمار "روش گشتاوری" و روش "ماکریم درستنمایی" که ویژگی اولین روش سادگی به کار بردن آن و دومین روش از ویژگی‌های مهمی برخوردار است که در بخش‌های بعد به آن اشاره می‌کنیم. روش دیگری از برآورد پارامترها برآورد فاصله‌ای است. در این روش از برآوردگر در نظر بگیریم، مجموعه از مقادیر فضای پارامتر $(\hat{g}(\theta))$ را به دست آورده و ادعا می‌کنیم که $(\hat{g}(\theta))$ با خصیبی از اطمینان در آن فضای قرار می‌گیرد. تعریف دقیق یک فاصله اطمینان به صورت زیر است.

تعريف ۲.۶ فرض کنید $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $f(x, \theta)$ باشد که $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$. فرض کنید $\underline{\theta}(\mathbf{T})$ و $\bar{\theta}(\mathbf{T})$ دوتابع از \mathbf{T} باشند که آنگاه $\underline{\theta}(\mathbf{T}) \leq \bar{\theta}(\mathbf{T})$ فاصله $(\underline{\theta}(\mathbf{T}), \bar{\theta}(\mathbf{T}))$ را یک فاصله اطمینان، با سطح اطمینان $(1-\alpha) \times 100\%$ برای θ است هرگاه به ازای تمام مقادیر θ ,

$$P(\underline{\theta}(\mathbf{T}) \leq g(\theta) \leq \bar{\theta}(\mathbf{T})) \geq 1-\alpha$$

یعنی با ضریب اطمینان حداقل $(1-\alpha) \times 100\%$ فاصله $(\underline{\theta}(\mathbf{T}), \bar{\theta}(\mathbf{T}))$ مقدار $g(\theta)$ را در بر می‌گیرد.

جهت تعیین فاصله اطمینان برای میانگین توزیع نمایی $E(\theta)$ ، به صورت زیر عمل می‌کیم. دیدیم که $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$ دارای توزیع $G(n, n\theta)$ است. بنابراین متغیر $2n\theta\hat{\theta}$ دارای توزیع کای دو با $2n$ درجه آزادی است. پس به ازای $1-\alpha \leq 1$ ، می‌توان نوشت،

$$P\left(\chi_{\gamma_{n,\frac{\alpha}{2}}}^* \leq 2n\theta\hat{\theta} \leq \chi_{\gamma_{n,1-\frac{\alpha}{2}}}^*\right) = 1-\alpha$$

و $P\left(\chi^* \geq \chi_{\gamma_{n,\frac{\alpha}{2}}}^*\right) = \frac{\alpha}{2}$ که در آن $\chi_{\gamma_{n,\frac{\alpha}{2}}}^*$ مقادیری هستند که به ازای آنها $\chi_{\gamma_{n,1-\frac{\alpha}{2}}}^*$ در نتیجه داریم،

$$P\left(\frac{\chi_{\gamma_{n,\frac{\alpha}{2}}}^*}{2n\hat{\theta}} \leq \theta \leq \frac{\chi_{\gamma_{n,1-\frac{\alpha}{2}}}^*}{2n\hat{\theta}}\right) = 1-\alpha$$

بنابراین بازه،

$$(\underline{\theta}(\mathbf{T}), \bar{\theta}(\mathbf{T})) = \left(\frac{\chi_{\gamma_{n,\frac{\alpha}{2}}}^*}{2n\hat{\theta}}, \frac{\chi_{\gamma_{n,1-\frac{\alpha}{2}}}^*}{2n\hat{\theta}} \right)$$

یک فاصله اطمینان دقیق $(1-\alpha) \times 100\%$ برای پارامتر θ (نرخ خطر) توزیع نمایی است. با معکوس کردن این فاصله می‌توان یک فاصله اطمینان برای میانگین توزیع نمایی به دست آورد.

پس از مشاهده مقادیر نمونه برآوردهای $\hat{\theta}$ را محاسبه کرده و با استفاده از جدول مقادیر توزیع χ^2 ، کران پایین و بالای فاصله اطمینان را محاسبه می‌کنیم. در بخش‌های بعد با ارائه مثال جزئیات بیشتر را توضیح می‌دهیم. روشی که در اینجا برای محاسبه فاصله اطمینان میانگین توزیع نمایی ارائه کردیم، حالت خاصی از روشی به نام "کمیت محوری" است. در این روش باید تابعی از برآوردهای $\hat{\theta}$ و پارامتر θ را طوری پیدا کنیم که توزیع آن به پارامتر بستگی نداشته باشد. سپس بر اساس آن تابع می‌توان امیدوار بود که فاصله اطمینان برای پارامتر مجھول را یافت. در بسیاری از حالات یافتن فاصله اطمینان دقیق برای پارامتر مجھول امکان پذیر نیست و لذا لازم است فاصله‌های اطمینان تقریبی برای پارامتر یافت. اساس یافتن فاصله اطمینان‌های تقریب استفاده از توزیع نرمال و قضیه حد مرکزی است. بر مبنای قضیه حد مرکزی در بسیاری از حالات منطقی است که توزیع تقریبی برآوردهای را به ویژه هنگامیکه حجم نمونه بزرگ با توزیع نرمال تقریب زد. جزئیات بیشتر استفاده از فاصله‌های اطمینان تقریبی را به بخش ۷.۵ واگذار می‌کنیم.

۳.۶ داده‌های قابلیت اعتماد و انواع سانسور

هر نوع استنباط آماری مستلزم داشتن داده‌هایی از جامعه آماری است. در نظر قابلیت اعتماد نیز برای هر گونه نتیجه‌گیری در مورد قابلیت و چگونگی سالخوردگی محصولات نیاز به داشتن داده است. داده‌های قابلیت علاوه بر این در موارد زیر نیز می‌تواند مفید باشد.

- (۱) بررسی مشخصه‌هایی به کار رفته در موارد زیر نیز می‌تواند مفید باشد.
 - (۲) پیش‌بینی قابلیت اعتماد و محصول در مرحله طراحی اولیه آن.
 - (۳) بررسی اثر یک طراحی خاص در قابلیت اعتماد محصول.
 - (۴) مقایسه بین دو یا چند تولید کننده یک محصول خاص.
 - (۵) بررسی درست بودن یک ادعای تبلیغاتی.
 - (۶) پیش‌بینی هزینه‌های گارانتی محصول توسط تولید کنند.
- از متون تحلیل بقا و آزمون طول عمر، داده‌های قابلیت اعتماد به نام زیر معروفند.
- (۱) داده‌های عمر
 - (۲) داده‌های زمان شکست
 - (۳) داده‌های بقا
 - (۴) داده‌های زمان پیشامد
 - (۵) داده‌های فرسایشی (البته با کمی تفاوت در مقایسه با موارد فوق)
- از خصوصیات متمایز داده‌های قابلیت اعتماد می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

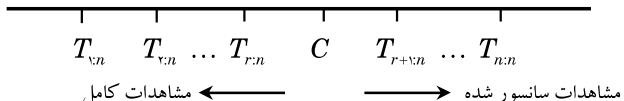
۱) داده‌های قابلیت اعتماد نامنفی هستند. همانطور که در فصل قبل اشاره کردیم متغیرهای تصادفی طول عمر و یا توزیع‌های طول عمر آن‌ها دارای تکیه گاه مثبت هستند. بنابراین داده‌هایی که از این توزیع‌ها استخراج می‌شود مقادیر نامنفی هستند. مدل‌های معروف در مطالعات طول عمر عبارتند از توزیع نمایی، توزیع واپل، توزیع لگ نرمال، توزیع گاما و ...

۲) ویژگی مهم و متمایز دیگر داده‌های طول عمر آن است که معمولاً شامل مشاهدات ناکامل هستند. این حالت زمانی اتفاق می‌افتد که مقدار دقیق طول عمر یک محصول که تحت آزمایش قرار می‌گیرد را مشاهده نمی‌کنیم، و تنها اطلاعاتی که در مورد آن داریم آن است که از یک مقدار معین مثلاً C بیشتر است. دلیل رخداد چنین پدیده‌های در مطالعات طول عمر دو چیز است، یکی زمان‌بر بودن آزمایش و دیگری پرهزینه بودن آن. معمولاً هنگامی که یک محصول را وارد آزمایش می‌کنیم، جهت اندازه گیری طول عمر آن باید منتظر ماند تا از کار بیافتد. از آنجایی که ممکن است محصول دارای قابلیت بالا باشد، چهت مشاهده زمان شکست آن باید زمان بسیار زیادی صرف کرد که البته این امر معقولی نیست از طرف دیگر محصول مورد آزمایش ممکن است بسیار گران قیمت باشد و شکست هر محصول هزینه زیادی را بر آزمایش تحمل کند. بنابراین با وجود چنین ملاحظاتی هنگامیکه طول عمر محصول از یک مقدار ثابت از قبل تعیین شده بیشتر شد محصول را از آزمایش خارج می‌کنیم و اطلاعات حاصل را ثبت می‌کنیم. در این حالت اصطلاحاً گوییم که داده مورد نظر سانسور شده است. فرض کنید متغیر T طول عمر محصول مورد آزمایش باشد و n ، $(n > 1)$ ، محسول با طول عمر T_n, T_{n-1}, \dots, T_1 نشان‌دهنده طول عمر محصولات باشد آنگاه اگر برای متغیر T_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، داشته باشیم $t_i = T_i$ (که در آن $t_i < C$ مقداری معلوم است) آنگاه مشاهده t_i ، یک مشاهده کامل است. اگر برای محصول t_i ام تهاب دانیم که $t_i > C$ در آن C مقداری معلوم است آنگاه اصطلاحاً گوییم متغیر از سمت راست سانسور شده است. از طرفی اگر $t_i < C$ آنگاه متغیر مورد بررسی از سمت چپ سانسور شده است. نوع دیگر سانسور آن است که در زمان بازرگانی C محصول هنوز فعال بوده است اما در زمان بازرگانی C ، $(C < t_i < C)$ ، از کار افتاده است. در این حالت گوییم سانسور فاصله‌ای اتفاق افتاده است. دو نوع از شیوه‌های متدالوں سانسور از راست شیوه‌هایی هستند که به آن‌ها سانسور نوع I و سانسور نوع II گویند. سانسور نوع I را سانسور زمان و سانسور نوع II را سانسور شکست نیز می‌گویند. در زیر تعریف این دو نوع سانسور را تعریف می‌کنیم.

I سانسور نوع

فرض کنید n آزمودنی را در زمان $t = 0$ وارد آزمایش می‌کنیم. تا زمان ثابت C منتظر می‌مانیم و سپس آزمایش را خاتمه می‌دهیم. در این صورت نتیجه آزمایش این است که r

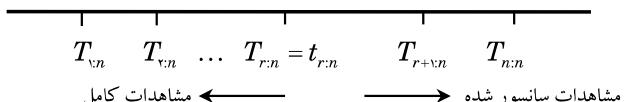
محصول $n, r = 1, \dots, n$ قبل از زمان C از کار افتاده‌اند و زمان دقیق شکست آن‌ها معلوم است و تنها اطلاعی که در مورد $n - r$ محصول باقیمانده داریم آن است که طول عمرشان از C بیشتر است و اصطلاحاً سانسور شده‌اند. شکل ۱.۶ را ببینید.



شکل ۱.۶ نمایش سانسور نوع I

سانسور نوع II

در این روش n آزمودنی را در زمان $t = 0$ وارد آزمایش می‌کنیم. سپس منتظر می‌مانیم تا r از کار افتادگی را مشاهده کنیم، $t_r = 1, 2, \dots, n$ ، آنگاه آزمایش را خاتمه می‌دهیم. اگر $t_{r:n}$ مقدار مشاهده شده ۲۰۰ امین از کار افتادگی باشد آنگاه تنها اطلاعی که در مورد $n - r$ محصول باقیمانده داریم آن است که طول عمرشان از $t_{r:n}$ بیشتر است و اصطلاحاً سانسور شده‌اند. شکل ۲.۶ را ببینید.



شکل ۲.۶ نمایش سانسور نوع I

در اینجا ذکر چند نکته ضروری است. اول اینکه در کنار این شیوه‌ها از جمع‌آوری داده‌های سانسور شده، انواع دیگری از روش‌ها سانسور وجود دارد که جهت اطلاع در مورد آن‌ها می‌توان به کتب پیشرفته‌تر مراجعه کرد. نکته دوم اینکه صرفنظر از نوع سانسور، مدامی که شیوه سانسور مستقل از متغیر طول عمر باشد، با وجود کامپیوترهای پیشرفته مشکلی در تحلیل داده‌های قابلیت نخواهیم داشت. نکته آخر اینکه داده‌های قابلیت اعتماد را علاوه بر روش‌های فوق می‌توان از طرق دیگر نیز جمع‌آوری کرد. دو نوع دیگر از این روش‌ها، مطالعات میدانی در محیط استفاده از محصولات و استفاده از پایگاه‌های داده‌های گارانتی است که معمولاً شرکت‌های مختلف در دست دارند.

قبل از آن که روش‌های برآورد پارامتری را مورد بررسی قرار دهیم، در ادامه فصل فرض می‌کنیم متغیر تصادفی طول عمر T دارای توزیعی است با تابع چگالی احتمال $f(x, \theta)$ که در آن $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ برداری از پارامترهای مجھول است که باید برآورد شوند. برآورد این

پارامترها باعث می‌شود که مدل $f(x, \theta)$ کاملاً معلوم باشد و لذا قابلیت اعتماد و دیگر شاخص‌های آماری متغیر طول عمر را می‌توان تخمین زد. فرض می‌کنیم Θ متعلق است به $\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ و فضای k بعدی اقلیدسی است. معمولاً در عمل مقدار k مساوی ۲ یا حداقل ۳ است. اولین روش برآورده که مورد بررسی قرار می‌گیرد روش گشتاوری است که در ادامه به آن می‌پردازیم.

۴.۶ روش گشتاوری

روش گشتاوری برآورده پارامترهای یک توزیع، از قدیمی‌ترین روش‌های آماری که در عین حال ساده‌ترین نوع روش برآورده بوده و مبتنی است بر یک ایده کاملاً شهودی. فرض کنید نمونه‌ای تصادفی از $f(x, \theta)$ باشد و t_1, \dots, t_n را به ترتیب مقادیر مشاهده شده آن‌ها در نظر بگیرید. گشتاور مرتبه j از جامعه و گشتاور مرتبه j از نمونه، به ترتیب برابرند با $E_\theta(T^j) = \sum_{i=1}^n T_i^j / n$. در روش گشتاوری پارامتر θ را از حل معادلات زیر (در صورت وجود) به دست می‌آوریم.

$$\mu_j(\theta) = m_j, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

برای توضیح بیشتر مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۱.۶ فرض کنید t_1, \dots, t_n مقادیر مشاهده شده یک نمونه تصادفی از توزیع $W(\lambda, \beta)$ باشد. در اینجا $(\lambda, \beta) = (\lambda, \beta)$ که در آن فرض می‌کنیم هر دو پارامتر λ و β مجهول‌اند. از تمرین ۲۷ فصل قبل داریم،

$$\begin{aligned} \mu_j(\theta) &= E(T^j) \\ &= \frac{1}{\lambda^j} \Gamma\left(1 + \frac{j}{\beta}\right), \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

بنابراین λ و β باید از معادلات زیر برآورده شوند،

$$m_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^j = \frac{1}{\lambda} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad (1.6)$$

$$m_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^r = \frac{1}{\lambda^r} \Gamma \left(1 + \frac{r}{\beta} \right)$$

از این دو معادله با حذف λ به دست می‌آوریم.

$$\frac{\Gamma \left(1 + \frac{r}{\beta} \right)}{\Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)} = \frac{m_r}{m_1}$$

بسته به مقادیر مشاهده شده t_i , $i = 1, 2, \dots, n$, با محاسبه مقدار سمت راست مقدار β را با استفاده از روش عددی از معادله فوق تعیین می‌کنیم. اگر $\hat{\beta}$ مقدار برآورد β باشد، با استفاده از معادله ۱.۶ برآورد λ را که با $\hat{\lambda}$ نشان می‌دهیم تعیین می‌کنیم.

برای توضیح بیشتر فرض کنید جدول ۲۵ مشاهده از طول عمر مرتب شده یک نوع باطری بر حسب روز است که بر اساس تجربه می‌دانیم دارای توزیع وایل می‌باشد. علاقه‌مندیم با استفاده از روش گشتاوری مقدار λ و β توزیع وایل را برآورد کنیم.

جدول ۱.۶ طول عمر باطری‌ها با توزیع وایل

i	t_i								
۱	۳۹۱	۶	۶۲۶	۱۱	۷۴۶	۱۶	۹۸۴	۲۱	۱۲۲۳
۲	۵۱۰	۷	۶۸۰	۱۲	۷۶۳	۱۷	۱۰۰۳	۲۲	۱۲۷۹
۳	۵۴۱	۸	۶۹۴	۱۳	۷۷۵	۱۸	۱۰۱۹	۲۳	۱۲۸۵
۴	۵۹۵	۹	۷۱۰	۱۴	۹۳۲	۱۹	۱۰۳۱	۲۴	۱۳۹۳
۵	۶۲۲	۱۰	۷۱۵	۱۵	۹۵۷	۲۰	۱۰۸۳	۲۵	۱۵۷۷

از جدول ۱.۶ به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که $m_r = ۸۷۴۸۴۹ / ۰۷$ و $m_1 = ۸۸۵ / ۳۶$ بنابراین،

$$\frac{\Gamma \left(1 + \frac{r}{\beta} \right)}{\Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)} = \frac{۸۷۴۸۴۹ / ۰۷}{\left(۸۸۵ / ۳۶ \right)^r} = ۱ / ۱۱۶$$

با استفاده از جدول ۱.۵ فصل پنجم، یک بررسی ساده نشان می‌دهد که معادله اخیر به ازای $\beta = 3/25$ برقرار است. در نتیجه برآورد λ برابر خواهد شد با

$$\hat{\lambda} = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}{m_1} = \frac{0.89633}{85/36} = 0.00101$$

اکنون با داشتن مقادیر $\hat{\beta}$ و $\hat{\lambda}$ می‌تواند عبارات احتمالی در مورد طول عمر T را محاسبه کرد. برای مثال قابلیت اعتماد باطری در زمان ۲ سال بعد از استفاده برابرا است با

$$R(730) = e^{-(0.00101 \times 730)^{3/25}} = 0.69$$

مثال ۲.۶ فرض کنید t_1, t_2, \dots, t_n مقادیر مشاهده شده یک متغیر طول عمر باشد که توزیع $G(\lambda, \beta)$ دارد. مطلوبست تعیین برآورد λ و β با استفاده از روش گشتاوری. حل. به راحتی می‌توان نشان داد که گشتاور مرتبه k ام توزیع گاما برابر است با،

$$E(T^k) = \frac{1}{\lambda^k} \prod_{i=1}^{k-1} (\beta + i)$$

بنابراین مقادیر λ و β را می‌توان با استفاده از معادلات زیر برآورد گر

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i = \frac{\beta}{\lambda} \quad (2.6)$$

و

$$m_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^r = \frac{\beta(\beta+1)}{\lambda^r}$$

از دو معادله اخیر به دست می‌آوریم،

$$\frac{m_r}{m_1} = \frac{\beta+1}{\beta}$$

بنابراین

$$\hat{\beta} = \frac{m_1}{m_r - m_1},$$

(۲.۶) ولذا از رابطه

$$\hat{\lambda} = \frac{m_i}{m_r - m_i},$$

$$m_r - m_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - m_i),$$

فرض کنید طول عمر یک نوع لامپ الکتریکی بر حسب روز دارای توزع $G(\lambda, \beta)$ است. از این نوع لامپ نمونه‌ای به حجم ۲۰ وارد آزمایش کرده و طول عمر مرتب شده آنها را در جدول زیر ثبت کرده‌ایم.

جدول ۲.۶ طول عمر لامپ‌های الکتریکی با توزع گاما

i	t_i	i	t_i	i	t_i	i	t_i
۱	۴۶/۷۴	۶	۱۰۲/۰۲	۱۱	۱۶۴/۹۹	۱۶	۲۶۸/۴۰
۲	۵۰/۵۸	۷	۱۲۶/۱۵	۱۲	۱۹۰/۳۴	۱۷	۲۹۴/۹۳
۳	۹۰/۰۶	۸	۱۵۲/۰۷	۱۳	۲۱۲/۹۱	۱۸	۲۹۹/۴۳
۴	۹۹/۸۶	۹	۱۵۵/۲۱	۱۴	۲۴۱/۰۶	۱۹	۳۷۴/۳
۵	۱۰۲/۰۱	۱۰	۱۶۲/۹۳	۱۵	۲۴۳/۳۵	۲۰	۳۷۹/۸۴

با محاسبات ساده می‌توان نشان داد که $m_r = ۴۴۰۴۴/۱۴$ و $m_i = ۱۸۶/۵۹۱$ بنابراین برآوردهای $\hat{\beta}$ و $\hat{\lambda}$ به ترتیب برابرند با،

$$\hat{\beta} = \frac{(186/591)^2}{9227/74},$$

$$= ۳/۷۷۳$$

و

$$\hat{\lambda} = \frac{186/591}{9227/74},$$

$$= ۰/۰۲$$

و در نتیجه تابع چگالی احتمال برآورد شده به صورت زیر است،

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(3/772)} (0.02)^{3/772} t^{7/772} e^{-0.02t}, t > 0.$$

با استفاده از این تابع، قابلیت اعتماد لامپ را در هر لحظه از زمان می‌توان محاسبه کرد. همانطور که ملاحظه شد، روش گشتاوری برای داده‌های کامل منجر به برآوردهایی می‌شود که به طور شهودی قابل قبول هستند و به کار بردن این روش جندان پیچیده به نظر نمی‌رسد. در مباحث پیشرفته‌تر آمار ثابت می‌شود که تحت وجود بعضی شرایط نظم در خانواده توزیع مورد بررسی، اینگونه برآوردهای دارای خواص حدی مطلوبی هستند.

هنگامیکه داده‌های جمع آوری شده ناکامل باشند، استفاده از روش گشتاوری معمولاً امکان پذیر نمی‌باشد و تنها تحت بعضی از شیوه‌های ساده سانسور می‌توان برآوردهای پارامترها را به روش گشتاوری به دست آورد. در اینجا به ذکر یک مثال اکتفا می‌کنیم. فرض کنید داده‌ها بر اساس سانسور نوع II به دست آمده باشند. یعنی از n آزمودنی، r زمان شکست به دست آمده و $(n-r)$ تای بقیه سانسور شده‌اند. در این صورت میانگین مشاهدات برابر است با،

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^r t_i + (n-r)(t_r + E(Y)) \right] \quad (3.6)$$

که در آن Y عمر باقیمانده آن‌هایی است که در آزمون هنوز شکست نخورده‌اند. ثابت می‌شود که اگر μ و σ به ترتیب میانگین واریانس مدل تحت بررسی باشد آنگاه،

$$E(Y) = \frac{\mu + \sigma}{2\mu} \quad (4.6)$$

(کاکس (۱۹۶۲)).

برای مثال اگر توزیع تحت بررسی نمایی $E(Y)$ باشد آنگاه $E(Y) = \frac{1}{\lambda}$. بنابراین از تساوی (۳.۶) به دست می‌آوریم:

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^r t_i + (n-r)\left(t_r + \frac{1}{\lambda}\right) \right]$$

در روش گشتاوری عبارت اخیر را مساوی میانگین جامعه قرار می‌دهیم. اگر چنین کنیم به دست می‌آوریم،

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^r t_i + (n-r)\left(t_r + \frac{1}{\lambda}\right) \right]$$

اگر این معادله را بر حسب $\hat{\lambda}$ حل کنیم برآوردگر منطقی زیر را برای λ خواهیم داشت،

$$\begin{aligned}\hat{\lambda} &= \left(\frac{1}{r} \left[\sum_{i=1}^r t_i + (n-r)t_r \right] \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{TTT}{r} \right)^{-1}\end{aligned}\quad (5.6)$$

که در آن TTT زمان کل آزمایش است که در فصل ۴ معرفی کردیم.

تحت سانسور نوع II این روش را می‌توان برای انواع توزیع‌های طول عمر دیگر مانند توزیع واپیل و یا گاما باشد نیز به کار برد. جزئیات آن را به عنوان تمرین به دانشجویان واگذار می‌کنیم.

مثال ۳.۶ فرض کنید توزیع طول عمر یک قطعه دارای توزیع نمایی ($E(\lambda)$ باشد. جهت برآورد قابلیت اعتماد این قطعه 20 نوع از آن‌ها را در زمان $t = 0$ وارد آزمایش کرده و در زمان هفت‌مین از کار افتادگی آزمایش را خاتمه داده‌ایم. زمان شکست این کار افتادگی‌ها بر حسب ساعت عبارتند از،

۱۴، ۱۱، ۹/۳، ۵/۱، ۴/۵، ۳/۲۵، ۲

مطلوب است تعیین برآورد λ .

حل. در اینجا 7 مشاهده کامل داریم و 13 مشاهده سانسور شده وجود دارد. با توجه به رابطه (5.6) برآورد λ عبارتست از،

$$\hat{\lambda} = \left(\frac{v}{\sum_{i=1}^v t_i + 13 \times t_v} \right) = \frac{v}{321} = 0.03$$

بنابراین متوسط طول عمر قطعات حدود 33 ساعت است.

۵.۶ روش ماکریم درستنمایی

در تحلیل داده‌های قابلیت اعتماد روش ماکریم درستنمایی (ML) و استباط آماری بر مبنای ML (حتی در آمار ناپارامتری) نقش محوری ایفاء می‌کند. فرض کنید توزیع یک متغیر طول عمر T دارای تابع چگالی احتمال $f(t, \theta)$ باشد که در آن θ یک بردار k بعدی مجھول است. فرض کنید یک نمونه تصادفی از $f(t, \theta)$ استخراج کنیم و نمونه منتج به مشاهدات

مستقل t_1, t_2, \dots, t_n شود (t_i زمان دقیق شکست را نشان می‌دهد). طبق تعریف تابع درستنایی که با $L(\theta)$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر خواهد بود،

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i, \theta) \quad (6.6)$$

توجه داشته باشید که پس از مشاهده مقادیر t_i ، تابع درستنایی تنها تابعی از پارامتر θ است. از نقطه نظر محاسباتی معمولاً بهتر است از لگاریتم تابع درستنایی استفاده کنیم. در این صورت تساوی (۶.۶) به تساوی زیر تبدیل می‌شود،

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln[f(t_i, \theta)]$$

که در آن $l(\theta) = \ln L(\theta)$ لگ درستنایی است. بنابر تعریف، برآوردگر ماکزیمم درستنایی (MLE) پارامتر θ از حل معادلات زیر به دست می‌آید که به آن معادله درستنایی می‌گویند.

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} l(\theta), j = 1, 2, \dots, k.$$

واضح است که $\hat{\theta}$ ، تابعی از t_1, t_2, \dots, t_n است. در اغلب موارد به ویژه در آزمون‌های طول عمر، برآورد $\hat{\theta}$ به صورت تحلیلی قابل حصول نیست و باید آن‌ها را با استفاده از روش‌های عددی محاسبه کرد. بسیاری از نرم افزارهای موجود قابلیت حل معادلات درستنایی به روش عددی را دارند.

MLE نه تنها از پشتونه شهودی بسیار قوی برخوردار است، بلکه ویژگی‌های منحصر به فرد دیگری نیز دارد که آن‌ها را از دیگر برآوردگرها متمایز می‌کند. از جمله ویژگی‌های بر جسته MLE‌ها عبارتند از:

(۱) برآوردگر MLE پایاست. یعنی اگر $\hat{\theta}$ ، MLE θ باشد آنگاه $\phi(\hat{\theta})$ MLE است. بنابراین اگر MLE پارامترهای یک توزیع طول عمر را به دست آوریم با جایگذاری در

تابع قابلیت اعتماد، مقدار حاصل MLE تابع قابلیت اعتماد را به دست می‌دهد.

(۲) تحت بعضی شرایط نظم، برای حجم نمونه‌های بزرگ، توزیع برآوردگرها MLE نرمال است.

(۳) تحت شرایط نظم، برآوردگرها MLE در حد دارای خاصیت بهینگی هستند، بدین معنی که برای حجم نمونه‌های بزرگ MLE تقریباً ناریب و دارای کمترین واریانس می‌باشند.

۴) روش درستنمايی را می توان برای شيوه‌های مختلف جمع آوري داده‌ها، مانند انواع روش‌های سانسور به کار برد. لذا برآورده MLE را می توان بر اساس مکانیزم‌های مختلف جمع آوري داده‌ها به دست آورد.

۱.۵.۶ تابع درستنمايی بر اساس داده‌های ناکامل

در ادامه تابع درستنمايی را بر اساس شيوه‌های مختلف جمع آوري داده ارائه می کنيم.

مشاهدات کامل

در اين حالت تابع درستنمايی بر اساس مشاهدات کامل t_1, t_2, \dots, t_n برابر خواهد شد با،

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i, \theta)$$

و در نتيجه لگ تابع درستنمايی مساوي است با،

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln [f(t_i, \theta)]$$

سانسورهای نوع I و II

در سانسور نوع I، n واحد را در زمان $t = 0$ وارد آزمایش می کنيم و در زمان C آزمایش را خاتمه می دهيم. اگر t_1, t_2, \dots, t_r زمان‌های شکست دقیق واحدها قبل از زمان C باشند و $(n-r)$ واحد دیگر در زمان C سانسور شده باشند آنگاه تابع درستنمايی برابر خواهد شد با،

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^r f(t_i, \theta) \prod_{i=r+1}^n R(C, \theta) \\ &= \prod_{i=1}^r f(t_i, \theta) (R(C, \theta))^{n-r} \end{aligned}$$

كه در آن $R(C, \theta)$ تابع قابلیت اعتماد متاظر با $f(t, \theta)$ است. در این صورت لگ درستنمايی عبارتست از،

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^r \ln f(t_i, \theta) + (n-r) \ln R(C, \theta)$$

در اينجا ذكر اين نکته ضروري است که مقدار r خود مقدار يك متغير تصادفي است، چرا که قبل از زمان ثابت مشخص نیست چه تعداد شکست خواهيم داشت اين مقدار می تواند $0, 1, \dots$ يا n باشد. به راحتی می توان استدلال کرد که توزيع r دو جمله‌ای خواهد بود با پارامترهای n

و $F(t, \theta)$ که در آن $F(t, \theta) = f(t, \theta)$ است. باید توجه داشت که برای داشتن MLE ، حداقل یک شکست باید مشاهده شود. اگر مشاهدات بر اساس سانسور نوع II حاصل شود آنگاه آزمایش در زمان r ثابت) خاتمه می‌یابد. در این حالت اگر t_1, t_2, \dots, t_r زمان‌های شکست دارند آنگاه با توجه به اینکه $(n-r)$ واحد طول عمرشان بیشتر از t_r است تابع درستنمایی برابر خواهد شد با،

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}) &= \prod_{i=1}^r f(t_i, \boldsymbol{\theta}) \prod_{i=r+1}^n R(C, \boldsymbol{\theta}) \\ &= \prod_{i=1}^r f(t_i, \boldsymbol{\theta}) (R(C, \boldsymbol{\theta}))^{n-r} \end{aligned} \quad (7.6)$$

و در نتیجه لگاریتم تابع درستنمایی برابر خواهد شد با

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^r \ln f(t_i, \boldsymbol{\theta}) + (n-r) \ln R(C, \boldsymbol{\theta})$$

توجه کنید که، اگر چه ظاهرًا $l(\boldsymbol{\theta})$ در هر دو نوع سانسور I و II مشابه هستند اما باید دقت نمود که تفاوت عمداتی با هم دارند. در اولی C ثابت ولی مقدار r تصادفی است اما در دومی مقدار r ثابت و زمان t_r مقداری تصادفی است. معمولاً در عمل استفاده از روش سانسور نوع II بر سانسور نوع I ترجیح دارد چرا که دارای ویژگی‌های توزیعی ساده‌تری است.

داده‌های گروهی (سانسور فاصله‌ای)

گاهی اوقات واحدهای مورد بررسی، هنگامیکه وارد آزمایش می‌شوند به دلایل مختلف مثلاً محدودیت‌های تکیک و اقتصادی به صورت پیوسته مورد بازرسی قرار نمی‌گیرند. بلکه آزمایش بدین صورت انجام می‌شود که n واحد را وارد آزمایش کرده و در زمان‌های از قبل تعیین شده آنها را مورد بازرسی قرار داده و مقدار شکست را ثبت می‌کنیم. داده‌هایی که بدین صورت به دست می‌آید را داده‌های گروهی گویند. به عبارت دقیق‌تر، فرض کنید در زمان $t_r = 0$ واحد را وارد آزمایش کنیم و در زمان‌های t_i ، $i = 1, 2, \dots, k$ ، واحد را مورد بازرسی قرار می‌دهیم. در این حالت فاصله زمانی بین بازرسی‌ها به صورت $[t_i, t_{i-1}]$ ، $i = 1, 2, \dots, k$ خواهد بود. اگر r_i تعداد شکست‌ها در زمان t_i باشد آنگاه $r_i \leq n$ و $\sum_{i=1}^k r_i = n$. با این فرضیات، با توجه به این که احتمال r_i شکست در فاصله $[t_{i-1}, t_i]$ برابر است با $(F(t_i, \boldsymbol{\theta}) - F(t_{i-1}, \boldsymbol{\theta}))^{r_i}$ تابع درستنمایی به صورت زیر خواهد بود،

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^k (F(t_i, \theta) - F(t_{i-1}, \theta))^{r_i}$$

و در نتیجه تابع لگ درستنمايی عبارتست از،

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^k r_i \ln(F(t_i, \theta) - F(t_{i-1}, \theta)) \quad (8.6)$$

معمولًا در عمل فاصله‌های زمانی بازرسی یکسان هستند. اگر در زمان بازرسی n فرض کنیم m_i واحد را از آزمایش خارج کنیم آنگاه زمان t_i در واقع زمان سانسور m_i واحدی هستند که بدون شکست از آزمایش خارج شده‌اند. تعداد کل واحدهای سانسور شده برابر است با

$$\sum_{i=1}^k m_i = n - \sum_{i=1}^k r_i$$

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^m r_i \ln(F(t_i, \theta) - F(t_{i-1}, \theta)) + \sum_{i=1}^m m_i \ln(1 - F(t_i, \theta))$$

یک حالت خاص مهم زمانی اتفاق می‌افتد که $i=0, 1, \dots, k-1$ و $m_k \geq 1$. در این حالت m_k را می‌توان شکست‌ها در فاصله (t_k, ∞) در نظر گرفت و تابع درستنمايی (8.6) را به کار برد. هنگامیکه، با داده‌ها گروهی سر و کار داریم، با توجه به این که زمان واقعی شکست در فاصله $[t_{i-1}, t_i]$ نامعلوم است، علاقه‌مندیم زمان شکست را در این فاصله تقریب بزنیم. اگر فرض کنیم که واحدهای شکست خورده در فاصله $[t_{i-1}, t_i]$ به صورت یکنواخت در هر لحظه از زمان در این فاصله شکست خورده‌اند آنگاه زمان تقریبی شکست زمین واحد $j=1, 2, \dots, r_i$

$$t_j = t_{i-1} + j \frac{t_i - t_{i-1}}{r_i + 1}, \quad i=1, 2, \dots, k$$

اگر تنها یک شکست در هر فاصله اتفاق بیافتد، آنگاه زمان شکست تقریبی آن مساوی با میانگین طول فاصله است.

۶.۶ فاصله‌های اطمینان تقریبی

فاصله اطمینان دقیق را می‌توان برای پارامترهای بعضی از توزیع‌ها مانند توزیع نرمال و توزیع نمایی تعیین نمود. در بسیاری از توزیع‌ها مانند توزیع وایل جهت تعیین فاصله اطمینان برای پارامترهای آن باید از فواصل اطمینان تقریبی استفاده کرد.

در بخش قبل دیدیم که با روش ML چگونه می‌توان، تحت انواع شیوه‌های نمونه‌گیری، پارامترهای مجھول یک مدل آماری را برآورد کرد. اشاره کردیم که برآوردهای حاصل از روش ML دارای این خاصیت هستند که به طور مجانبی (یعنی برای حجم نمونه‌های بزرگ) دارای توزیع تقریبی نرمال هستند. از این واقعیت استفاده می‌کنیم و فاصله‌های اطمینان تقریبی برای پارامترهای مجھول توزیع را ارائه می‌کنیم.

در ادامه فرض می‌کنیم که مدل تحت بررسی حداقل دو پارامتر دارد که آن‌ها به α و β نمایش می‌دهیم. یعنی فرض می‌کنیم تابع چگالی مورد نظر $f(x, \alpha, \beta)$ باشد. اگر $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ به ترتیب برآوردهای ML ، α و β باشند برای تشکیل فاصله اطمینان تقریبی برای α و β به صورت مراحل زیر انجام می‌دهیم.

