

齊民要術



دانشگاه اصفهان  
دانشکده مهندسی کامپیوتر  
گروه مهندسی نرم افزار

# مدل کردن مدار الکتریکی به وسیله نظریه گراف

مهرداد قصابی

استاد راهنما

دکتر پیمان ادیبی

شهریور ۱۴۰۱



دانشگاه اصفهان  
دانشکده مهندسی کامپیوتر  
گروه مهندسی نرم افزار

هیأت داوران پروژه کارشناسی آقای / خانم مهرداد قصابی به شماره دانشجویی ۹۷۳۶۱۳۰۶۰  
در رشته مهندسی نرم افزار را در تاریخ ..... با عنوان «مدل کردن مدار الکتریکی به وسیله نظریه گراف» و  
نمره نهایی زیر ارزیابی کرد.

به عدد	به حروف

با نمره نهایی

نام و نام خانوادگی استاد داور:

تاریخ و امضا:

نام و نام خانوادگی استاد راهنما:

تاریخ و امضا:

تقدیم به:

مادرم که همه درد هایم را مرهم است

## سپاس گزاری

سپاس و آفرین خداوندگار جان آفرین راست ، اوی که آدمی را به گوهر خرد آراست.  
در آغاز دستان پدر و مادر نازنینم را به پاس مهر بیکرانیشان به گرمی میفشارم، و از استاد راهنما خود جناب آقای دکتر پیمان ادیبی بابت زمانی که گذاشتند سپاس گزاری میکنم.  
و در پایان، سپاس گزاری میکنم از همه اعضای خانواده دانشکده مهندسی کامپیوتر اصفهان به ویژه دوستانم که بهترین روز های زندگانیم را رقم زدند.

مهرداد قصابی

شهریور ۱۴۰۱

## چکیده

یک مدار الکتریکی، مجموعه ای از عناصر الکتریکی است که توسط سیم به یکدیگر متصل شده اند، هدف از مطالعه یک مدار الکتریکی یافتن متغیر هایی مانند جریان الکتریکی هر عنصر و به طور کلی منطق چیره بر کل مدار است که اصطلاحاً به آن پاسخ مدار میگویند.

دانش محاسبه دانشی است که به یافتن خودکار پاسخ مسائل می پردازد، برای یافتن پاسخ یک مدار الکتریکی به صورت خودکار، نخست بایستی مسئله به صورت ریاضی مدل شود، در این مقاله تلاش شده است که با استفاده از نظریه گراف، مدار الکتریکی را به صورت ریاضی مدل شده و سپس به کمک الگوریتم های گراف و جبر خطی پاسخ آن به صورت خودکار یافت گردد.

واژگان کلیدی    مدار الکتریکی، نظریه گراف، دانش محاسبات، جبر خطی

# فهرست مطالب

ت فهرست تصاویر

ث فهرست الگوریتم‌ها

۱ فصل ۱: دیباچه

۱.۱ هدف پژوهش . . . . . ۱

۲.۱ کاربرد پژوهش . . . . . ۲

۳.۱ ساختار پایان نامه . . . . . ۲

۳ فصل ۲: مدار الکتریکی و منطق چیره بر آن

۱.۲ پیشگفتار . . . . . ۳

۲.۲ تاریخچه و تعریف مدار . . . . . ۳

۳.۲ عناصر یک مدار . . . . . ۴

۱.۳.۲ مقاومت . . . . . ۴

۲.۳.۲ باتری . . . . . ۴

۳.۳.۲ خازن . . . . . ۵

۴.۳.۲ سلف . . . . . ۵

۴.۲ مفاهیم ابتدایی . . . . . ۵

۵.۲ قوانین اصلی مدارهای الکتریکی . . . . . ۶

۱.۵.۲ قانون اهم . . . . . ۶

۲.۵.۲ قوانین کیرشهف . . . . . ۶

۱.۲.۵.۲	قانون جریان کیرشهف	۶
۲.۲.۵.۲	قانون اختلاف پتانسیل کیرشهف	۶
۶.۲	جمع بندی	۷
<b>فصل ۳: نظریه گراف</b>		۸
۱.۳	پیشگفتار	۸
۲.۳	گراف	۸
۳.۳	دور های ساده گراف	۹
۱.۳.۳	پیدا کردن دور های ساده گراف	۹
۴.۳	جمع بندی	۱۰
<b>فصل ۴: معادلات دیفرانسیل و آنالیز عددی</b>		۱۳
۱.۴	پیشگفتار	۱۳
۲.۴	آنالیز عددی	۱۳
۳.۴	دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی	۱۴
<b>فصل ۵: مدل کردن مدار به صورت گراف</b>		۱۶
۱.۵	پیشگفتار	۱۶
۲.۵	گراف کیرشهف	۱۶
۳.۵	رویه یافتن جواب	۱۷
۴.۵	حل یک نمونه از مدار های بدون خازن و سلف	۱۷
۵.۵	حل یک نمونه از مدار RC	۲۲
۶.۵	جمع بندی	۲۳
<b>فصل ۶: اجرای برنامه</b>		۲۴
۱.۶	پیشگفتار	۲۴
۲.۶	مخزن پروژه	۲۴
۳.۶	یافتن خودکار پاسخ مدار	۲۵



