تمرین فصل سوم: مدل‌های ریسک جمعی

۱- مشابه رابطه (۵-۳) را برای تابع مولد تجمعی بدست آورید؟

۲- فرض کنید تعداد تخم‌ها در لانه پرنده یک متغیر تصادفی از توزیع پوآسن با پارامتر λ است. احتمال اینکه یک پرنده ماده از تخم بیرون بیاید برابر P است. توزیع تعداد جوجه‌های ماده در لانه پرنده را تعیین کنید؟

۳- فرض کنید S دارای توزیع پوآسن مرکب با پارامتر $\lambda = 2$ و $P(x) = \frac{x}{10},\ \ x = 1,2,3,4$ باشد. با استفاده از رابطه (۱۰-۳) احتمال $S = s$ را برای $s \leq 4$ بدست آورید؟

۴- نشان دهید که توزیع پوآسن به‌عنوان حد توزیع دوجمله‌ای منفی با پارامترهای (r, p) است، اگر $r \to \infty$ و $p \to 1$ و $r(1-p) = \lambda$ ثابت باشد؟

۵- فرض کنید S_1 دارای توزیع پوآسن مرکب با $\lambda_1 = 4$ و ادعای خسارت‌ها $P_1(j) = \frac{1}{4},\ \mathrm{j} = 0,1,2,3$ و S_2 دارای توزیع پوآسن مرکب با $\lambda_2 = 2$ و ادعای خسارت‌ها $P_2(j) = \frac{1}{2},\ \mathrm{j} = 2,4$ باشد. اگر S_1 و S_2 مستقل باشند، آنگاه توزیع $S_1 + S_2$ را بدست آورید؟

۶- فرض کنید S دارای توزیع پوآسن مرکب با $\lambda = 2$ و $P(x) = \frac{x}{10},\ \ x = 1,2,3,4$ باشد با استفاده از رابطه بازگشتی پانجر احتمال $S = s$ را برای $s \leq 4$ حساب کنید؟

۷- نشان دهید که $E(N) = \frac{a+b}{1-a}$ است که در آن $q_n = P(N = n)$ و q_n مطابق رابطه ۲۶-۳ است؟

۸- فرض کنید N_1، N_2 و N_3 دارای توزیع پوآسن با پارامتر $\lambda = 1$ باشد. با استفاده از سطح نگهداشت $d = 2.5$ مقدار $E[(N_1 + 2N_2 + 3N_3 - d)_+]$ را حساب کنید؟

۹- فرض کنید S دارای توزیع پوآسن مرکب با پارامتر $\lambda = 12$ و توزیع ادعای خسارت‌های $U(0,1)$ باشد، آنگاه $P(S < 10)$ را با استفاده از تقریب CLT گامای تبدیل‌یافته و NP بدست آورید؟

۱۰- پرتفوی متشکل از ۱۰۰ بیمه‌نامه عمر یک ساله را درنظر بگیرید، که به‌طور مساوی بین مبالغ بیمه شده ۱$ و ۲$ واحد و احتمالات فوت در این سال‌ها به‌صورت ۰/۰۱ و ۰/۰۲ تقسیم شده است.

الف: مقدار مورد انتظار و واریانس کل مطالبات $\tilde{S}$ را حساب کنید؟

ب: یک توزیع پوآسن مرکب مناسب S برای تقریب $\tilde{S}$ انتخاب کنید. مقدار مورد انتظار و واریانس آن‌ها را با هم مقایسه کنید.

ج: برای هر دو S و $\tilde{S}$ پارامترهای توزیع گامای تبدیل شده مناسب را تعیین کنید.

۱۱- پرتفویی با ۲ کلاس بیمه‌ای درنظر بگیرید. کلاس i شامل ۱۰۰۰ بیمه‌نامه با اندازه ادعای خسارت $b_i = i$ و احتمال ادعای خسارت ۰/۰۱ برای $i = 1,2$ است. فرض کنید B_i بیانگر تعداد ادعا کلاس i باشد. بنابراین مقدار کل ادعای S را به‌صورت $S = B_1 + 2B_2$ بنوسید و همچنین فرض کنید $N = B_1 + B_2$ تعداد ادعاها را نشان دهد. متغیر تصادفی توزیع دوجمله‌ای مرکب $T = X_1 + \cdots + X_N$ با $P(X_i = 1) = P(X_i = 2) = \frac{1}{2}$ را در نظر بگیرید S و T را با توجه به مقدار ماکزیمم، مقدار مورد انتظار و واریانس توزیع تعداد و شدت ادعای خسارت مقایسه کنید. همین کار را برای B_1 و B_2 که دارای پوآسن با پارامتر $\lambda =$ ۱۰ هستند، انجام دهید.

۱۲- مقدار $P(Z \leq d)$ و حق‌بیمه زیان - بس $E[(Z-d)_+]$ را برای یک ترکیب Z از توزیع‌های نمایی مطابق با رابطه ۹-۳ بدست آورید. همچنین توزیع شرطی $Z - z$ را به شرط $Z > z$ حساب کنید.

۱۳- برای دامنه $y > 0$ و پارامتر شکل $\alpha > 0$ و پارامتر مقیاس $\beta > 0$ متغیر تصادفی Y دارای توزیع وایبل با پارامترهای α و β است که با $weibell(\alpha,\beta)$ نشان می‌دهیم و دارای تابع زیر است:

$$f(y,\alpha,\beta) = \alpha\beta(\beta y)^{\alpha-1}\, e^{-(\beta y)^{\alpha}}$$

الف: تابع توزیع تجمعی CDF را بدست آورید.

ب: نشان دهید $X = (\beta y)^{\alpha}$ دارای توزیع نمایی با پارامتر ۱ است.

ج: برآورد پارامترهای α و β را بدست آورید.

۱۴- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۰۰۰۰ و انحراف معیار ۱۰۰۰ است. حق‌بیمه زیان - بس را برای سطح نگهداشت ۱۳۰۰۰ بدست آورید. همین کار را برای متغیر تصادفی Y که دارای دو گشتاور اول مشابه با X اما میزان چولگی ۱ دارد انجام دهید.

۱۵- اگر $x\sim N(\mu,\sigma^2)$ باشد، نشان دهید:

الف: $\int_{\mu}^{\infty} E(X-t)_+ dt = \frac{1}{4}\sigma^2$

ب: مقدار $E[(x-\mu)_+]$ را حساب کنید.