- (۱) تابع درستنایی را تشکیل داده و لگ درستنایی $l(\alpha, \beta)$ را به دست می‌آوریم.
- (۲) مشتقات مرتبه دوم تابع درستنایی را برحسب α و β به دست می‌آوریم.
- (۳) ماتریس متقارن زیر را تشکیل دهیم که در آن عناصر ماتریس مشتقات جزئی مرتبه دوم لگ درستنایی با علامت منفی هستند،

$$\mathbf{I}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2} & -\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta} \\ -\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta)}{\partial \beta \partial \alpha} & -\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta)}{\partial \beta^2} \end{bmatrix}$$

در مباحث استنباط آماری، اید ریاضی ماتریس $\mathbf{I}(\alpha, \beta)$ به ماتریس اطلاع فیشر معروف است.

(۴) ماتریس $\mathbf{I}(\alpha, \beta)$ را به ازای $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ محاسبه می‌کنیم و حاصل را $\hat{\mathbf{I}}$ می‌نامیم. ماتریس $\hat{\mathbf{I}}$ را ماتریس اطلاع موضعی می‌گویند.

(۵) معکوس ماتریس اطلاع موضعی $\hat{\mathbf{I}}$ را به دست می‌آوریم. اگر این معکوس را با $\hat{\Sigma}$ نمایش دهیم آنگاه $\hat{\Sigma}$ به شکل زیر خواهد بود،

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \hat{V}(\hat{\alpha}) & Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \\ Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) & \hat{V}(\hat{\beta}) \end{bmatrix}$$

در واقع $\hat{\Sigma}$ برآوردهای اطلاع موضعی $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ را ارائه می‌کند که روی قطر اصلی آن برآوردهای اطلاع موضعی $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ قرار دارد. حال با داشتن $\hat{V}(\hat{\alpha})$ و $Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ قادر خواهیم بود یک فاصله اطمینان تقریبی برای $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ به دست آوریم. بدین منظور از تقریب‌های زیر استفاده می‌کنیم.

$$\hat{\alpha} \sim N(\alpha, \hat{V}(\hat{\alpha}))$$

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \hat{V}(\hat{\beta}))$$

بنابراین به ازای $\alpha < 0.1\%$ ، فاصله اطمینان $(1-\alpha) \cdot 100\%$ برای α و β به ترتیب عبارت است از،

$$\left(\hat{\alpha} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{V}(\hat{\alpha})}, \hat{\alpha} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{V}(\hat{\alpha})} \right)$$

و

$$\left(\hat{\beta} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{V}(\hat{\beta})}, \hat{\beta} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{V}(\hat{\beta})} \right)$$

که در آن $z_{\frac{\alpha}{2}}$ مقداری است که $P(Z > z_{\frac{\alpha}{2}}) = \alpha/2$ فرض کنید Z متغیر نرمال استاندارد است. گاهی اوقات، علاوه بر تعیین فاصله اطمینان برای پارامترهای توزیع، علاقه‌مندیم فاصله اطمینان برای توابعی از $(\alpha, \beta) = \theta$ مانند قابلیت اعتماد،تابع نرخ خطر، صدکها و دیگر شاخص‌های توزیع به دست آوریم. فرض کنید $g = g(\theta)$ تابعی از θ باشد. آنگاه اگر $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ برآوردهای ML و β باشند، $\hat{g} = g(\hat{\theta})$ برآورد g است. در متون پیش‌فته‌تر از روش بسط تیلور نشان داده می‌شود که \hat{g} ، به عنوان یک متغیر تصادفی، دارای میانگین تقریبی g و واریانس تقریبی زیر است،

$$\begin{aligned} \hat{V}(\hat{g}) &\equiv \left(\frac{\partial g}{\partial \alpha} \right)^T \hat{V}(\hat{\alpha}) + \left(\frac{\partial g}{\partial \beta} \right)^T \hat{V}(\hat{\beta}) \\ &\quad + \left(\frac{\partial g}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial \beta} \right) Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \end{aligned}$$

که در آن $\frac{\partial g}{\partial \alpha}$ و $\frac{\partial g}{\partial \beta}$ به ترتیب در $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ محاسبه می‌شوند. اگر همبستگی بین $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ کم باشد از عبارت دوم می‌توان صرفنظر کرد. با این توضیحات یک فاصله اطمینان تقریبی برای g به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\left(\hat{g} - z_{\frac{\alpha}{2}} \hat{V}(\hat{g}), \hat{g} + z_{\frac{\alpha}{2}} \hat{V}(\hat{g}) \right) \quad (9.6)$$

لازم است به این نکته اشاره کنیم که اگر بیش از دو پارامتر در توزیع وجود داشته باشد، به راحتی روش فوق برای تعیین فاصله اطمینان تقریبی برای پارامترها قابل تعمیم است. قبل از آن که این بخش را به پایان برسانیم این نکته را نیز مذکور می‌شویم که اگر g تابعی مثبت باشد گاهی اوقات برای تعیین فاصله اطمینان برای g ، بهتر است از این تقریب استفاده کنیم که $\ln g$ دارای توزیع تقریبی نرمال با میانگین $\ln g$ و واریانس تقریبی $(\frac{1}{\hat{g}}) V(\hat{g})$ است. اگر از این واقعیت استفاده کنیم آنگاه فاصله اطمینان تقریبی برای g به صورت زیر خواهد بود.

$$\left(g(\hat{\theta}) e^{-\frac{z_a}{\hat{g}(\hat{\theta})} \sqrt{V(g(\hat{\theta}))}}, g(\hat{\theta}) e^{\frac{z_a}{\hat{g}(\hat{\theta})} \sqrt{V(g(\hat{\theta}))}} \right) \quad (10.6)$$

فاصله اطمینان (10.6) معمولاً تقریب بهتری برای $(g(\theta))$ نسبت به فاصله (9.6) ارائه می‌کند. علاوه بر آن هنگامی که g مثبت است کران پایین فاصله (9.6) ممکن است منفی باشد در صورتیکه این اتفاق برای فاصله (10.6) نمی‌افتد.

۷.۶ استنباط در مورد توزیع نمایی

اکنون آمده‌ایم روش درستنمایی ماکریم را، تحت شیوه‌های مختلف جمع‌آوری داده‌ها، برای برآورد در توزیع نمایی به کار برمی‌خاطر نشان می‌کنیم که متغیر تصادفی T دارای توزیع نمایی $E(\lambda)$ با پارامتر λ است اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد،

$$f(t, \lambda) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0, \lambda > 0.$$

در اینجا λ مقدار نرخ خطر را نشان می‌دهد.

برآوردهای داده‌های کامل

اگر t_1, t_2, \dots, t_n مقادیر مشاهده شده یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی $E(\lambda)$ باشد آنگاه لگ درستنمایی برابر است با،

$$l(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n t_i$$

به راحتی از معاده $\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda}$ نتیجه می‌شود که برآوردگر MLE λ برابر است با،

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n t_i} = \frac{1}{\bar{t}}$$

بنابراین MLE میانگین جامعه $\theta = \frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{1}{\bar{t}}$ برابر خواهد شد با $\hat{\theta}$. همچنین برآورده MLE تابع قابلیت اعتماد در یک زمان مفروض t برابر است با،

$$\hat{R}(t) = e^{-\hat{\lambda}t}$$

همانطور که در بخش ۲.۶ دیدیم فاصله اطمینان دقیق $(1-\alpha)\%$ برای پارامتر توزیع نمایی $E(\lambda)$ برابر است با،

$$\left(\frac{\chi_{\frac{\alpha}{2}, \frac{n}{\lambda}}}{2n\hat{\theta}}, \frac{\chi_{\frac{n}{\lambda}, 1-\frac{\alpha}{2}}}{2n\hat{\theta}} \right)$$

که در آن $\hat{\theta}$ میانگین نمونه است.
برآورده واریانس $\hat{\lambda}$ به صورت زیر به دست می‌آید،

$$\hat{V}(\hat{\lambda}) = \left(-\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\hat{\lambda}} \right)^{-1} \\ = \frac{\hat{\lambda}}{n}$$

بنابراین فاصله اطمینان تقریبی $(1-\alpha)\%$ برای λ عبارت است از،

$$\left(\hat{\lambda} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\lambda}}{\sqrt{n}}, \hat{\lambda} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\lambda}}{\sqrt{n}} \right) \quad (11.6)$$

مثال ۴.۶ تولید کننده یک نوع لامپ کم مصرف معتقد است که محصولات آنها دارای توزیع نمایی $E(\lambda)$ است و با توجه به این که محصولات دچار سالخوردگی نمی‌شوند قرار است برای مدت معینی آنها را گارانتی نمایند. مهندسین شرکت یک نمونه ۲۰ تایی از لامپ‌ها را انتخاب کرده و آنها جهت برآورد متوسط طول عمر و سایر شاخص‌های مورد آزمایش قرار

می‌دهند. معمولاً آزمایش بدین صورت انجام می‌شود که آن‌ها را تحت شرایط شتابنده قرار می‌دهند. بدین معنی که اگر لامپ قرار است در شرایط محیطی با ولتاژ ۲۲۰ مورد استفاده قرار گیرد آن‌ها را در شرایط آزمایشگاهی با ولتاژ بالاتر مورد آزمایش قرار می‌دهند. این امر باعث می‌شود که طول عمر لامپ‌ها تحت این شرایط کمتر شده و داده‌های لازم سریع‌تر حاصل شوند. سپس با استفاده از یک تابع مناسب نتایج به دست آمده را به شرایط طبیعی تبدیل می‌کنند. این روش به "آزمون‌های شتابنده" معروف است. فرض کنید داده‌هایی به دست آمده از آزمایش ۱۵ لامپ بر حسب ماه به صورت جدول ۳.۶ باشد که پس از تبدیل نتایج آزمایشگاه به دست آمده‌اند.

جدول ۳.۶ طول عمر لامپ‌ها بر حسب ماه

i	t_i	i	t_i
۱	۲	۹	۴۹
۲	۳	۱۰	۴۰
۳	۴	۱۱	۴۵
۴	۷	۱۲	۵۵
۵	۱۱	۱۳	۶۷
۶	۱۷	۱۴	۷۶
۷	۱۸	۱۵	۹۴
۸	۲۱		

یک بررسی ساده نشان می‌دهد که برآورده MLE پارامتر توزیع نمایی، $\hat{\lambda}$ ، برابر است:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n t_i} = \frac{۲۰}{(۲+۳+\dots+۹۴)} = ۰/۰۳۱$$

بنابراین برآورده MLE میانگین طول عمر لامپ‌های تولیدی، $\hat{\theta}$ ، مساوی است:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\cdot / 0.31} = 32 / 6 \quad (\text{بر حسب ماه})$$

فاصله اطمینان دقیق با ضریب ۹۵٪ به صورت زیر حاصل می‌شود. با توجه به این که $n = 15$ ، از جدول توزیع χ^2 ، داریم $\chi_{30, 0.975}^2 = 16 / 8$ و $\chi_{30, 0.95}^2 = 47$. در نتیجه کران پایین و بالای فاصله اطمینان به ترتیب برابرند با،

$$\begin{aligned} \frac{\chi_{30, 0.975}^2}{2n\hat{\theta}} &= \frac{16 / 8}{30 \times 32 / 6} \\ &= 0 / 0.17 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \frac{\chi_{30, 0.95}^2}{2n\hat{\theta}} &= \frac{47}{30 \times 32 / 6} \\ &= 0 / 0.48 \end{aligned}$$

بنابراین فاصله اطمینان ۹۵٪ برای نرخ خطر لامپ‌ها، λ ، برابر است با $(0 / 0.17, 0 / 0.48)$. با معکوس کردن این فاصله، یک بازه اطمینان ۹۵٪ برای میانگین طول عمر لامپ‌ها بر حسب ماه حاصل می‌شود که عبارت است از $(0 / 0.83, 0 / 0.58)$. فاصله اطمینان تقریبی برای λ از $(10.6, 0 / 0.43, 0 / 0.15)$ برابر خواهد شد با $(0 / 0.48, 0 / 0.17)$. با داشتن برآورد نرخ خطر، $\hat{\lambda}$ ، می‌توان قابلیت اعتماد لامپ‌ها را در هر نقطه از زمان محاسبه کرد. برای مثال، قابلیت اعتماد در زمان ۲۵ ماه عبارت است از،

$$\begin{aligned} \hat{R}(25) &= e^{-0 / 0.31 \times 25} \\ &= 0 / 46 \end{aligned}$$

برآورد تحت داده‌های سانسور شده

فرض کنید n واحد، از توزیع نمایی $E(\lambda)$ ، را وارد آزمایش می‌کنیم. آزمایش را پس از r امین شکست ($r \leq n$) خاتمه می‌دهیم (سانسور نوع II). در این صورت $(n - r)$ واحد از آزمودنی سانسور خواهند شد. در این صورتتابع درستنمایی از رابطه (۷.۶)

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \prod_{i=1}^r \lambda e^{-\lambda t_i} \prod_{i=r+1}^n \lambda e^{-\lambda t_r} \\ &= \lambda^r e^{-\lambda \sum_{i=1}^r t_i} e^{-(n-r)\lambda t_r} \\ &= \lambda^r e^{-\lambda \left[\sum_{i=1}^r t_i + (n-r)t_r \right]} \end{aligned}$$

که در آن $t_1, t_2, \dots, t_r, t_r$ مقادیر مرتب شده زمان شکست r از کارافتادگی اول هستند. لگ درستمایی برابر است با،

$$l(\lambda) = r \ln \lambda - \lambda \ln \left[\sum_{i=1}^r t_i + (n-r)t_r \right]$$

با استفاده از $(l(\lambda), \text{برآوردگر MLE})$ برابر خواهد شد با

$$\hat{\lambda} = \frac{r}{\sum_{i=1}^r t_i + (n-r)t_r}$$

که در آن،

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r t_i + (n-r)t_r &= \sum_{i=1}^r (n-i+1)(T_i - T_{i-1}) \\ &= TTT \end{aligned}$$

که در آن $T_i, i=1, 2, \dots, r$ ، مقادیر مرتب شده زمان شکست را نشان می‌دهد و زمان TTT کل آزمایش می‌باشد. همانطور که دیدیم، TTT دارای توزیع گاما $G(r, r\lambda)$ می‌باشد. بنابراین یک فاصله اطمینان دقیق برای λ عبارت است از،

$$\left(\frac{\chi_{\frac{\alpha}{2}, \frac{n-r}{2}}}{\sqrt{r\hat{\theta}}}, \frac{\chi_{\frac{n-r}{2}, \frac{1-\alpha}{2}}}{\sqrt{r\hat{\theta}}} \right)$$

که در آن، $\hat{\theta} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r t_i + (n-r)t_r$ متوسط طول عمر توزیع است و فاصله اطمینان تقریبی برای λ به صورت زیر است،

$$\left(\hat{\lambda} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\lambda}}{\sqrt{r}}, \hat{\lambda} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\lambda}}{\sqrt{r}} \right)$$

اگر داده‌ها از طرح سانسور نوع I استخراج شده باشند آنگاه $l(\lambda)$ برابر خواهد شد با،

$$l(\lambda) = r \ln \lambda - \lambda \ln \left[\sum_{i=1}^r t_i + (n-r)C \right]$$

که در آن r تعداد شکست‌ها قبل از زمان ثابت C است. در این حالت، مشابه سانسور نوع II برآوردگر MLE برابر خواهد شد با،

$$\hat{\lambda} = \frac{r}{\sum_{i=1}^r t_i + (n-r)C}$$

اما باید توجه داشت که در اینجا، فاصله اطمینان دقیق برای λ ، مشابه سانسور نوع II، وجود ندارد زیرا با توجه به این که مقدار r نیز تصادفی است، توزیع $\sum_{i=1}^r t_i + (n-r)C$ شناخته شده‌ای نیست. بنابراین باید از فاصله اطمینان تقریبی برای برآورد فاصله‌ای λ استفاده کرد.

مثال ۵.۶ یک قطعه الکتریکی جهت کارکرد صحیح لازم است که در دمای 40° به طور متوسط ۱۵۰۰۰ ساعت کار می‌کند. از این نوع قطعه، جهت تحقیق در مورد چگونگی کارکرد، ۱۵ عدد را وارد آزمایش کرده و برای اینکه زمان شکست را زودتر به دست آوریم آنها در زمان شتابنده 125° قرار می‌دهیم. فرض کنید توزیع طول عمر قطعات نمایی با پارامتر λ باشد و فاکتور تبدیل شتابنده بین دو دمای 40° و 125° $= 22/7$ است. اگر آزمایش را در زمان ۹۶ ساعت شکست خاتمه داده و نتایج زیر حاصل شده باشد،

$$88, 105, 141, 344, 430, 516, 937, 1057, 1100$$

آیا با اطمینان ۹۵٪ می‌توان ادعا کرد که قطعات کارکرد صحیح دارند؟ حل. در اینجا $n = 15$ و $r = 9$. بنابراین برآوردگر MLE λ عبارت است از،

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}' &= \frac{9}{\sum_{i=1}^9 t_i + 9 \times \bar{t}_9} \\ &= \frac{9}{(88+105+\dots+1100)+9 \times 1100} \\ &= 7 / 95 \times 10^{-4}\end{aligned}$$

بنابراین برآورد متوسط طول عمر قطعات در دمای 125° مساوی است،

$$\hat{\theta}' = \frac{1}{\hat{\lambda}'} = 1257 \text{ ساعت}$$

فاصله اطمینان ۹۵٪ دقیق برای متوسط طول عمر قطعات دارای کران پایین اطمینان

$$\hat{\theta}_U' = \frac{2r\hat{\theta}'}{\chi_{\alpha/2}^2} \text{ و } \hat{\theta}_L' = \frac{2r\hat{\theta}'}{\chi_{1-\alpha/2}^2}$$

$r = 9$ و $\alpha = 0.05$

$$\hat{\theta}_L' = \frac{2 \times 9 \times 1257}{28/9} = 782/9 \text{ ساعت}$$

$$\hat{\theta}_U' = \frac{2 \times 9 \times 1257}{9/39} = 240.9 \text{ ساعت}$$

بنابراین کران های پایین و بالای متوسط کارکرد قطعات در دمای 40° برابر خواهد شد با،

$$\hat{\theta}_L = 782/9 \times 22/7 = 17771/8 \text{ ساعت}$$

$$\hat{\theta}_U = 240.9 \times 22/7 = 54684/3 \text{ ساعت}$$

در نتیجه چون کران پایین فاصله اطمینان ۹۰٪ از ۱۵۰۰۰ بیشتر است، می توان با اطمینان ۹۰٪ ادعا کرد که قطعات کارکرد صحیح دارند.

قابلیت اعتماد قطعات در ۱۵۰۰۰ ساعت کارکرد برابر است با،

$$R(15000) = e^{-(3/5 \times 10^{-4}) 15000}$$

$$= 0.59$$

که در آن $3 \times 5 / 10^{-5}$ مقدار نرخ خطر در دمای 40° است.

برآورده تحت داده‌های گروهی

اگر فاصله زمانی بین بازرسی‌ها به صورت $[t_i, t_{i-1}]$ ، \dots ، $[t_k, t_{k-1}]$ باشد آنگاه تابع لگ درستنمایی، با فرض این که توزیع تحت بررسی نمایی باشد، به صورت زیر خواهد بود،

$$l(\lambda) = \sum_{i=1}^n r_i \ln \left[e^{-(\lambda t_{i-1})} - e^{-(\lambda t_i)} \right]$$

معادله درستنمایی $\frac{\partial}{\partial \lambda} l(\lambda)$ در اینجا یک جواب بسته بر حسب λ به دست نمی‌دهد و باید آن را به روش عددی حل کرد. یکی از روش‌های متداول در پیدا کردن ماکریتم توابعی مانند $l(\lambda)$ استفاده از الگوریتم نیوتون-رافسون است. همچنین اغلب نرم افزارهای آماری دارای امکاناتی هستند که ماکریتم توابعی مانند $l(\lambda)$ را محاسبه می‌کنند. در حالتی که در فاصله $[t_{i-1}, t_i]$ واحد از راست سانسور شوند. آنگاه لگاریتم تابع درستنمایی برابر خواهد شد با،

$$l(\lambda) = \sum_{i=1}^n r_i \ln \left[e^{-\lambda t_{i-1}} - e^{-\lambda t_i} \right] - \lambda \sum_{i=1}^n m_i t_i$$

در اینجا نیز برای تعیین برآورد MLE λ باید از روش‌های عددی استفاده کرد. فاصله اطمینان دقیق برای λ در این حالت وجود ندارد و باید از فواصل اطمینان تقریبی استفاده کرد.

۸.۶ استنباط در مورد توزیع وایل

در این بخش در مورد برآورد MLE در توابع وایل تحت روش‌های مختلف جمع‌آوری داده‌ها بحث می‌کنیم. خاطر نشان می‌کنیم که تابع چگالی احتمال وایل به صورت زیر می‌باشد،

$$f(t, \lambda, \beta) = \beta \lambda^\beta t^{\beta-1} e^{-(\lambda t)^\beta}, t > 0.$$

که در آن $\lambda > 0$ پارامتر مقیاس و $\beta > 0$ پارامتر شکل توزیع می‌باشد.

برآورده تحت داده‌های کامل

فرض کنید n واحد با توزیع وایل را در زمان $t = 0$ وارد آزمایش می‌کنیم، اگر زمان شکست‌های مرتب شده باشند آنگاه لگ درستنمایی برابر خواهد شد با،

$$l(\lambda, \beta) = \sum_{i=1}^n \left[\ln \beta + \beta \ln \lambda + (\beta - 1) \ln t_i - (\lambda t_i)^\beta \right]$$

برآوردهای λ و β را نمی‌توان به فرم بسته پیدا کرد و لذا باید از روش‌های عددی بهره جست. تابع $l(\lambda, \beta)$ را می‌توان مستقیماً با استفاده از نرم افزارهای آماری ماکریم سازی کرد یا می‌توان برآورد λ و β را از معادلات زیر به روش تکراری به دست آورد.

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} l(\lambda, \beta) = \frac{n\beta}{\lambda} + \beta \lambda^{\beta-1} \sum_{i=1}^n t_i^\beta = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} l(\lambda, \beta) = \frac{n}{\beta} + n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln t_i - \lambda^\beta \sum_{i=1}^n t_i^\beta \ln(\lambda t_i) = 0$$

معادله اول نتیجه می‌دهد،

$$\lambda = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (12.6)$$

اگر این مقدار در معادله دوم به جای λ جایگذاری کنیم آنگاه،

$$\frac{\sum_{i=1}^n t_i^\beta \ln(t_i)}{\sum_{i=1}^n t_i^\beta} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln t_i = 0 \quad (13.6)$$

معادله اخیر باید از طریق عددی محاسبه شود. معمولاً این معادله دارای یک جواب منحصر به فرد است که مساوی $\hat{\beta}$ یعنی $\hat{\beta}$ خواهد شد. از معادله (13.6) داریم،

$$\hat{\beta} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\beta}} \ln(t_i)}{\sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\beta}}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln t_i \right)^{-1}$$

این معادله را می‌توان به روش تکراری با یک نقطه شروع مثلاً $\beta_0 = 1$

$$\hat{\beta}_{n+1} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\beta}_n} \ln(t_i)}{\sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\beta}_n}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln t_i \right)^{-1}$$

اگر جواب معادله را در معادله (۱۲.۶) قرار دهیم برآورده λ ، $\hat{\lambda}$ ، به دست می‌آید.
معمولًا اگر تعداد مشاهدات کم باشد برآوردهای بسیار اریب خواهد بود.
یعنی از محاسبه $\hat{\lambda}$ و $\hat{\beta}$ می‌توان کمیت دیگر مانند قابلیت اعتماد، صدک‌های مختلف، میانگین و واریانس مدل و غیره را محاسبه کرد.
فاصله اطمینان تقریبی برای λ و β از به صورت زیر خواهد بود،

$$(\lambda_L, \lambda_U) = \hat{\lambda} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{V}(\hat{\lambda})}$$

$$(\beta_L, \beta_U) = \hat{\beta} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{V}(\hat{\beta})}$$

و یا با تقریبی بهتر به صورت زیر خواهد بود.

$$(\lambda_L, \lambda_U) = \left(\hat{\lambda} e^{-z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{\hat{V}(\hat{\lambda})}}{\hat{\lambda}}}, \hat{\lambda} e^{z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{\hat{V}(\hat{\lambda})}}{\hat{\lambda}}} \right)$$

$$(\beta_L, \beta_U) = \left(\hat{\beta} e^{-z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta})}}{\hat{\beta}}}, \hat{\beta} e^{z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta})}}{\hat{\beta}}} \right)$$

یک تقریب ساده برای $\sqrt{\hat{V}(\hat{\lambda})}$ و $\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta})}$ از روابط زیر به دست می‌آید.

$$\hat{V}(\hat{\lambda}) \cong \frac{1/10.87\hat{\lambda}^2}{n\hat{\beta}^2} \quad (14.6)$$

$$\hat{V}(\hat{\beta}) \cong \frac{1/60.79\hat{\beta}^2}{n} \quad (15.6)$$

فاصله اطمینان تقریبی برای قابلیت اعتماد، در هر لحظه از زمان، با استفاده از (۱۰.۶) با قرار دادن $g = R(t, \lambda, \beta)$ حاصل می‌شود.

مثال ۶.۶ فرض کنید داده‌های جدول طول عمر $n=20$ قطعه الکترونیکی بر حسب ساعت باشند که از یک روش آزمون شتابنده به دست آمده‌اند. با فرض اینکه طول عمر قطعات دارای توزیع $W(\lambda, \beta)$ باشد،

(الف) پارامترهای توزیع را برآورد کنید.

(ب) قابلیت اعتماد قطعات در زمان $t=90$ چقدر است؟

جدول ۶.۶ داده‌های طول عمر قطعات الکترونیکی

i	t_i	i	t_i	i	t_i	i	t_i
۱	۲۵	۶	۵۸	۱۱	۸۷	۱۶	۱۳۹
۲	۲۸	۷	۶۳	۱۲	۹۳	۱۷	۱۵۷
۳	۲۹	۸	۶۴	۱۳	۱۱۱	۱۸	۱۶۸
۴	۴۴	۹	۶۴	۱۴	۱۲۶	۱۹	۱۸۹
۵	۵۷	۱۰	۷۶	۱۵	۱۳۶	۲۰	۲۱۲

حل. (الف) اگر از نقطه $\hat{\beta} = 1/876$ شروع کنیم، پس از چند مرحله تکرار به حل $\hat{\beta} = 1/276$ می‌رسیم. اگر این مقدار را در معادله (۱۲.۶) قرار دهیم MLE ، λ برابر خواهد شد با $\lambda = 0/0009$.

با استفاده از مقادیر فوق برآورده فاصله‌ای تقریبی برای λ و β را به دست می‌آوریم. از روابط (۱۴.۶) و (۱۵.۶) به ترتیب داریم،

$$\hat{V}(\hat{\lambda}) \cong 1/276 \times 10^{-8}$$

$$\hat{V}(\hat{\beta}) \cong 0/107$$

بنابراین فاصله اطمینان تقریبی ۹۰٪ برای λ برابر خواهد شد با،

$$(8/994 \times 10^{-3}, 9/365 \times 10^{-3})$$

و فاصله اطمینان تقریبی برای β برابر است با،

$$(1/339, 2/414)$$

(ب) قابلیت اعتماد قطعه در زمان $t=90$ ساعت برابر است با،

$$R(90) = e^{-(\cdot/\cdot \cdot 9 \times 9)^{1/99}}$$

= ۰ / ۵۱

برآوردهای سانسور شده

فرض کنید n واحد از توزیع $W(\lambda, \beta)$ را در زمان $t = 0$ وارد آزمایش کنیم و بعد از مشاهده r شکست ($r \leq n$) آزمایش را خاتمه می‌دهیم، (سانسور نوع II). از t_r, \dots, t_r, t_r زمان شکست r مشاهده اول باشند آنگاه بقیه مشاهدات سانسور شده دارای طول عمر بیشتر از t_r هستند و لذا تابع لگ درستنمایی برابر است با،

$$L(\lambda, \beta) = \sum_{i=1}^r \left[\ln \beta + \beta \ln \lambda + (\beta - 1) \ln t_i - (\lambda t_i)^\beta \right] - (n - r)(\lambda t_r)^\beta$$

این تابع را می‌توان با استفاده از نرم افزار ماکریم کرد و برآوردهای MLE λ و β را تعیین نمود. همچنین می‌توان معادلات درستنمایی را تشکیل داده و برآوردهای درستنمایی را محاسبه کرد. اگر چنین کیم، برآوردهای MLE λ و β از معادلات زیر به دست می‌آیند.

$$\lambda = \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^n t_i^\beta \right)^{-\frac{1}{\beta}} \quad (16.6)$$

و

$$\frac{\sum_{i=1}^n t_i^\beta \ln t_i}{\sum_{i=1}^n t_i^\beta} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \ln t_i = 0. \quad (17.6)$$

که در اینجا در مجموعهایی که اندیس آنها از ۱ تا n است مشاهدات t_n, \dots, t_{r+1} مساوی t_r هستند. واضح است که اگر $r = n$ آنگاه معادلات فوق به معادلات درستنمایی در حالت داده‌های کامل تبدیل می‌شوند. تعیین فاصله اطمینان برای λ و β مشابه حالتی است که داده‌ها کامل‌اند و پس از برآورد λ و β می‌توان آنها به کار برد.

اگر داده‌ها از سانسور نوع I به دست آمده باشند، به طور مشابه با سانسور نوع II، می‌توان معادلات درستنمایی را به دست آورد. در این حالت نیز برآورد MLE λ و β از معادلات (16.6) و (17.6) به دست می‌آیند با این تفاوت که در مجموعهایی که در این معادلات که اندیس آنها از ۱ تا n تغییر می‌کند، باید به جای مقادیر t_n, \dots, t_{r+1} که مقادیر سانسور هستند، مقدار ثابت C (یعنی زمان سانسور در سانسور نوع I) را قرار داد.

مثال ۷.۶ فرض کنید توزیع طول عمر یک نوع خازن دارای توزیع $W(\lambda, \beta)$ است. ۲۵ نوع از این خازن‌ها را برای برآورد پارامترها مورد آزمایش قرار می‌دهیم. فرض کنید آزمایش در زمان $t = 0$ شروع و پس از دهمین شکست آزمایش را خاتمه می‌دهیم. اگر زمان‌های شکست برحسب ساعت به صورت زیر باشد

$$0/7, 5/2/7, 1/29/4, 1/87/8, 2/72/8, 3/04/2, 3/05/1, 3/09/8, 3/10/5$$

پارامترهای λ و β را به روش ML برآورد کنید و فاصله‌های اطمینان تقریبی ۹۵٪ برای آن‌ها ارائه دهید.

حل.

برآورد تحت داده‌های گروهی

فرض کنید در اینجا نیز n واحد را در زمان $t = 0$ وارد آزمایش می‌کنیم، اگر فاصله زمانی بین بازرسی‌ها به صورت $[t_i, t_{i+1}], [t_k, t_{k+1}], \dots, [t_{k-1}, t_k]$ باشد و r_i تعداد شکست‌ها در بازه زمانی $[t_i, t_{i+1}], i = 1, 2, \dots, k$ ، آنگاه لگ تابع درستنمایی برابر است با،

$$l(\lambda, \beta) = \sum_{i=1}^k r_i \ln \left[e^{-(\lambda t_{i-1})^\beta} - e^{-(\lambda t_i)^\beta} \right]$$

همانطور که ملاحظه می‌شود تابع درستنمایی در اینجا فرم پیچیده‌ای دارد و لذا ناید انتظار داشت که معادلات درستنمایی منجر به جواب‌های بسته‌ای برای λ و β شوند. بنابراین برآوردهای MLE باید از طریق عددی و با استفاده از نرم افزارهای موجود محاسبه شوند. درحالی که داده‌های سانسور شده از راست در بازه‌های بازرسی وجود داشته باشند آنگاه تابع درستنمایی برابر خواهد شد با،

$$l(\lambda, \beta) = \sum_{i=1}^k r_i \ln \left[e^{-(\lambda t_{i-1})^\beta} - e^{-(\lambda t_i)^\beta} \right] - \sum_{i=1}^k m_i (\lambda t_i)^\beta$$

که در آن m_i تعداد داده‌های سانسور شده در بازه زمان است.

فاصله‌های اطمینان تقریبی برای پارامترهای λ و β را می‌توان با استفاده از روش‌هایی که برای داده‌های کامل بیان کردیم به دست آورد.

مثال ۸.۶ فرض کنید نمونه‌ای به حجم ۱۲ واحد از نقطه‌ای در جعبه‌دنده نوعی اتومبیل تحت یک فشار معین مورد آزمایش قرار گرفته است. قطعات در فواصل ۲۰۰۰۰ چرخه کار کرد مورد بازرسی قرار می‌گیرند و در هر فاصله قطعات از کار افتاده از آزمایش خارج می‌شوند. آزمایش پس از انجام یک مقدار معین چرخه به اتمام می‌رسد. بازه‌های زمانی حاصل از آزمایش و نتایج

مربوطه در جدول ۵.۶ قرار گرفته است. با فرض این که طول عمر قطعات دارای توزیع $W(\lambda, \beta)$ باشد، برآوردهای MLE پارامترهای λ و β را به دست آورید.

جدول ۵.۶ داده‌های طول عمر قطعات جعبه دند

واحد	طول عمر	واحد	طول عمر
۱	(۲/۴, ۲/۶] *	۷	(۶/۲, ۶/۴]
۲	(۳/۲, ۳/۴] *	۸	(۷/۶, ۷/۸]
۳	(۳/۸, ۴/۰]	۹	(۸/۴, ۸/۶]
۴	(۴/۲, ۴/۴]	۱۰	(۸/۴, ۸/۶]
۵	(۵/۰, ۵/۲]	۱۱	(۸/۸, ∞] *
۶	(۵/۰, ۵/۲]	۱۲	(۸/۸, ∞] *

* در این فواصل داده‌ها سانسور شده‌اند.

حل. در اینجا واحدهای شماره ۱، ۲، ۱۱ و ۱۲ در طول فواصل بازرسی سانسور شده‌اند. بنابراین واحد در بازه‌های بازرسی مربوط مربوطه شکست خورده‌اند و ۴ واحد سانسور شده‌اند. اگر معادله درستنمایی را تشکیل با استفاده از یکی از نرم افزارهای موجود $\hat{\beta} = ۰/۱۳۹$ و $\hat{\lambda} = ۰/۱۳۹$ به دست می‌آید.

۹.۶ استنباط در مورد توزیع‌های نرمال و لگ نرمال

در این بخش برآورد MLE پارامترهای توزیع نرمال و لگ نرمال را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای استنباط به روش ML در مورد پارامترهای توزیع لگ نرمال فقط کافی است، روش‌های استنباط در مورد توزیع نرمال را بدانیم. همانطور که در فصل پنجم دیدیم، اگر متغیر تصادفی T دارای توزیع لگ نرمال با پارامترهای μ و σ^2 باشد آنگاه $\log T$ دارای توزیع نرمال با تابع چگالی احتمال زیر است،

$$f(t, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

پس اگر داده‌ها دارای توزیع لگ نرمال باشند ابتدا از آن‌ها لگاریتم گرفته و برآورد μ و σ^2 را از توزیع نرمال انجام می‌دهیم. بنابراین در ادامه تنها معادلات درستنمایی را برای توزیع نرمال در حالت‌های مختلف تشکیل می‌دهیم.

برآورد تحت داده‌های کامل

اگر مشاهدات یک نمونه کامل از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد آنگاه لگاریتم تابع درستمایی برابر است با،

$$l(\mu, \sigma) = \sum_{i=1}^n \left[-\frac{1}{2} \ln 2\pi - \ln \sigma - \frac{(t_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right]$$

اگر از معادله فوق بر حسب μ و σ مشتق بگیریم و مساوی صفر قرار دهیم، برآوردگرهای درستمایی ماکریم $\hat{\mu}$ و $\hat{\sigma}$ به ترتیب برابر خواهند شد با،

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$$

و

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \hat{\mu})^2$$

خاطر نشان می‌کنیم که برآوردگر $\hat{\sigma}^2$ برای ML ناریب نیست و برآورد ناریب آن،

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (t_i - \hat{\mu})^2$$

است.

از مباحث مقدماتی آمار می‌دانیم که برآوردگر $\hat{\mu}$ خود دارای توزیع $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

دارای توزیع χ^2 با $n-1$ درجه آزادی است. با استفاده از این واقعیت می‌توان فاصله

اطمینان‌های دقیق برای μ و σ^2 به دست آورد. فاصله اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای μ عبارت

است از،

$$\left(\hat{\mu} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \quad (18.6)$$

و فاصله اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای σ^2 برابر است با،

$$\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\chi_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{n\hat{\sigma}^2}{\chi_{n-1, \frac{\alpha}{2}}} \right)$$

اگر در تعیین فاصله (۱۸.۶) اگر σ مجهول باشد به جای σ باید $\hat{\sigma}$ را قرار دهیم. اگر حجم نمونه کم باشد معمولاً بهتر است از s به جای $\hat{\sigma}$ استفاده کنیم.