فصل ۷:	نتیجه گیری و پیشنهاد ها	۲۸
۱.۷	نتیجه گیری	۲۸
۲.۷	پژوهش های مشابه	۲۸
۳.۷	پیشنهاد برای ادامه پژوهش	۲۹
مراجع		۳۰
مراجع		۳۱

## فهرست تصاویر

۹	یک گراف بدون جهت شامل دو دور ساده	۱.۳
۱۰	درخت پوشای کمینه شکل ۱.۳	۲.۳
۱۰	دو گراف تک ساده دور شکل ۱.۳	۳.۳
۱۵	جواب تخمینی معادله ۲.۴	۱.۴
۱۸	نمونه یک مدار الکتریکی	۱.۵
۱۹	گراف مدل شده شکل ۱.۵	۲.۵
۲۱	جواب مدار شکل ۱.۵	۳.۵
۲۲	یک نمونه مدار RC	۴.۵
۲۲	گراف مدل شده مدار ۴.۵	۵.۵
۲۶	توصیف متنی مدار ۱.۵	۱.۶
۲۷	جواب Gracc برای مدار ۱.۵	۲.۶
۲۹	ساختار جواب دادن به مدار کشیده شده به صورت دستی	۱.۷

## فهرست الگوریتم‌ها

۱۱	الگوریتم پیدا کردن مجموعه دور های ساده گراف	۱.۳
۱۱	الگوریتم کراسکال	۲.۳
۱۱	الگوریتم پریم	۳.۳
۱۲	الگوریتم dfs	۴.۳
۱۴	الگوریتم اویلر	۱.۴
۱۷	الگوریتم حل مدار الکتریکی	۱.۵



# فصل ۱

## دیباچه

### ۱.۱ هدف پژوهش

هدف از این پژوهش، یافتن پاسخ برای مدارهای الکتریکی به صورت خودکار<sup>۱</sup> است، برای یافتن پاسخ هر مسئله به صورت خودکار نیاز است آن مسئله به صورت ریاضی مدل شود، در این مقاله برای مدل کردن مدار الکتریکی به صورت ریاضی از نظریه گراف<sup>۲</sup> استفاده شده است، بدین صورت که گره های مدار الکتریکی به عنوان گره های گراف در نظر گرفته شده و شاخه های مدار به عنوان یال های گراف در نظر گرفته میشود. برای ایجاد یک مدل ریاضی<sup>۳</sup> خوب از مدارهای الکتریکی بایستی تمامی منطق چیره بر مدارهای الکتریکی را در مدل خود بنهانیم، برای اینکار بایستی دانش های مختلفی را در هم آمیزیم، این دانش های در هم آمیخته<sup>۴</sup> عبارت اند از دانش محاسبه،<sup>۵</sup> فیزیک،<sup>۶</sup> جبر خطی،<sup>۷</sup> معادلات دیفرانسل،<sup>۸</sup> نظریه گراف، داده ساختارها<sup>۹</sup> و طراحی الگوریتم.<sup>۱۰</sup>

---

<sup>1</sup> automated

<sup>2</sup> graph theory

<sup>3</sup> mathematical model

<sup>4</sup> multidisciplinary science

<sup>5</sup> Computational science

<sup>6</sup> physic

<sup>7</sup> linear algebra

<sup>8</sup> differential equation

<sup>9</sup> data structure

<sup>10</sup> algorithm design

## ۲.۱ کاربرد پژوهش

با پیشرفت چشمگیر قدرت محاسبه رایانه ها در قرن بیستم، خودکار سازی پاسخ به مسائل و امکان یافتن جواب ها به صورت خودکار گسترش یافت. از این دسته تلاش ها میتوان به مسئله دهم هیلبرت<sup>۱۱</sup> اشاره کرد. یافتن خودکار پاسخ مدار های الکتریکی نیز یکدیگر از این مسئله هاست کما اینکه امروزه نرم افزار های زیادی مانند pypice به وجود آمده اند که برنامه نویسان را در حل پیچیده ترین مدار ها یاری میکنند.

پژوهش حاضر تلاشش بر بهبود الگوریتم های حل مدار و مدل کردن مدار الکتریکی به صورت یک داده ساختار است به گونه ای که بتوان از الگوریتم های ساختمان های داده و نظریه گراف در حل مدار های الکتریکی بهره جست.

نتیجه نهایی این پروژه نیز ایجاد کتابخانه حل مدار های الکتریکی در پایتون است که برنامه نویسان را در زمینه حل مدار ها یاری می رساند.