برآورد تحت داده‌های سانسور شده

فرض کنید n واحد با توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ را در زمان $t = 0$ وارد آزمایش کنیم. اگر مشاهدات مورد نیاز را برای مثال بر اساس شیوه سانسور نوع II به دست آوریم آنگاه تابع لگ درستنمایی برابر خواهد شد با،

$$l(\mu, \sigma) = \sum_{i=1}^n \left[-\frac{1}{2} \ln 2\pi - \ln \sigma - \frac{(t_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] + (n-r) \ln \left[1 - \Phi \left(\frac{t_r - \mu}{\sigma} \right) \right] \quad (19.6)$$

که در آن t_1, t_2, \dots, t_r مقادیر مشاهده شده‌اند. و $\Phi(\cdot)$ تابع توزیع نرمال استاندارد است. برآوردهای μ و σ را در این حالت می‌توان با ماکریم کردن $l(\mu, \sigma)$ و با استفاده از نرم افزار به دست آورد.

اگر داده‌ها بر اساس سانسور نوع I به دست آمده باشند تابع لگ درستنمایی مشابه $l(\mu, \sigma)$ در (۱۹.۶) خواهد بود. با این تفاوت که در عبارت دوم در سمت راست تساوی به جای t_r مقدار C (زمان سانسور) را قرار می‌دهیم.

مثال ۹.۶ فرض کنید یک کارخانه تولید کننده قطعات، می‌خواهد برای تأمین نیازهای خود یک حسگر اکسیژن را از بین یکی از دو تأمین کننده اینگونه حسگرها انتخاب کند. برای یک تصمیم درست، باید قابلیت اعتماد این دو نوع محصول را اندازه گیری کند. بدین منظور ۱۵ حسگر را به تصادف از هر یک از دو تأمین کننده انتخاب کرده و آن‌ها در یک دمای بالا (آزمون شتابنده) مورد آزمایش موردنظر قرار دهد. آزمایش بدین صورت انجام می‌گیرد که به طور همزمان ۳۰ حسگر را مورد استفاده قرار داد و منتظر می‌ماند تا محصولات یکی از دو تأمین کننده از کار بیافتد و سپس آزمایش را خاتمه می‌دهند. در این صورت زمان آخرین از کار افتادگی زمان سانسور برای دیگر تأمین کننده خواهد بود. با این توصیف فرض کنید، برای

۱۵۲ روش‌های استباط پارامتری در قابلیت اعتماد

تولید کننده اول هر ۱۵ حسگر از کار افتاده و برای تولید کننده دوم ۱۰ حسگر شکست خورده و زمان سانسور باقیمانده حسگرهای ۱ ساعت باشد. داده‌های حاصل در جدول ۶.۶ آمده است.

جدول ۶.۶ داده‌های زمان شکست حسگرهای اکسیژن

زمان‌های شکست	
تأمین کننده ۱	۱۷۰, ۲۰۵, ۲۷۰, ۲۴۰, ۲۷۵, ۲۸۵, ۳۲۴, ۳۲۸, ۳۳۴, ۳۵۲, ۳۸۵, ۴۷۹, ۵۰۰, ۶۰۷, ۷۰۱
تأمین کننده ۲	۲۲۰, ۲۶۴, ۲۶۹, ۳۱۰, ۴۰۸, ۴۵۱, ۴۸۹, ۵۳۷, ۵۷۵, ۶۶۳

با فرض اینکه داده‌ها از توزیع لگ نرمال آمده باشند، تولید کننده کدام یک از این دو تأمین کننده را باید انتخاب کند؟

حل. در اینجا شاخص‌های توزیع را برای هر یک از دو تأمین کننده به دست می‌آوریم. سپس مقایسه را انجام می‌دهیم. برای محاسبات می‌توان از نرم افزارهای مختلف آماری استفاده کرد. با توجه به این که داده‌ها از توزیع لگ نرمال آمده‌اند، ابتدا لگاریتم آن‌ها را به دست آورده و سپس از نتایج به دست آمده برای توزیع نرمال استفاده می‌کنیم. فرض کنیم محصولات تأمین کننده اول $LN(\mu_1, \sigma_1^2)$ و محصولات تأمین کننده دوم $LN(\mu_2, \sigma_2^2)$ باشد. ابتدا شاخص‌های توزیع اول را محاسبه می‌کنیم. برآورد μ_1 برابر است با

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{15} [\ln(170) + \ln(205) + \dots + \ln(701)] \\ = 50 / 80.6$$

برآورد σ_1^2 برابر است با

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{15} [(\ln(170) - 50 / 80.6)^2 + \dots + (\ln(701) - 50 / 80.6)^2] \\ = 0 / 155$$

برآورد واریانس‌های $\hat{\mu}_1$ برابر است با $\frac{0 / 155}{15} = 0 / 0.103$. بنابراین فاصله اطمینان ۹۰٪ برای μ_1 برابر خواهد شد با،

$$(50 / 80.6 - 1 / 64 \sqrt{0 / 0.103}, 50 / 80.6 + 1 / 64 \sqrt{0 / 0.103})$$

که مساوی است با،

استنباط در مورد توزیع نرمال و لگ نرمال ۱۵۳

$$(50/639, 50/973)$$

از طرفی فاصله اطمینان $\chi_{14,0.05}^2 = 23/7$ برای σ ، با توجه به اینکه $\chi_{14,0.95}^2 = 6/57$ و عبارت است از،

$$\left(\frac{15 \times 0 / 155}{23/7}, \frac{15 \times 0 / 155}{6/57} \right)$$

که مساوی است با،

$$(0/098, 0/354)$$

میانه توزیع لگ نرمال برابر است با $t_{0.5} = e^{\mu}$ ، بنابراین برآوردهای ML ، $t_{0.5}$ مساوی است با، ساعت

$$\hat{t}_{0.5} = e^{\hat{\mu}_1} = e^{5/8.6} = 332$$

و یک فاصله اطمینان تقریبی برای میانه توزیع به صورت زیر است،

$$(e^{5/639}, e^{5/973}) = (281, 393)$$

با داشتن برآوردهای ML و σ می توانیم قابلیت اعتماد محصول را در هر لحظه از زمان تعیین کنیم. برای مثال قابلیت اعتماد در لحظه $t = 200$ ساعت برابر است با،

$$\hat{R}(200) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(200) - 5/8.6}{0.394}\right) = 0.90.$$

برآوردهای μ و σ را به صورت تحلیلی نمی توان به دست آورد. برای انجام این کار، باید داده های مربوط به تأمین کننده ۲ را در تابع لگ درستتمایی (19.6) قرار داده و با استفاده از نرم افزار، تابع را ماکریزیم کرد. اگر چنین کیم نتایج به دست آمده به صورت زیر خواهد بود. برآورد ML برابر است با،

$$\hat{\mu}_1 = 6/287$$

و برآورد σ برابر خواهد شد با

$$\hat{\sigma}^2 = 0/308$$

با استفاده از این نتایج فاصله اطمینان 90% برای μ برابر است با،

(۶/۰۳۲,۶/۵۴۳)

و فاصله اطمینان ۹۰٪ برای σ عبارت است از،

(۰/۱۹۴,۰/۷۰۳)

برآورد ML میانه توزیع در اینجا مساوی است با،

$$\hat{t}_{\alpha/2} = e^{\bar{\mu}_1} = e^{e^{287}} = 538$$

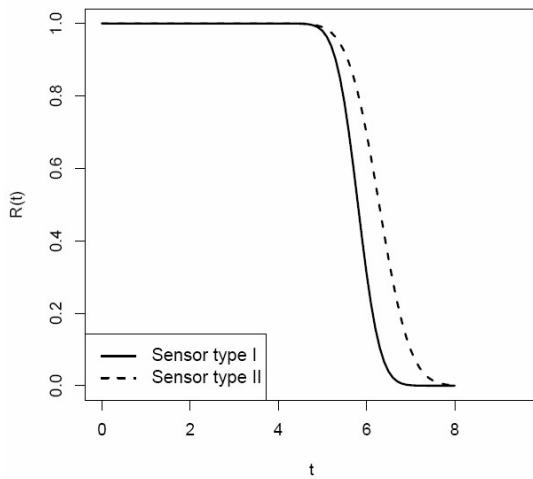
و یک فاصله اطمینان برای آن عبارت است از،

(۴۱۷,۶۹۴)

قابلیت اعتماد حسگرهای نوع دوم در زمان $t = 200$

$$\hat{R}(200) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(200) - 6/287}{0.555}\right) = 0.96$$

با توجه به شاخص‌های مختلف، ملاحظه می‌شود که تأمین کننده دوم محصولاتی با قابلیت بیشتر تولید می‌کند. برای مثال میانه حسگرهای نوع دوم بیشتر از نوع اول هستند (فاصله اطمینان‌های مربوطه نقطه اشتراک ندارند) این واقعیت در مورد میانگین‌ها نیز صادق است. شکل ۳.۶ نمودار تابع قابلیت اعتماد برآورده شده دو محصول را ارائه می‌کند. همانطور که در شکل مشخص است قابلیت اعتماد حسگرهای تأمین کننده ۲ همواره، در هر لحظه از زمان، بیشتر از قابلیت اعتماد حسگرهای تأمین کننده اول است. بنابراین کارخانه باید تأمین کننده دوم را ترجیح دهد.



شکل ۳.۶ قابلیت اعتماد برآورده شده حسگرهای نوع اول و دوم

برآورده تابع داده‌های گروهی

در این حالت، لگ تابع درستنمایی برای بازه‌های کامل عبارت است از،

$$l(\mu, \sigma) = \sum_{i=1}^k r_i \ln \left[\Phi\left(\frac{t_i - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{t_{i-1} - \mu}{\sigma}\right) \right]$$

که در آن r_i تعداد شکست‌ها در بازه $[t_{i-1}, t_i]$ یعنی در بازه $(t_{i-1}, t_i]$ است و k نشان‌دهنده تعداد بازه‌ها می‌باشد. در اینجا نیز معادلات درستنمایی جواب‌های بسته ارائه نمی‌دهد و باید از روش‌های عددی بهره جست.

اگر داده‌ها در هر بازه توأم با سانسور باشند آنگاه تابع درستنمایی به صورت زیر خواهد شد که در این حالت نیز برای حل معادلات باید از روش‌های عددی استفاده کرد،

$$l(\mu, \sigma) = \sum_{i=1}^k r_i \ln \left[\Phi\left(\frac{t_i - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{t_{i-1} - \mu}{\sigma}\right) \right] + \sum_{i=1}^k d_i \ln \left[1 - \Phi\left(\frac{t_i - \mu}{\sigma}\right) \right]$$

۱۵۶ روش های استباط پارامتری در قابلیت اعتماد

که در آن r_i و d_i به ترتیب تعداد شکسته ها و تعداد سانسورها در بازه i ام بازرگانی است و تعداد بازه ها می باشد.

۶.۱۰.۶ تعیین حجم نمونه در آزمون‌های طول عمر

در بخش‌های قبل دیدیم که چگونه می‌توان با داشتن یک نمونه با حجم ثابت، پارامترهای توابع طول عمر را بر اساس شیوه‌های مختلف جمع آوری داده برآورد کرد. یکی از مسائل مهم در مطالعات طول عمر و البته در سایر بخش‌های آمار، تعیین اندازه نمونه است. واضح است که به طور شهودی هر چه قدر اندازه نمونه بیشتر باشد پارامترهای توزیع را با دقت بیشتری می‌توان برآورد کرد. اما از آنجایی که هزینه هر واحد که در آزمون طول عمر قرار می‌گیرد، ممکن است زیاد باشد (توجه کنید که برای داشتن یک مشاهده واحد مورد بررسی باید شکست بخورد) افزایش حجم نمونه باعث بالا رفتن هزینه می‌شود. همچنین با توجه به این که مشاهدات طول عمر در طول زمان به دست می‌آیند، افزایش حجم نمونه ممکن است باعث بالا رفتن زمان انجام مطالعه شود. بنابراین ملاحظات، در تعیین اندازه نمونه باید کاملاً دقت نمود.

یکی از راه‌های ساده تعیین حجم نمونه، استفاده از توزیع تقریبی برآوردگرهای ML است. در ادامه به طور مختصراً این روش را با ارائه چند مثال توضیح می‌دهیم. همانطور که در بخش ۶.۶ اشاره کردیم، اگر $\hat{\theta}$ برآوردگر ML باشد آنگاه برایتابع g ، $g(\hat{\theta})$ برآورد $g(\theta)$ است. و

$$g(\hat{\theta}) \sim N(g(\theta), V(g(\hat{\theta})))$$

که در آن با استفاده از روش دلتا،

$$V(g(\hat{\theta})) = (g'(\theta))^\top V(\hat{\theta})$$

$$\text{که در آن } \frac{1}{I(\theta)} \text{ و } I(\theta) \text{ اندازه اطلاع نمونه است.}$$

در بسیاری از حالات برای متغیرهای مستقل و هم توزیع، تجربه نشان می‌دهد که $V(\hat{\theta}) = \frac{V(\theta)}{n}$ که در آن $V(\theta)$ تنها تابعی از θ است و به n بستگی ندارد. بنابراین یک فاصله اطمینان تقریبی $(1-\alpha)\%$ برای $g(\theta)$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\left(g(\hat{\theta}) - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{V^*(\theta)}, g(\hat{\theta}) + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{V^*(\theta)} \right)$$

که در آن،

$$V^*(\theta) = \frac{V(\theta)}{(g(\theta))^\gamma}$$

طول این فاصله برابر است با،

$$L = 2z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{V^*(\theta)} \quad (20.6)$$

از نقطه نظر آماری، طول فاصله L را می‌توان معیار معقولی برای دقت برآورد فاصله‌ای θ باشد. بنابراین معیار تعیین حجم n را روی این دقت معطوف می‌کیم. به عبارت دیگر، مسئله را اینطور مطرح می‌کنیم که اگر بخواهیم در برآورد θ ، طول فاصله اطمینان $(1-\alpha)\%$ برای θ از L_T بیشتر نباشد حداقل حجم نمونه لازم چقدر است؟ با جایگذاری L_T در (20.6) به دست می‌آوریم،

$$n = \frac{4z_{\frac{\alpha}{2}} V^*(\theta)}{(L_T)^\gamma}$$

اما باید توجه داشت که هنوز مسئله تمام نشده است. زیرا در سمت راست تساوی θ مجھول است. معمولاً در عمل مقدار θ را باید از طریقی، مثلاً از تجربیات قبلی، مطالعات مشابه، مشخصه‌های طراحی و غیره تعیین نمود. اگر این مقدار تعیین شده اولیه را θ_0 بنامیم آنگاه حجم نمونه لازم برابر خواهد شد با،

$$n = \frac{4z_{\frac{\alpha}{2}} V^*(\theta_0)}{(L_T)^\gamma}$$

با داشتن نمونه‌ای به حجم n ، اطمینان $(1-\alpha)\%$ خواهیم داشت که فاصله به دست آمده پارامتر مجھول θ را در بر دارد. مثال زیر را در نظر بگیرید.
مثال ۱۰.۶ فرض کید طول عمر یک لامپ الکتریکی یک کارخانه تولید کننده لامپ دارای توزیع نرمال $N(\theta, \sigma)$ باشد. تجربیات قبل نشان می‌دهد که متوسط طول عمر لامپ‌ها ۱۲۰۰ ساعت با انحراف ۲۰۰ ساعت می‌باشد. جهت بالا بردن رضایت مشتریان، یک طراحی جدید توسط کارخانه برای تولید لامپ ارائه شده است. برای برآورد متوسط طول عمر لامپ‌های جدید فرض کنید یک آزمون طول عمر انجام می‌دهیم. اگر بخواهیم متوسط طول عمر لامپ‌ها

را طوری برآورد کنیم که با اطمینان ۹۵٪ طول فاصله اطمینان از ۸۰ ساعت بیشتر نباشد حجم نمونه لازم چقدر است؟
 $V^*(\theta) = \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$
 حل. در اینجا برآوردگر ML است با واریانس $\sigma_{\bar{x}}^2$. بنابراین
 $V^*(\theta) = (20.0)^2 = 400$ و $L_T = 8$. همچنین $z_{\alpha/2} = 1.96$ پس حجم نمونه لازم برابر خواهد شد به

$$n = \frac{4(1.96)^2(20.0)^2}{(8.0)^2} = 94$$

بنابراین باید ۹۴ لامپ را وارد آزمایش کرد.

اگر تابع $g(\theta)$ تابعی مثبت از θ باشد آنگاه، همانطور که در بخش ۶.۶ دیدیم یک فاصله اطمینان مناسب‌تر برای $g(\theta)$ از تقریب زیر به دست می‌آید.

$$\ln g(\hat{\theta}) \sim N(\ln g(\theta), V(\ln g(\hat{\theta})))$$

که در آن

$$V(\ln g(\hat{\theta})) = \left(\frac{1}{\theta} \right) V(\hat{\theta})$$

در این حالت فاصله اطمینان تقریبی $(\hat{\theta} - z_{\alpha/2} \sqrt{V^*(\theta)}, \hat{\theta} + z_{\alpha/2} \sqrt{V^*(\theta)})$ به صورت زیر خواهد شد،

$$\left(\frac{g(\hat{\theta})}{R}, g(\hat{\theta})R \right)$$

که در آن

$$R = e^{z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{V^*(\theta)}}{\sqrt{n}}} \quad (21.6)$$

و

$$V^*(\theta) = \frac{V(\theta)}{\theta^2}$$

کمیت R را می‌توان به عنوان یک معیار دقت برای فاصله اطمینان به دست آمده به کار برد. طبیعی است که هر چه قدر R به یک نزدیکتر باشد طول فاصله کمتر خواهد شد و لذا دقت

برآورده بیشتر می‌شود. اما این مستلزم حجم نمونه بیشتر است. فرض کنید R_T را یک مقدار از قبل تعیین شده برای R بگیریم که معمولاً مقادیر متداول برای آن $1/2$ یا $1/5$ است. آنگاه حجم نمونه لازم برابر خواهد شد با،

$$n = \frac{z_{\alpha}^* V^*(\theta)}{(\ln R_T)^*}$$

که در آن θ مقداری است که از اطلاعات قبلی برای θ در نظر گرفته‌ایم.

مثال ۱۱.۶ فرض کنید تولید کننده‌ای یک نوع قطعه الکترونیکی طراحی جدیدی جهت تولید ارائه کرده است و علاقمند به برآورد متوسط طول عمر محصول جدید است. در این آزمون که به صورت شتابنده انجام می‌شود، تعدادی لامپ باید به طور همزمان وارد آزمون شود اما به دلیل محدودیت زمانی تنها ۴۵۰ ساعت برای انجام آزمون وجود دارد. مهندسین طراح از تجربیات قبلی پیشنهاد می‌کنند که توزیع طول عمر لامپ‌ها نمایی با نرخ خطر $100/0$ ساعت است. اگر بخواهیم متوسط واقعی را تخمین بزنیم، چه تعداد لامپ را باید وارد آزمایش کرد که با اطمینان ۹۵٪ میانگین واقعی بین فاصله‌ای با $R_T = 1/5$ قرار گیرد؟

حل. توجه کنید که در اینجا آزمون بر اساس سانسور نوع I انجام می‌شود که در آن زمان خاتمه آزمون $C = 450$ ساعت است. با فرض این که θ تابع نرخ خطر توزیع باشد علاقمند به برآورد $\hat{\theta} = g(\theta)$ هستیم. اگر $\hat{\theta}$ برآورد ML باشد آنگاه برآورد $ML(g(\theta))$ عبارت است از $(\hat{\theta}, g(\hat{\theta}))$. طبق روش دلتا،

$$V(\ln g(\hat{\theta})) = \frac{1}{\theta^*} V(\hat{\theta})$$

و

$$V(\hat{\theta}) = \frac{1}{-E\left[\frac{\partial}{\partial \theta} l(\theta)\right]}$$

که در آن

$$l(\theta) = r \ln \theta - \left(\sum_{i=1}^r t_i + (n-r)C \right) \theta$$

که در آن t_1, t_2, \dots, t_r زمان شکست r مشاهده غیر سانسور هستند و C زمان سانسور می‌باشد. توجه کنید که r یک متغیر تصادفی است با توزیع دو جمله‌ای و پارامترهای $(n, 1 - e^{-C\theta})$. بنابراین

$$\begin{aligned} -E\left[\frac{\partial}{\partial\theta^r}l(\theta)\right] &= E\left[\frac{r}{\theta^r}\right] \\ &= \frac{n(1 - e^{-C\theta})}{\theta^r} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$V(\hat{\theta}) = \frac{\theta^r}{n(1 - e^{-C\theta})}$$

و

$$V^*(\theta) = \frac{1}{(1 - e^{-C\theta})}$$

بنابراین با توجه به این که $C = 450$ و $\theta = 0.01$

$$\begin{aligned} V^*(\theta) &= \frac{1}{(1 - e^{-450 \cdot 0.01})} \\ &= 2/75 \end{aligned}$$

بنابراین حجم نمونه لازم برابر است با

$$n = \frac{(1/96)^r (2/75)}{(\ln 1/5)^r} = 65$$

یکی دیگر از ملاحظاتی که در تعیین حجم نمونه مهم است، مسئله هزینه آزمایش است. به عنوان مثال فرض کنید مشاهدات بر مبنای سانسور نوع II به دست می‌آیند. فرض کنید در آزمایش طول عمر، علاقهمندیم r مشاهده داشته باشیم. آنگاه حجم نمونه چه مقدار باشد که هزینه آزمایش مینیمم مقدار بگیرد. در پاسخ به این سوال لازم است ابتدا یکتابع هزینه تعریف کنیم. توجه کنید که اگر n واحد وارد آزمایش شوند، برای داشتن r شکست، زمان انجام آزمایش t_r خواهد بود که یک متغیر تصادفی است. اگر هزینه آزمایش C ، تابعی خطی از

زمان آزمایش یعنی t_r ، و تعداد واحدهایی که وارد آزمایش می شوند یعنی n باشد آنگاه C را می توان به صورت زیر نوشت.

$$C_n = C_1 t_r + C_r n + C_r$$

که در آن C_1 ، C_r و C_r مقادیر معلوم هستند. چون t_r یک متغیر تصادفی است، معمولاً متوسط تابع هزینه را مورد بررسی قرار می دهیم و آن را برحسب n مینیمیم می کنیم. یعنی n را طوری تعیین می کنیم که

$$k(n) = E(C_n) = C_1 E(t_r) + C_r n + C_r$$

مینیمیم شود. بنابراین در حل این مسئله باید $E(t_r)$ را تعیین کنیم که بستگی به توزیع مورد بررسی دارد. همانطور که دیدیم، در حالتی که توزیع نمایی، $E(\lambda)$ ، باشد آنگاه

$$E(t_r) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^r \frac{1}{n-i+1}$$

بنابراین

$$k(n) = \frac{C_1}{\lambda} \sum_{i=1}^r \frac{1}{n-i+1} + C_r n + C_r$$

به راحتی مشاهده می شود که اگر قرار دهیم $\Delta n = k(n) - k(n-1)$ ، آنگاه

$$\Delta(n) = \frac{-rC_1}{\lambda n(n-r)} + C_r$$

یک بررسی ساده $\Delta(n)$ نشان می دهد مقداری از n که $k(n)$ را ماکریم می کند برابر است با

$$n = \frac{r}{2} \left[1 + \left(1 + \frac{rC_1}{rC_r \lambda} \right)^{\frac{1}{r}} \right]$$

همانطور که ملاحظه می شود مقدار n به پارامتر مجهول λ بستگی دارد. لذا برای تعیین مقداری برای n ابتدا باید λ را از طریقی تقریب زده و سپس n را محاسبه نمود. مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۱۲.۶ در مثال ۱۱.۶ فرض کنید مهندیس به جای آن که آزمون را به مدت ۴۵۰ ساعت انجام دهند، تصمیم بگیرند که ۳۰ لامپ را وارد آزمایش کرده و n را طوری تعیین کنند که هزینه آزمایش مینیمم شود. اگر هزینه آزمون هر لامپ $C_1 = ۴۰$ و هزینه مدت آزمون باشد، حجم نمونه لازم چقدر است.

حل. با توجه به این که $\lambda = ۰.۰۰۱$ ، مقدار n برابر خواهد شد با

$$n = \frac{۳۰}{۲} \left[1 + \left(1 + \frac{۴ \times ۴}{۳۰ \times ۴۰} \times ۱۰۰ \right)^{\frac{۱}{۲}} \right] \\ \simeq ۷۲$$

بنابراین با توجه به داده‌های فوق برای کاهش هزینه باید $n = ۷۲$ لامپ را وارد آزمایش کرد. همچنین با اطلاعات مفروض در مسئله، متوسط دوره آزمایش برابر است با

$$E(t_{\text{vr}}) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{۷۲} \frac{1}{۷۲-i} \\ = ۱۰۰ \sum_{i=1}^{۷۲} \frac{1}{۷۲-i} \\ = ۵۴۱ \text{ ساعت}$$

اگر از ابتدا فقط ۳۰ لامپ را وارد آزمایش کنند آنگاه متوسط دوره آزمایش برابر خواهد شد با

$$E(t_{\text{v}}) = ۱۰۰ \sum_{i=1}^{۳۰} \frac{1}{۳۱-i} \\ = ۴۰۰.۳ \text{ ساعت}$$

بنابراین اگر ۷۲ لامپ وارد آزمایش شوند، مدت زمان آزمایش فقط $۱۳/۵$ % مدت زمان آزمایش برای حالتی است که فقط ۳۰ لامپ در آزمایش قرار بگیرند.

۱۱.۶ مسائل

۱. فرض کنید که داده‌های زیر از یک آزمون طول عمر تولید شده‌اند که توزیع تحت بررسی آن‌ها نمایی ($E(\lambda)$) است.

۱۷۰ روش های استباط ناپارامتری در قابلیت اعتماد

۶۸	۱۹۳	۴۲	۶۴	۶۰
۳۱۹	۲۰۰	۲۵۸	۲۰۵	۲۴۷
۱۳۵	۲۸۲	۵	۲۲۷	۱۰۳
۲۱۱	۶۲۶	۲۴۰	۱۵	۵۳۶
۴۲۵	۴۳۳	۷۹	۲۵۸	۲۶
۵۴۱	۸	۷۵	۲۷۲	۵۰
۲۴۸	۳۷۹	۲۲۰	۴۱۵	۲۱۱
۱۲۳	۳۲۴	۵۴	۶۷	۷۷
۶۱	۱۰۱۱	۱۰۴	۵۴۷	۲۳۷

الف) با استفاده از روش گشتاوری و روش ML برآورد λ را به دست آورید.

ب) فاصله اطمینان ۹۵٪ برای λ را به دو طریق دقیق و تقریبی به دست آورید.

ج) قابلیت اعتماد محصولی با چنین توزیع در نقطه ۱۰۰ چقدر است.

۲. در تمرین ۱ فرض کنید تنها ۲۰ زمان شکست اولیه را مشاهده کنیم و بقیه مشاهدات سانسور شوند. با این فرضیات قسمت های الف تا ج را دوباره محاسبه کنید.

۳. فرض کنید داده های زیر از یک آزمون طول عمر به دست آمده اند که توزیع تحت بررسی آن ها $W(\lambda, \beta)$ است.

۱۷۰/۰	۲۱۶/۲	۳۳۵/۵	۴۵۶/۷	۶۳۵/۶
۴۶۵/۰	۲۰۴/۰	۱۰۰/۸	۴۵۹/۵	۳۶۹/۰
۲۵۴/۶	۲۲۸/۲	۴۵۳/۵	۴۲۰/۹	۳۱۲/۰
۳۱۹/۸	۵۲۸/۹	۸۲/۸	۳۰۶/۱	۱۹۶/۱
۲۸۵/۰	۲۷۰/۲	۳۵۶/۰	۲۱۶/۳	۷۲/۴
۳۰۷/۳	۲۵۵/۰	۱۸۱/۵	۱۳۷/۷	۲۲/۱
۳۱۸/۵	۳۰۲/۲	۹۳/۷	۱۸۰/۶	۳۰۲/۲
۲۴۲/۷	۱۱۷/۵	۳۱۴/۶	۱۵۹/۸	۱۱۴/۴
۴۵۸/۰	۷۰/۳	۲۸۲/۰	۲۳۱/۴	۶۸/۴
۱۳۰/۹	۹۳/۱	۱۷۲/۹	۲۰۳/۱	۲۰۰/۹

الف) برآوردهای گشتاوری و ML پارامترهای λ و β را به دست آورید.

ب) فاصله اطمینان تقریبی برای λ و β را تعیین کنید.

ج) تابع قابلیت سیستمی با این توزیع طول عمر را در نقطه ۱۰۰ ممحاسبه کنید.

۴. در تمرین ۳ فرض کنید تنها ۲۰ زمان شکست اولیه را مشاهده می‌کیم و بقیه داده‌ها سانسور می‌شوند. با این فرضیات برآورد ML پارامترها را تعیین کرده و فاصله‌های اطمینان تقریبی برای λ و β را به دست آورید.

۵. فرض کنید توزیع تحت بررسی گاما $G(\lambda, \beta)$ باشد.

الف) تحت داده‌های کامل به حجم n معادلات درستنایی را برای برآورد λ و β تشکیل دهید.

ب) تحت سانسور نوع II، معادلات درستنایی را تشکیل دهید.

ج) تحت داده‌های گروهی، معادلات درستنایی را تشکیل دهید.

۶. فرض کنید در زمان $t = 0$ واحد را وارد آزمایش می‌کنیم. اطلاعاتی که در مورد واحد نام داریم این است در بازه (t_i, t_{i+1}) دچار شکست شده یا طول عمر آن از t_i بیشتر است، که در آن t_i یک مقدار معلوم است و $i = 1, 2, \dots, n$.

الف) تابع درستنایی متناظر با این آزمون را تشکیل دهید.

ب) اگر فرض کنیم که توزیع تحت بررسی $E(\lambda)$ است و به ازای هر $t_i = t$ برآوردگر ML را با این شرط که قبل از t شکست r داریم به دست آورید.

۷. فرض کنید ۱۲ واحد با توزیع نمایی $E(\lambda)$ در زمان $t = 0$ را وارد آزمایش می‌کنیم. اگر پس از شکست هشتم آزمایش را خاتمه داده و مشاهدات زیر بر حسب ساعت حاصل شود،

۳۱، ۵۸، ۱۵۷، ۱۸۵، ۳۰۰، ۴۷۰، ۴۹۷، ۶۷۲

الف) برآورد MLE λ را به دست آورید.

ب) یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای λ به دو طریق پیدا کنید.

ج) برآورد ML t_{12} را به دست آورید.

د) اگر آزمایش به جای آن که در زمان ۶۷۲ خاتمه پیدا می‌کرد در زمان ۷۲۰ تمام می‌شد (یعنی زمان ۱۶۰ شکست ۷۲۰ بود) چه تغییری در مقدار برآورد λ حاصل می‌شد؟ در این مورد بحث کنید.

۸. در آزمون‌های طول عمر گاهی اوقات ممکن است در زمان $t - h$ واحد مورد بررسی هنوز فعال باشد اما در زمان t از کار افتاده باشد. به عنوان مثال فرض کنید n واحد از توزیع نمایی $E(\lambda)$ را در زمان $t = 0$ وارد آزمایش کنیم. فرض کنید هنگامیکه طول عمر واحدها در

۱۷۰ روش های استباط ناپارامتری در قابلیت اعتماد

فاصله $(t_i - h, t_i)$ ، $i = 1, 2, \dots, r$ ، هستند زمان شکست را t_i ثبت می کنیم که در آن t_i ها مقادیر مرتب شده زمان های شکست هستند با فرض این که بقیه $n - r$ واحد در زمان t_r سانسور شده باشند.

الف) تابع درستنمایی را تشکیل داده و نشان دهد ML λ برابر است با

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{T}{T - rh} \right)$$

ب) در تمرین ۴ اگر داده ها به نزدیکترین روز گرد شوند، برآورد ML λ را بر حسب روز به دست آورید.

۹. داده های زیر زمان شکست بر حسب ساعت یک نوع سیستم می باشد که توزیع طول آن لگ نرمال می باشد.

۰/۲۸	۰/۵۶	۲/۷۳
۰/۸۳	۰/۵۶	۱/۲۵
۳/۴۳	۱/۹۵	۰/۴۷
۱/۱۴	۰/۶۶	۰/۷۵
۱/۸۸	۰/۹۰	۱/۸۴
۰/۶۲	۱/۶۷	۰/۷۲
۰/۲۸	۰/۵۱	۲/۷۱

برآورد پارامتر های توزیع را به روش گشتاوری و ML به دست آورید.

۱۰. قطعه خازن الکتریکی جهت برآورد متوسط طول عمر در زمان $t = 0$ وارد آزمایش شده اند. آزمایش در زمان دهمین شکست خاتمه پیدا کرده و زمان های شکست زیر حاصل شده است (زمان ها بر حسب هزار ساعت هستند).

۰/۰۰، ۰/۵۰، ۰/۵۴، ۱/۳۲، ۱/۳۳، ۱/۷۶، ۲/۵۰، ۱/۱۰۰، ۰/۸۸، ۱/۰۰، ۰/۵۰، ۰/۲۲

با فرض آن که طول عمر خازن ها دارای توزیع $W(\lambda, \beta)$ باشد

الف) برآورد ML λ و β را به دست آورید.

ب) قابلیت اعتماد خازن ها را در زمان ۶۰۰ ساعت تعیین کنید.

۱۱. ۱۵ ترانزیستور الکتریکی در زمان $t = 0$ وارد آزمایش شدند. در یک آزمایش شتابنده فرض کنید پس از $t = ۲$ (روز) مورد بازرسی قرار گرفته و مشاهد شود ۵ تای آنها از کار افتاده

و بقیه هنوز کار می کنند. با فرض آن که از تجربیات قبلی بدانیم توزیع طول عمر ترانزیستورها وایبل ($\lambda = 0.4, \beta = 4$) باشد برآورد ML را به دست آورید.

۱۲. فرض کنید t_1, t_2, \dots, t_n طول عمر n قطعه در یک آزمایش طول عمر باشند که در آن توزیع طول عمر قطعات نمایی با چگالی احتمال زیر است.

$$f(t, \lambda, \theta) = \lambda e^{-\lambda(t-\theta)}, t > \theta$$

الف) برآوردهای λ و θ را به دست آورید.

ب) اگر $n = 10$ واحد از قطعات دارای طول عمر با مقادیر زیر (برحسب روز) باشند
 $1/11, 1/25, 1/37, 1/49, 1/53, 1/71, 1/89, 2/03, 2/31, 2/50$.

برآوردهای λ و θ به روش گشتاوری و ML به دست آورید.

۱۳. فرض کنید یک دستگاه در زمان $t = 0$ شروع به کار می کند. هنگامیکه از کار می افتد بلافصله با یک دستگاه جدید تعویض می شود. فرض کنید تعویض ها در فاصله $[0, T]$ صورت می گیرد. با فرض این که تعویض در زمان های $T < t_r < \dots < t_k < t$ صورت گیرد و توزیع طول عمر دستگاهها $f(t, \alpha, \beta)$ باشد،

الف) تابع درستنمایی را تشکیل دهید.

ب) اگر $f(t, \alpha, \beta) = W(1, \beta)$ باشد و مشاهدات زیر به دست آمده باشد، MLE β را به دست آورید.

$$T = 1, t_1 = 2, t_2 = 3/3, t_3 = 5/6, t_4 = 7/2, t_5 = 8/9$$

۱۴. طول عمر یک قطعه دارای تابع توزیع $F(t, \alpha, \beta)$ است. واحد از این توزیع در زمان $t = 0$ وارد آزمایش می شوند و در زمان های $t_1 = T, t_2 = 2T, \dots, t_r = rT$ و $t_{r+1} = (r+1)T$ مورد بازرسی قرار می گیرند و k واحد در فاصله $[0, T]$ و k واحد در فاصله $[T, 2T]$ و \dots واحد باقیمانده در فاصله $[2T, 3T]$ از کار افتاده اند. تابع درستنمایی را برای این آزمایش تشکیل دهید.

۱۵. فرض کنید n واحد در زمان $t = 0$ وارد آزمایش می شوند و t_1, t_2, \dots, t_r زمان های شکست r واحد از n واحد باشند و $t_{r+1}, t_{r+2}, \dots, t_n$ زمان های سانسور واحد $n - r$ باقیمانده باشند. با فرض آن که توزیع طول عمر واحدها $F(t, \theta)$ با تابع چگالی $f(t, \theta)$ باشند نشان دهید که تابع لگ درستنمایی برابر است با

۱۷۰ روش های استباط ناپارامتری در قابلیت اعتماد

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln[f(t_i, \theta)] + \sum_{i=r+1}^n \ln[1 - F(t_i, \theta)]$$

توجه کنید که در اینجا لزوماً فرض مرتب بودن t_i را نیاز نداریم.

۱۶. فرض کنید در یک آزمون طول عمر شتابنده ۱۰ واحد از نوعی سوپاپ را وارد آزمایش کرده ایم و داده های زیر حاصل شده باشد (بر حسب ۱۰۳ چرخه)

$73/6^*$ ، $105/6$ ، $119/3$ ، $115/3$ ، $127/5$ ، $170/8$ ، $176/2$ ، 200^*

که در آن داده های با علامت * سانسور شده اند. با فرض اینکه داده ها از توزیع $W(\lambda, \beta)$ باشند با استفاده از تمرین ۹

الف) λ و β را به روش ML به دست آورید.

ب) قابلیت اعتماد سوپاپ ها را در $t = 120$ به دست آورید.

ج) میانه توزیع را به روش ML برآورد کنید.

د) یک فاصله اطمینان تقریبی ۹۵٪ برای λ و یک فاصله اطمینان تقریبی ۹۰٪ برای β به دست آورید.

۶

روش‌های استنباط ناپارامتری در قابلیت اعتماد

۱.۷ مقدمه

در این فصل روش‌های استنباط آماری ناپارامتری را مورد بحث قرار می‌دهیم. در روش‌های پارامتری که در فصل ۶ مطالعه شد، فرض بر این بود که متغیر طول عمر مورد بررسی دارای یک توزیع احتمال شناخته شده است که به پارامترهای مجھول بستگی دارد. هدف در آنجا برآوردهای پارامتری مجھول مدل با استفاده از داده‌هایی است که بر اساس یک شیوه نمونه‌گیری به دست آید. اما باید توجه داشت که داده‌ها از یک مدل معین پیروی می‌کنند فرضی قوی است و ممکن است به هر دلیل این فرض درست انتخاب نشده باشد. در اینصورت، استنباط آماری انجام شده می‌تواند نتایج غیر واقعی در مورد خواص تصادفی متغیر طول عمر ارائه کند. در این بخش، روش‌هایی برای استنباط آماری در مورد خواص طول عمر ارائه می‌کنیم که در آن‌ها هیچ فرضی در مورد نوع توزیع مورد بررسی نمی‌کنیم. این روش‌ها که به آمار ناپارامتری شناخته می‌شوند به دلیل فرضیات ضعیفی که در آن‌ها وجود دارد، اغلب استفاده‌های فراوانی در تحلیل داده‌های طول عمر دارند.

مباحثی که در این فصل مورد تطالعه قرار می‌گیرند به شرح زیر است. در بخش ۲.۷، برآوردهای تجربی ناپارامتری تابع توزیع (تابع قابلیت اعتماد) را بر اساس داده‌های کامل ارائه می‌کنیم. سپس بر اساس آن یک فاصله اطمینان تقریبی $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ برای تابع قابلیت اعتماد در یک نقطه مفروض از زمان به دست می‌آوریم. در بخش ۳.۷ جداول عمر را معرفی می‌کنیم. با استفاده از

جدول برآورد تابع قابلیت اعتماد را در حالتی که اطلاعات در مورد شکست‌ها در فاصله‌های زمانی معین اتفاق بیافتد و بعضی از داده‌ها در این فواصل سانسور شوند ارائه می‌کنیم. در بخش ۳.۷ برآورد گر معروف تابع قابلیت اعتماد که به برآورد کپلن-میر معروف است را معرفی کرده و نشان می‌دهیم که چگونه در حالتی که داده‌ها از سمت راست سانسور شوند می‌توان با استفاده از آن تابع قابلیت اعتماد را برآورد کرد. سپس واریانس تقریبی برآورد گر کپلن-میر را ارائه کرده و با استفاده از آن یک فاصله اطمینان تقریبی برای تابع قابلیت اعتماد در یک نقطه مفروض از زمان به دست می‌آوریم. بخش ۴.۷ اختصاص به بررسی رفتار تابع نرخ خطر بر مبنای داده‌ها دارد. در این بخش تبدیل T را معرفی کرده و نشان می‌دهیم که چگونه با استفاده از برآورد تبدیل T می‌توان مشخص کرد که آیا توزیع جامعه مورد بررسی $(DFR)IFR$ است یا خیر.

۲.۷ برآورد تابع توزیع با داده‌های کامل

ساده‌ترین حالتی که در مطالعات ناپارامتری وجود دارد، برآورد تابع توزیع است هنگامیکه داده‌ها کامل هستند. در اینجا فرض می‌کنیم که n واحد در زمان $t = 0$ وارد آزمایش شده و طول عمر آن‌ها t_1, t_2, \dots, t_n است. اگر $F(t)$ تابع توزیع مجھول واحدها باشد آنگاه برآورد $\hat{F}(t)$ که به آن برآورد گر تجربی گویند. به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\hat{F}(t) = \frac{\text{تعداد مشاهداتی که در نمونه کمتر یا مساوی } t \text{ هستند}}{n}$$

نمایش دیگر برای $\hat{F}(t)$ از این واقعیت که t_1, t_2, \dots, t_n زمان‌های مرتب شده هستند به دست می‌آید.

$$\hat{F}(t) = \begin{cases} 0 & t < t_1 \\ \frac{1}{n} & t_1 \leq t < t_2 \\ \frac{2}{n} & t_2 \leq t < t_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \leq t \end{cases}$$

توجه کنید که این تابع توزیع پله‌ای غیر نزولی است که در آن پرسش‌ها در زمان‌های t_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، اتفاق می‌افتد. این برآورد گر را برآورد گر ناپارامتری تابع توزیع F می‌گویند.

زیرا که در آن هیچ فرضی در مورد نوع مدل F گذاشته نمی‌شود. اگر $R(t)$ تابع قابلیت اعتماد واحدهای مورد آزمایش باشد آنگاه برآوردهای تجربی آن به صورت زیر خواهد بود،

$$\hat{R}(t) = 1 - \hat{F}(t)$$

توجه کنید که $\hat{R}(t)$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد

$$\hat{R}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(t,\infty)}(T_i)$$

که در آن T_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، طول عمر واحد i است و

$$I_{(t,\infty)}(T_i) = \begin{cases} 1 & , T_i > t \\ 0 & , T_i \leq t \end{cases}$$

با توجه به این نمایش، نتیجه می‌گیریم که برای مقدار مفروض t ، $\hat{R}(t)$ متغیر n متوسط تصادفی مستقل و همتوزیع مانند $Z_i = I_{(t,\infty)}(T_i)$ است. بنابراین

$$n\hat{R}(t) = \sum_{i=1}^n Z_i$$

متغیرهای تصادفی Z_i دارای توزیع برنولی با تابع احتمال زیر هستند

$$P(Z_i = z) = \begin{cases} R(t) & , z = 1 \\ 1 - R(t) & , z = 0 \end{cases}$$

بنابراین $n\hat{R}(t)$ دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $(n, R(t))$ می‌باشد در نتیجه

$$E(\hat{R}(t)) = R(t)$$

يعني $\hat{R}(t)$ یک برآوردهای تاریخی $R(t)$ است. توجه کنید که $\hat{R}(t)$ برآوردهای $R(t)$ نیز می‌باشد. واریانس $\hat{R}(t)$ برابر است با

$$V(\hat{R}(t)) = \frac{R(t)(1-R(t))}{n}$$

با توجه به این نتایج، می‌توان یک فاصله اطمینان تقریبی $(1-\alpha)100\%$ برای $R(t)$ ارائه کرد. فرض کنید t^* یک مقدار مفروض باشد، در این صورت، از تقریب نرمال، فاصله اطمینان تقریبی $(1-\alpha)100\%$ برای $R(t)$ به صورت زیر خواهد بود.

$$\left(\hat{R}(t) - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{R}(t)(1-\hat{R}(t))}{n}}, \hat{R}(t) + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{R}(t)(1-\hat{R}(t))}{n}} \right)$$

مثال ۱.۷ فرض کنید نمونه‌ای به حجم ۲۰، از یک نوع قطعه الکتریکی، را در زمان $t = ۰$ وارد آزمایش کرده‌ایم و داده‌ها در جدول ۱.۷ بر حسب سال آمده است.

جدول ۱.۷ طول عمر ۲۰ قطعه الکتریکی

i	t_i	i	t_i
۱	۰/۰۶	۱۱	۱/۱
۲	۰/۸	۱۲	۱/۹
۳	۰/۳	۱۳	۰/۴
۴	۰/۰۳	۱۴	۱/۳۱
۵	۱/۲	۱۵	۱/۲
۶	۰/۷	۱۶	۰/۷
۷	۰/۹۲	۱۷	۱/۴
۸	۰/۴۱	۱۸	۰/۹
۹	۰/۲۳	۱۹	۰/۹۳
۱۰	۰/۳۲	۲۰	۰/۲۷

الف) تابع قابلیت اعتماد $R(t)$ را برآورد کنید.

ب) یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای $R(t)$ تعیین کنید.

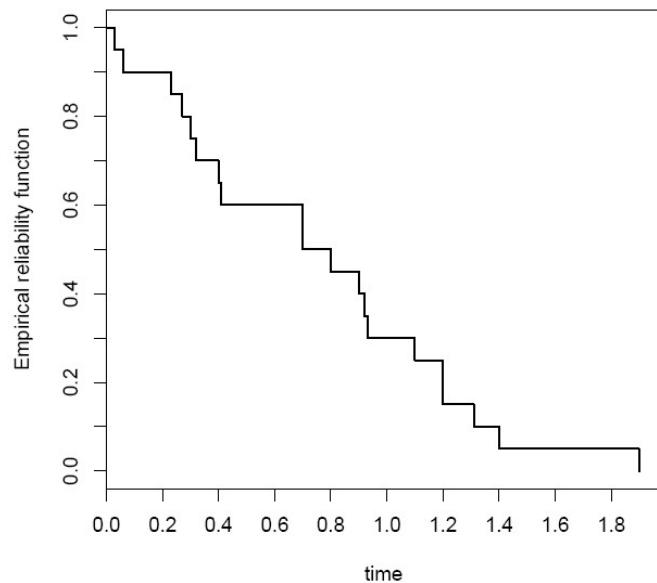
حل. الف) برآورده تابع قابلیت اعتماد $R(t)$ به راحتی به صورت جدول ۲.۷ به دست می‌آید،

جدول ۲.۷ برآورده تابع قابلیت اعتماد

t_i	۰/۰	۰/۰۳	۰/۰۶	۰/۰۲۳	۰/۰۲۷	۰/۰۳۰	۰/۰۳۲	۰/۰۴	۰/۰۴۱	۰/۰۷
$\hat{R}(t_i)$	$\frac{۲۰}{۲۰}$	$\frac{۱۹}{۲۰}$	$\frac{۱۸}{۲۰}$	$\frac{۱۷}{۲۰}$	$\frac{۱۶}{۲۰}$	$\frac{۱۵}{۲۰}$	$\frac{۱۴}{۲۰}$	$\frac{۱۳}{۲۰}$	$\frac{۱۲}{۲۰}$	$\frac{۱۰}{۲۰}$

t_i	۰/۸	۰/۹	۰/۹۲	۰/۹۳	۱/۱	۱/۲	۱/۳۱	۱/۴	۱/۹
$\hat{R}(t_i)$	$\frac{9}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$.

شکل ۱.۷ برآورد تابع قابلیت اعتماد را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۷ برآورد قابلیت اعتماد قطعه الکتریکی

ب) فاصله اطمینان ۹۵٪ برای $R(0/5)$ برابر است با $(0/815, 0/385)$.

۳.۷ جداول عمر

فرض کنید n واحد با توزیع یکسان را در زمان $t = ۰$ وارد آزمایش می‌کنیم. در اینجا نیز هدف برآورد ناپارامتری تابع قابلیت اعتماد طول عمر واحدها یعنی $R(t)$ است. بدین منظور روشی ارائه می‌کنیم که روش جدول عمر نام دارد و به ویژه اهمیت آن زمانی است که داده‌ها ممکن است از سمت راست سانسور شوند. در این روش، که به صورت بازرسی واحدها در

زمان‌های مختلف در طول آزمایش صورت می‌گیرد، اطلاعاتی که در مورد وضعیت واحدها داریم تنها در زمان بازرسی است. این روش دارای ۳ مرحله کلی زیر است.

- ۱) محور طول عمر را به تعدادی بازه معین افزایش می‌کنیم.
- ۲) قابلیت اعتماد شرطی را در هر بازه برآورد می‌کنیم.
- ۳) $R(t)$ را در نقاط انتهایی بازه‌ها برآورد می‌کنیم.

فرض کنید زمان $(0, \infty]$ را به بازه‌های $(I_i, t_i = [t_{i-1}, t_i], i = 1, 2, \dots, k+1)$ ، که در آن $t_0 = 0$ و

$t_{k+1} = \infty$ افزایش می‌کنیم. کمیت‌های زیر را تعریف می‌کنیم،

(۱) n_i : تعداد واحدهایی که در بازه I_i هنوز سالم هستند.

(۲) f_i : تعداد واحدهایی که در بازه I_i شکست خورده‌اند.

(۳) c_i : تعداد واحدهایی که در بازه I_i سانسور شده‌اند.

با توجه به این تعاریف تعداد واحدهای سالم در ابتدای بازه I_i برابر است با

$$\begin{aligned} n_i &= n_{i-1} - f_{i-1} - c_{i-1} \\ &= n - \sum_{j=1}^{i-1} f_j - \sum_{j=1}^{i-1} c_j \end{aligned}$$

در ابتدا فرض می‌کنیم که هیچ سانسوری در بازه $I_i, i = 1, 2, \dots, k+1$ ، اتفاق نیافتد و تابع

قابلیت اعتماد را در نقاط t_i (زمان‌های بازرسی واحدها) برآورد می‌کنیم. برآورده‌ی که برای

($R(t_i)$ به دست می‌آوریم به روش ML است. ابتدا فرض کنید

$P_i = R(t_i)$ (طول عمر یک واحد از t_i بیشتر باشد)

احتمال شرطی p_i را به صورت زیر تعریف کنید

$p_i = P(t_i > t_{i-1})$ (طول عمر واحد از t_{i-1} بیشتر است | طول عمر یک واحد از t_i بیشتر شود)

واضح است که

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{R(t_i)}{R(t_{i-1})} \\ &= \frac{P_i}{P_{i-1}}, i = 1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

اگر q_i را به صورت زیر تعریف کنیم

$q_i = P(t_i > t_{i-1})$ (طول عمر واحد از t_{i-1} بیشتر است | طول عمر یک واحد از t_i کمتر شود)

آنگاه

$$q_i = 1 - p_i$$

همچنین داریم

$$\begin{aligned} P_i &= p_i P_{i-1} \\ &= p_i p_{i-1} P_{i-2} \\ &\vdots \\ &= p_i p_{i-1} \dots p_1 \end{aligned}$$

که تساوی اخیر از این واقعیت ناشی می‌شود که $P = 1$.

فرض کنید π_i احتمال غیر شرطی این پیشامد باشد که یک واحد در بازه I_i از کار بیافتد. به راحتی مشاهده می‌شود که

$$\begin{aligned} \pi_i &= P_{i-1} - P_i \\ &= \prod_{j=1}^{i-1} p_j - \prod_{j=1}^i p_j \\ &= (1 - p_i) \prod_{j=1}^{i-1} p_j \\ &= q_i \prod_{j=1}^{i-1} p_j \end{aligned}$$

اگر L تابع درستنمایی تعداد شکست‌ها در طول آزمایش باشد آنگاه

۲۰۲ روش های استباط ناپارامتری در قابلیت اعتماد

$$\begin{aligned}
 L &= L(f_1, f_2, \dots, f_k) \\
 &= \frac{n!}{f_1! f_2! \cdots f_k!} \prod_{i=1}^{k+1} \pi_i^{f_i} \\
 &= c \prod_{i=1}^{k+1} (p_i p_{i+1} \cdots p_{k+1} q_i)^{f_i} \\
 &= c \prod_{i=1}^{k+1} q_i^{f_i} p_i^{f_{i+1} + \cdots + f_{k+1}} \\
 &= c \prod_{i=1}^{k+1} q_i^{f_i} p_i^{n - \sum_{j=i}^k f_j} \\
 &= c \prod_{i=1}^{k+1} p_i^{n_i - f_i} q_i^{f_i}
 \end{aligned}$$

که در آن $c = \frac{n!}{f_1! f_2! \cdots f_k!}$ با گرفتن لگاریتم از طرفین تساوی به دست می آوریم

$$l = l(f_1, f_2, \dots, f_k) = \ln c + \sum_{i=1}^{k+1} [(n_i - f_i) \ln p_i + f_i \ln q_i]$$

از برآورد گر ML به صورت زیر به دست می آید.

$$\hat{p}_i = 1 - \frac{f_i}{n_i}$$

و

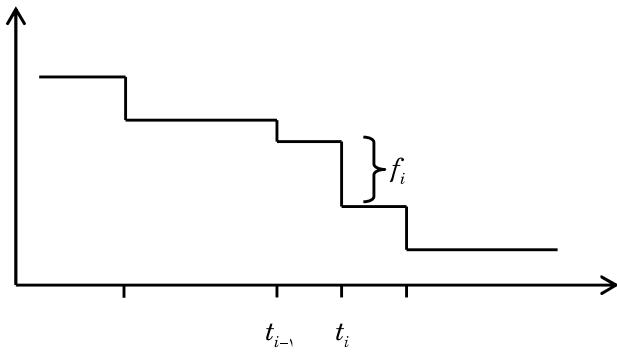
$$\hat{q}_i = \frac{f_i}{n_i}$$

با قرار دادن این مقادیر در رابطه P_i , برآورد گر $R(t_i)$ برابر خواهد شد با

$$\begin{aligned}
 \hat{R}(t_i) &= \prod_{j=1}^i \hat{p}_j \\
 &= \frac{n_{i+1}}{n}
 \end{aligned}$$

یعنی قابلیت اعتماد واحد در انتهای بازه i ام برابر با حاصل تقسیم تعداد واحدهای سالم در ابتدای بازه $(i+1)$ ام بر تعداد کل واحدها است. توجه کنید که این نتیجه مشابهتابع توزیع

تجربی است که در بخش قبل معرفی کردیم. (یک تابع پله‌ای است که عرض آن برابر با طول بازه I_i و ارتفاع آن برابر f_i است. به شکل ۲.۷ توجه کنید.



شکل ۲.۷ نمایش برآورد تابع قابلیت اعتماد

حال فرض کنید علاوه بر تعداد شکست‌ها در بازه Δt ، تعداد c_i واحد در این بازه سانسور شوند. در این صورت تعداد واحدهایی که در ابتدای واحد بازه Δt سالم‌اند (و در این بازه در معرض خطرند) برابر است با

$$n_i = n_{i-1} - f_{i-1} - c_{i-1}, \quad i = 1, \dots$$

از آنجایی که ممکن است c_i واحد در ابتدای بازه I_i از آزمایش خارج شوند آنگاه $n_i - c_i$ مشاهده در ابتدای بازه I_i در معرض خطرند. اما اگر c_i واحد در انتهای بازه I_i سانسور شوند آنگاه n_i واحد در ابتدای بازه I_i در خطرند. توجه کنید که در حالت اول برآورد q_i مساوی خواهد شد با

$$\hat{q}_i = \frac{f_i}{n_i - c_i}$$

و در حالت دوم

$$\hat{q}_i = \frac{f_i}{n_i}$$

لذا در حالت اول q_i را "بیش برآورده" و در حالت دوم q_i را "کم برآورده" می‌کنیم. برای داشتن یک برآورد منطقی فرض می‌کنیم که تعداد واحدهای سانسور شده به طور یکنواخت در طول فاصله I_i سانسور شوند. در این صورت q_i را به صورت زیر برآورده می‌کنیم

$$\hat{q}_i = \frac{f_i}{n_i - c_i}$$

و قرار می‌دهیم $\hat{q}_i = 1 - \hat{p}_i$ و در نتیجه برآورده تابع قابلیت اعتماد در t_i برابر خواهد شد با

$$\hat{R}(t_i) = \prod_{j=1}^i \hat{p}_j \quad (1.7)$$

در به دست آوردن این نتیجه علاوه بر فرض‌هایی که داشتیم، دو فرض دیگر را نیز به صورت تلویحی پذیرفته‌ایم. یکی این که مکانیزم سانسور داده‌ها مستقل از طول عمرهای مشاهده شده است و دیگری این که شکست‌ها و سانسورها در طول بازه‌های بازرسی به صورت یکنواخت اتفاق می‌افتد.

نرم افزارهای مختلف آماری را می‌توان جهت ساختن جداول طول عمر استفاده کرد معمولاً جداول‌های طول عمر که توسط نرم افزار ساخته می‌شود شامل موارد مانند I_i ، f_i ، n_i ، c_i ، \hat{q}_i و \hat{p}_i است. بعضی از نرم افزارها نیز تابع نرخ خطر در هر بازه را ارائه می‌کنند. می‌توان نشان داد که برآورده واریانس $\hat{R}(t_i)$ برابر است با

$$\begin{aligned} \hat{V}(\hat{R}(t_i)) &= (\hat{R}(t_i))^2 \sum_{j=1}^k \frac{\hat{q}_i}{\hat{p}_i n_i} \\ &= (\hat{R}(t_i))^2 \sum_{j=1}^k \frac{f_i}{n_i(n_i - f_i)} \end{aligned}$$

برای اثبات نتیجه‌ای مشابه با این نتیجه بخش بعد را بینیدم با استفاده از این واریانس تقریبی می‌توان یک فاصله اطمینان تقریبی $(1-\alpha)\% \hat{R}(t_i)$ برای $R(t_i)$ ارائه کرد. به عبارت دیگر از تقریب نرمال فاصله اطمینان $(1-\alpha)\%$ برای $R(t_i)$ عبارت است از

$$\left(\hat{R}(t_i) - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{V}(\hat{R}(t_i))}, \hat{R}(t_i) + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{V}(\hat{R}(t_i))} \right)$$

برای توضیح بیشتر مثال زیر را بینید.

مثال ۲.۷ فرض کنید ۲۷۶ واحد از یک محصول الکتریکی را در زمان $t = 0$ وارد آزمایش کرده و به طور روزانه پس از هر ۲۴ ساعت مورد بازرگانی قرار داده ایم نتایج در جدول ۳.۷ آمده است.

جدول ۳.۷ جدول طول عمر محصول الکتریکی

بازه‌ها بر حسب روز	تعداد شکست‌ها (f_i)	تعداد سانسورها (c_i)	n_i	$n_i - \frac{c_i}{2}$	\hat{q}_i	\hat{p}_i	$\hat{P}_i = \hat{R}(t_i)$
[۰,۱)	۶۰	۰	۲۷۶	۲۷۶	۰/۲۱۷	۰/۷۸۳	۰/۷۸۳
[۱,۲)	۵۲	۰	۲۱۶	۲۱۶	۰/۲۴۰	۰/۷۶۰	۰/۵۹۵
[۲,۳)	۴۲	۳	۱۶۴	۱۶۲/۵	۰/۲۵۵	۰/۷۴۵	۰/۴۴۳
[۳,۴)	۳۶	۱۰	۱۱۹	۱۱۴	۰/۳۱۶	۰/۶۸۴	۰/۳۰۳
[۴,۵)	۱۹	۶	۷۳	۷۰	۰/۲۷۱	۰/۷۲۹	۰/۲۲۱
[۵,۶)	۸	۲	۴۸	۴۷	۰/۱۶۷	۰/۸۳۳	۰/۱۸۴
[۶,۷)	۲	۲	۳۸	۳۷	۰/۰۵۴	۰/۹۴۶	۰/۱۷۴
[۷,۸)	۴	۴	۳۴	۳۲	۰/۱۲۵	۰/۸۷۵	۰/۱۵۲
[۸,۹)	۳	۴	۲۶	۲۴	۰/۱۲۵	۰/۸۷۵	۰/۱۳۳
[۹,∞)	۱۹	۰	۱۹	۱۹	۱/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰

۴.۷ برآوردگر کپلن-میر

یکی دیگر از روش‌های برآورد ناپارامتری تابع قابلیت اعتماد استفاده از برآوردگر معروف کپلن-میر است. در این روش واحدهایی که وارد آزمایش می‌شوند، ممکن است از سمت راست سانسور شوند. به ویژه این روش شیوه سانسور متناظر با سانسور نوع II است. فرض کنید n واحد را در زمان $t = 0$ وارد آزمایش می‌کنیم. همچنین فرض کنید که زمان شکست واحدها $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ باشد. این بدین معنی است که ممکن است در زمان t_i واحدهایی باشند که در زمان t_i در معرض خطر هستند (یعنی تعداد واحدهایی که در زمان t_i هنوز سالم‌اند و سانسور نیز نشده‌اند). همچنین این فرض را اضافه می‌کنیم که سانسورها در زمان t_i بلاfaciale بعد از t_i اتفاق می‌افتد. اگر T را طول عمر یک واحد در نظر بگیریم که مقادیر t_1, t_2, \dots, t_k را اختیار می‌کند (توجه کنید که این فرض معادل با این است که متغیر تصادفی پیوسته T را گستته در نظر گرفته‌ایم یا به عبارت دیگر شکست در هر همسایگی t_i را شکست در t_i در نظر گرفته‌ایم) آنگاه h_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$h_i = P(T = t_i \mid T \geq t_i)$ واحد مورد بررسی در t_i هنوز فعال است | واحد مورد بررسی در t_i شکست بخورد (

$$= \frac{P(T = t_i)}{P(T \geq t_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

آنگاه می توان نشان داد که تابع قابلیت اعتماد واحد، $R(t)$ ، را می توان به صورت زیر نمایش داد

$$R(t) = \prod_{j:t_j \leq t} (1 - h_j)$$

با توجه به این که در زمان t_i ، n_i واحد هنوز فعال اند و بلافاصله f_i واحد از بین می روند مقدار درستنمایی در t_i برابر است با

$$h_i^{f_i} (1 - h_i)^{n_i - f_i}$$

بنابراین مقدار کل درستنمایی برابر خواهد شد با

$$\begin{aligned} L &= L(f_1, f_2, \dots, f_k) \\ &= \prod_{i=1}^k h_i^{f_i} (1 - h_i)^{n_i - f_i} \end{aligned}$$

در نتیجه لگاریتم تابع درستنمایی برابر است با

$$l = \sum_{i=1}^k [f_i \ln h_i + (n_i - f_i) \ln (1 - h_i)]$$

بنابراین به راحتی ملاحظه می شود که برآورده گر درستنمایی ماکزیمم h_i مساوی است با

$$\hat{h}_i = \frac{f_i}{n_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

و این نتیجه می دهد که برآورده گر درستنمایی ماکزیمم $R(t)$ مساوی است با

$$\begin{aligned} \hat{R}(t) &= \prod_{i:t_i \leq t} (1 - \hat{h}_i) \\ &= \prod_{i:t_i \leq t} \left(1 - \frac{f_i}{n} \right) \end{aligned}$$

این برآوردگر را برآوردگر کپلن-میر تابع قابلیت اعتماد می‌گویند. به راحتی ملاحظه می‌شود که اگر هیچ یک از داده‌ها سانسور نشده باشد آنگاه $\hat{R}(t)$ به برآوردگر تجربی ارائه شده در (۱.۷) تبدیل می‌شود.

واریانس برآوردگر کپلن-میر

در اینجا واریانس برآوردگر کپلن-میر را به طور تقریب برآورد می‌کنیم. بدین منظور از روش دلتا استفاده می‌کنیم همانطور که دیدیم

$$\hat{R}(t) = \prod_{i:t_i \leq t} (1 - \hat{h}_i)$$

با گرفتن لگاریتم از طرفین این رابطه به دست می‌آوریم

$$\ln \hat{R}(t) = \sum_{i:t_i \leq t} \ln(1 - \hat{h}_i)$$

در نتیجه اگر از وابستگی h_i ها صرفنظر کنیم

$$\begin{aligned} V(\ln \hat{R}(t)) &\cong \sum_{i:t_i \leq t} V(\ln(1 - \hat{h}_i)) \\ &\cong \sum_{i:t_i \leq t} \frac{1}{(1 - \hat{h}_i)^2} V(\hat{h}_i) \quad (\text{از روش دلتا}) \end{aligned}$$

اما داریم

$$V(\hat{h}_i) \cong \frac{\hat{h}_i(1 - \hat{h}_i)}{n_i}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} V(\ln \hat{R}(t)) &\cong \sum_{i:t_i \leq t} \frac{1}{(1 - \hat{h}_i)^2} V(\hat{h}_i) \\ &= \sum_{i:t_i \leq t} \frac{\hat{h}_i}{n_i(1 - \hat{h}_i)} \\ &= \sum_{i:t_i \leq t} \frac{f_i}{n_i(n_i - f_i)} \end{aligned}$$

از طرفی با استفاده دوباره از روش دلتا داریم

$$\hat{V}(\ln \hat{R}(t)) \cong \frac{1}{(\hat{R}(t))'} \hat{V}(\hat{R}(t))$$

در نتیجه

$$\hat{V}(\ln \hat{R}(t)) \cong (\hat{R}(t))' \sum_{i:t_i \leq t} \frac{f_i}{n_i(n_i - f_i)}$$

مثال ۷،۳ در یک آزمایش ۴۸ قطعه از یک نوع مفتول فلزی برای اندازه گیری مقاومت آنها در برابر کشش مورد استفاده قرار گرفته‌اند. از این ۴۸ قطعه ۷ تای آنها در طول آزمایش به دلایلی از بین رفته‌اند (سانسور شده‌اند) اما ۴۱ قطعه باقی مانده با موفقیت میزان قدرت آنها مشاهده شده است. داده‌های حاصل از این آزمایش در جدول ۴.۷ آمده است؛ برآور گر کلین-میر تابع قابلیت اعتماد را بدست آورید و یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای تابع قابلیت اعتماد در نقطه ۵۲/۷ تعیین کنید.

جدول ۴.۷ داده‌های مقاومت مفتول فلزی

	۳۶/۳	۴۱/۷	۴۳/۹	۴۹/۹	۵۰/۱	۵۰/۸	۵۱/۹	۵۲/۱	۵۲/۳
مقادیر مشاهده شده	۵۲/۳	۵۲/۶	۵۲/۷	۵۳/۱	۵۳/۶	۵۳/۶	۵۳/۹	۵۳/۹	۵۴/۱
	۵۴/۶	۵۲/۴	۵۴/۸	۵۴/۸	۵۵/۱	۵۵/۴	۵۵/۹	۵۶/۰	۵۶/۱
	۵۶/۵	۵۶/۹	۵۷/۸	۶۰/۷	۵۷/۱	۵۷/۳	۵۷/۷	۵۷/۸	۵۸/۱
	۵۸/۹	۵۹/۰	۵۹/۱	۵۹/۶	۶۰/۴				
مقادیر سانسور شده	۲۶/۸	۲۹/۶	۳۳/۴	۳۵/۰	۴۰/۰	۴۱/۹	۴۲/۵		

حل. با اندکی محاسبه جدول ۵.۷ به دست می‌آید و در نتیجه مقدار برآورد واریانس در نقطه $\hat{R}(52/7)$ برابر است با

$$\hat{V}(\hat{R}(52/7)) = (\hat{R}(52/7))' \sum_{i:t_i \leq 52/7} \frac{f_i}{n_i(n_i - f_i)} = 0.0053$$

لذا فاصله اطمینان ۹۵٪ برای $\hat{R}(52/7)$ برابر است با

٪۹۵ مضمیں هستیم اگر این قطعات بخواهند قدرتی بیش از ۵۲/۷ داشته باشند قابلیت اعتماد بین ۰/۸۳ و ۰/۵۴ است.

جدول ۵.۷ محاسبات لازم برای بدست آوردن $\hat{V}(\hat{R}(۵۲/۷))$

i	t_i	n_i	f_i	$1 - \frac{f_i}{n_i}$	$\hat{R}(t)$	$\frac{f_i}{n_i(n_i - f_i)}$
۰	۰/۰	۴۸	۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۱	۳۶/۳	۴۴	۱	۰/۹۷۷۳	۰/۹۷۷۳	۰/۰۰۰۵
۲	۴۱/۷	۴۲	۱	۰/۹۷۶۲	۰/۹۵۴۰	۰/۰۰۰۶
۳	۴۳/۹	۳۹	۱	۰/۹۷۴۴	۰/۹۲۹۵	۰/۰۰۰۷
۴	۴۹/۹	۳۸	۱	۰/۹۷۳۷	۰/۹۰۵۱	۰/۰۰۰۷
۵	۵۰/۱	۳۷	۱	۰/۹۷۳۰	۰/۸۸۰۶	۰/۰۰۰۸
۶	۵۰/۸	۳۶	۱	۰/۹۷۲۲	۰/۸۵۶۲	۰/۰۰۰۸
۷	۵۱/۹	۳۵	۱	۰/۹۷۱۴	۰/۸۳۱۷	۰/۰۰۰۸
۸	۵۲/۱	۳۴	۱	۰/۹۷۰۶	۰/۸۰۷۲	۰/۰۰۰۹
۹	۵۲/۳	۳۳	۲	۰/۹۳۹۴	۰/۷۵۸۳	۰/۰۰۲۰
۱۰	۵۲/۳	۳۱	۱	۰/۹۶۷۷	۰/۷۳۳۸	۰/۰۰۱۱
۱۱	۵۲/۴	۳۰	۱	۰/۹۶۶۷	۰/۷۰۹۴	۰/۰۰۱۱
۱۲	۵۲/۷	۲۹	۱	۰/۹۶۵۵	۰/۶۸۴۹	۰/۰۰۱۲
۱۳	۵۳/۱	۲۸	۱	۰/۹۶۴۳	۰/۶۶۰۵	۰/۰۰۱۳

هنگامیکه تابع قابلیت اعتماد را با استفاده از روش کپلن-سیر برآورد کردیم، می‌توانیم از برآورد $\hat{R}(t)$ جهت بررسی این که داده‌ها از توزیع IFR (DFR) آمده‌اند استفاده کنیم. به عبارت دقیق‌تر، اگر $R(t)$ یک تابع بقا باشد آنگاه همانطور که در فصل‌های قبل دیدیم، $R(t)$ تابع $\hat{R}(t)$ یک توزیع IFR (DFR) است اگر و تنها اگر $-\ln R(t)$ یک تابع محدب (مقعر) از t باشد. بنابراین هنگامیکه $(\hat{R}(t_i), i = 1, 2, \dots, k)$ را محاسبه کنیم و نمودار $-\ln \hat{R}(t_i)$ را در مقابل t_i رسم می‌کنیم اگر این نمودار شکل تقریبی یک تابع محدب (مقعر) باشد آنگاه به طور تقریب نتیجه می‌گیریم که توزیع طول عمر تحت بررسی یک توزیع IFR (DFR)

۲۱۰ روش‌های استباط ناپارامتری در قابلیت اعتماد

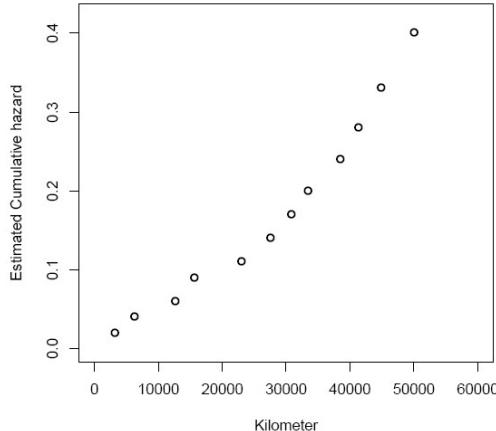
است. طبیعی است اگر نمودار به تقریب خطی باشد آنگاه توزیع طول عمر نمایی خواهد بود. برای روشن‌تر شدن مطلب مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۴.۷ نوعی سیستم ترمز اتوماتیک (ABS) در اتومبیل نصب شده است. در زمان شکست ABS مقدار کیلومتری را که اتومبیل حرکت کرده است را ثبت می‌کنیم. علاوه بر آن بعضی از اتومبیل‌ها به دلیل نقص در دیگر قسمت‌ها یا بر اثر تصادف از آزمایش خارج می‌شوند که مقدار کیلومترهای آنها نیز ثبت می‌شوند. داده‌های حاصل و برآورد کپلن میر آنها نیز در جدول زیر آمده‌اند.

جدول ۶.۷ داده‌های مربوط به سیستم ترمز اتوماتیک

شماره شکست	کیلومتر	n_i	$\hat{R}(t_i)$	$-\ln \hat{R}(t_i)$
۱	۳۲۲۰	۵۰	۰/۹۸۰	۰/۰۲
۲	۶۲۵۰	۴۹	۰/۹۶۰	۰/۰۴
۳	۱۲۶۶۰	۴۶	۰/۹۳۹	۰/۰۶
۴	۱۵۶۱۰	۴۲	۰/۹۱۶	۰/۰۹
۵	۲۲۹۸۰	۳۹	۰/۸۹۲	۰/۱۱
۶	۲۷۵۷۰	۳۵	۰/۸۶۶	۰/۱۴
۷	۳۰۸۰۰	۳۴	۰/۸۴۱	۰/۱۷
۸	۳۳۴۶۰	۳۰	۰/۸۱۳	۰/۲۰
۹	۳۸۵۰۰	۲۷	۰/۷۸۳	۰/۲۴
۱۰	۴۱۲۹۰	۲۵	۰/۷۵۲	۰/۲۸
۱۱	۴۴۸۷۰	۲۰	۰/۷۱۶	۰/۳۳
۱۲	۵۰۰۷۰	۱۶	۰/۶۷۰	۰/۴۰

شکل زیر نمودار $-\ln \hat{R}(t_i)$ را در مقابل t_i نشان می‌دهد. نمودار نشان می‌دهد که با توجه به محدب بودن نقاط توزیع داده‌ها توزیع IFR است.