## ۳.۱ ساختار پایان نامه

ساختار پایان نامه بدین گونه است که در فصل دوم، سوم و چهارم به ترتیب به استفاده از دانش های فیزیک، نظریه گراف و جبر خطی پرداخته شده و سپس در فصل پنجم تلاش بر درهم آمیزی دانش های یاد شده برای مدل کردن مدار الکتریکی و یافتن پاسخ آن است.

در فصل ششم به اجرای برنامه پرداخته، و نهایتاً در فصل هفتم که فصل پایانی است نتیجه گیری انجام میشود و پیشنهادهایی برای ادامه پژوهش داده میشود.

<sup>۱۱</sup> در سال ۱۹۴۴ امیل لئون پست اثبات کرد که مسئله دهم هیلبرت تصمیم پذیر نیست بنابراین در این دسته از مسائل منظور از خودکار سازی یافتن پاسخ به معنای کمک گرفتن از قدرت محاسباتی رایانه است

## فصل ۲

# مدار الکتریکی و منطق چیره بر آن

### ۱.۲ پیشگفتار

از آنجایی که هدف ساخت یک مدل برای مدار های الکتریکی است توضیح مفاهیم و قوانین ابتدایی مدار های الکتریکی بسیار ضروری میباشد، زیرا این مفاهیم و قوانین بایستی به مدل ما که خود یک مفهوم مجرد<sup>۱</sup> است نیز چیره باشند؛ همچنین تاریخچه کوتاهی در ابتدای فصل برای فهم بهتر آمده است.

### ۲.۲ تاریخچه و تعریف مدار

شاید آلساندرو ولتا را بتوان نخستین فردی نامید که در قرون معاصر بر روی مدار های الکتریکی کار کرده است، در ابتدای قرن نوزدهم او دریافت که با متصل کردن دو کاسه نمک به وسیله نوار های فلزی میتواند جریان الکتریکی را بین آنها جاری کند. امروزه تعریف مدار الکتریکی نیز همین است مجموعه ای از عناصر الکتریکی است<sup>۲</sup> که توسط یک رسانا به یکدیگر متصل شده اند و بین آنها جریان الکتریکی مستقیم جاری است. [۲]

---

<sup>۱</sup> منظور ارتباط این مفهوم با ریاضیات مجرد abstract mathematics است.  
<sup>۲</sup> در آزمایش ولتا کاسه های نمک نقش این عناصر را بازی میکردند و امروزه قطعات مختلف الکتریکی

## ۳.۲ عناصر یک مدار

عناصر الکتریکی مدار، اجزایی از مدار هستند که تغییری در انرژی مدار به وجود میاورند که خود به دو دسته عناصر کنش پذیر و عناصر کنش ناپذیر تقسیم میشوند. از عناصر کنش ناپذیر میتوان منبع ولتاژ، منبع جریان و از عناصر کنش پذیر میتوان مقاومت، سلف و خازن را نام برد. در همه این عناصر سه کمیت اصلی وجود دارد که عبارت اند از [۲]

- نیرو محرکه الکتریکی: نیرویی که برای حرکت یک واحد شارژ نیاز است، واحد آن ولت می باشد.
- مقاومت الکتریکی: توانایی جلوگیری از عبور جریان الکتریکی، واحد آن اهم می باشد.
- جریان الکتریکی: نرخ تغییر شارژ در سیم، واحد آن امپر میباشد.

## ۱.۳.۲ مقاومت

مقاومت یکی از عناصر کنش ناپذیر مدار است که باعث افت جریان در مدار میشود، در واقع مقاومت یک مصرف کننده است که انرژی تولیدی توسط مدار را استفاده میکند.

## ۲.۳.۲ باتری

باتری نیز یکی از عناصر کنش ناپذیر مدار الکتریکی است که باعث به وجود آمدن انرژی در مدار میشود. از آنجایی که باتری غیر ایده آل<sup>۳</sup>، دارای مقاومت درونی است باتری با افت ولتاژ مواجه میشود در نتیجه یک غیر ایده آل مانند یک باتری ایده آل به همراه یک مقاومت رفتار میکند.

$$V = \epsilon - Ir \quad (۱.۲)$$

<sup>۳</sup> به باتری که مقاومت درونی نداشته باشد باتری ایده آل میگویند.