شکل ۳.۷ نمودار برآورد نرخ خطر تجمعی سیستم ترمز سیستماتیک

۵.۷ تبدیل TTT برای بررسی رفتار تابع نرخ خطر

همانطور که در بخش ۲.۷ دیدیم، ملاکی جهت بررسی رفتار تابع نرخ خطر، استفاده $-\ln \hat{R}(t)$ است که در آن $\hat{R}(t)$ برآورد ناپارامتری $R(t)$ می‌باشد. در این بخش یک روش نسبتاً بهتر برای رفتار تابع نرخ خطر ارائه می‌کنیم که در آن از کمیت "زمان کل آزمایش (TTT)" که در بخش ۱.۱.۵ معرفی شد استفاده می‌شود.

فرض کنید T یک متغیر تصادفی طول عمر باشد که تابع توزیع آن $F(t)$ ، تابع قابلیت اعتماد آن $R(t)$ و تابع نرخ شکست آن $h(t)$ است. به ازای مقادیر $[0, 1] \in u$ معکوس تابع توزیع که با $F^{-1}(u)$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F^{-1}(u) = \min\{t, F(t) > u\}$$

برای مثال اگر توزیع طول عمر متغیر T نمایی با نرخ خطر $\lambda = 0.01$ باشد آنگاه $F(0.75) = 0.52$ و بنابراین $F(0.52) = 0.75$.

ملاک بررسی رفتار تابع نرخ خطر بر مبنای تعریف زیر است.

تعریف ۱.۷ فرض کنید تابع توزیع F دارای میانگین متناهی μ باشد. تبدیل زمان کل آزمایش (TTT)، که با $H(u) = F^{-1}(u)$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود.

۲۱۲ روش های استیباط ناپارامتری در قابلیت اعتماد

$$H(u) = \int_{-\infty}^{F^{-1}(u)} R(x) dx$$

برای مثال اگر T دارای توزیع نمایی باشد آنگاه $\lambda = 0.01$

$$\begin{aligned} H(\cdot / 52) &= \int_{-\infty}^{F^{-1}(\cdot / 52)} R(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{75} e^{-0.01x} dx \\ &= \frac{1 - e^{-0.01 \times 75}}{0.01} \\ &= 52 / 76 \end{aligned}$$

تابع تبدیل TTT یعنی $H(u)$ دارای دو خاصیت مهم است که از آنها جهت بررسی رفتار $h(t)$ استفاده می‌کنیم. این دو خاصیت را بدون اثبات مطرح می‌کنیم و جزئیات اثبات آنها را به خواننده واگذار می‌کنیم.

(۱) همواره داریم $H(0) = \mu$

(۲) مشتق تابع $H(u)$ در نقطه $u = F(t)$ برابر است با عکس تابع نرخ خطر. یعنی

$$\frac{d}{du} H(u) \Big|_{u=F(t)} = \frac{1}{h(t)}$$

از آنجایی که معیار $H(u)$ به مقیاس اندازه‌گیری بستگی دارد، معمولاً آن را بر $H(0)$ تقسیم می‌کنند تا معیاری به دست آید که به مقیاس اندازه‌گیری بستگی نداشته باشد. معیار جدید را که با $M(u)$ نمایش می‌دهیم تبدیل TTT مقیاس شده گویند. بنابراین $M(u)$ برابر است با،

$$\begin{aligned} M(u) &= \frac{H(u)}{H(0)} \\ &= \frac{H(u)}{\mu} \end{aligned}$$

توجه کنید $M(0) = 1$ و $M(\cdot) = 0$.

با توجه به این تعریف داریم

$$\frac{d}{du} M(u) = \frac{1}{\mu h(F^{-1}(u))}$$

اگر $M(u)$ را جهت بررسی رفتار تابع $h(t) = h(u)$ ارائه می‌کنیم. فرض کنید متغیر تحت بررسی نمایی با تابع نرخ خطر $\lambda = \lambda(h)$ است. در این صورت

$$\begin{aligned}\frac{d}{du} M(u) &= \frac{d}{du} \frac{1}{\mu h(F^{-1}(u))} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda} \\ &= 1\end{aligned}$$

بنابراین هنگامی که توزیع تحت بررسی نمایی است، $M(u)$ یک تابع خطی است که ضریب زاویه آن ۱ می‌باشد و بالعکس. اگر تابع نرخ خطر تابعی صعودی از زمان باشد، آنگاه تابع

$$\frac{d}{du} M(u) = \frac{1}{\mu h(F^{-1}(u))}$$

تابعی نزولی از u است و بنابراین در این حالت $M(u)$ یک تابع مقعر خواهد بود و بالعکس اگر $M(u)$ مقعر باشد آنگاه h تابعی صعودی از t است و توزیع IFR خواهد بود. به طور مشابه اگر $h(t)$ تابعی نزولی از زمان باشد آنگاه $M(u)$ محدب است و بالعکس اگر $M(u)$ محدب باشد، توزیع DFR است.

پس به طور خلاصه نتایج زیر را داریم،

الف) اگر $M(u)$ تابعی خطی با ضریب زاویه ۱ باشد، F نمایی است.

ب) اگر $M(u)$ تابعی مقعر (محدب) از u باشد آنگاه IFR F (۲) است.

در عمل با توجه به اینکه F مجھول است محاسبه تبدیل TTT امکان پذیر نیست و لذا باید آن را از نمونه برآورد کرد. بدین منظور یک نمونه تصادفی از F اختیار می‌کنیم و سپس تابع توزیع تجربی \hat{F} را که در بخش ۱.۷ معرفی کردیم محاسبه می‌کنیم. همانطور که دیدیم $\hat{F}(t)$ به صورت زیر ارائه شد

$$\hat{F}(t) = \frac{j}{n}, t_j \leq t < t_{j+1}$$

که در آن t_j ، $j = 1, 2, \dots, n$ ، مقادیر مرتب شده نمونه تصادفی هستند. حال تبدیل TTT را برای $\hat{F}(t)$ محاسبه می‌کنیم. طبق تعریف این تبدیل که با \hat{H} نمایش می‌دهیم برابر است با

$$\hat{H}(u) = \int_{\cdot}^{\hat{F}^{-1}(u)} \hat{R}(x) dx$$

که در آن $\hat{R}(x) = 1 - \hat{F}(x)$. نکته جالب توجه این است که محاسبه $\hat{H}(u)$ در نقطه $u = \frac{j}{n}$ منجر به تابعی از زمان کل آزمایش تا شکست زام می شود. یعنی نشان داده می شود

$$\hat{H}\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{1}{n} T(t_j)$$

که در آن

$$\begin{aligned} T(j) &= \sum_{k=1}^j t_k + (n-j)t_j \\ &= \sum_{k=1}^j (n-k+1)(t_k - t_{k-1}) \end{aligned}$$

بنابراین برآورد تبدیل TTT مقیاس بندی شده که با \hat{M} نمایش می دهیم در نقطه $\frac{j}{n}$ برابر خواهد شد با

$$\begin{aligned} \hat{M}(u) &= \frac{\hat{H}\left(\frac{j}{n}\right)}{\hat{H}(1)} = \frac{\frac{1}{n} T(t_j)}{\frac{1}{n} T(t_n)} \\ &= \frac{T(t_j)}{T(t_n)}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

برای بررسی رفتار تابع نرخ خطر کمیت $\hat{M}\left(\frac{j}{n}\right)$ را ملاک قرار می دهیم. ابتدا نمودار زوج نقاط $\left(\frac{j}{n}, \hat{M}\left(\frac{j}{n}\right)\right)$ را به ازای $j = 1, 2, \dots, n$ را روی صفحه مختصات رسم می کنیم. آنگاه،

- (الف) اگر نمودار داده ها حول خط $y = x$ باشد و تابع نرخ ثابت، توزیع نمایی است.
- (ب) اگر نمودار داده ها بالای خط $y = x$ باشد و تابعی مقعر باشد آنگاه توزیع IFR است.
- (ج) اگر نمودار داده ها پایین خط $y = x$ باشد و تابعی محدب باشد آنگاه توزیع DFR است.

طبيعي است که هر چقدر اندازه n بيشتر باشد نتيجه به مقدار واقعی نزديک تر است. در متون

پيشرونه تر ثابت می شود که نمودار $\left(\frac{j}{n}, \hat{M}\left(\frac{j}{n}\right)\right)$ ، هنگامی که $n \rightarrow \infty$ ، به سمت نمودار

تابع

$$M(u) = \frac{1}{\mu} \int_0^{F^-(u)} R(x) dx, \quad 0 \leq u \leq 1$$

میل می کند. اکنون مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۵.۲ فرض کنید جدول ۷.۷ زمان شکست یک ماشین بر حسب ساعت است که بر اساس نمونه‌ای ۲۰ تابی از اين ماشين که در آزمایش قرار گرفته‌اند به دست آمده است. رفتار تابع نرخ خطر را بررسی کنید.

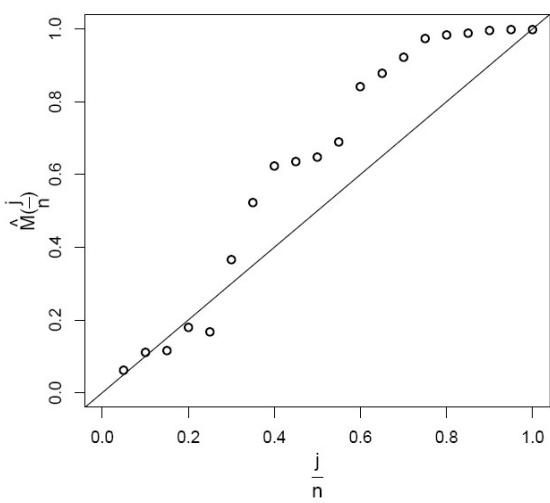
جدول ۷.۷ داده‌های زمان شکست ماشین

i	t_i	i	t_i
۱	۴/۵	۱۱	۶۸/۰۱
۲	۸/۲	۱۲	۹۲/۳
۳	۸/۶	۱۳	۹۹/۱
۴	۱۴	۱۴	۱۰۷/۸
۵	۱۳/۰۱	۱۵	۱۲۰/۱
۶	۳۲	۱۶	۱۲۳
۷	۴۸	۱۷	۱۲۴/۷
۸	۵۹/۱	۱۸	۱۲۹/۱
۹	۶۰/۷	۱۹	۱۳۰/۶
۱۰	۶۲/۳	۲۰	۱۳۱/۲

حل. ابتدا می‌بایست مقادیر $\frac{j}{n}$ و $\hat{M}\left(\frac{j}{n}\right)$ را به دست آوریم. جدول ۸.۷ این مقادیر را ارائه می‌کند و با استفاده از این مقادیر شکل ۴.۷ را رسم می‌کنیم. نمودار داده‌ها بالای خط $y = x$ قرار گرفته است و تابعی معکور است در نتيجه توزیع IFR است

جدول ۸.۷ محاسبه $\left(\frac{j}{n}, \hat{M}\left(\frac{j}{n}\right)\right)$

j	$\frac{j}{n}$	$\hat{M}(\frac{j}{n})$	j	$\frac{j}{n}$	$\hat{M}(\frac{j}{n})$
۱	۰/۰۵	۰/۰۶۲۷	۱۱	۰/۵۵	۰/۹۸۹۶
۲	۰/۱۰	۰/۱۱۱۶	۱۲	۰/۶۰	۰/۸۴۱۸
۳	۰/۱۵	۰/۱۱۶۶	۱۳	۰/۶۵	۰/۸۷۹۷
۴	۰/۲۰	۰/۱۸۰۵	۱۴	۰/۷۰	۰/۹۲۲۱
۵	۰/۲۵	۰/۱۶۹۵	۱۵	۰/۷۵	۰/۹۷۳۵
۶	۰/۳۰	۰/۳۶۷۸	۱۶	۰/۸۰	۰/۹۸۳۶
۷	۰/۳۵	۰/۵۲۳۸	۱۷	۰/۸۵	۰/۹۸۸۳
۸	۰/۴۰	۰/۶۲۴۲	۱۸	۰/۹۰	۰/۹۹۷۵
۹	۰/۴۵	۰/۶۳۷۶	۱۹	۰/۹۵	۰/۹۹۹۶
۱۰	۰/۵۰	۰/۶۴۹۹	۲۰	۱/۰۰	۱/۰۰۰



شکل ۴.۷ نمودار $\left(\frac{j}{n}, \hat{M}(\frac{j}{n}) \right)$

روش فوق را برای حالتی که داده‌ها سانسور شوند نیز می‌توان به کار برد. فرض کنید n واحد را در زمان $t = ۰$ وارد آزمایش می‌کنیم. فرض کنید آزمایش بعد از r شکست ($r \leq n$)

خاتمه پیدا کند و $(n-r)$ واحد باقیمانده سانسور شوند. در این صورت زمان کل آزمایش برابر خواهد شد با

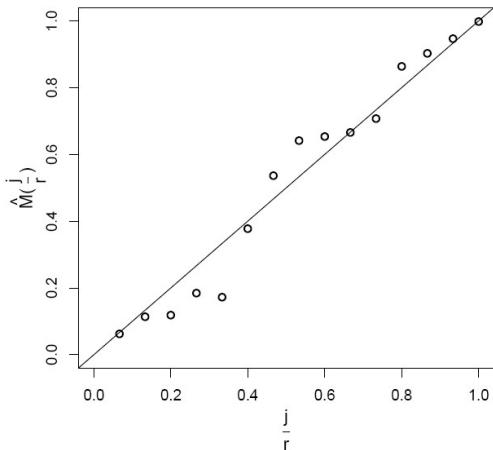
$$T(x_r) = \sum_{k=1}^j x_k + (n-j)x_r$$

حال جهت بررسی رفتار تابع نرخ خطر، نمودار $\left(\frac{j}{n}, \hat{M}\left(\frac{j}{n}\right)\right)$ را به ازای $j = 1, 2, \dots, r$ رسم می‌کنیم که در آن

$$M\left(\frac{j}{r}\right) = \frac{T(x_j)}{T(x_r)}, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

آنگاه بر اساس دستور العملی که برای داده‌های کامل ارائه کردیم عمل می‌کنیم. باید توجه داشت که در اینجا تصمیمی که اتخاذ می‌شود متأثر از مقدار r است. بدین معنی که هر چقدر r بیشتر باشد دقت تصمیم بالاتر می‌رود.

مثال ۶.۲ در مثال ۱۵.۷ اگر فرض کنیم که تنها ۱۵ داده اول را مشاهده کرده و بقیه داده‌ها از پانزدهمین شکست سانسور شوند، در مورد رفتار تابع نرخ خطر داده‌ها چه می‌توان گفت؟



۶۷ مسایل

بازه‌ها	تعداد شکست‌ها	n_i	تعداد سانسورها
برحسب روز	(f_i)		(c_i)
[٠,١)	٢٥	٢٧٠	.
[١,٢)	٣٠	٢٤٥	٥
[٢,٣)	٤٠	٢١٥	٥
[٣,٤)	٢١	١٧٠	٧
[٤,٥)	٤٠	١٤٢	٢
[٥,٦)	١١	١٠٠	٩
[٦,٧)	٢١	٨٠	٣
[٧,٨)	٧	٥٦	٦
[٨,٩)	٦	٤٣	٣
[٩,∞)	٣٦	٣٤	.

(الف) با تکمیل جدول عمر، تابع قابلیت اعتماد را برآورد کنید.

ب) نمودار $\hat{R}(t)$ را رسم کنید.

۴. فرض کنید جدول زیر داده‌های مربوط به زمان شکست ۳۰ قطعه الکتریکی است که در یک آزمون طول عمر به دست آمده‌اند.

i	t_i	i	t_i	i	t_i
1	21/20	11	118/21	21	88/26
2	29/30	12	19/72	22	132/96
3	71/47	13	101/29	23	169/74
4	30/31	14	97/31	24	28/23
5	49/72	15	79/31	25	77/45
6	76/39	16	47/25	26	89/19
7	103/12	17	59/11	27	122/12
8	81/27	18	117/39	28	48/9.
9	93/20	19	108/2	29	73/38
10	111/21	20	71/19	30	95/46

الف) تابع قابلیت اعتماد $R(t)$ را بآورد کنید.

ب) یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای $R(t)$ تعیین کنید.

۵. داده‌های زیر زمان شکست مشاهده شده ۲۵ واحد از نوعی موتور را نشان می‌دهد.

• ۱۴۴، ۲/۴۱، ۳/۰۷، ۳/۰۸، ۳/۱۴، ۳/۲۰، ۳/۹۲، ۴/۲۹، ۴/۵۱، ۴/۹۸، ۵/۱۲، ۵/۰۹، ۵/۸۵، ۶/۰۱

آزمایش در زمان شکست پانزدهمین موتور خاتمه پیدا کرده است.

(الف) برآورده کیلن-سپیر تابع قابلیت اعتماد طول عمر موتور را به دست آورید.

ب) یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای (\hat{R}) پیدا کنید.

۶. داده‌های زیر را که از یک آزمون طول عمر به دست آمده‌اند در نظر بگیرید و با استفاده از داده‌ها نمودار تبدیل TTT را رسم کنید و مشخص نمایید که تابع نرخ خطر دارای چه شکلی

۱۰۷

۲۲۰ روش‌های استیباط ناپارامتری در قابلیت اعتماد

i	t_i								
۱	۶۳۵/۷	۱۱	۴۵۹/۷	۲۱	۳۳۵/۵	۳۱	۲۸۲/۰	۴۱	۱۷۱/۰
۲	۳۶۹/۱	۱۲	۴۵۹/۵	۲۲	۱۰۰/۸	۳۲	۱۷۳/۰	۴۲	۴۶۵/۰
۳	۳۱۲/۵	۱۳	۴۲۱/۰	۲۳	۴۵۳/۶	۳۳	۲۱۶/۲	۴۳	۲۵۴/۶
۴	۱۹۶/۱	۱۴	۳۰۶/۱	۲۴	۸۲/۹	۳۴	۲۰۴/۱	۴۴	۳۱۹/۸
۵	۷۲/۴	۱۵	۲۱۶/۳	۲۵	۳۵۶/۱	۳۵	۲۲۸/۲	۴۵	۲۸۵/۰
۶	۲۲/۲	۱۶	۱۸۰/۷	۲۶	۲۵۵/۰	۳۶	۵۲۹/۰	۴۶	۳۰۷/۳
۷	۳۰۲/۳	۱۷	۱۳۷/۷	۲۷	۳۰۲/۲	۳۷	۲۷۰/۲	۴۷	۳۱۸/۵
۸	۱۱۴/۴	۱۸	۱۵۹/۹	۲۸	۱۸۱/۶	۳۸	۱۱۷/۵	۴۸	۲۴۲/۸
۹	۶۸/۴	۱۹	۲۲۱/۴	۲۹	۹۳/۷	۳۹	۷۰/۳	۴۹	۴۵۸/۰
۱۰	۲۰۱/۰	۲۰	۲۰۳/۱	۳۰	۳۱۴/۶	۴۰	۹۳/۱	۵۰	۱۳۰/۹

۷. برای داده‌های تمرین ۶ فرض کنید، به دلیل اتمام آزمایش، تنها ۲۵ مشاهده اول را در دست داریم. نمودار تبدیل TTT را برای داده‌های سانسور شده جدید رسم کنید و در مورد رفتار تابع نرخ خطر قضاوت کنید.

نمودارهای احتمال

۱.۸ مقدمه

نمودارهای احتمال از ابزارهای مهم در تحلیل داده به ویژه تحلیل داده‌های طول عمر هستند. در این فصل نمودارهای احتمال را معرفی کرده و نحوه ساختن آنها و همچنین چگونگی تحلیل بر اساس آنها را ارائه می‌کنیم. این گونه نمودارها در عمل استفاده‌های متعددی دارند. یکی از کاربردهای آنها، بررسی کفايت یک مدل آماری است. بدین معنی که بر اساس داده‌هایی که از جامعه به دست می‌آوریم، نمودار احتمال را می‌توان برای بررسی این که آیا داده‌ها از یک مدل خاص آماری استخراج شده‌اند به کار برد. کاربرد دیگر این گونه نمودارها، پس از تعیین مدل، برآورد پارامترها و چندک‌های توزیع آماری است. از نقاط قوت نمودارهای احتمال می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

- (۱) ساده و سریع بودن در استفاده. در مقابل روش‌های دیگر استنباط آماری ممکن است دارای محاسبات پیچیده و استفاده از آنها مستلزم روش آماری نسبتاً بیشتری باشد.
- (۲) نمودارهای احتمال روشنی ساده برای بررسی کفايت یک توزیع، برآورد پارامترهای توزیع، چندک‌ها و دیگر مشخصه‌های جمعه مورد بررسی فراهم می‌کند.
- (۳) نمودارهای احتمال برای هر دو حالت داده‌های کامل و داده‌های سانسور شده به کار می‌روند.
- (۴) نمودارهای احتمال می‌توانند برای بررسی فرضیات روش‌های استنباط پارامتری قبل از به کار بردن چنین روش‌هایی مفید واقع شوند.

اما در کنار چنین نقاط قوتی دارای ضعف‌هایی نیز می‌باشند که از جمله می‌توان به ذهنی بودن آن‌ها اشاره کرد. بدین معنی که ممکن است دو فرد برداشت متفاوتی از یک نمودار احتمال داشته باشند. همچنین از برآوردهای به دست آمده از روش نمودار احتمال نمی‌توان فاصله اطمینان به دست آورد. در این فصل ابتدا در بخش ۲۸ نمودارهای احتمال را معرفی کرده و نحوه استفاده از آن‌ها را برای بررسی کفایت توزیع و برآورد پارامترهای توزیع مورد مطالعه قرار می‌دهیم. سپس روش ارائه شده را در توزیع‌های معروف در حالتی که داده‌ها کامل‌اند به کار خواهیم برد. در بخش ۳۸ کاغذهای احتمال را معرفی می‌کنیم و نحوه استفاده از آن‌ها را در حالتی که داده‌ها کامل هستند را تشریح می‌کنیم. سپس در بخش ۴۸ روش‌های ارائه شده در بخش‌های قبل را برای حالتی که داده‌ها سانسور شوند را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲.۸ نحوه ساختن نمودار احتمال

در فصل ۷ دیدیم که اگر F یک تابع توزیع احتمال باشد، آنگاه برآورد ناپارامتری آن بر اساس یک نمونه تصادفی به صورت زیر تعریف شد که به آن برآورد گر تجربی تابع توزیع می‌گویند.

$$\hat{F}(t) = \frac{\text{تعداد مشاهداتی که در نمونه کمتر یا مساوی } t \text{ هستند}}{n}$$

اگر t_1, t_2, \dots, t_n مقادیر مرتب شده نمونه باشند، آنگاه با توجه به این تعریف داریم،

$$F_n(t_i) = \frac{i}{n}$$

یعنی احتمال این که طول عمر کمتر یا مساوی t_i باشد با کمیت $\frac{i}{n}$ برآورد می‌شود (در نظریه احتمال ثابت می‌شود که هنگامیکه n به سمت بینهایت می‌کند آنگاه $\hat{F}_n(t)$ به سمت $F(t)$ میل می‌کند) بنابراین هر چه قدر حجم نمونه بیشتر باشد آنگاه $(\hat{F}_n(t))$ نزدیک خواهد شد. پس به طور تقریب می‌توان برای حجم نمونهای به اندازه کافی بزرگ نوشت،

$$F(t_i) \approx \hat{F}_n(t_i) = \frac{i}{n}, i = 1, 2, \dots, n.$$

از این رابطه می‌توان تقریب زیر را نوشت،

$$F^{-1}\left(\frac{i}{n}\right) \approx t_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

این تساوی تقریبی دارای یک پیام مهم است که اساس نمودارهای احتمال را تشکیل می‌دهد و آن پیام این است: اگر نمونه تصادفی از توزیع F استخراج شده باشد و t_n, \dots, t_i, t_1 را مقادیر مرتب شده نمونه در نظر بگیریم. آنگاه انتظار داریم که نقاط $\left(F^{-1}\left(\frac{i}{n}\right), t_i\right)$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، را روی صفحه مختصات رسم $F^{-1}\left(\frac{i}{n}\right)$ ، t_i را در یک خط راست قرار بگیرند که از مبدأ می‌گذرد و ضریب زاویه آن ۱ است. بنابراین، به راحتی به شیوه‌ای دست یافته‌ایم که با استفاده از آن می‌توان کفايت یک مدل را بررسی کرد. یک نمونه تصادفی از متغیر طول عمر مورد نظر اختیار کرده و مقادیر نمونه را مرتب می‌کنیم. فرض می‌کنیم F یک توزیع مفروض باشد که علاقه‌مندیم آزمون کنیم که آیا داده‌ها از آن استخراج شده‌اند. برای انجام این کار نقاط $\left(F^{-1}\left(\frac{i}{n}\right), t_i\right)$ را روی صفحه مختصات رسم می‌کنیم. اگر نقاط رسم شده حول یک خط راست باشند که ضریب زاویه آن ۱ و از مبدأ عبور می‌کند آنگاه می‌بذریم که داده از توزیع F آمده‌اند.

اکنون فرض کنید که متغیر تصادفی طول عمر t دارای توزیعی باشد که متعلق به خانواده مقیاس مکان است. یعنی تابع توزیع آن به صورت زیر باشد،

$$P(T < t) = F\left(\frac{t - \alpha}{\beta}\right)$$

که در آن α پارامتر مکان و β پارامتر مقیاس است. فرض کنید t مقداری است که به ازای آن،

$$0 < p = F\left(\frac{t - \alpha}{\beta}\right) < 1 \quad (1.8)$$

که در آن p مقداری است بین ۰ و ۱.

همانطور که در فصل‌های قبل دیدیم ریشه این معادله را در صورتی که تابع توزیع F پیوسته و اکید صعودی باشد چندک مرتبه p ام توزیع می‌گویند. اگر این ریشه را با t_p نمایش دهیم آنگاه از رابطه (۱.۸) داریم،

$$\frac{t_p - \alpha}{\beta} = F^{-1}(p)$$

و یا

$$t_p = \alpha + \beta F^{-1}(p)$$

اين نشان مي دهد که نمودار t_p در مقابل $F^{-1}(p)$ يك نمودار خطی است که ضریب زاویه آن β و (با توجه به این که $= 0$) عرض از مبدأ α است.
اگر F_n تابع توزیع تجربی متناظر با F باشد آنگاه می توان نوشت،

$$\frac{i}{n} = F_n(t_i) \approx F\left(\frac{t_i - \alpha}{\beta}\right)$$

و در نتیجه

$$t_i \approx \alpha + \beta F^{-1}\left(\frac{i}{n}\right)$$

لذا اگر t_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، مقادیر مرتب شده نمونه‌ای تصادفی از F باشند، نمودار t_i در مقابل $\frac{i}{n}$ يك نمودار خطی است که عرض از مبدأ آن α و ضریب زاویه آن β است.
اين نتیجه، يك نتیجه مهم است که نشان مي دهد که با داشتن يك نمونه تصادفی چگونه می توان اولاً كفایت يك مدل (متعلق به خانواده مکان-مقیاس) را بررسی کرد و ثانیاً در صورت پذیرش مدل چگونه می توان پارامترهای آن را برآورد نمود. بدین منظور مراحل زیر را مرتب کرده و برای يك توزیع مفروض F ، t_i در مقابل $\frac{i}{n}$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، رسم می کنیم.
اگر نمودار داده‌ها حول يك خط راست باشد می پذیریم که داده‌ها از F آمده‌اند و عرض از مبدأ خط برآورده برابر پارامتر α و ضریب زاویه آن برآورده برابر پارامتر β ارائه می دهد.
اين روش از برآورده پارامترها که به روش نمودار احتمال معروف است در اغلب نرم افزارهای آماری وجود دارد. روش کار نرم افزار بدین صورت است که هنگامیکه داده‌ها را وارد می کنیم، نرم افزار از روش کمترین مربعات (ضمیمه را بینید) بهترین خطی را که می توان به داده‌ها برآش داد تعیین و روی داده‌ها رسم می کند. در اینجا با نگاه به داده‌ها می توان بررسی کرد که آیا داده‌ها واقعاً حول خط برآش داده شده هستند یا خیر. اما برای بررسی بهتر، می توان از خروجی نرم افزار استفاده کرد. در خروجی نرم افزار در کنار نمودار احتمال رسم شده کمیتی ظاهر می شود که به آن مربع R می گویند. مربع R تابعی از مجموع مربعات فاصله بین نقاط و

خط برازش داده شده می‌باشد که مقدار آن در فاصله $[0, 1]$ است. هر چه قدر مقدار مربع R به ۱ نزدیک‌تر باشد نشان می‌دهد که نقاط رسم شده به خط برازش نزدیک‌ترند و مدلی که برازش داده‌ایم مناسب‌تر بوده است.

در اینجا لازم است به این نکته نیز اشاره کنیم که رسم نقاط روی صفحه مختصات با توجه به این $F^{-1}\left(\frac{n}{n}\right) = \infty$ با مشکل روپرور می‌شویم. برای پرهیز از این مشکل به جای استفاده از مقدار $\frac{i}{n}$ ، از مقدار $p_i = \frac{i}{n+1}$ استفاده می‌کنند. که به آن موقعیت نمودار می‌گویند. در متون قابلیت اعتماد، صورت‌های دیگری نیز برای موقعیت نمودار پیشنهاد می‌شود. یکی از متداول‌ترین آن‌ها به صورت $p_i = \frac{i-0/5}{n}$ است. در ادامه این بخش، ما موقعیت نمودار را به صورت $p_i = \frac{i}{n+1}$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، در نظر می‌گیریم.

فرض کنید مقادیر مرتب شده، مشاهدات یک نمونه تصادفی است که از توزیع $F\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right)$ گرفته شده است. برای رسم نمودار و برآورد پارامترهای توزیع‌های معروف آماری به صورت زیر عمل می‌کنیم.

نمودار احتمال توزیع نمایی

فرض کنید توزیع مورد بررسی نمایی باشد با تابع توزیع احتمال

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda(t-\theta)}, t > \theta, \theta, \lambda > 0.$$

مراحل تشکیل نمودار احتمال و برآورد پارامترهای توزیع احتمال به صورت زیر است

- ۱) نقاط t_i را در مقابل $E_i = -\ln\left(1 - \frac{i}{n+1}\right)$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، رسم می‌کنیم. اگر برازش مناسب باشد.
- ۲) λ و θ به صورت زیر برآورد می‌شوند.

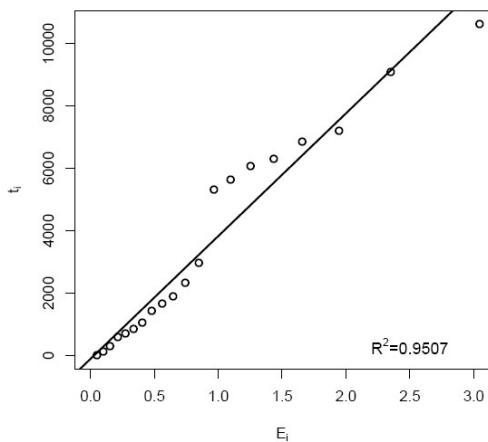
$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\text{ضریب زاویه}} \quad \text{عرض از مبدأ} = \hat{\theta}$$

مثال ۱.۸ فرض کنید ۲۰ مولد برق را در یک آزمون شتابنده وارد کردند. آزمون پس از شکست تمام مولدها خاتمه پیدا کرده و مشاهدات زیر بر حسب ساعت به دست آمده‌اند.

۷۱۱/۵، ۱۰۵۱، ۶۳۰۳/۹، ۱۸۸۳/۶، ۶۸۵۳/۷، ۶۰۵۴/۳، ۷۲۰۱/۹، ۷۲۷۹/۸، ۲۳۱۱/۱، ۵۲۹۶/۶، ۷/۵، ۱۲۱/۵، ۱۴۲۵/۵، ۲۹۵۱/۲، ۵۶۳۷/۹، ۱۶۵۷/۲، ۵۹۲/۱، ۱۰۶۰۹/۷، ۹۰۶۸/۵، ۸۴۸/۲

بررسی کنید که آیا توزیع نمایی برآش مناسبی برای دادهها است؟ در صورت مثبت بودن پارامترهای توزیع را برآورد کنید.

حل. در شکل ۱.۸ نمودار احتمال این مقادیر برای توزیع نمایی نماش داده شده است یعنی مقادیر مرتب شده t_i را در مقابل E_i ، $i=1, 2, \dots, n$ ، رسم می‌کنیم. از نمودار به نظر می‌رسد برآش توزیع نمایی مناسب است. خط کمترین مربعات که از داده‌ها می‌گذرد دارای عرض از مبدأ $-10^{3/4}$ - ضریب زاویه $3930/4$ است بنابراین برآورد λ و θ به ترتیب برابر با 0.000254 و 0 است.



شکل ۱.۸ نمودار احتمال توزیع نمایی برای داده‌های مولد برق

نمودار احتمال توزیع‌های وایل و مقدار خانی

فرض کنید توزیع طول عمر مورد بررسی وایل با تابع توزیع زیر باشد

$$F(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^\beta}, t > 0, \lambda, \beta > 0.$$

در این صورت

$$W_i = \ln \left(-\ln \left(1 - \frac{i}{n+1} \right) \right) \quad (1)$$

(2) برآورد پارامترهای λ و β با استفاده از معادله خط عبارتند از

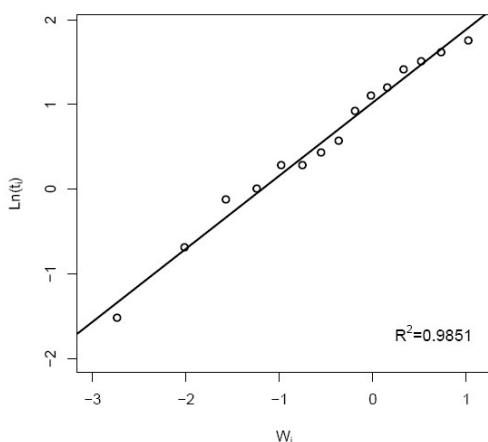
$$\lambda = e^{-\text{(عرض از مبدأ)}} \quad \text{و} \quad \hat{\beta} = \frac{1}{\text{(عرض از مبدأ)}}$$

مثال ۲.۸ فرض کنید مشاهدات زیر، زمان شکست (بر حسب سال) یک نوع قطعه هوایپما باشد که در یک آزمون طول عمر به دست آمده‌اند.

۰/۲۲، ۰/۵، ۱/۸۸، ۱/۳۲، ۱/۳۳، ۱/۵۴، ۱/۷۶، ۲/۵، ۳/۰، ۳/۳، ۴/۱، ۴/۵، ۵/۰۳، ۵/۷۷

آیا می‌توان پذیرفت که توزیع طول عمر قطعات وایل است؟ در صورت مثبت بودن پارامترهای توزیع را برآورد کنید.

حل. نمودار احتمال داده‌ها برای توزیع وایل در شکل ۲.۸ ارائه شده است. با توجه به اینکه نقاط حول خط برازش شده است و مقدار مریع R مقدار ۰/۹۸۶ است که به مقدار ۱ نزدیک است به نظر می‌رسد مدل وایل برای داده‌ها مدلی مناسب است. خط برازش داده شده دارای عرض از مبدأ $1/0.23$ و ضریب زاویه $0/862$ است. بنابراین برآورد پارامترهای λ و β به ترتیب $0/36$ و $1/16$ است.



شکل ۲.۸ نمودار احتمال توزیع وایل برای داده‌های قطعه هوایپما
اگر توزیع طول عمر توزیع مقدار غایبی با تابع توزیع زیر باشد،

$$F(t) = 1 - e^{-e^{\frac{(t-\mu)}{\sigma}}}, \quad -\infty < t < \infty$$

آنگاه جهت رسم نمودار احتمال و برآورد پارامترهای μ و σ مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

$$W_i = \ln\left(-\ln\left(1 - \frac{i}{n+1}\right)\right) \quad (1)$$

(۲) برآوردهای μ و σ به ترتیب عبارت از عرض از مبدأ و ضریب زاویه خط برازش داده شده خواهند بود.

نمودار احتمال توزیع‌های نرمال و لگ نرمال

فرض کنید توزیع مورد نظر نرمال $N(\mu, \sigma^2)$ باشد. در این حالت مراحل زیر را انجام دهید،
 (۱) t_i را در مقابل $Z_i = \Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، رسم کنید که در آن $\Phi(\cdot)$ تابع توزیع نرمال استاندارد است.

(۲) برآوردهای μ و σ به ترتیب برابر با عرض از مبدأ و ضریب زاویه خط برازش داده خواهند بود.

در صورتی که توزیع طول عمر لگ نرمال با توزیع

$$F(t) = \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)$$

باشد آنگاه مراحل رسم نمودار احتمال به صورت زیر است،

$$(1) \ln t_i \quad Z_i = \Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

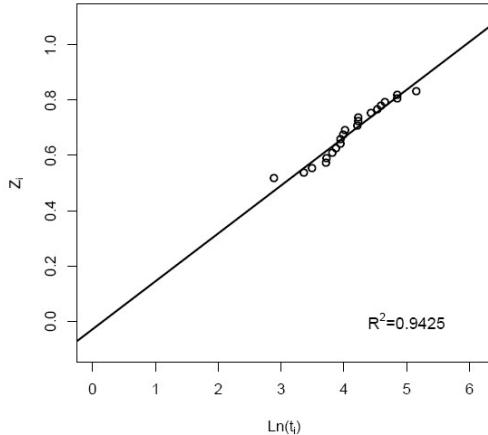
(۲) برآوردهای μ و σ به ترتیب برابر با عرض از مبدأ و ضریب زاویه خط برازش داده می‌باشد.

مثال ۳.۸ داده‌های زیر زمان شکست مرتب شده ۲۳ بلبرینگ (برحسب میلیون دور) را نشان می‌دهد که در یک آزمایش طول عمر به دست آمده‌اند.

۱۷/۸۸، ۲۸/۹۲، ۳۳/۰۰، ۴۱/۵۲، ۴۱/۱۲، ۴۵/۶۰، ۴۵/۴۰، ۵۱/۹۵، ۵۱/۸۴، ۵۴/۱۲، ۵۵/۵۶، ۱۷۳/۴۰، ۶۸/۶۴، ۶۸/۶۴، ۹۳/۱۲، ۹۸/۶۴، ۱۰۵/۱۲، ۱۲۷/۹۲، ۱۲۸/۰۴

آیا می‌توان پذیرفت که توزیع طول عمر بلبرینگ‌ها لگ نرمال است؟ در صورت مثبت بودن جواب پارامترهای توزیع را برآورد کنید.

حل. با رسم نقاط $(\ln t_i, Z_i)$ ، $i = 1, 2, \dots, 23$ ، شکل ۳.۸ به دست می‌آید. با توجه به قرار گرفتن نقاط حول خط برازش داده شده و مقدار مربع R می‌توان پذیرفت که توزیع طول عمر بلبرینگ‌ها لگ نرمال است. برآوردهای μ و σ به ترتیب برابر با عرض از مبدأ و ضریب زاویه خط برازش داده یعنی $0/۳۹۹$ و $5/۴۳۳$ می‌باشد.



شکل ۳.۸ نمودار احتمال توزیع لگ نرمال برای داده های طول عمر بلبرینگ

جدول ۱.۸ خلاصه مطالب ارائه شده در این بخش به همراه مختصات مورد نیاز برای رسم نمودار احتمال و برآوردهای پارامترهای چند توزیع مهم دیگر را دیگر را نشان می دهد که در آن فرض کردہ ایم α ضریب زاویه و b عرض از مبدأ خط برآش داده شده به داده ها می باشد.

۳.۸ برآوردهای پارامترها با استفاده از کاغذ احتمال

در بخش گذشته دیدیم که چگونه با داشتن n مشاهده می توانیم کفایت یک مدل آماری را بررسی کرده و پارامترهای آن را برآورد کنیم. در آنجا فرض بر این بود که با داشتن مشاهدات مرتب شده آنها را در مقابلی $F^{-1}\left(\frac{i}{n}\right)$ رسم می کردیم که در آن F توزیع مفروضی است که از قبل حدس زده ایم. معمولاً در انجام این کار نیاز به استفاده از یک نوع نرم افزار است. یک روش دیگر که در آن نیاز به نرم افزار نیست و می توان نمودار احتمال را رسم کرده، استفاده از کاغذ احتمال است. کاغذهای احتمال به طور وسیعی در کاربردهای مهندسی مورد استفاده قرار می گیرند. اینگونه کاغذهای توزیع های مختلف، با توجه به خصوصیات آنها، طراحی شده اند و از منابع مختلف در دسترس می باشند. در این گونه کاغذهای محور افقی متاظر با زمان است و محور عمودی متاظر باتابع توزیعی است که کاغذ بر اساس آن طراحی شده است. در ادامه نحوه استفاده آنها را با ارائه یک مثال تشریح می کنیم.

جدول ۱.۸ خلاصه چگونگی رسم نمودار احتمال برای توزیع‌های مختلف

توزيع	مختصات رسم نمودار	پارامتر	برآورد
$E(\lambda, \theta)$ نمایی	$\left(t_i, -\ln\left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \right)$	λ θ	$\frac{1}{a}$ b
$W(\lambda, \beta)$ وایل	$\left(\ln t_i, \ln\left(-\ln\left(1 - \frac{i}{n+1}\right)\right) \right)$	λ β	e^{-b} $\frac{1}{a}$
$Ex(\mu, \sigma)$ مقدار غایی	$\left(t_i, \ln\left(-\ln\left(1 - \frac{i}{n+1}\right)\right) \right)$	μ σ	b a
$N(\mu, \sigma^2)$ نرمال	$\left(t_i, \Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right) \right)$	μ σ	b a
$LN(\mu, \sigma)$ لگ نرمال	$\left(\ln t_i, \Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right) \right)$	μ σ	b a
$G(\alpha, \lambda)$ کاما (با فرض معلوم بودن α)	$\left(\ln t_i, \Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right) \right)$	λ	$\frac{1}{a}$
لجستیک (μ, σ)	$\left(t_i, \ln\left(\frac{i}{n+1-i}\right) \right)$	μ σ	a b
لگ لجستیک (μ, σ)	$\left(\ln t_i, \ln\left(\frac{i}{n+1-i}\right) \right)$	μ σ	a b

مثال ۴.۸ فرض کنید ۶ واحد از یک نوع قطعه را در زمان $t = ۰$ وارد آزمایش کرده و مشاهدات (برحسب ساعت) به صورت زیر به دست آمده‌اند.

۹۳، ۳۴، ۱۶، ۱۲۰، ۵۲، ۷۵

علاوه‌مندیم بررسی کنیم آیا این داده‌ها از توزیع وایل آمده‌اند یا خیر و اگر جواب مثبت است پارامترهای توزیع را برآورد کنیم.

حل. برای حل این مثال مراحل زیر را انجام می‌دهیم. ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و سپس رتبه-میانه‌ای هر یک از مشاهدات را محاسبه می‌کنیم. یک راه تخمین

رتبه-میانه‌ای استفاده از فرمول زیر است که در متون مختلف ارائه شده و بر حسب درصد بیان می‌شود.

$$MR\% = \frac{i - 0/3}{n - 0/4} \times 100$$

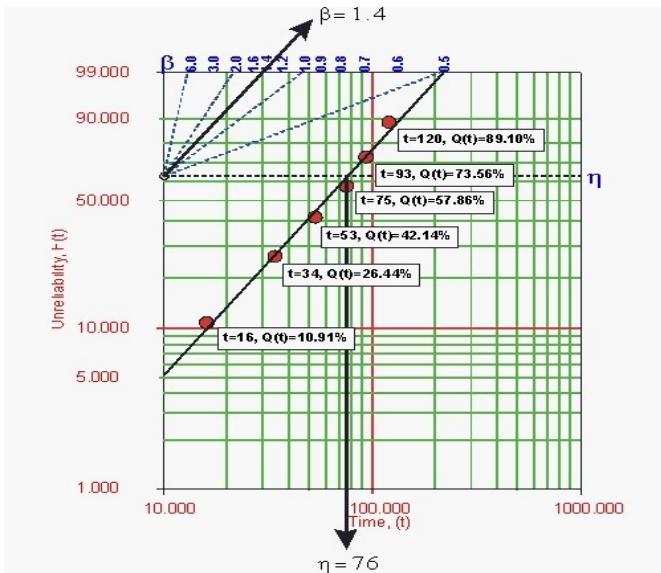
که در آن i رتبه مشاهدات مرتب شده و n مقدار مشاهدات است.

اکنون با توجه به داده‌های فوق، زمان‌های شکست مرتب شده و رتبه-میانه‌ای آن‌ها در جدول ۲.۷ ارائه شده است.

بر روی یک کاغذ احتمال واپل زوج داده‌های مشخص شده در جدول را رسم می‌کنیم که زمان شکست روی محور افقی و رتبه-میانه‌ای روی محور عمودی کاغذ معین می‌شوند. نتیجه حاصل در شکل ۴.۸ آمده است. اگر نقاط تقریباً روی یک خط راست قرار بگیرند، می‌باید بین که داده‌ها از توزیع واپل آمده است. برای برآورد پارامترهای توزیع به صورت زیر عمل می‌کنیم.

جدول ۲.۸ محاسبه رتبه-میانه‌ای داده‌های آزمایش قطعه

زمان شکست (ساعت)	رتبه-میانه‌ای %
۱۶	۱۰/۹۱
۳۴	۲۶/۴۴
۵۳	۴۲/۱۴
۷۵	۵۷/۸۶
۹۳	۷۳/۵۶
۱۲۰	۸۹/۱



شکل ۴.۸ کاغذ احتمال توزیع وایل

توجه کنید که برای توزیع وایل با تابع توزیع

$$F(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^\beta}, t > 0, \lambda, \beta > 0.$$

$$\text{در نقطه } \eta \text{ داریم} \quad \frac{1}{\lambda} = \eta$$

$$F(\eta) = 1 - e^{-(\frac{\lambda}{\lambda})^\beta}$$

$$= 1 - e^{-1}$$

$$= 0.63$$

در کاغذ احتمال این نقطه نقش مهمی دارد. برای برآورد پارامتر β ، از نقطه $F(\eta) = 0.63$ روی محور عمودی خطی به موازات خط برآش داده شده به داده رسم می‌کنیم تا محور افقی در بالای کاغذ را قطع کند. محل برخورد با خط افقی که روی آن مقداری برای β مدرج شده است، مقدار برآورد $\hat{\beta}$ را به دست می‌دهد. در اینجا با توجه به نمودار ۴.۸ مقدار $\hat{\beta}$ را برابر با $1/4$ برآورد می‌کنیم. برای برآورد λ از نقطه $F(\eta) = 0.63$ خطی به موازات محور افقی رسم می‌کنیم تا خط برآش داده شده را قطع کند. سپس از محل تقاطع این دو خط خطی بر محور افقی عمود می‌کنیم. محل برخورد این خط با خط افقی برآورد $\lambda = \eta = 76$ را

ارائه می‌دهد که با معکوس کردن آن λ به دست می‌آید. در این مثال محور افقی در $\eta = 76$ قطع می‌شود. بنابراین برآورد λ برابر خواهد شد با

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{76} = 0.0131$$

از کاغذ احتمال می‌توانیم جهت محاسبه قابلیت اعتماد در هر نقطه از زمان استفاده کنیم. برای مثال برای محاسبه قابلیت اعتماد در نقطه $t = 15$ ، در محور افقی از این نقطه خطی موازی محور عمودی رسم می‌کنیم تا محور عمودی را قطع کند. نقطه حاصل ($F(15)$) را نشان می‌دهد که در اینجا برابر است با 0.98 . بنابراین قابلیت اعتماد در $t = 15$ مساوی خواهد شد با

$$R(15) = 1 - 0.98 \\ = 0.02$$

۴.۸ نمودار احتمال برای داده‌های سانسور شده

روش رسم نمودارهای احتمال برای داده‌های سانسور شده از راست برای مثال داده‌های سانسور شده نوع I و II کاملاً مشابه داده‌های کامل عمل می‌کنیم. در این حالت نمودار احتمال را برای داده‌هایی که زمان شکست آنها داده شده است رسم می‌کنیم. یعنی $t_{(i)}$ را در مقابل $(\frac{i}{n})^{F^{-1}}$ رسم می‌کنیم که در آن $i = 1, 2, \dots, r$ و r تعداد شکست‌ها را نشان می‌دهد و n نیز تعداد کل مشاهدات است. برای مثال اگر $n = 20$ واحد در آزمایش قرار گیرند و زمان شکست ۱۵ واحد اول را مشاهده کنیم آنگاه موقعیت‌های نمودار به صورت جدول ۳.۸ خواهد بود.

جدول ۳.۸ موقعیت‌های نمودار در حالت سانسور از سمت راست

i	۱	۲	...	۱۴	۱۵	۱۶	...	۲۰
$t_{(i)}$	t_1	t_2	...	t_{14}	t_{15}	-	...	-
$\frac{i}{n+1}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{2}{22}$...	$\frac{14}{22}$	$\frac{15}{22}$	-	...	-

در اینجا فقط ۱۵ نقطه $(t_{(i)}, F^{-1}(\frac{i}{n+1}))$ ، $i = 1, 2, \dots, 15$ را رسم می‌کنیم. اگر داده‌ها از چپ (یا هم از چپ و هم از راست) سانسور شوند نیز روش رسم نمودار مشابه است. یعنی فقط

الف) یک نمودار احتمال واپل برای این داده‌ها رسم کنید.

ب) یک نمودار احتمال نمایی برای این داده‌ها رسم کنید.

ج) کدام مدل از مدل‌های الف و ب مناسب‌تر است.

د) میانگین، میانه و انحراف استاندارد توزیع برازش داده شده را به دست آورید.

۲. ۱۲ زنگ هشدار یک نوع ساعت را وارد آزمایش کرده‌ایم. آزمایش به صورت شتابنده انجام و نتایج زیر بر حسب ماه به دست آمده‌اند.

۳۰/۳۳، ۵/۳۳، ۳۶، ۴۲، ۵۵، ۵۵/۵، ۷۶، ۱۰۶، ۱۰۷/۵

الف) آیا توزیع واپل برای این داده‌ها کفایت می‌کند؟

ب) پارامترهای شکل و مقیاس توزیع را برآورد کنید.

ج) میانگین، میانه و واریانس توزیع را برآورد کنید.

۳. زمان از کار افتادگی ۲ نوع عایق الکتریکی در ۳ درجه حرارت متفاوت در جدول ۵.۸ آرائے شده است.

الف) در دو کاغذ احتمال مجزا برای هر یک عایق نمودار داده‌ها را در درجه حرارت‌های مختلف رسم کنید.

ب) پارامترهای توزیع را در هر حالت برآورد کنید.

ج) آیا دو عایق اختلاف معناداری با هم دارند.

د) دو نوع عایق را از نقطه نظر میانه در دمای 200° با هم مقایسه کنید.

عایق ۱			عایق ۲		
200°	225°	250°	200°	225°	250°
۱۱۷۶	۶۲۴	۲۰۴	۲۵۲۰	۸۱۶	۳۰۰
۱۵۱۲	۶۲۴	۲۲۸	۲۸۵۶	۹۱۲	۳۲۴
۱۵۱۲	۶۲۴	۲۵۲	۳۱۹۲	۱۲۹۶	۳۷۲
۱۵۱۲	۸۱۶	۴۰۰	۳۱۹۲	۱۳۹۲	۳۷۲
۳۵۲۸	۱۲۹۶	۳۲۴	۳۵۲۸	۱۴۸۸	۴۴۴

۴. داده‌های زیر از یک آزمون طول عمر به دست آمده‌اند که زمان شکست یک نوع قطعه را بر حسب ماه نشان می‌دهند.

۰/۷۴، ۱/۲۱، ۰/۲۲، ۰/۳۷، ۱/۲۸، ۰/۷۳، ۰/۹۹، ۰/۶۷، ۰/۷۱، ۰/۳۳

الف) آیا می‌توان پذیرفت که داده‌ها از توزیع واپل آمده‌اند؟

ب) میانگین و واریانس توزیع طول عمر را براورد کنید.

۵. داده‌های زیر مشاهدات یک آزمایش طول عمر است که در آن مقادیر با علامت * سانسور شده‌اند.

۵۵۱۵ *، ۱۷۳۲، ۲۷۳۷، ۳۵۴۱، ۵۱۹۳، ۴۸۷۹، ۳۸۹۷، ۵۵۰۷، ۵۵۱۵ *، ۵۵۱۵ *، ۵۵۱۵ *

الف) آیا داده‌ها از توزیع لگ نرمال آمده‌اند؟

ب) میانگین و واریانس توزیع را براورد کنید.

۶. داده‌های زیر زمان شکست (برحسب روز) یک نوع قطعه الکتریکی را نشان می‌دهد. داده‌ها پس از روز ۴۰۰ کار کرد سانسور شده‌اند.

۴۰۰ *، ۳۵۰، ۲۴۹، ۴۰۰ *، ۳۰۳، ۱۵۷، ۱۷۶، ۹۳، ۱۷۲

الف) یک نمودار احتمال وایبل برای داده‌ها رسم کنید.

ب) میانگین و واریانس داده‌ها را براورد کنید.

ج) جقدر احتمال دارد که این قطعه طول عمر بیشتر از ۲۵۰ داشته باشد؟

۷. داده‌های زیر زمان از کار افتادگی ۱۳ واحد که از یک محصول الکتریکی که در آزمایش قرار گرفته‌اند (برحسب ۱۰۰۰ دوره چرخش) نشان می‌دهد. آزمایش در زمان دهمین شکست خاتمه پیدا کرده است.

۳/۰۰، ۰/۵۰، ۰/۲۲، ۱/۰۰، ۰/۸۸، ۰/۳۳، ۱/۵۴، ۱/۳۳، ۱/۰۰، ۰/۵۰

الف) آیا می‌توان پذیرفت که داده‌ها از توزیع وایبل آمده‌اند؟

ب) پارامترهای توزیع را براورد کنید.

ج) قابلیت اعتماد محصول را در زمان ۰/۷۵ محاسبه کنید.

۸. جدول زیر داده‌های مربوط به زمان شکست (برحسب میلیون در چرخه) یک نوع بلبرینگ را نشان می‌دهد.

۱۷/۸۸	۲۸/۹۲	۳۳/۰۰	۴۱/۵۲	۴۲/۱۲	۴۵/۶
۴۸/۴۰	۵۱/۸۴	۵۱/۹۶	۵۴/۱۲	۵۵/۵۶	۶۷/۸۰
۶۸/۶۴	۶۸/۶۴	۶۸/۸۸	۸۴/۱۲	۹۳/۱۲	۹۸/۶۴
۱۰۵/۱۳	۱۰۵/۸۴	۱۲۷/۹۲	۱۲۸/۰۴	۱۷۳/۴	

از کاغذ احتمال استفاده کرده:

الف) یک نمودار احتمال لگ نرمال برای داده‌ها رسم کنید.

- ب) یک نمودار احتمال واپل برای داده‌ها رسم کنید.
- ج) کدام مدل را ترجیح می‌دهید؟ در این مورد توضیح دهید.
۹. یک نمونه ۱۰۰ تایی از نوعی آلیاژ تیتانیوم در یک آزمون طول عمر قرار می‌گیرد. آزمون تا ۱۰۰۰۰۰ چرخه انجام گرفته و زمان‌های شکست زیر (برحسب ۱۰۰ چرخه) به دست آمده‌اند.
- ۱۸، ۳۲، ۳۹، ۵۹، ۶۸، ۷۷، ۷۸، ۹۳
- ۹۱ واحد باقیمانده آزمایش را بدون شکست به اتمام رسانده‌اند.
- الف) آیا توزیع واپل، توزیع مناسبی برای داده‌ها است؟
- ب) پارامترهای توزیع را برآورد کنید.
۱۰. صحت درستی "مختصات رسم نمودار" ارائه شده در جدول ۸ را بررسی کنید.
۱۱. از یک برنامه کامپیوتروی استفاده کنید و نمونه‌ای به حجم $n = 30$ از توزیع $N(10, 2)$ استخراج کنید.
- الف) یک نمودار احتمال نرمال برای داده‌ها رسم کنید.
- ب) میانگین واریانس توزیع را با استفاده از نمودار برآورد کنید.
۱۲. داده‌های زیر زمان شکست ۲۰ موتور یخچال (برحسب ساعت) نشان می‌دهد که از یک آزمون شتابنده به دست آمده است.
- الف) یک نمودار احتمال واپل برای این داده‌ها بسازید.
- ب) میانگین واریانس توزیع را برآورد کنید.
- ج) احتمال آن را برآورد کنید که طول عمر موتورها کمتر از ۳۰۰ باشد.
۱۳. نشان دهید که میانگین \bar{z} امین آماره ترتیبی از یک نمونه تصادفی به حجم n از توزیع i یکنواخت در فاصله $(0, 1)$ برابر است با $\frac{i}{n+1}$. از این نتیجه استفاده کنید و نشان دهید که اگر آماره ترتیبی \bar{z}_m در یک نمونه تصادفی با توزیع پیوسته F باشد آنگاه

$$E(F(Y_{(i)})) = \frac{i}{n+1}$$

(یکی دیگر از دلایل استفاده از $\frac{i}{n+1}$ به جای $\frac{i}{n}$ در نمودارهای احتمال این واقعیت است).

آزمون‌های طول عمر تسريع یافته

۱.۹ مقدمه

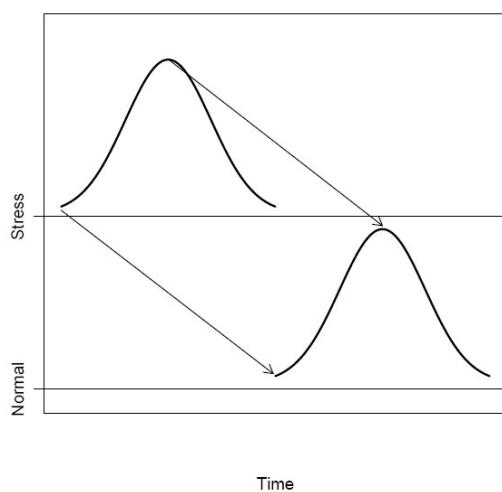
همانطور که در مباحث گذشته ملاحظه شد، از نقطه نظر آماری یکی از وجوه تمایز مطالعات طول عمر با سایر بخش‌ها، به دست آوردن مشاهدات است. امروزه با وجود محصولات با قابلیت اعتماد بالا به دست آوردن تعداد معقولی مشاهده جهت انجام استنباط آماری معمولاً کار ساده‌ای نیست. یکی از روش‌های متداول در آزمون‌های طول عمر، برای به دست آوردن مشاهدات، یه کار بردن آن‌ها در شرایطی سخت‌تر از شرایط نرمال است. این روش‌ها را روش‌های آزمون تسريع یافته (*AL*) می‌گویند. در آزمون‌های *AL* مشاهدات خیلی سریع‌تر از حالتی که واحدها در شرایط نرمال مورد استفاده قرار می‌گیرند به دست می‌آیند. برای مثال، یک اتوی الکتریکی را در نظر بگیرید که در شرایط نرمال به طور روزانه به مدت نیم ساعت مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این حالت، ممکن است ماهها و سال‌ها زمان نیاز باشد که اتو از کار بیافتد و لذا برای داشتن یک زمان شکست باید مدت‌ها منتظر ماند. در آزمون‌های *AL* زمان شکست اتو را به نوعی شبیه سازی می‌کنند. بدین معنی که اتو را به دفعات زیاد در طول روز مورد استفاده قرار داده و با شرط این که در هر مرحله استفاده شرایط یکسان با قبل باشد باعث از کار افتادن آن در زمانی سریع‌تر از زمان نرمال می‌شوند. یکی دیگر از روش‌های شبیه سازی زمان شکست محصولات برای به دست آوردن سریع‌تر مشاهدات، استفاده آن‌ها در شرایط سخت‌تر است. بدین معنی که اگر برای مثال اتو در شرایط معمولی با ولتاژ ۲۲۰ کار

می‌کند، آن را در ولتاژ بالاتر مورد استفاده قرار داده و باعث شکست آن در زمانی زودتر از زمان نرمال می‌شوند.

در این فصل مدل‌های مورد استفاده در آزمون AL را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

مدل‌های AL

مفهوم آزمون‌های AL به طور شهودی یک مفهوم ساده است و آن به دست آوردن مشاهدت سریع‌تر از حالت استفاده در شرایط نرمال است. اما باید تأکید کنیم مکانیزم شکست واحدها در شرایط غیر نرمال باید کاملاً مشابه با مکانیزم شکست در شرایط نرمال باشد. تنها تفاوت این است که آزمایش طول عمر سریع‌تر انجام می‌شود. این امر که زمان شکست سریع‌تر اتفاق می‌افتد در واقع نوعی انتقال مقیاس زمان است. به عبارت دیگر اگر فرض کنیم زمان شکست واحد مورد آزمایش در شرایط نرمال t_N است و زمان شکست آن در شرایط با استرس بیشتر t_S است آنگاه تابع تبدیلی وجود دارد که t_N را به t_S تبدیل می‌کند. به شکل ۱.۹ توجه کنید.



شکل ۱.۹ توزیع طول عمر در شرایط نرمال و استرس

بنابراین اگر توزیع طول عمر را در شرایط با استرس بالا بدانیم با استفاده از تبدیل موجود می‌توانیم توزیع طول عمر را در شرایط نرمال به دست آوریم. این امر باعث می‌شود که اگر برآورد پارامترهای توزیع را در شرایط با استرس بالا داشته باشیم بتوانیم با تبدیل مربوطه برآورد

پارامترها را در شرایط نرمال به دست آوریم. در این بخش ساده‌ترین نوع تبدیل که تبدیل خطی است مورد نظر قرار داده و بررسی می‌کنیم که برای توزیع‌های مختلف رابطه بین کمیت‌های مختلف و برآوردهای پارامترها در شرایط نرمال و شرایط با استرس غیر نرمال چگونه است. قبل از آن تعریف دقیق‌تر تبدیل خطی را بیان می‌کنیم. اگر زمان شکست واحد در هر لحظه از زمان در شرایط نرمال ضریبی (ثابت) از زمان شکست واحد در شرایط غیر نرمال باشد گوییم تبدیل خطی است. به عبارت دیگر در تبدیل خطی داریم،

$$t_N = a \times t_s$$

که در آن a یک ضریب ثابت است و به آن ضریب فاكتور تسریع یافته می‌گویند. فرض کنید F_N ، f_N و h_N به ترتیب تابع توزیع، تابع چگالی احتمال و تابع نرخ خطر T_N (زمان شکست در شرایط معمولی) و F_S ، f_S و h_S به ترتیب تابع توزیع، تابع چگالی احتمال و تابع نرخ خطر T_S (زمان شکست در شرایط غیر نرمال) باشند. با توجه به رابطه خطی $T_N = a \times T_S$ می‌توان به این کمیت‌ها را تعیین کرد برای مثال

$$\begin{aligned} F_N(t) &= P(T_N < t) \\ &= P(aT_S < t) \\ &= P(T_S < \frac{t}{a}) \quad a > 0 \\ &= F_S\left(\frac{t}{a}\right) \end{aligned}$$

جدول ۱.۹ به طور خلاصه روابط بین توابع فوق را ارائه می‌کند.

جدول ۱.۹ روابط بین توابع در شرایط نرمال و استرس

$T_N = a \times T_S$	۱- زمان شکست
$F_N(t) = F_S\left(\frac{t}{a}\right)$	۲- تابع توزیع
$f_N(t) = \frac{1}{a} f_S\left(\frac{t}{a}\right)$	۳- تابع چگالی احتمال
$h_N(t) = \frac{1}{a} h_S\left(\frac{t}{a}\right)$	۴- تابع نرخ خطر

نتایج جدول ۱.۷ بیان می‌کند که رابطه ساختاری بین توابع توزیع، توابع چگالی و توابع نرخ خطر در شرایط نرمال و غیر نرمال واحدهای مورد آزمایش چگونه این روابط کاملاً کلی هستند و به نوع توزیع مورد بررسی بستگی ندارند. در ادامه بررسی می‌کنیم که در حالت خاص هنگامی که توزیع مورد استفاده در شرایط با استرس بالا یکی از توزیع‌های معروف نمایی، واپل یا لگ نرمال است نتایج جدول ۱.۷ به چه صورت خواهد بود.

تسربیع در توزیع نمایی

فرض کنید تابع توزیع $F_S(t)$ نمایی باشد. یعنی

$$F_S(t) = 1 - e^{-\lambda_S t}, \quad t > 0.$$

کد در آن λ_S تابع نرخ خطر در محیط با استرس بالا است. آنگاه

$$\begin{aligned} F_N(t) &= F_S\left(\frac{t}{a}\right) = 1 - e^{-\lambda_S \frac{t}{a}} \\ &= 1 - e^{-\left(\frac{\lambda_S}{a}\right)t} \end{aligned}$$

یعنی توزیع $F_N(t)$ نیز نمایی با نرخ خطر $\lambda_N = \lambda_S/a$ است. بنابراین ملاحظه می‌کنیم که در آزمون *AL* اگر تبدیل زمان شکست خطی باشد و توزیع طول عمر در شرایط با استرس نمایی باشد توزیع طول عمر در شرایط نرمال نیز نمایی است و بالعکس. واقعیت مهم دیگر این است که اگر تبدیل خطی با فاکتور تسریع یافته a باشد، نرخ شکست نیز خطی با فاکتور تسریع یافته a خواهد بود. باید توجه داشت که این واقعیت که نرخ شکست در اینجا خطی می‌شود، ممکن است در بسیاری از حالات برقرار نباشد. به عبارت دیگر در آزمون‌های طول عمر با تبدیل خطی، لزوماً رابطه بین نرخ شکست در شرایط نرمال و شرایط با استرس خطی نیست.

مثال ۱.۹ یک قطعه الکتریکی در دمای 130° (در آزمایشگاه) دارای توزیع نمایی با میانگین عمر 5000 ساعت است. دمای نرمال برای استفاده چنین قطعه‌ای 25° است. اگر فرض کنیم فاکتور تسریع بین دو شرایط آزمایشگاه و نرمال 40 است. الف) نرخ خطر قطعه در دمای نرمال چقدر است؟ ب) قابلیت اعتماد قطعه در زمان 30000 ساعت در دمای نرمال چقدر است؟

حل. الف. اگر λ_S مقدار نرخ خطر در دمای 130° باشد آنگاه،

$$\begin{aligned} \lambda_S &= \frac{1}{500} \\ &= 0.002 \end{aligned}$$

با توجه به این که $\alpha = 40$ مقدار نرخ خطر در دمای نرمال 25° برابر است با

$$\begin{aligned}\lambda_N &= \frac{\lambda_S}{\alpha} = \frac{0.002}{40} \\ &= 5 \times 10^{-5}\end{aligned}$$

ب. بنابر (الف) تابع قابلیت اعتماد برابر است با

$$R_N(t) = e^{-(5 \times 10^{-5})t}$$

ولذا در زمان $t = 30000$ برابر است با

$$\begin{aligned}R_N(30000) &= e^{-(5 \times 10^{-5})(30000)} \\ &= 0.223\end{aligned}$$

تسريع در توزيع واييل

اکنون فرض کنید تابع توزيع $F_S(t)$ ، واييل (λ_S, β_S) باشد. یعنی تابع توزيع طول عمر در محیط با استرس بالا به صورت زیر باشد

$$F_S(t) = 1 - e^{-(\lambda_S t)^{\beta_S}}$$

که در آن λ_S پارامتر مقیاس و β_S پارامتر شکل است. در این صورت، اگر تبدیل تسريع کننده خطر باشد، تابع توزيع در شرایط نرمال برابر است با

$$\begin{aligned}F_N(t) &= F_S\left(\frac{t}{a}\right) \\ &= 1 - e^{-\left(\frac{\lambda_S t}{a}\right)^{\beta_S}} \\ &= 1 - e^{-(\lambda_N t)^{\beta_N}}\end{aligned}$$

$$\text{که در آن } \beta_S = \beta_N = \beta \text{ و } \lambda_N = \frac{\lambda_S}{a}.$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که اگر توزيع طول عمر در شرایط طول عمر تسريع یافته واييل باشد آنگاه توزيع طول عمر در شرایط نرمال نیز واييل است. به راحتی می‌توان ملاحظه کرد که اگر واحد تحت بررسی با توزيع واييل در استرس‌های متفاوت قرار گیرد و تبدیل تسريع کننده خطي باشد آنگاه در هر مرحله از استرس توزيع طول عمر واييل باقی می‌ماند و تنها تغییراتی که ممکن است رخ دهد در پارامتر توزيع است. اما چه تغییراتی در پارامترهای توزيع اتفاق می‌افتد؟

با توجه به نتایج فوق ملاحظه می‌کنیم که پارامتر مقیاس در محیط غیر نرمال برابر است با پارامتر مقیاس در شرایط نرمال تقسیم بر فاکتور تسریع. اما نکته جالب توجه این است که پارامتر شکل توزیع در هر شرایطی یکسان است و دچار تغییر نمی‌شود. این نتیجه می‌تواند اهمیت زیادی در بحث آزمون‌های تسریع یافته داشته باشد. همانطور که در فصل ۸ دیدیم در نمودار احتمال برای توزیع وایل، برآورد شکل توزیع وایل برابر با معکوس ضرب زاویه خط برآش داده شده به داده‌ها است. بنابراین اگر رابطه بین زمان‌های شکست در شرایط با استرس و نرمال خطی باشد، انتظار داریم که تحت توزیع وایل نمودار احتمال در شرایط استرس مختلف خط‌های موازی باشند. اگر چنین نباشد، دو حالت ممکن است اتفاق افتد: یکی اینکه رابطه خطی درست انتخاب نشده است و احتمالاً رابطه غیرخطی بین زمان‌های شکست تحت شرایط تسریع یافته و شرایط نرمال وجود دارد و دیگر این که ممکن است مدل وایل انتخاب مناسبی برای داده‌ها نبوده است.

اگر $h_N(t)$ و $h_S(t)$ به ترتیب نشان‌دهنده تابع نرخ خطر تحت شرایط غیر نرمال و نرمال باشند آنگاه به راحتی ملاحظه می‌شود که

$$\begin{aligned} h_S(t) &= \beta \lambda_N (\lambda_N t)^{\beta-1} \\ &= \beta \frac{\lambda_S}{a} \left(\frac{\lambda_S t}{a} \right)^{\beta-1} \\ &= \beta \frac{\lambda_S^\beta t^{\beta-1}}{a^\beta} \\ &= \frac{h_N(t)}{a^\beta} \end{aligned}$$

در اینجا نیز مشابه توزیع نمایی تغییر در تابع خطر خطی است، اما باید توجه داشت که ضرب

خط در این حالت برابر است با $\frac{1}{a^\beta}$.

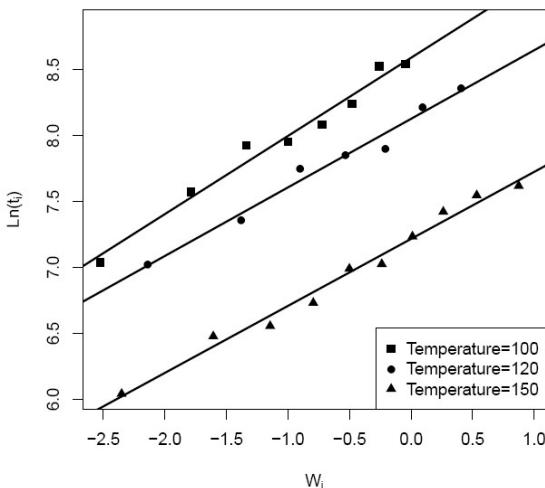
مثال ۲.۹ جهت برآورد قابلیت اعتماد نوعی قطعه الکتریکی که در دمای معمولی 35° کار می‌کند، ۳ گروه از آن‌ها را در دمای 100° ، 120° و 150° سانتیگراد قرار می‌دهیم. ۱۲ واحد در دمای 100° واحد در دمای 120° و ۱۰ واحد در دمای 150° قرار می‌گیرند. آزمایش به صورت زیر انجام می‌گیرد. زمان شکست واحدهایی که در دمای 150° قرار می‌گیرند. آزمایش به صورت زیر انجام می‌گیرد. زمان شکست واحدهایی که در دمای 150° قرار می‌گیرند را مشاهده می‌کنیم و واحدهایی که در دمای 100° و 120° قرار می‌گیرند را به ترتیب در

زمان‌های ۵۵۰۰ ساعت و ۴۵۰۰ ساعت سانسور می‌کیم. نتایج آزمایش در جدول ۲.۹ ارائه شده است.

جدول ۲.۹ زمان شکست قطعات آزمایش شده

گروه سوم (دما 100°)	گروه سوم (دما 120°)	گروه سوم (دما 150°)
۱۱۳۸	۱۱۲۱	۴۲۰
۱۹۴۴	۱۵۷۲	۶۵۰
۲۷۶۴	۲۳۲۹	۷۰۳
۲۸۴۶	۲۵۷۳	۸۳۸
۳۲۴۶	۲۷۰۲	۱۰۸۶
۳۸۰۳	۳۷۰۲	۱۱۲۵
۵۰۴۶	۴۲۷۷	۱۳۷۸
۵۱۳۹	۴۵۰۰	۱۶۷۳
۵۵۰۰		۱۸۹۶
۵۵۰۰		۲۰۳۷
۵۵۰۰		

مهندسين طراح قطعات از تجربیات قبل معتقدند که توزیع طول عمر قطعات در سطوح دمای مختلف واپیل است. آیا می‌توان ادعای آنها را پذیرفت؟ حل. برای حل این مثال می‌توان به یکی از دو طریق زیر عمل کرد. یکی این که داده‌ها روی کاغذ احتمال واپیل رسم کرد. دیگر این که با استفاده از نرم افزار مقادیر زمان شکست t_i را در مقابل $(\frac{i}{n+1})^{F^{-1}}$ ، که در آن F تابع توزیع واپیل است رسم کنیم. در اینجا از شیوه دوم استفاده و خط کمترین مربعات را روی زوج نقاط $\left(t_i, (\frac{i}{n+1})^{F^{-1}}\right)$ ، $i=1,2,\dots,n$ ، رسم می‌کنیم. نمودار احتمال متناظر با این داده‌ها در شکل ۲.۹ نمایش داده شده است.