### ۳.۳.۲ خازن

خازن یا انباره همانطور که از اسمش پیداست یکی از اجزای کنش پذیر<sup>۴</sup> مدار است که انرژی را در خود ذخیره میکند مدار هایی که شامل خازن و مقاومت هستند RC نامیده میشوند که از جبر خطی پیروی میکنند.

$$I = C \frac{dV}{dt} \quad (۲.۲)$$

### ۴.۳.۲ سلف

سلف یا سیم پیچ<sup>۵</sup> یکی از عناصر کنش پذیر مدار الکتریکی است که انرژی را به صورت مغناطیسی ذخیره میکند. مدار هایی که شامل سلف و مقاومت هستند RL نامیده میشود. مدار های RL نیز مانند مدار های RC از منطق جبر خطی پیروی میکنند.

$$V = L \frac{dI}{dt} \quad (۳.۲)$$

## ۴.۲ مفاهیم ابتدایی

همانطور که قبلا اشاره شد مدار مجموعه ای از قطعات الکتریکی است که به هم دیگر توسط سیم متصل اند، این شبکه از قطعات الکتریکی دارای مفاهیم ضمنی دیگری نیز هست که عبارت اند از [۸]

- شاخه : نمایانگر یک تک قطعه الکتریکی
- گره : محل اتصال دو یا چند شاخه به یکدیگر.
- مش: هر مسیر بسته در مدار الکتریکی.

<sup>۴</sup> منظور از کنش پذیری همان passive بودن یا به عبارت دیگر غیرفعال بودن است.  
<sup>۵</sup> در زبان انگلیسی به آن inductor میگویند

## ۵.۲ قوانین اصلی مدارهای الکتریکی

### ۱.۵.۲ قانون اهم

نسبت اختلاف پتانسیل با جریان الکتریکی یک ماده در دمای ثابت همیشه برابر است این کمیت مقاومت الکتریکی آن ماده نامیده میشود که همانطور که پیشتر یاد شد یکای آن به افتخار گئورگ زیمون اهم، اهم نام گرفت.

$$R = \frac{V}{I} \quad (۴.۲)$$

### ۲.۵.۲ قوانین کیرشهف

قوانین کیرشهف که از دو قانون جریان کیرشهف و قانون اختلاف پتانسیل کیرشهف تشکیل شده خود صورتی از قانون پایستگی انرژی هستند؛ این قوانین نقش بسیار مهمی را در یافتن پاسخ مدار الکتریکی بازی می کنند.

#### ۱.۲.۵.۲ قانون جریان کیرشهف

قانون جریان کیرشهف که به صورت مخفف kcl خوانده میشود بیان میکند که مجموع جریان های ورودی و خروجی<sup>۶</sup> یک شاخه برابر صفر است. [۴]

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0 \quad (۵.۲)$$

#### ۲.۲.۵.۲ قانون اختلاف پتانسیل کیرشهف

قانون اختلاف پتانسیل کیرشهف که به صورت مخفف kvl خوانده میشود بیان میکند که در یک حلقه بسته از مدار مجموع اختلاف پتانسیل عناصر مدار برابر با صفر است. [۴]

$$\sum_{k=1}^n V_k = 0 \quad (۶.۲)$$

<sup>۶</sup> جریان ورودی و خروجی در علامت متفاوت هستند معمولاً جریان خروجی را منفی و جریان ورودی را مثبت در نظر میگیرند

## ۶.۲ جمع بندی

مفاهیم و قوانین فیزیکی زیر که در این فصل به آنها پرداخته شد طبیعت مدار های الکتریکی هستند و برای پیدا کردن جواب درست بایستی حتما در مدل نهایی که یک مفهوم انتزاعی است لحاظ شوند.

- کمیت های الکتریکی مانند نیروی محرکه الکتریکی، مقاومت و جریان الکتریکی
- قوانین چیره بر قطعات الکتریکی مانند خازن، باتری، سلف و مقاومت
- مفاهیم ابتدایی مدار الکتریکی مانند شاخه، گره و مش
- قوانین ابتدایی مدار های الکتریکی مانند قوانین اهم و کیرشهف

## فصل ۳

# نظریه گراف

### ۱.۳ پیشگفتار

امروزه نظریه گراف و الگوریتم های آن نقش مهمی را در بسیاری از علوم بازی میکنند، بسیاری از مفاهیم پیچیده از علوم فیزیک و شیمی گرفته تا علوم کامپیوتر توسط نظریه گراف توصیف میشود. در این فصل علاوه بر مرور مختصر بر مفاهیم گراف، به الگوریتم هایی که در یافتن پاسخ خودکار مدار به ما یاری می رسانند پرداخته میشود.

### ۲.۳ گراف

گراف یک جفت مرتب<sup>۱</sup> به صورت  $G = (V, E)$  است به گونه ای که  $V$  مجموعه ای از راس های گراف و  $E \subseteq \{(x, y) | (x, y) \in V^2\}$  مجموعه یال های گراف است. با توجه به گستردگی نظریه گراف انواع زیادی از مفاهیم و الگوریتم ها درباره گراف موجود است ما در این فصل به توضیح آنچه که در پروژه استفاده شده بسنده خواهیم کرد.