شکل ۲.۹ نمودار احتمال داده‌های زمان شکست قطعات آزمایش شده

آن چنان که از نمودار مشخص است، توزیع وایل توزیع مناسبی برای هر سه گروه از داده‌هاست و این یعنی توزیع طول عمر قطعات، با توجه به این که خطوط به طور تقریب موازی هستند، دارای توزیع وایل با پارامتر شکل تقریباً یکسان‌اند و لذا تحت ۳ دمای (استرس) متفاوت رابطه بین طول عمرها AL خطی است.
با استفاده از روابط موجود (که در فصل ارائه شد) برآورد پارامترهای هر یک از سه توزیع وایل به صورت زیر است.

گروه سوم (دما 120°)		گروه سوم (دما 150°)	
پارامتر شکل $\hat{\lambda}_1$	پارامتر مقیاس $\hat{\beta}_1$	پارامتر شکل $\hat{\lambda}_2$	پارامتر مقیاس $\hat{\beta}_2$
$1 / 85 \times 10^{-4}$	۲/۰۲	$3 / 04 \times 10^{-4}$	$2 / 43$
			$7 / 52 \times 10^{-4}$
			۲/۴۱

از مقادیر جدول نیز نتیجه می‌گیریم که پارامتر شکل در هر سه توزیع تقریباً با هم مساوی هستند. اکنون با توجه به این که رابطه AL خطی متقاعد کننده است می‌توانیم فاکتور تسریع را در

رده‌های مختلف محاسبه کنیم، برای به دست آوردن فاکتور تسریع کافی است از رابطه زیر استفاده کنیم.

$$a = \frac{t_p}{t'_p}$$

که در آن t_p و t'_p به ترتیب صدک‌های p ام تحت استرس S و S' هستند. معمولاً p برابر با $0/5$ یا $0/623$ انتخاب می‌شود. اگر $p = 0/5$ انتخاب شود آنگاه با توجه به این که پارامترهای β در هر سطح تقریباً مساوی است، برای محاسبه a کافی است از حاصل تقسیم پارامترهای مقیاس بر هم در هر مرحله از استرس استفاده کنیم. اگر چنین کنیم به دست می‌آوریم

فاکتور تسریع از محیط 100° سانتیگراد به محیط دمای 120° سانتیگراد مساوی است با

$$a = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1/64$$

فاکتور تسریع از محیط 120° سانتیگراد به محیط دمای 150° سانتیگراد مساوی است با

$$a = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 2/47$$

فاکتور تسریع از محیط 100° سانتیگراد به محیط دمای 120° سانتیگراد مساوی است با

$$a = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 4/0.6$$

بنابراین، به عنوان مثال، مقدار $1/64$ به عبارت نه چندان دقیق بیان می‌کند که اگر طول عمر قطعه در محیط با دمای 120° ساعت باشد آنگاه طول عمر آن در محیط 100° تقریباً مساوی با $16/5$ ساعت است.

در مثال فوق اگر پارامترها را به روش ML برآورد کنیم، آنگاه با توجه به این که روش ML دقیق‌تر از روش برآورد با نمودار احتمال است، مقادیر فاکتور تسریع را در هر مرحله می‌توان با صحت بیشتری تخمین زد. انجام این کار را به عنوان تمرین به دانشجویان واگذار می‌کنیم.

باید به این نکته اشاره کرد که با توجه به این که در آزمون‌های طول عمر زمان شکست واحد در محیط نرمال را نداریم، و تنها ممکن است زمان شکست برای یک (یا چند) حالت تسریع شده از آزمون‌های AL در دسترس باشد. فاکتور تسریع مدل‌های متنوعی در متون قابلیت اعتماد ارائه شده است که در ادامه بعضی از آن‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

مدل آدینوس

مدل آرینوس هنگامی به کار می‌رود که طول عمر محصولات عمدتاً متأثر از دما هستند. بدین معنی که با تغییر دمای محیط می‌توان زمان شکست محصولات را تسریع بخشد. در چنین حالاتی، مدل آرینوس را می‌توان جهت تعیین وابستگی طول عمر به دما به عنوان یک مدل مناسب استفاده کرد. مدل آرینوس، به صورت دقیق، اثر درجه حرارت را به نرخ یک واکنش شیمیایی نشان می‌دهد و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mu = \alpha e^{\frac{E}{kT}} \quad (1.9)$$

که در آن μ نرخ عکس العمل شیمیایی بر حسب ثانیه است، E انرژی فعالی است که در یک الکترون-ولت وجود دارد، k ضریب بلزمن نامیده می‌شود و برابر است با $8.6171 \times 10^{-5} \text{ eV/C}$ ، T دمای مطلق (دما سلسیوس به اضافه $273/15$) است و α ثابتی است که به مشخصه‌های مواد بستگی دارد. فرض کنید یک شکست هنگامی اتفاق می‌افتد که مقدار بحرانی از واکنش شیمیایی اتفاق می‌افتد. بنابراین زمان شکست برابر خواهد شد با زمانی که چنین مقدار بحرانی از واکنش حاصل شود. از آنجایی که زمان شکست متناسب با عکس نرخ واکنش می‌باشد، تساوی (۱.۸) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود.

$$L = \alpha e^{\frac{E}{kT}} \quad (2.9)$$

که در آن L طول عمر و A مقدار ثابتی است که به خصوصیات مواد، مکانیزم شکست، طراحی محصول و عوامل دیگر بستگی دارد. تساوی (۲.۹) به رابطه طول عمر آرینوس معروف است. طول عمر L معمولاً یکی از گرایش‌های مرکزی توزیع یا صدک‌های توزیع انتخاب می‌شود. برای مثال اگر توزیع مورد بررسی نمایی باشد L میانگین توزیع، اگر واپل باشد صدک 0.632 . توزیع و اگر توزیع نرمال یا لگ نرمال باشد L را میانه توزیع در نظر می‌گیرند. معمولاً برای تحلیل‌های ساده‌تر در عمل یک فرم خطی از رابطه (۲.۹) را مورد نظر قرار می‌دهند و آن با گرفتن لگاریتم از طرفین (۲.۹) به دست می‌آید و به صورت زیر است.

$$\ln L = \beta_1 + \frac{\beta_2}{T} \quad (3.9)$$

که در آن $\alpha = \ln \mu$ و $\beta_1 = \frac{E}{k}$. با توجه به معادله (۳.۹) مشاهده می‌شود که لگاریتم L تابعی خطی از معکوس درجه است.

اکنون با توجه به این که رابطه طول عمر آرینوس بحسب صدکهای توزیع ارائه می‌شود، می‌توان برای دو دمای متفاوت فاکتور تسریع a را از آن تعیین کرد. اگر L_1 و L_2 به ترتیب صدکهای توزیع در دمای T_1 و T_2 باشد آنگاه فاکتور تسریع بین دمای T_1 و دمای T_2 برابر است با

$$a = \frac{L_1}{L_2} = e^{\frac{E}{k} \left[\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right]}$$

این رابطه نشان می‌دهد که با داشتن مقدار E می‌توان مقدار a را به ازای دو دمای مفروض T_1 و T_2 محاسبه کرد. بالعکس اگر فاکتور تسریع a بین دو دمای T_1 و T_2 معلوم باشد را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد.

$$E = k \ln a \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)^{-1} \quad (4.9)$$

از نقطه نظر عملی کافی است صدکهای مفروض در دو دمای T_1 و T_2 را محاسبه کرده و با استفاده از آنها a را تعیین و سپس E را از رابطه (4.9) مشخص نمود. معمولاً در تعیین فاکتور تسریع a با استفاده از مقدار E می‌توان به دو صورت عمل نمود. یکی این که، از جداولی استفاده نمود که به ازای مقادیر مفروض از E و دماهای T_1 و T_2 از قبل آمده شده است. جدول ۳.۹ نمونه‌ای از این جدول را نشان می‌دهد. جدول به ازای $E = 0/1$ و $E = 0/5$ و مقادیر مختلف دمای پایین T_1 در ستون سمت چپ و مقادیر مختلف دمای بالای T_2 در سطر اول، فاکتور تسریع را ارائه می‌کند. مقادیر متناظر با $E = 0/1$ در پرانتز نمایش داده شده است. روش دیگری که می‌توان با استفاده از آن مقدار فاکتور تسریع a را تعیین نمود استفاده از روش کمترین مربعات است. برای روشن شدن مطلب مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۳.۹ برای تعیین قابلیت اعتماد یک حسگر الکتریکی در مرحله طراحی، با توجه به این که دما یک عامل مهم می‌باشد، آنها را در سه دمای ۸۵، ۱۰۰ و ۱۱۵ درجه سانتیگراد قرار می‌دهیم. در هر یک از ۳ دمای مفروض دو واحد مورد آزمایش قرار گرفته و طول عمر هر یک از آنها را در جدول ۴.۹ ارائه کرده‌ایم. با توجه به اطلاعات موجود در جدول، مقدار E را تعیین کنید.

جدول ۳.۹ فاکتور تسریع آرینوس برای $E=0/1$ و $E=0/5$

		دماهی بالای T_2 بر حسب سانتیگراد									
		۶۵	۷۵	۸۵	۹۵	۱۰۵	۱۱۵	۱۲۵	۱۳۵	۱۴۵	۱۵۵
دماهی بالای T_2 بر حسب سانتیگراد	۲۵	۱۰ (۱۰۰)	۱۶/۴ (۲۶۸)	۲۶/۱ (۶۷۹)	۴۰/۵ (۱۶۳۷)	۶۱/۴ (۳۷۶۷)	۹۱/۱ (۸۳۰)	۱۳۳ (۱۷۵۹۷)	۱۹۰ (۳۵۹۳۸)	۲۶۶ (۷۰۹۳۳)	۳۶۸ (۱۳۵۶۲۸)
	۳۵	۵/۳ (۲۸)	۸/۷ (۷۶)	۱۳/۹ (۱۹۲)	۲۱/۵ (۴۶۳)	۳۷/۶ (۱۰۶۵)	۴۸/۰ (۲۳۴۸)	۷۰/۰ (۴۹۷۶)	۱۰۱ (۱۰۱۹۳)	۱۴۲ (۲۰۰۵۹)	۱۶۹ (۳۸۱۵۴)
	۴۵	۲/۹ (۸/۶)	۴/۸ (۲۳/۲)	۷/۷ (۵۸/۸)	۱۱/۹ (۱۴۲)	۱۸/۱ (۳۲۶)	۲۶/۸ (۷۱۹)	۳۹/۰ (۱۵۴)	۵۵/۸ (۳۱۱)	۷۸/۴ (۵۱۴۱)	۱۰۸ (۱۱۷۴۳)
	۵۵	۱/۷ (۲/۸)	۲/۸ (۷/۹)	۴/۴ (۱۹/۳)	۶/۸ (۴۶/۶)	۱۰/۴ (۱۰۷)	۱۵/۴ (۲۳۷)	۲۲/۴ (۵۰۱)	۳۲/۰ (۱۰۲۱)	۴۴/۹ (۲۰۲۰)	۶۲/۲ (۳۸۶۵)
	۶۵	۱/۶ (۲/۷)	۲/۶ (۶/۸)	۴/۰ (۱۶/۴)	۶/۱ (۳۷/۷)	۹/۱ (۸۳/۱)	۱۳۳ (۱۷۶)	۱۹۰ (۳۶۰)	۲۶/۶ (۷۱۰)	۳۶/۸ (۱۳۵۸)	
	۷۵		۱/۶ (۲/۵)	۲/۵ (۶/۱)	۳/۸ (۱۴/۱)	۵/۶ (۳۱/۰)	۸/۱ (۶۵/۷)	۱۱/۶ (۱۳۴)	۱۶/۳ (۲۶۵)	۲۲/۵ (۵۷)	
	۸۵			۱/۶ (۲/۴)	۲/۴ (۵/۵)	۳/۵ (۱۲/۲)	۵/۱ (۲۵/۹)	۷/۴ (۵۲/۹)	۱۰/۲ (۱۰۴)	۱۴/۱ (۲۰۰)	
	۹۵				۱/۰ (۲/۳)	۲/۳ (۵/۱)	۳/۳ (۱۰/۸)	۴/۷ (۲۲)	۶/۶ (۴۳/۳)	۹/۱ (۸۲/۹)	
	۱۰۵					۱/۰ (۲/۲)	۲/۲ (۷/۸)	۳/۱ (۹/۰)	۴/۳ (۱۰/۸)	۶/۱ (۳۶)	
	۱۱۵						۱/۵ (۲/۱)	۲/۱ (۴/۳)	۴/۹ (۸/۵)	۶/۰ (۱۶/۳)	
	۱۲۵							۱/۴ (۲/۰)	۲/۰ (۴/۰)	۴/۸ (۷/۷)	
	۱۳۵								۱/۴ (۲/۰)	۱/۹ (۳/۸)	
	۱۴۵									۱/۴ (۱/۹)	

جدول ۴.۹ داده‌های طول عمر در دماهای مختلف

دما بر حسب سانتیگراد		
۸۵	۱۰۰	۱۱۵
طول عمر (برحسب ساعت)	۲۳۸۵، ۲۵۳۷	۱۶۵۵، ۱۷۳۸
میانگین طول عمر	۲۴۶۱	۱۶۹۶/۵
		۱۰۹۴

حل. ابتدا میانگین نمونه‌ها را در هر یک از دماها محاسبه می‌کیم که نتایج مربوطه در جدول ۴.۹ ارائه شده است. سپس از رابطه (۳.۹) استفاده کرده و معادله خط رگرسیون را با توجه به اطلاعات جدول، برای برآورد a و b تعیین می‌کنیم. با توجه به داده‌های جدول ۴.۹ به دست می‌آوریم،

$$\hat{\beta}_1 = ۳۷۵۰/۶۳۶ \quad \hat{\beta}_0 = -۲/۶۴۸$$

$$\text{با توجه به این که } \beta_1 = \frac{E}{k} \text{، داریم}$$

$$\begin{aligned} \hat{E} = k\hat{b} &= ۸/۶۱۷۱ \times ۱^{-۵} \times ۳۷۵۰/۶۳۶ \\ &= ۰/۳۲۳ \end{aligned}$$

اکنون با داشتن برآورد E قادریم فاکتور تسريع را تحت دماهای مختلف محاسبه کنیم. برای مثال، فاکتور تسريع بین دمای 25° (دمای معمول) و دمای 70° سانتیگراد برابر خواهد شد با

$$\begin{aligned} \hat{a} &= e^{\left[\frac{-۰/۳۲۳}{۸/۶۱۷۱ \times ۱^{-۵}} \left(\frac{۱}{۲۵+۳۷۵۰/۶۳۶} - \frac{۱}{۷۰+۳۷۵۰/۶۳۶} \right) \right]} \\ &= ۵/۲ \end{aligned}$$

مدل آیرینگ

برای تعیین فاکتور تسريع، در بعضی از مسائل رابطه طول عمر آرینوس ممکن است برای توصیف وابستگی طول عمر به دما کفایت نکند. یکی از مدل‌هایی که به عنوان جایگزین می‌توان به کار برد و بر مبنای مکانیک کوانتم به دست می‌آید مدل آیرینگ است. در این مدل رابطه طول عمر با دما به صورت زیر است،

$$L = \frac{\alpha}{T} e^{\frac{E}{kT}}$$

که در آن متغیرها همانند رابطه آرینوس تعریف می‌شوند. همانطور که ملاحظه می‌شود رابطه آرینگ ضربی از رابطه آرینوس است که در آن ضرب $\frac{1}{T}$ در رابطه آرینوس ضرب شده است. اگر T_1 و T_2 دو دما باشد که واحد مورد بررسی در آن مورد آزمایش قرار می‌گیرد آنگاه فاکتور تسریع بین دو دما از رابطه زیر به دست می‌آید،

$$\alpha = \frac{T_1}{T_2} e^{\frac{E}{k} \left[\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right]}$$

و در نتیجه فاکتور تسریع در مدل آرینگ مساوی با فاکتور تسریع در مدل آرینوس ضربدر حاصل تقسیم دمای T_1 بر T_2 است.

مدل قانون توانی (رابطه ولتاژ)

در بحث آزمون‌های طول عمر تسریع یافته، ولتاژ نیز می‌تواند یک عامل مهم در تسریع کردن طول عمر باشد. به ویژه در قطعات الکتریکی مانند خازن‌ها، ترانسفورماتورها و غیره، اثر ولتاژ روی طول عمر قطعات معمولاً به صورت معکوس تابع توانی مدل سازی می‌شود. به عبارت دقیق‌تر اگر L طول عمر محصول و V ولتاژی باشد که تحت آن محصول را مورد آزمایش قرار می‌دهیم آنگاه رابطه L و V به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$L = \frac{A}{V^B} \quad (5.9)$$

که در آن A و B مقادیر ثابتی هستند که به خصوصیات مواد مورد استفاده در محصول، طراحی محصول، مکانیزم شکست و عوامل دیگر بستگی دارند. در اینجا به این نکته نیز اشاره می‌کنیم که قانون توانی را برای استرس‌های دیگر مانند شدت جریان، فشار، بار مکانیکی و غیره نیز به کار می‌برند. اگر از طرفین (5.9) لگاریتم بگیریم آنگاه داریم،

$$\ln L = \beta_1 + \beta_2 V$$

که در آن $\beta_1 = \ln A$ و $\beta_2 = -B$. یعنی لگاریتم طول عمر تابعی خطی از ولتاژ است که در آن β_1 و β_2 را باید از داده‌ها برآورد کرد. اگر V_1 و V_2 دو ولتاژ متفاوت باشند که یک نوع محصول را تحت آن‌ها مورد آزمایش قرار می‌دهیم آنگاه فاکتور تسریع کننده بین دو ولتاژ از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$a = \frac{L_i}{L_r} = \left(\frac{V_r}{V_i} \right)^B$$

مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۴.۹ برای تعیین قابلیت اعتماد یک نوع خازن الکتروولتیک، سه مجموعه هر یک شامل ۸ خازن را در ولتاژهای ۱۰۰، ۱۰۰ و ۱۲۰ مورد آزمایش قرار می‌دهیم. در این آزمایش گوییم یک شکست اتفاق افتاده است هر گاه بیش از ۲۵٪ از ظرفیت خازن کم شود. زمان شکست واحدها بر حسب ساعت در جدول ۵.۹ ارائه شده است.

- (الف) متوسط طول عمر خازن‌ها را در محیط نرمال با ولتاژ ۵۰ محاسبه کنید.
 (ب) اگر خازن در ولتاژ ۱۲۰، ۱۵۰ ساعت عمر کرده باشد پیش‌بینی می‌کنید در ولتاژ ۵۰ چقدر کار می‌کند.

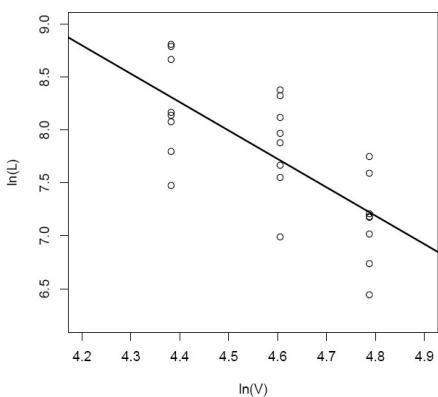
جدول ۵.۹ طول عمر خازن‌ها در ولتاژهای مختلف

	ولتاژ		
	۸۰	۱۰۰	۱۲۰
طول عمر	۱۷۷۰	۱۰۹۰	۶۳۰
	۲۴۴۸	۱۹۰۷	۸۴۸
	۳۲۳۰	۲۱۴۷	۱۱۲۱
	۳۴۴۵	۲۶۴۵	۱۳۰۷
	۳۵۳۸	۲۹۰۳	۱۳۲۱
	۵۸۰۹	۳۳۵۷	۱۳۵۷
	۶۵۹۰	۴۱۳۵	۱۹۸۴
	۶۷۴۴	۴۳۸۱	۲۳۳۱
	۴۱۹۷	۲۸۲۱	۱۳۶۲
	میانگین طول عمر		

حل. برای حل مثال ابتدا میانگین طول عمر خازن‌ها را در ولتاژهای مختلف محاسبه می‌کنیم. نتایج در جدول ۵.۹ ارائه شده است. با توجه به مقادیر میانگین و با استفاده از مدل رگرسیونی $LnL = \beta_0 + \beta_1 V$ ضرایب β_0 و β_1 را بر مبنای یکی از نرم افزارهای آماری برآورد می‌کنیم. با انجام این کار نتیجه می‌گیریم

$$\beta_0 = ۲۰ / ۴۰۷ \quad \text{و} \quad \beta_1 = -۲ / ۷۳۸$$

نمودار خط رگرسیون در شکل ۳.۹ نمایش داده شده است.



شکل ۳.۹ خط رگرسیون برآورده شده به طول عمر خازن‌ها

با توجه به نتایج $\hat{\beta}_1$ و $\hat{\beta}_0$ ، به دست می‌آوریم

$$\hat{B} = ۲/۷۳۸ \quad \text{و} \quad \hat{A} = e^{۰/۷۴۷} = ۲/۲۸۹ \times 10^4$$

بنابراین میانگین طول عمر خازن‌ها در ولتاژ ۵۰ برابر است با

$$\hat{L}_{\text{م}} = \frac{۲/۲۸۹ \times 10^4}{۵/۷۳۸} \\ = ۱۶۲۵۱ \quad \text{ساعت}$$

فاکتور تسریع کننده بین ۵۰ و ۱۲۰ مساوی است با

$$\hat{a} = \left(\frac{۱۲۰}{۵۰} \right)^{۰/۷۴۷} \\ = ۱۰/۹۹$$

در نتیجه طول عمر خازن را در ولتاژ ۵۰، اگر در ولتاژ ۱۲۰، ۱۵۰۰ ساعت عمر کرده باشد، برآورد می‌کنیم که $۱۶۴۸۵ = ۱۰/۹۹ \times ۱۰/۹۹ \times ۱۵۰۰$ ساعت عمر کند.

مسایل

۱. فرض کنید خازن‌های تولیدی توسط یک کارخانه را جهت تعیین قابلیت اعتماد در ۳ درجه حرارت ۸۵° ، ۱۰۵° ، ۱۲۵° سانتیگراد مورد آزمایش قرار دهیم. بدین منظور سه مجموعه هر یک شامل ۴۰ خازن را در هر یک از دماهای اشاره شده وارد آزمایش می‌کنیم و در زمان‌های

۲۵، ۱۶۸، ۷۲، ۳۰۰، ۵۰۰، ۷۵۰، ۱۰۰۰، ۱۲۵۰ و ۱۵۰۰ ساعت مورد قرار داده و تعداد شکست‌ها را ثبت می‌کنیم. نتایج در جدول زیر ارائه شده است.

زمان‌های بازرسی	تعداد شکست‌ها در 85°	تعداد شکست‌ها در 105°	تعداد شکست‌ها در 125°
۲۴	۱	۲	۵
۷۲	.	۱	۱۰
۱۶۸	.	۳	۱۳
۳۰۰	۱	۲	۲
۵۰۰	.	۲	۳
۷۵۰	۳	۴	۲
۱۰۰۰	.	۵	۲
۱۲۵۰	۱	۱	۱
۱۵۰۰	۲	۴	.
جمع	۸	۲۴	۳۸

(الف) با استفاده از نمودار احتمال، آزمون کنید که آیا داده‌ها در هر یک از ۳ دما دارای توزیع وایل هستند.

(ب) پارامترهای توزیع را در هر حالت برآورد کنید.

(ج) آیا می‌توان پذیرفت که رابطه تسربی شده خطی بین ۳ دما وجود دارد.

(د) فاکتور تسربی کننده را در بین دماهای مختلف تعیین کنید.

(ه) پارامترهای توزیع وایل را با استفاده از روش ML برآورد کنید.

۲. جهت تعیین برآورد اولیه توزیع طول عمر یک نوع الکترونیکی در مرحله طراحی ۱۰ واحد را در یک آزمون تسربی کننده با حداکثر استرس مورد آزمایش قرار می‌دهیم. نتایج حاصل از زمان شکست واحدها بر حسب ساعت به صورت زیر است.

$200/0^*$, $176/2^*$, $170/8^*$, $127/5^*$, $119/3^*$, $115/3^*$, $105/6^*$, $73/6^*$, $67/4^*$

که در آن * نشان‌دهنده آن است که واحد در این زمان سانسور شده است.

مطالعات قبلی نشان می‌دهد که توزیع طول عمر قطعات وایل است.

(الف) نمودار احتمال داده‌ها را با استفاده از کاغذ احتمال وایل رسم کنید. آیا توزیع وایل برای داده‌ها مناسب است.

(ب) پارامترهای توزیع وایل را برآورد کنید.

(ج) قابلیت اعتماد قطعه را در زمان 40 برآورد کنید.

(ه) اگر فاکتور بین محیط نرمال و حداکثر استرس که داده‌ها بر اساس آن تولید شده است $35/8$ باشد، نتایج بندهای ب و ج را در محیط نرمال تعیین کنید.

۲۰۰ آزمون‌های طول عمر تسریع یافته

۳. در تمرین ۲، بندهای ب و هرا با استفاده از روش ML انجام دهید.

۴. فرض کنید توزیع طول عمر $(F_S(t)$ ، تحت استرس S لگ نرمال $LN(\mu, \sigma)$ باشد. اگر تبدیل تسریع کننده خطی باشد تابع توزیع $(F_N(t)$ را، تحت شرایط نرمال، تعیین کرده و بررسی کنید چه تغییری در پارامترهای توزیع صورت می‌گیرد.

الگوهای تعمیر و نگهداری سیستم‌ها

۱.۱۰ مقدمه

یکی از مباحثی که در نظریه قابلیت اعتماد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، مبحث تعمیر و نگهداری سیستم‌ها است. یک سیستم تعمیرپذیر سیستمی را گویند که در صورت از کارافتادگی می‌تواند تحت یک فرآیند مشخص دوباره به وضعیت فعال اولیه برگردد. اغلب سیستم‌ها و تجهیزات پیشرفته که امروزه در زندگی بشر مورد استفاده قرار می‌گیرد از نوع تعمیرپذیر هستند. برای مثال، یک اتومبیل، یک هوایپما، یک کامپیوتر وغیره از نوع سیستم‌های تعمیرپذیر هستند. یک اتومبیل، مجموعه‌ای از قطعات اصلی دارد که بعضًا گران قیمت هستند و انتظار می‌رود که برای یک مدت طولانی بدون نقص کار کنند. برای چنین قطعاتی هنگام از کار افتادگی، با توجه به هزینه گران آن‌ها، باید تعمیر شوند. بنابراین نیاز به ارائه روش‌هایی که با استفاده از آن‌ها بتوان قابلیت اعتماد سیستم‌ها را تعیین کرده و الگوهای مناسبی برای بهینه‌سازی زمان تعویض و تعمیر سیستم‌ها ارائه کرد. در سال‌های اخیر مطالعات فراوانی در مبحث تعمیر و نگهداری سیستم‌ها ارائه شده که کاربردهای فراوانی در صنعت جهت نگهداری بهینه سیستم و تجهیزات داشته است. در این فصل به معرفی بعضی از مفاهیم اولیه تعمیر و نگهداری سیستم‌ها می‌پردازیم. ابتدا در بخش ۲.۱۰ به موضوع تعمیر کامل یک سیستم که در آن زمان تعمیر قابل چشم پوشی است می‌پردازیم. بدین منظور مقدماتی از مفاهیم اولیه نظریه تجدید ارائه که نقش کلیدی در نظریه تعمیر و نگهداری سیستم دارد ارائه می‌کنیم. سپس در بخش ۳.۱۰ به ارائه کران‌های برای توزیع $N(t)$ ، توزیع تعداد تعمیرها در فاصله (t_0, t) می‌پردازیم. در بخش ۴.۱۰

تعمیر مینیمال و بعضی از نتایج مرتبط با آن را ارائه می‌کنیم. بخش ۵.۹ به موضوع تعمیر کامل اختصاص دارد که در آن زمان تعمیر خود یک متغیر تصادفی است و در پایان در بخش ۶.۹ به ارائه الگوهای ساده در نگهداری پیشگیرانه می‌پردازیم. در فرآیند انجام این کار، تعویض بلوکی و تعویض سنی را معرفی کرده و نتایجی در بهینه سازی نگهداری پیشگیرانه ارائه می‌کنیم.

۲.۱۰ تعمیر کامل با زمان تعمیر آنی

سیستمی را در نظر بگیرید که در زمان $t = 0$ شروع به کار می‌کند. فرض کنید برای زمان تصادفی X_i کار می‌کند و هنگامی که از کار افتاد در یک مدت زمان ناچیز (که قابل چشم پوشی است) تعمیر می‌شود و دوباره شروع به کار می‌کند. اگر X_i مدت زمان کارکرد سیستم در مرحله دوم، ... و X_n مدت زمان کارکرد سیستم در n امین مرحله باشد اگر مراحل مختلف تجدید به صورتی باشد که در آن T_i ها دارای توزیع اولیه X_i بوده و از یکدیگر مستقل باشند آنگاه عملاً یک فرآیند تجدید روپرتو هستیم در ادامه به صورت دقیق فرآیند تجدید را تعریف می‌کنیم. ابتدا تعریف زیر را در نظر بگیرید.

تعریف ۱.۱۰ $\{N(t), t > 0\}$ را یک فرآیند شمارشی گوئیم هرگاه $N(t)$ تعداد کل پیشامدها در بازه $[0, t]$ باشد.

با توجه به این تعریف واضح است که،

الف) $N(t)$ مقادیر صحیح نامنفی را اختیار می‌کند.

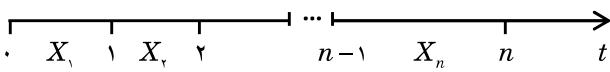
ب) اگر $N(s) \leq N(t)$ آنگاه $s < t$

ج) $N(\cdot) = 0$

د) $N(t) - N(s)$ نشان‌دهنده تعداد پیشامدها در بازه $[s, t]$ است.

فرض کنید X_n نشان‌دهنده مدت زمان کارکرد سیستم بین $(n-1)$ امین و n امین خوابی

$$\text{باشد (و فرض کنید } S_n = \sum_{i=1}^n X_i \text{ و قرار دهید } X_i = 0 \text{ (شکل زیر را بینید).}$$



آنگاه تعریف زیر را داریم.

تعریف ۲.۱۰ فرض کنید $\{X_i\}$ زمان‌های کارکرد سیستم، متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع مشترک $F(x)$ باشند. در این صورت فرآیند شمارشی $N(t)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود و تعداد خوابی‌ها را تا زمان t نشان می‌دهد یک فرآیند تجدید می‌نامند.

$$N(t) = \max\{n, S_n \leq t\}$$

تعریف ارائه شده برای فرآیند تجدید در اینجا در یک چارچوب بسیار وسیع از کاربردهای احتمال به کار می‌رود و کاربرد آن در تعمیر سیستم بخش کوچکی از کاربردهای فراوان آن است.

با توجه به این تعریف S_n نشان‌دهند کل زمان کارکرد سیستم پس از n تعمیر در بازه $[0, t]$ است. به این نکته نیز توجه کنید در اینجا پس از هر تعمیر تلویحاً فرض کردہ‌ایم که سیستم کاملاً مانند یک سیستم نو می‌شود و لذا تجدید کامل صورت گرفته است. یافن توزیع $N(t)$ ، تعداد خرابی‌ها در فاصله $(0, t)$ یا معادل آن توزیع S_n از مسایل کلیدی در فرآیندهای تجدید و مبحث تعمیر و نگهداری سیستم‌ها است. فرض کنید $F_n(t)$ تابع توزیع S_n باشد (و قرار دهید $F = F_n$) و فرض کنید f تابع چگالی F باشد آنگاه F_n تابع توزیع n امین پیچش f است و به صورت زیر ارائه می‌شود.

$$\begin{aligned} F_n(t) &= P(S_n < t) \\ &= \int_0^t F_{n-1}(t-x)f(x)dx \end{aligned}$$

که در آن $F_0 = 1$ (فصل ...) را بینید). اکنون قضیه زیر را داریم.
قضیه ۱.۱۰ تابع جرم احتمال $N(t)$ برابر است با

$$P(N(t)=n) = F_n(t) - F_{n+1}(t)$$

اثبات.

با توجه به تعریف $N(t)$ داریم

$$N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t$$

بنابراین

$$\begin{aligned} P(N(t)=n) &= P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n+1) \\ &= P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t) \\ &= F_n(t) - F_{n+1}(t) \end{aligned}$$

■
یک نتیجه ساده و در عین حال جالب از این قضیه این است که

$$\begin{aligned} P(N(t) = \cdot) &= F(t) - F(t) \\ &= R(t) \end{aligned}$$

که در آن $R(t) = 1 - F(t)$

فرض کنید $F(t) = e^{-\lambda t}$ یعنی توزیع طول عمر سیستم نمایی باشد درین حالت فرآیند تجدید را فرآیند پواسن گویند. در فصل ۵ دیدیم که توزیع S_n ارلانز با پارامترهای n و λ است.
یعنی

$$\begin{aligned} P(S_n \leq t) &= \int_0^t \frac{1}{\Gamma(n)} \lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x} dx \\ &= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} P(N(t) = n) &= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} - \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} \\ &= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

بنابراین ملاحظه می‌شود که اگر زمان کارکرد سیستم پس از هر تعمیر نمایی ($E(\lambda)$ باشد، آنگاه توزیع احتمال تعداد از کار افتادگی در فاصله $(0, t)$ پواسن با میانگین λt است.
اگر چه توزیع $N(t)$ در حالتی که زمان کارکرد سیستم پس از هر تعمیر نمایی باشد، فرم ساده‌ای دارد اما در اغلب موارد توزیع $N(t)$ بسیار پیچیده خواهد بود.
متوسط تعداد از کار افتادگی در فاصله $(0, t)$ یعنی $E(N(t))$ از اهمیت به سزاوی برخوردار است ($E(N(t))$ را با $m(t)$ نمایش دهیم آنگاه،

$$\begin{aligned} m(t) &= E(N(t)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n P(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n [F_n(t) - F_{n+1}(t)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \end{aligned}$$

تابع $m(t)$ به تابع تجدید معروف است. تابع $m(t)$ به فرم بازگشته زیر نیز قابل نمایش است.

$$\begin{aligned} m(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \\ &= F_1(t) + \sum_{n=1}^{\infty} F_{n+1}(t) \\ &= F(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int F^{n+1}(t-x)f(x)dx \\ &= F(t) + \int \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t-x)f(x)dx \\ &= F(t) + \int m(t-x)f(x)dx \end{aligned}$$

نتایج حدی متعددی در مورد $N(t)$ و $m(t)$ در نظریه تجدید ثابت می‌شود که تعداد از آن‌ها را در غالب قضیه زیر بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۱۰ (الف) هنگامیکه $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ ، که در آن $\mu < \infty$

میانگین توزیع F است. این نتیجه بیان می‌کنید که برای t ‌های بزرگ، تعداد از کارافتدگی‌های سیستم در بازه $[0, t]$ ، تقسیم بر طول بازه تقریباً مساوی معکوس میانگین زمان کارکرد سیستم در هر تجدید است.

(ب) هنگامیکه $\frac{m(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$

$$\frac{m(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$$

و این یعنی، برای t ‌های بزرگ متوسط تعداد خرابی‌های سیستم در بازه $[0, t]$ ، بر طول بازه تقریباً معکوس میانگین زمان کارکرد سیستم در هر تجدید است.