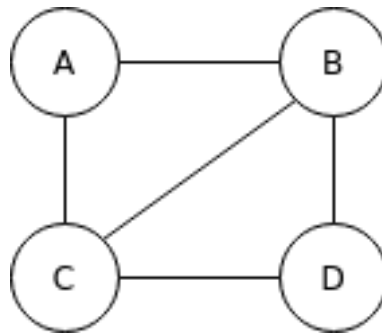
---

<sup>۱</sup> گراف میتواند جهت دار یا بدون جهت باشد اگر گراف یاد شده بی جهت باشد استفاده از عبارت «جفت» کافی است در غیر این صورت بایستی عبارت «جفت مرتب» را به کار برد.

### ۳.۳ دورهای ساده گراف

اگر در یک گراف مجموعه ای از یال ها از یک راس مشخص شروع شده و با همان راس یاد شده خاتمه یابد به آن مجموعه یک دور میگویم. به دوری یک دور ساده<sup>۲</sup> گوئیم هر آنگاه به جز راس نخستین و پایانی هیچ راس تکراری دیگری موجود نباشد یا به عبارت دیگر نتوان دور را به دور های کوچکتری شکست.

به عنوان مثال در شکل ۱.۳ دور ABDCA یک دور ساده نیست چرا که میتواند به دو دور ساده ABCA و BDCB شکسته شود.



شکل ۱.۳: یک گراف بدون جهت شامل دو دور ساده

### ۱.۳.۳ پیدا کردن دورهای ساده گراف

پیدا کردن تمامی دور های ساده گراف از آن جهت برای ما اهمیت دارد که در مدل نهایی هر دور ساده باعث یافتن یکی از KVL موجود در مدار میشود.

برای یافتن مجموعه دور های ساده موجود در گراف ابتدا نیاز به یافتن پوشای کمینه<sup>۳</sup> گراف یاد شده داریم، برای اینکار الگوریتم های زیادی از جمله الگوریتم کراسکال<sup>۴</sup> و الگوریتم پریم<sup>۵</sup> که در قسمت های ۲.۳ و ۳.۳ آمده است طراحی شده اند، البته در پروژه حاضر از کتابخانه networkx پایتون برای پیاده سازی استفاده شده است.

میتوان اثبات کرد که اگر یکی از یال های حذف شده را به درخت پوشای کمینه بیفزاییم یک و تنها یک دور ساده ایجاد میشود که ما با الگوریتم DFS<sup>۶</sup> که در قسمت ۴.۳ آمده است<sup>۶</sup> آن دور را می یابیم، سپس با افزودن

<sup>۲</sup>simple cycle

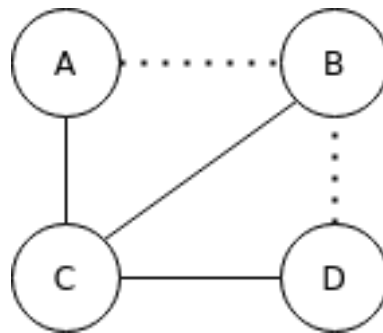
<sup>۳</sup>minimum spanning tree

<sup>۴</sup>kruskal

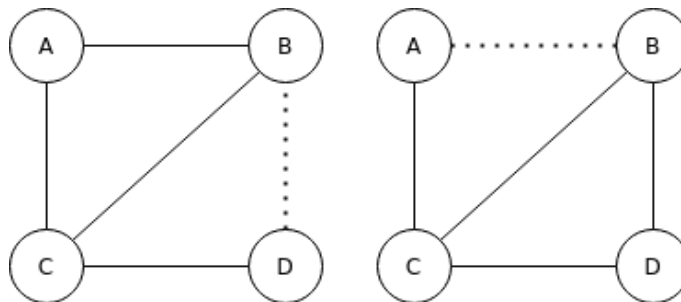
<sup>۵</sup>prim

<sup>۶</sup>depth first search

تمامی یال ها به صورت تک به تک تمامی دور های ساده یافت میشود.  
 به عنوان نمونه اگه گراف شکل ۱.۳ ورودی ما باشد درخت پوشای کمینه ما شکل ۲.۳ خواهد بود که دارای دو یال قطع شده AB و BD است. که با نقطه چین نمایش داده شده اند. با اضافه کردن یال های قطع شده به صورت تک به تک دو گراف شکل ۳.۳ پدید می آیند که هر کدام دارای دارای یک دور ساده هستند سپس همانطور که یاد شد با الگوریتم DFS دور های مورد نظر را می یابیم. الگوریتم توضیح داده شده به صورت شبه کد در قسمت ۱.۳ آمده است. [۳]



شکل ۲.۳: درخت پوشای کمینه شکل ۱.۳



شکل ۳.۳: دو گراف تک ساده دور شکل ۱.۳

## ۴.۳ جمع بندی

در این فصل به مفاهیم نظریه گراف پرداخته شد که در فصل بعدی نقش اصلی را در مدل کردن مدار های الکتریکی به شکل انتزاعی بازی میکنند؛ همانطور که پیشتر اشاره شد برای به دست آوردن پاسخ مدار ما نیازمند پیدا کردن تمامی قوانین kvl هستیم، با در نظر گرفتن مدار به صورت گراف این مسئله به شکل یافتن تمامی دور های ساده گراف در می آید که در الگوریتم (۱.۳) به آن پرداخته شده است.