(ج) هنگامیکه $t \rightarrow \infty$

$$\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{t\sigma^2}{\mu}}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

و این یعنی توزیع تقریبی $N(t)$ ، برای t های بزرگ، نرمال با میانگین $\frac{t}{\mu}$ و واریانس $t \frac{\sigma^2}{\mu^2}$ است.

$$(5) \quad a > 0, \quad m(t+a) - m(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [m(t+a) - m(t)] = \frac{a}{\mu}$$

$$m(t) \geq \frac{t}{\mu} - 1 \quad (6)$$

مثال ۱.۱۰ فرض کنید توزیع طول عمر واپیل با پارامتر شکل $\beta = 2/5$ و پارامتر مقیاس

$$\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\lambda} \quad \text{باشد آنگاه } \lambda = 4 \times 10^{-4}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} [m(t+a) - m(t)] = \\ m(t) \geq \frac{t}{\mu} - 1 \end{aligned}$$

نتیجه بند (د) از قضیه ۲.۱۰ به معادله بلکه معروف است. اگر طرفین آن را بر a تقسیم کنیم به دست می آوریم.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{m(t+a) - m(t)}{a} \right] = \frac{1}{\mu}$$

ولذا

$$\lim_{a \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{m(t+a) - m(t)}{a} \right] = \frac{1}{\mu}$$

با فرض این که بتوان جای حدها را عوض کرد به دست می آوریم،

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{m(t+a) - m(t)}{a} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} m'(t) \\ = \frac{1}{\mu}$$

و این یعنی برای t های بزرگ، مشتق تابع تجدید برابر با نرخ تجدید یعنی $\frac{1}{\mu}$ خواهد شد. تابع $m'(t)$ به چگالی تجدید معروف است. تعبیر احتمالی چگالی تجدید به صورت زیر است.
داریم،

$$m'(t)\Delta t \approx m(t + \Delta t) - m(t) \\ = P([t, t + \Delta t]) \\ = P([t, t + \Delta t] \text{ باشد}) \\ = \sum_{j>1} j \times P([t, t + \Delta t] \text{ باشد})$$

اما در متون پیشرفته تر ثابت می‌شود که هر گاه $\Delta t \rightarrow \infty$ عبارت جمع در سمت راست تساوی به سمت صفر می‌کند. بنابراین می‌توان نوشت
(دقیقاً یک از کارافتادگی در فاصله $[t, t + \Delta t]$ صورت گیرد)

۳.۱۰ تعیین کران‌هایی برای توزیع $N(t)$

همانطور که در بخش قبل دیدیم، معمولاً محاسبه توزیع دقیق ($N(t)$ یا معادل آن توزیع S_n) بسیار پیچیده می‌باشد. بنابراین محاسبه کران‌هایی برای توزیع $N(t)$ در مقاصد کاربردی می‌تواند بسیار مفید باشد. در ادامه تحت این شرط که توزیع طول عمر F متعلق به کلاسی از کلاس‌های مختلف طول عمر باشد کران‌هایی برای توزیع $N(t)$ به دست می‌آوریم.
قبل از آن که اولین کران را برای توزیع $N(t)$ ارائه کنیم، قضیه زیر را اثبات می‌کنیم که به خودی خود از اهمیت بالایی در نظریه قابلیت اعتماد برخوردار است.

قضیه ۳.۱۰ اگر F ، IFR با میانگین μ باشد آنگاه یک کران پایین برای قابلیت اعتماد آن به صورت زیر است

$$R(t) \geq e^{-\frac{t}{\mu}}, 0 < t < \mu$$

اثبات.

فرض کنید T متغیر تصادفی متناظر با F باشد آنگاه با توجه به این که IFR است آگر و تنها آگر $\ln R(t)$ مقعر باشد. با توجه به نامساوی جنسن داریم،

$$\begin{aligned} E[\ln R(X)] &\leq \ln R(E[X]) \\ &= \ln R(\mu) \end{aligned} \quad (1.10)$$

ار طرفی چون $R(X)$ دارای توزیع یکنواخت در فاصله $[0, t]$ است

$$\begin{aligned} E[\ln R(X)] &= \int_0^t \ln R(x) dx \\ &= -1 \end{aligned}$$

بنابراین از (1.10)

$$\ln R(\mu) \geq -1$$

و یا

$$R(\mu) \geq e^{-1}$$

اما با توجه به تمرین فصل آنگاه برای $\mu < t$ IFR F باشد آنگاه اگر

$$(R(t))^{\frac{1}{t}} \geq (R(\mu))^{\frac{1}{\mu}}$$

بنابراین

$$R(t) \geq e^{-\frac{\mu}{t}}$$

و اثبات کامل می شود. ■

نتیجه جالب و در عین حال جالب این قضیه این است که اگر توزیع طول عمر سیستم IFR با میانگین μ باشد، در زمان های اولیه استفاده از آن می توان مطمئن بود که قابلیت اعتماد آن از قابلیت اعتماد یک سیستم با توزیع نمایی و میانگین μ بیشتر است. اکنون قضیه زیر را در نظر بگیرید.

قضیه ۴.۱۰ فرض کنید توزیع F ، IFR با میانگین μ باشد آنگاه برای $\mu < t$ داریم

$$P(N(t) \geq n) \leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\frac{t}{\mu})^j}{j!} e^{-\frac{t}{\mu}}$$

اثبات.

اثبات قضیه از این واقعیت ناشی می‌شود که اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع قابلیت اعتماد R_X و R_Y باشند به طوری که به ازای هر t ، $R_X(t) > R_Y(t)$. آنگاه $R^n_X(t) > R^n_Y(t)$ که در آن $(R^n_X(t))$ $R^n_X(t) > R^n_Y(t)$ تابع قابلیت اعتماد پیچش ام (Y) با خودش می‌باشد. (شیکد و شانتیکومار ۲۰۰۷ را ببینید)
چون $IFR F$ است برای $t < \mu$ از قضیه ۳.۱۰ داریم، $R(t) \geq e^{-\frac{\mu}{t}}$ بنابراین با توجه به نتیجه اشاره شده در فوق

$$\begin{aligned} F_n(t) &= P\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq t\right) \\ &\leq P\left(\sum_{i=1}^n Y_i \leq t\right) \end{aligned}$$

که در آن X_i دارای توزیع F و Y_i دارای توزیع نمایی با میانگین μ است. چون $\frac{1}{\mu}$ است داریم دارای توزیع ارلائٹز با پارامترهای n و $\frac{t}{\mu}$

$$F_n(t) \leq 1 - \sum_{j=1}^n \frac{(\frac{t}{\mu})^j}{j!} e^{-\frac{t}{\mu}}$$

و این نتیجه می‌دهد،

$$P(N(t) \geq n) \leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\frac{t}{\mu})^j}{j!} e^{-\frac{t}{\mu}}$$

نتیجه این قضیه این است که احتمال این که تعداد خرابی‌های یک سیستم با توزیع IFR در فاصله $(0, t)$ از n بیشتر شود همواره کمتر یا مساوی است با احتمال این که تعداد خرابی‌های یک سیستم با توزیع نمایی و میانگین μ بیشتر از n شود.

البته باید توجه داشت که در اینجا نتیجه محدود به مقادیری از t است که از μ کمتر باشد.
 نتیجه کلی‌تر اما در عین حال پیچیده‌تر برای کران تابع توزیع $N(t)$ به صورت زیر است که آن را بدون اثبات بیان می‌کنیم. برای اثبات می‌توان به بارلو و پروشان (۱۹۸۱) مراجعه کرد.

قضیه ۵.۱۰ اگر IFR F باشد آنگاه برای $n = 1, 2, \dots$ و $t \geq 0$

$$P(N(t) < n) \leq (\geq) \sum_{j=0}^n \frac{(nH(\frac{t}{n}))^j}{j!} e^{-nH(\frac{t}{n})}$$

که در آن $H(t) = -\ln R(t)$ تابع نرخ خطر تجمعی F است.

قضیه ۶.۱۰ فرض کنید F تابع توزیع متغیر طول عمر سیستم باشد و فرض کنید $H(t) = -\ln R(t)$ تابع نرخ خطر تجمعی باشد که در آن $R(t)$ قابلیت اعتماد سیستم است.

الف) اگر NBU باشد آنگاه F

$$P(N(t) < n) \geq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(R(t))^j}{j!} e^{-R(t)}$$

ب) اگر NWU باشد آنگاه F

$$P(N(t) < n) \leq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(R(t))^j}{j!}$$

اثبات.

الف) فرض کنید F باشد آنگاه برای $x, t > 0$

$$R(t+x) \leq R(t)R(x)$$

و این معادل است با

$$H(t+x) \leq H(t) + H(x)$$

با توجه به این نامساوی به راحتی می‌توان نشان داد که برای x و y نامنفی،

$$H^{-1}(t+x) \leq H^{-1}(t) + H^{-1}(x) \quad (2.10)$$

فرض کنید Y_i متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نمایی $E()$ باشند. آنگاه می‌توان نوشت

$$X_i = R^{-1}(Y_i), i = 1, 2, \dots, n$$

که در آن X_i ها متغیرهای تصادفی مستقل می‌باشند که دارای توزیع F هستند. اکنون با استفاده از (۲.۱۰) داریم

$$\sum_{i=1}^n H^{-1}(Y_i) \leq H^{-1}\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
P(N(t) < n) &= P\left(\sum_{i=1}^n X_i > t\right) \\
&\geq P\left(R^{-1}\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) > t\right) \\
&\geq P\left(\sum_{i=1}^n Y_i > R(t)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(R(t))^j}{j!} e^{-R(t)}
\end{aligned}$$

که در آن تساوی اخیر از این واقعیت ناشی می‌شود که دارای توزیع ارلانژ با پارامترهای $\sum_{i=1}^n Y_i$ شکل n و پارامتر مقیاس ۱ است.

■ اثبات در حالتی که NWU F باشد مشابه است و بنابراین قضیه کامل می‌شود.
از این قضیه نتیجه می‌شود که اگر توزیع طول عمر سیستم NBU (NWU) باشد آنگاهتابع توزیع تعداد خرابی‌های سیستم در فاصله $(0, t)$ از تابع توزیع پواسن با میانگین $R(t)$ بیشتر (کمتر) است.

مثال ۲.۱۰ فرض کنید توزیع طول عمر یک سیستم بر حسب ساعت واپیل با پارامترهای $\beta = ۲/۷۵$ و $\lambda = ۲/۵ \times 10^{-3}$ باشد. در این حالت توزیع IFR است و میانگین طول عمر آن با توجه به مقادیر پارامتر برابر است با

$$\begin{aligned}
\mu &= \lambda \Gamma(\beta^{-1} + 1) \\
&= ۳۵۵۹ / ۴۳
\end{aligned}$$

اکنون برای مثال با توجه به قضیه ۴.۱۰، در زمان $t = ۲۰۰۰$ ساعت احتمال این که تعداد خرابی سیستم بزرگتر یا مساوی ۳ باشد دارای کران بالای زیر است

$$P(N(2000) \geq 3) \leq 0.0195$$

از قضیه ۶.۱۰ داریم

$$\begin{aligned}
P(N(2000) < 3) &\geq \sum_{j=0}^2 \frac{(H(2000))^j}{j!} e^{-H(2000)} \\
&= 0.9805
\end{aligned}$$

و از قضیه ۵.۱۰ داریم

$$P(N(2\ldots) < 3) \geq \sum_{j=0}^2 \frac{(\lambda H(\frac{\lambda}{\lambda}))^j}{j!} e^{-\lambda H(\frac{\lambda}{\lambda})}$$

= 0.999

۴.۱۰ تعمیر مینیمال با زمان تعمیر آنی

در بخش ۲.۱۰ فرض کردیم که در صورت از کار افتادن سیستم، سیستم پس از تعمیر مانند یک دستگاه کاملاً نو به کار خود ادامه می‌دهد. اما باید توجه داشت که این فرض می‌تواند در بسیاری از موارد غیر واقعی باشد. یک حالت واقعی‌تر این است که فرض کنیم پس از تعمیر سیستم از کار افتاده، سیستم دوباره شروع به کار می‌کند اما وضعیت آن از نقطه نظر سالخوردگی مشابه یک سیستم نو نیست بلکه مشابه حالتی می‌شود که بلافارسله از کار افتادن داشته است. به عبارت دیگر اگر سیستم در زمان t_* از کار بیافتد و $h(t)$ مقدار تابع نرخ خطر در t_* باشد آنگاه پس از تعمیر سیستم به جای آن که فرض کنیم $h(t_*) = h(0)$ یعنی تابع نرخ خطر سیستم نو باشد فرض کنیم دستگاه شروع به کار می‌کند اما $h(t_*) \neq h(0)$ بدون تغییر باقی می‌ماند. این نوع تعمیر که در آن سیستم شروع به کار می‌کند و نرخ خطر آن در زمان تعمیر تغییر نمی‌کند به تعمیر مینیمال معروف است.

نتیجه اساسی در بحث تعمیر مینیمال که در عمل از آن استفاده می‌شود در قضیه زیر آمده است که در را بدون اثبات مطرح می‌کنیم. برای اثبات می‌توان به متون پیشرفته‌تر قابلیت اعتماد و فرآیندهای تصادفی مراجعه کرد.

قضیه ۲.۱۰ (الف) فرض کنید $N(t)$ تعداد شکست‌های یک سیستم در فاصله $(0, t)$ باشد که بر روی آن تعمیر مینیمال صورت می‌گیرد. در این صورت $N(t)$ تشکیل یک فرآیند پواسن ناهمگون می‌دهد به طوری که

$$P(N(t+x) - N(t) = k) = \frac{(m(t+x) - m(t))^k}{k!} e^{-(m(t+x) - m(t))}$$

که در آن $m(t)$ متوسط تعداد شکست‌ها در فاصله $(0, t)$ است.

ب) اگر $h(t)$ تابع نرخ خطر توزیع طول عمر سیستم (F) باشد آنگاه

$$P(N(t+x) - N(t) = k) = \frac{(m(t+x) - m(t))^k}{k!} e^{-(m(t+x) - m(t))}$$

برای توضیح بیشتر مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۳.۱۰ فرض کنید توزیع طول عمر سیستم وایل (W, λ) باشد به طوری که $\beta = 2/75$ و $\lambda = 2/5 \times 10^{-4}$. با توجه به قضیه ۷.۹ اگر تعویض مینیمال صورت گیرد آنگاه

$$m(t) = (2 \times 10^{-4} t)^{2/75}$$

جدول زیر مقدار $m(t)$ در زمان‌های مختلف را ارائه می‌کند.

t	۲۰۰۰	۴۰۰۰	۶۰۰۰	۸۰۰۰
$m(t)$	۰/۱۴۹	۱/۰۰۰	۱/۰۴۹	۶/۷۲۷

همچنین با استفاده از قسمت الف قضیه ۷.۹ در زمان $t = 2000$ تعداد خرابی‌ها در بازه $(0, 2000]$ دارای توزیع احتمال زیر است.

k	۰	۱	۲	۲	بزرگتر یا مساوی ۲
$P(N(2000)=k)$	$0/0095$	$0/1281$	$0/8619$	5×10^{-4}	

به طور مشابه، با استفاده از قسمت الف ۷.۹، داریم

k	۰	۱	۲	۲	بزرگتر یا مساوی ۲
$P(N(2000)-N(2000)=k)$	$0/4268$	$0/3634$	$0/1547$	$0/0551$	

۵.۱۰ تعویض کامل-زمان تعویض تصادفی

فرض کنید سیستم در زمان $t = 0$ شروع به کار می‌کند. مدت زمانی تصادفی X کار می‌کند و پس از خرابی مدت زمان تصادفی Y طول می‌کشد تا تعویض کامل شود. پس از شروع به کار مجدد X واحد زمان کار می‌کند و پس از خرابی Y واحد زمان طول می‌کشد تا تعویض شود و این روند ادامه پیدا می‌کند. فرض کنید تعداد خرابی‌های سیستم در فاصله $(0, t)$ باشد که n در آن X_i ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع مشترک F هستند و Y_i ها نیز متغیرهای تصادفی مستقل هم توزیع با توزیع مشترک G می‌باشند. علاوه بر آن فرض کنید X_i ها و Y_i ها نیز مستقل از یکدیگرند. قرار دهید $Z_i = X_i + Y_i$ ، $Z_i = X_i + Y_i$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، در این صورت Z_i ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع توزیع زیرند.

$$\begin{aligned} W(t) &= P(Z_i < t) \\ &= \int_0^t F(t-x)g(x)dx \\ &= \int_0^t G(t-x)f(x)dx \end{aligned}$$

که در آن f و g به ترتیب توابع چگالی احتمال متناظر با F و G هستند.
توجه کنید که در زمان‌های $Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \dots + Z_k + \dots + Z_n$ و ... یک تجدید اتفاق می‌افتد.
بنابراین تعداد از کارافتادگی‌های سیستم $N(t)$ برابر است با

$$N(t) = \max\{n, S_n = Z_1 + \dots + Z_n \leq t\}$$

که تشکیل یک فرآیند تجدید می‌دهد.

اگر فرض کنیم $Y_i = 0, Y_i = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, n$ ، یعنی سیستم در صورت ار کار افتادگی بلافصله تعمیر شود، آنگاه توزیع $(S(t))$ یا $(N(t))$ را در بخش قبل به دست آورده‌ایم. اما در اینجا با توجه به این که Y_i ‌ها خود متغیرهای تصادفی‌اند توزیع $N(t)$ پیچیده‌تر خواهد بود. معمولاً در محاسبه توزیع $N(t)$ باید از روش‌های عددی استفاده کرد.

مثال ۴.۱۰ فرض کنید توزیع طول عمر سیستم X نمایی $E(\lambda)$ باشد و توزیع زمان تعمیر Y نمایی $E(\beta)$ باشد. در این صورت توزیع $Z_i = X_i + Y_i, i = 1, 2, \dots, n$ ، برابر است

با

$$W(t) = \int_0^t (1 - e^{-\lambda(t-x)}) \beta e^{-\beta x} dx$$

پس از محاسبات ساده می‌توان نشان داد که تابع چگالی احتمال متناظر با آن به صورت زیر خواهد بود.

$$w(t) = \begin{cases} \frac{\lambda\beta}{\beta - \lambda} (e^{-\lambda t} - e^{-\beta t}) & , \beta \neq \lambda \\ \lambda t e^{-\lambda t} & , \beta = \lambda \end{cases}$$

این نشان می‌دهد که اگر توزیع طول عمر X_i و توزیع زمان تعمیر Y_i نمایی باشند، توزیع Z_i نمایی نیست. لذا توزیع S_n در حالتی که $\lambda \neq \beta$ دیگر فرم بسته‌ای ندارد. (ممولاً در عمل مقدار λ بسیار کوچکتر از β است).

یک سوال مهم برای سیستمی که پس از شکست مورد تعمیر قرار می‌گیرد آن است که احتمال فعال بودن سیستم در زمان t چقدر است؟ در این رابطه کمیت مهمی به نام "دسترس پذیری" ارائه می‌شود که نقش مهمی در مبحث تعمیر و نگهداری سیستم دارد. برای تعریف دسترس پذیری متغیر $X(t)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$X(t) = \begin{cases} 1 & \text{اگر سیستم در زمان } t \text{ کار کند،} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت،} \end{cases}$$

تعریف ۳.۱۰ (الف) دسترس پذیری سیستم در زمان t که با $A(t)$ نمایش می‌دهیم برابر است با

$$A(t) = P(X(t) = 1) = E(X(t))$$

(ب) دسترس پذیری حدی (یا به اختصار دسترس پذیری) A برابر است با

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t)$$

(ج) دسترس پذیری متوسط در فاصله $(0, t)$ عبارتست از

$$A_a(t) = \frac{1}{t} \int_0^t A(t) dt$$

(د) دسترس پذیری متوسط حدی A_a عبارتست از

$$A_a = \lim_{t \rightarrow \infty} A_a(t)$$

توجه کنید که دسترس پذیری متوسط در واقع نسبت متوسط زمانی را نشان می‌دهد که سیستم در فاصله $(0, t)$ فعال بوده است. اگر زمان تعمیر قابل چشم پوشی باشد ($A(t)$ همان قابلیت اعتماد سیستم خواهد بود. همچنین ثابت می‌شود که دو کمیت A و A_a با هم برابرند. برای اثبات به بارلو و پروشان (۱۹۸۱) مراجعه کنید. اکنون دوباره سیستمی را که در ابتدای بخش توصیف شد در نظر بگیرید. فرض کنید $E(X_i) = \mu$ و $E(Y_i) = v$. بدیهی است که

$\mu + \nu$ متوسط فاصله بین تجدیدها را در فرآیند $N(t)$ نمایش می‌دهد. دسترس پذیری متوسط سیستم در فاصله $(0, t)$ برابر خواهد شد با

$$A_a(t) = \frac{\text{زمان کل فعال بودن در } (0, t)}{t}$$

با توجه به تعریف بدیهی است که صورت این کسر بین قرار می‌گیرد.

علاقمندیم دسترس پذیری (حدی) سیستم را تعیین کنیم. به عبارت دیگر می‌خواهیم

$$A_a = \lim_{t \rightarrow \infty} A_a(t)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{N(t)} X_i}{t} < A_a(t) < \frac{\sum_{i=1}^{N(t)+1} X_i}{t}$$

و یا

$$\frac{\sum_{i=1}^{N(t)} X_i}{N(t)} \frac{N(t)}{t} < A_a(t) < \frac{\sum_{i=1}^{N(t)+1} X_i}{N(t)} \frac{N(t)}{t}$$

$\frac{\sum_{i=1}^{N(t)} X_i}{N(t)} \frac{N(t)}{t} \rightarrow \mu$ و $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$. بنابراین دو طرف نامساوی به سمت

$$\text{اگر } t \rightarrow \infty \text{ آنگاه } \frac{\mu}{\mu + \nu} \text{ میل می‌کند. لذا}$$

$$A_a = \lim_{t \rightarrow \infty} A_a(t) = \frac{\mu}{\mu + \nu}$$

و این نشان می‌دهد که با احتمال $\frac{\mu}{\mu + \nu}$ سیستم در یک زمان خاص فعال است.

۵.۱۰ الگوهای نگهداری پیشگیرانه

بعضی از سیستم‌هایی که در زندگی با آنها سر و کار داریم این ویژگی هستند که شکست آنها ممکن است باعث صدمات جبران ناپذیری شود. برای مثال سیستمی مانند هوایپما، اتومبیل، راکتورهای هسته‌ای و غیره. در صورت از کار افتادن بعضی از قطعات چنین سیستم‌هایی، خسارات ناشی از کار افتادن سیستم بسیار سنگین خواهد بود. در چنین حالتی، چهت نگهداری و تعمیر سیستم شیوه‌های مختلفی اتخاذ شده است به طوری که احتمال از کار افتادن سیستم حداقل شود. یکی از مباحثی که در این بستر مطرح می‌شود، بحث نگهداری پیشگیرانه است. در نگهداری پیشگیرانه یک سیستم قبل از آن که دچار شکست شود بر اساس یک شیوه معین تعویض شده یا مورد بررسی و تعمیر قرار می‌گیرد. شیوه‌های مختلفی در تعویض یا تعمیر قطعات قبل از خرابی آنها وجود دارد که در ادامه به دو روش متدال از این شیوه‌ها اشاره می‌کنیم. این دو روش به تعویض سنبی و تعویض بلوکی معروفند.

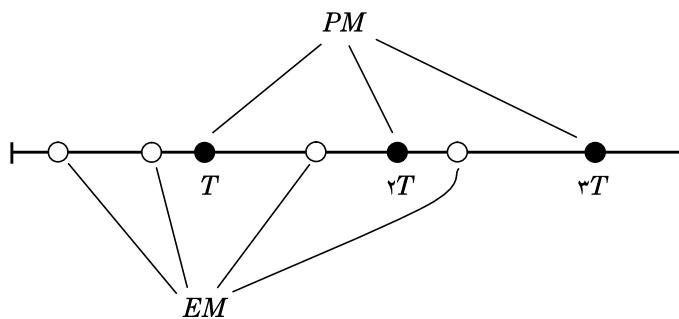
تعویض ۴.۱۰ فرض کنید در زمان $t = 0$ سیستم شروع به کار می‌کند (الف) در تعویض بلوکی سیستم یا در زمان شکست تعویض می‌شود یا در زمان‌های T ، $2T$ ، $3T$ و ... که در آن T یک مقدار از قبل تعیین شده است.

(ب) در تعویض سنبی سیستم در زمان شکست تعویض می‌شود یا هنگامیکه به سن T رسید. توجه کنید که در تعویض سنبی باید همواره مدت زمان کار کرد سیستم ثبت شود. در ادامه این دو شیوه ار نگهداری سیستم را مورد مطالعه قرار داده و تحت معیارهای مختلف نشان می‌دهیم چگونه می‌توان نگهداری پیشگیرانه بهینه را تعیین کرد. ابتدا تعویض بلوکی را مطالعه می‌کنیم.

تعویض بلوکی با شاخص هزینه

فرض کنید سیستم در زمان $t = 0$ شروع به کار کند. در زمان‌های T ، $2T$ ، $3T$ سیستم را با یک نو تعویض می‌کنیم. این گونه تعویض را تعویض پیشگیرانه (PM) گوییم و فرض می‌کنیم هزینه‌ای برابر C دارد. همچنین اگر سیستم در بین زمان‌های PM از کار بیافتد. آن را با یک سیستم نو تعویض می‌کنیم یا یک تعمیر کامل صورت می‌گیرد. این تعویض را تعویض اورژانسی (ER) گوییم و فرض می‌کنیم هزینه آن C باشد. شکل ۱.۱۰ نمودار الگوی بلوکی را نشان می‌دهد.

توجه کنید که تعویض‌های ER در فاصله $(i-1)T, iT$ ، $i = 1, 2, \dots$ ، تشکیل یک فرآیند تجدید می‌دهند. اگر $F(t)$ را تابع توزیع طول عمر سیستم فرض کنیم و زمان تعویض قابل چشم پوشی باشد آنگاه متوسط هزینه‌ای که در یک دوره $(i-1)T, iT$ پرداخت می‌کنیم برابر است با



شکل ۱.۱۰ نمودار تعویض بلوکی

$$E(C_i) = C_i + m(T) \times C_r$$

که در آن $m(t)$ متوسط تعداد تعویض‌های اورژانسی (متوسط تعداد تجدیدها) در فاصله $(0, T)$ است.

بنابراین متوسط هزینه $E(C)$ در واحد زمان برابر خواهد شد با

$$C_r(T) = \frac{C_r + C_r m(T)}{T}$$

در اینجا مسئله مهم این است که زمان T را چگونه تعیین کنیم (یعنی PM در چه فواصلی انجام شوند) که $E(C)$ مینیمم شود. به عنوان تابعی از T ، $E(C)$ برای مقادیر کوچک T (و در نتیجه تعداد PM ‌های بیشتر) زیاد می‌شود. از طرفی اگر T بزرگ‌تر شود آنگاه تعداد ER ‌های بیشتر خواهد شد.

$$\frac{\partial}{\partial T} C_r(T) = \frac{T C_r \frac{dm(T)}{T} - (C_r + C_r m(T))}{T^2}$$

اگر قرار دهیم

$$\frac{\partial}{\partial T} C_r(T) = 0$$

آنگاه

$$T \frac{dm(T)}{T} - m(T) = \frac{C_1}{C_r} \quad (3.10)$$

اولین نتیجه‌ای که می‌گیریم این است که مقدار بهینه T در صورت وجود تابعی از نسبت $\frac{C_1}{C_r}$ خواهد شد. معمولاً C_r از C_1 کوچکتر است و این مقدار همواره از ۱ کمتر می‌باشد.

همچنین ثابت می‌شود که در صورتی که توزیع طول عمر NBU باشد آنگاه مقداری از T که در تساوی صدق می‌کند تابع هزینه (c) را مینیمم می‌کند.

برای توضیح بیشتر مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۵.۱۰ فرض کنید توزیع طول عمر واپل با پارامترهای $\beta = 2/5$ و $\lambda = 0.001$ باشد. در این صورت اگر فرض کنیم نسبت هزینه PM یعنی C_r / C_1 به هزینه ER یعنی C_r مساوی k باشد جدول ۱.۱۰ مقدار T بهینه را به ازای مقادیر مختلف k نشان می‌دهد.

جدول ۱.۱۰ زمان‌های بهینه PM به عنوان ابعی از نسبت هزینه‌ها

k	n
۰/۱	
۰/۲	
۰/۳	
۰/۴	
۰/۵	
۰/۶	
۰/۷	
۰/۸	
۰/۹	

اگر فرض کنیم هنگام شکست سیستم در تعویض بلوکی به جای آن که دستگاه تعویض شود یا تعمیر کامل صورت گیرد آن را تعمیر مینیمال کنیم آنگاه متوسط هزینه در یک دوره (t, T) با توجه به نتایج بخش ۴.۱۰، برابر خواهد شد با

$$C_r(T) = \frac{C_1 + C_r H(T)}{T}$$

که در آن $H(T) = \int_0^T h(x) dx$ تابع نرخ خطر تجمعی متناظر با F است و C_1 و C_2 به

ترتیب هزینه‌های ER و PM را نشان می‌دهد. خاطر نشان می‌کنیم که $H(T)$ متوسط یک خرابی در فاصله $(0, T)$ را تحت تعمیر مینیمال نشان می‌دهد.

اگر توزیع F نمایی $E(\lambda)$ باشد آنگاه $H(T) = \lambda T$ و در نتیجه

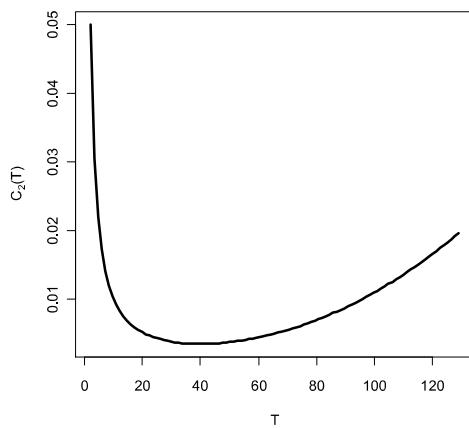
$$C_2(T) = \frac{C_1}{T} + C_1 \lambda$$

بنابراین $C_2(T)$ زمانی مینیمم می‌شود که T به سمت بی‌نهایت میل کند. این نتیجه دور از انتظار نیست چرا که سیستمی با توزیع نمایی هیچ گاه دچار سالخوردگی نمی‌شود و لذا تعویض PM نیاز ندارد.

مثال ۲.۱۰ فرض کنید توزیع طول عمر واپیل با پارامترهای $\beta = 3/5$ و $\lambda = 0.01$ ، آنگاه با فرض $C_1 = 0.01$ و $C_2 = 1$ تابع هزینه در فاصله $(0, T)$ برابر خواهد شد با

$$C_2(T) = \frac{0.01 + (0.01 \times T)^{3/5}}{T}$$

شکل ۲.۱۰ نمودار تابع هزینه را در مقابل T نشان می‌دهد. آنچنان که از نمودار مشخص است تابع هزینه در نقطه $39/86$ مینیمم مقدار خود را می‌گیرد.



شکل ۲.۱۰ نمودار تابع هزینه

۶.۱۰ تعویض سنی-شاخص هزینه

فرض کنید در زمان $t = 0$ سیستم شروع به کار می‌کند. اگر سیستم به سن T رسید آن را با سیستم نو تعویض PM می‌کنیم. همچنین اگر قبل از زمان T دستگاه دچار از کار افتادگی شد، آنرا تعویض (یا تعمیر کامل) ER می‌کنیم. در حالت تعویض PM فرض می‌کنیم هزینه C_r و در حالت تعویض ER هزینه C_s می‌گیریم. معمولاً در این حالت نیز هزینه C_r را کمتر از هزینه C_s است. فرض می‌کنیم زمان تعمیر قابل چشم پوشی باشد. اگر X زمان شکست سیستم باشد و قرار دهیم $Z = \min(X, T)$ آنگاه زمان تجدید است که میانگین آن (از تمرین ... فصل ...) برابر است با

$$E(Z) = \int_0^T (1 - F(x)) dx$$

میزان هزینه در یک دور تجدید برابر است با

$$(1 - F(T))C_s + F(T)C_r$$

صحت این عبارت از این واقعیت ناشی می‌شود که سیستم با احتمال $1 - F(T)$ طول عمرش از T بیشتر است که در این حالت هزینه C_s باید پرداخت شود و با احتمال $F(T)$ قبل از T شکست می‌خورد که در این حالت باید هزینه C_r پرداخت شود. بنابراین میزان متوسط هزینه در واحد زمان مساوی خواهد شد با

$$C_r(T) = \frac{(1 - F(T))C_s + F(T)C_r}{\int_0^T (1 - F(x)) dx}$$

اگر ازتابع هزینه بر حسب T مشتق گرفته و مساوی صفر قرار دهیم به دست می‌آوریم

$$R(T) + h(T) \int_0^T R(t) dt = \frac{C_r}{C_r - C_s} \quad (4.10)$$

شرط بر آن که در آن $C_r \neq C_s$ اگر مقدار بهینه‌ای وجود داشته باشد که تابع هزینه را مینیمم کند باید در (4.10) صدق کند. با توجه بن تساوی (4.10)

همچنین ملاحظه می‌کنیم که مقدار بهینه تابعی از نسبت هزینه‌های PM و ER یعنی $\frac{C_r}{C_s}$ است.

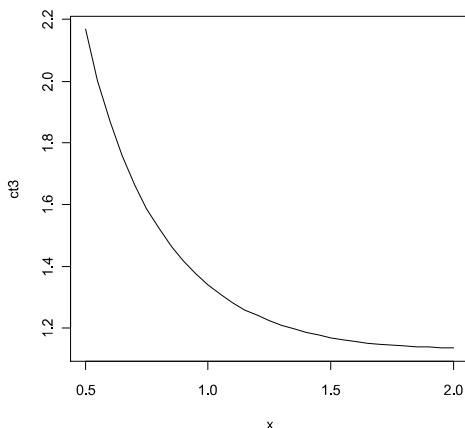
مثال ۷.۱۰ سیستمی را در نظر بگیرید که دارای توزیع طول عمر با تابع چگالی احتمال زیر است

$$f(t) = te^{-\frac{t}{\tau}}, t > 0$$

در این صورت تابع هزینه در تعویض سنی برابر است با

$$\begin{aligned} C_r(T) &= \frac{(1 - F(T))C_s + F(T)C_r}{\int_0^T (1 - F(x)) dx} \\ &= \frac{C_s + (C_r - C_s)e^{-T}}{\int_0^T e^{-x/\tau} dx} \end{aligned}$$

اگر فرض کنیم $C_s = 1$ آنگاه یک نمودار $C_r(T)$ در شکل ۳.۱۰ ارائه شده است.



شکل ۳.۱۰ نمودار تابع هزینه

از نمودار دیده می شود که تابع در نقطه $1/5$ مینیمم می شود. نکته آخر که در اینجا مطرح می کنیم، آن است که هر سه تابع هزینه ($C_\gamma(T)$ ، $C_\gamma(T)$ و $C_\gamma(T)$) دارای این خاصیت هستند که وقتی $T \rightarrow \infty$ هر سه به سمت صفر میل می کند و هنگامیکه $T \rightarrow \infty$ هر سه به سمت $\frac{C_\gamma}{\mu}$ برسی صحت این نتایج را به عنوان تمرین واگذار می کنیم.

۷.۱۰ مسایل

۱. فرآیند تجدیدی را در نظر بگیرید که در آن زمان بین شکستهای دارای توزیع $N(400, 2500)$ است. فرم تابعی تابع توزیع $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ را تعیین کنید. فرم صریح تابع توزیع S_γ را به دست آورید.
۲. برای توزیع S_γ در تمرین ۱ کران ارائه شده در این فصل را تعیین کنید.
۳. فرض کنید توزیع طول عمر یک سیستم F باشد. اگر متوسط تعداد تجدیدها باشد ثابت کنید

$$\sum_{i=1}^n F_i(t) \leq m(t) \leq \sum_{i=1}^n F_i(t) + \sum_{i=n+1}^{\infty} (F(t))^i$$

۴. فرض کنید توزیع دوره تجدید در یک تعمیر کامل با زمان تعمیر تصادفی، $G(\frac{k}{\gamma}, \lambda)$ باشد.

- الف) تابع تجدید $m(t)$ را تعیین کنید.
 ب) در حالت $k=2$ نشان دهید که $m(t) = \lambda t$

۵. با استفاده از کرانهای ارائه شده در تمرین ۳، کرانهای برای تابع هزینه، در تعویض بلوکی با شاخص هزینه به دست آورید.

۶. در تعویض بلوکی با شاخص هزینه نشان دهید اگر تابع نرخ خطر توزیع $h(t) = \alpha t$ باشد و تعمیر مینیمال صورت گیرد تابع هزینه در نقطه $T = \sqrt{\frac{2\gamma}{\alpha}}$ مینیمم می شود که در آن γ نسبت هزینه های ER به PM است.

۷. یک دستگاه تولیدی دارای دو واحد مشابه است که به طور مستقل از یکدیگر عمل می‌کنند. دو شیوه نگهداری برای این دستگاه ارائه شده است.
- (الف) هر واحد را در زمان شکست آن تعویض کنند.
- (ب) در زمان شکست یک واحد، واحد فعال دیگر نیز تعویض شود (یعنی یک تعویض PM صورت گیرد).

هر تعویض کاملاً واحد مربوطه را نو می‌کند. فرض کنید هر واحد تعویض شده یک میلیون و پانصد هزار تومان هزینه در برد دارد. هزینه تعویض واحد سالم به همراه واحد از کار افتاده ۲ میلیون است. اگر توزیع طول عمر ارلاتر با پارامترهای $n = 7$ و $\lambda = 1$ باشد کدام شیوه از شیوه‌های الف و ب را توصیه می‌کنید؟ اگر توزیع طول عمر ارلاتر $n = 4$ و $\lambda = 0.5$ باشد کدام شیوه نگهداری را پیشنهاد می‌کنید؟

۸. در نگهداری سنی با شاخص هزینه اگر توزیع طول عمر وايل با پارامتر شکل $\beta = 3/5$ و $\lambda = 0.9$ باشد و هزینه تعمیر PM ۱ و هزینه ER ۱۰ باشد زمان بهینه نگهداری PM را تعیین کنید. اگر هزینه ER بین (۵, ۲۰) باشد سن بهینه را چه پیشنهاد می‌کنید.