---

### الگوریتم ۱.۳ پیدا کردن مجموعه دور های ساده گراف

---

ورودی: graph  
 خروجی: simple cycle entity  
 ۱: create simple-cycles entity  $s = \{\}$   
 ۲:  $mst = \text{kruskal}(\text{graph})$   
 ۳: store in stack  $s = \text{graph} - mst$   
 ۴: store  $s.\text{pop}()$  in edge  $e$   
 ۵: create new graph  $g = mst + e$   
 ۶: define cycle  $c = \text{dfs}(g)$   
 ۷: add cycle  $c$  to entity  $s$   
 ۸: if stack  $s$  terminate the program otherwise return to instruction number 4

---



---

### الگوریتم ۲.۳ الگوریتم کراسکال

---

ورودی: graph  
 خروجی: minimum spanning tree  
 ۱:  $A = \{\}$   
 ۲: For each vertex  $v$  in graph:  
   ۳: MAKE-SET( $v$ )  
 ۴: For each edge  $(u, v)$  in graph ordered by increasing order by weight( $u, v$ ):  
   ۵: if FIND-SET( $u$ )  $\neq$  FIND-SET( $v$ ):  
     ۶:  $A = A \text{ union } (u, v)$   
     ۷: UNION( $u, v$ )  
 ۸: return  $A$

---



---

### الگوریتم ۳.۳ الگوریتم پریم

---

ورودی: graph  
 خروجی: minimum spanning tree  
 ۱:  $A = \{\}$   
 ۲:  $U = \{1\}$   
 ۳: while  $(U \neq V)$   
   ۴: let  $(u, v)$  be the lowest cost edge such that  $u$  in  $U$  and  $v$  in  $V - U$ :  
     ۵:  $T = T \text{ union } (u, v)$   
     ۶:  $U = U \text{ union } v$

---

---

الگوریتم ۴.۳ dfs

ورودی: graph

خروجی: Stack  $S = \{\}$ ۱: for each vertex  $u$ , set  $visited[u] = false$ ۲: push  $v$  to  $S$ ۳: while ( $S$  is not empty) do۴:  $u = S.pop()$ ۵: while ( $S$  is not empty) do۶: if (not  $visited[u]$ ) then۷:  $visited[u] := true$ ۸: for each unvisited neighbour  $w$  of  $u$ ۹:  $S.push(w)$ 

---



## فصل ۴

# معادلات دیفرانسیل و آنالیز عددی

### ۱.۴ پیشگفتار

از آنجایی که برای حل مدار های RC ، RL و RCL نیازمند حل معادلات دیفرانسیل توسط کامپیوتر هستیم به همین خاطر در این فصل نگاه بسیار کوتاهی به الگوریتم های آنالیز عددی آن انداخته شده است؛ البته در این پروژه از کتابخانه scipy پایتون استفاده شده که این الگوریتم ها را به صورت از قبل پیاده شده در خود دارد.

### ۲.۴ آنالیز عددی

معادله دیفرانسیل ۱.۴ را در نظر بگیرید شیوه های زیادی برای حل آن معرفی شده اند؛ اما معادلات زیادی وجود دارند که هنوز برای آن ها راه حلی پیدا نشده است اما الگوریتم هایی مانند الگوریتم اوایلر ۱.۵ وجود دارد که به کمک محاسبات کامپیوتری بتوان جواب معادله یاد شده را تخمین زد. [۷]

$$e^t = \frac{de^t}{dt} \quad (1.4)$$

## الگوریتم ۱.۴ الگوریتم اوایلر

ورودی: equation and its initial condition, number of step

خروجی: estimated answer function

۱: Calculate step size  $(h) = (x_n - x_0)/n$ ۲: Set  $i=0$ ۳: for  $(i = 0, i < \text{number of step}, i++)$ ۴:  $y_n = y_0 + h * f(x_0 + i*h, y_0)$ ۵:  $y_0 = y_n$ ۶: Display  $y_n$  as result

## ۳.۴ دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی

دستگاه معادلات دیفرانسیل ۲.۴ را در نظر بگیرید، برای سادگی میتوان آن را به صورت یک معادله ماتریسی دیفرانسیل که در فرمول ۳.۴ آمده است نوشت.

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 3x_1(t) + 2x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + 5x_2(t) \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

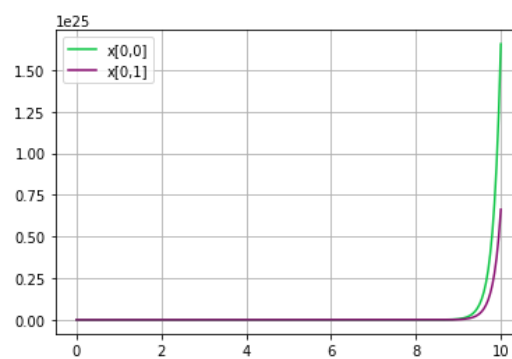
معادله بالا با استفاده از الگوریتم های آنالیز عددی و توسط کامپیوتر در شکل ۱.۴ تخمین زده شده است؛ یعنی باید با دریافت یک ماتریس  $n \times n$  به عنوان ضرایب و یک ماتریس  $1 \times n$  به عنوان شرایط اولیه بتوانیم یک دستگاه معادلات دیفرانسیل  $n \times n$  را حل کنیم.

همانطور که پیشتر اشاره شد برای جواب دادن به این مسئله از کتابخانه scipy استفاده شده است. برای دیدن مخزن آن به این پیوند مراجعه کنید.

```

x0 = np.array([[10.0, 4.0],
               [0.0, 0.0]])
a = np.array([[3, 2],
               [1, 5]])
solve_matrix_eq(a,x0)

```



شکل ۱.۴: جواب تخمینی معادله ۲.۴

## فصل ۵

# مدل کردن مدار به صورت گراف

### ۱.۵ پیشگفتار

در سه فصل پیش بر آنچه که برای مدل کردن مدار های الکتریکی به صورت گراف نیاز داریم مرور کوتاهی شد؛ در این فصل با در آمیختن این دانش ها تلاش میشود مدار را به صورت ریاضی مدل کرده و به صورت خودکار پاسخ آن را پیدا کنیم.

### ۲.۵ گراف کیرشهف

با در نظر گرفتن گره های مدار به عنوان راس های گراف، و شاخه های مدار به عنوان یال های گراف میتوانیم مدار را به صورت یک گراف مدل کنیم. در این مدل اجزای الکتریکی مدار به عنوان edge attribute در نظر گرفته میشوند.

## ۳.۵ رویه یافتن جواب

پس از مدل کردن مدار به صورت گراف، قوانین جریان و ولتاژ کیرشهف را اعمال میکنیم تا به یک معادله ماتریسی<sup>۱</sup> برسیم حل این معادله ماتریسی جریان هر شاخه مدار را به ما خواهد داد. [۶] [۵] در ادامه با حل چندین نمونه سعی در روشنتر شدن موضوع میکنیم.

### الگوریتم ۱.۵ الگوریتم حل مدار الکتریکی

ورودی: Electrical circuit

خروجی: Electrical circuit answer

۱: model the circuit as a kirchhoff graph

۲: find kirchhoff graph simple cycles

۳: determine kvl rules from simple cycles

۴: determine kcl rules from nodes

۵: create matrix equation from kvl and kcl rules

۶: solve matrix equation to find Electrical circuit answer

## ۴.۵ حل یک نمونه از مدارهای بدون خازن و سلف

به عنوان نمونه مدار شکل ۱.۵ را در نظر بگیرید. اگر نقاط A,B,C,D,E,F,G را به عنوان راس های گراف انتخاب کنیم<sup>۲</sup> گراف مدل شده<sup>۳</sup> شکل ۲.۵ میشود.<sup>۴</sup>

پس از مدل کردن مدار به صورت گراف نوبت به یافتن دور های ساده گراف مدل شده میشود، طبق الگوریتم ۱.۳ تمامی دور های ساده گراف را میابیم. این دور های ساده عبارت اند از ABEDA ، BCFEB و DEFD .

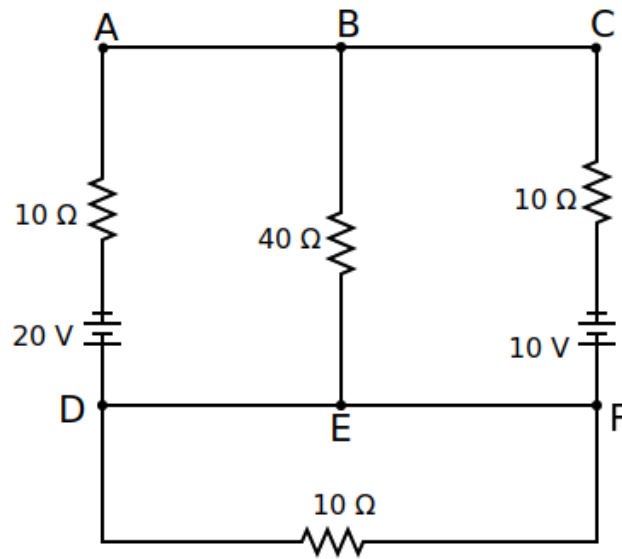
این دور های ساده هر یک مشخص کننده یک معادله KVL هستند<sup>۵</sup>، بدین صورت که مجموع اختلاف پتانسیل<sup>۱</sup> این معادله ماتریسی در مورد مدار های دارای خازن و سلف یک معادله دیفرانسیل ماتریسی است در غیر این صورت یک معادله جبری ماتریسی است.

<sup>۲</sup> هر نقطه ای از مدار را میتوان به دلخواه انتخاب کنید به شرطی که نتیجه حاصل یک گراف ساده شود.

<sup>۳</sup> به آن گراف کیرشهف نیز میگویند.

<sup>۴</sup> جهت دهی گراف را نیز به دلخواه انجام دهید؛ اگر جهت اشتباه را انتخاب کنید جریان آن شاخه صرفاً منفی میشود.

<sup>۵</sup> هر دور در گراف مدل شده چه ساده و چه غیر ساده بیانگر یک قانون kvl است ولی قانونی که از یک دور غیر ساده بدست می آید به از لحاظ جبری مستقل از دور های ساده تشکیل دهنده آن نیست.



شکل ۱.۵: نمونه یک مدار الکتریکی

های یک دور بایستی برابر صفر شود، به عنوان نمونه برای دور ABEDA داریم:

$$\Delta V_{AB} + \Delta V_{BE} + \Delta V_{ED} + \Delta V_{DA} = 0 \quad (1.5)$$

طبق عناصر موجود در هر شاخه میدانیم که

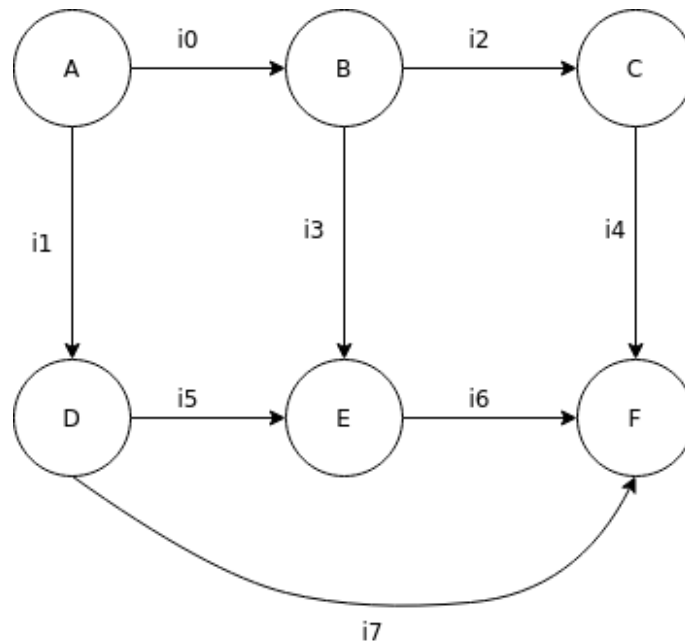
$$\Delta V_{AB} = 0, \Delta V_{BE} = -40 I_3, \Delta V_{ED} = 0, \Delta V_{DA} = -20 + 10 I_1^6 \quad (2.5)$$

با جایگذاری معادله ۲.۵ در ۵.۵ به این نتیجه میرسیم:

$$10 I_1 - 40 I_3 = 20 \quad (3.5)$$

با تکرار مراحل فوق برای دور های ساده BCFEB و DEFD دو معادله kvl دیگر پیدا میشود. این دو معادله،

<sup>۶</sup> دقت کنید که چون در شکل ۲.۵ جهت جریان  $i_1$  از A به D است بدین خاطر علامت به طور کلی قرینه شده است.



شکل ۲.۵: گراف مدل شده شکل ۱.۵

عبارت اند از

$$\begin{cases} 10I_V = 0 \\ -40I_3 + 10I_4 = +10 \end{cases} \quad (4.5)$$

با یافتن تمامی قوانین kvl نوبت به یافتن قوانین kcl می‌رسد، هر راس از گراف بیانگر یک قانون kcl است ولی از n قانون موجود تنها n-1 قانون از لحاظ جبری مستقل<sup>۷</sup> اند و قانون n ام، جبراً وابسته به n-1 معادله پیشین است. به عنوان نمونه معادله kcl مربوط به راس A<sup>۸</sup> برابر است با:

$$-I_0 - I_1 = 0 \quad (5.5)$$

با بدست آوردن معادلات kcl مربوط به راس های دیگر حال بایستی اقدام به حل یک دستگاه معادلات بکنیم،

<sup>۷</sup> استقلال جبری یک معادله از چندین معادله دیگر بدین معنی است که معادله یاد شده یک ترکیب خطی از دیگر معادلات نباشد.  
<sup>۸</sup> در نظر داشته باشید که طبق شکل ۱.۵ جهت جریان I0 و I1 اینگونه تعریف شده است، این جهت ها ممکن است اشتباه باشد و اگر اینطور باشد جواب بدست آمده متغی خواهد شد معنی آن این است که جریان با همین مقدار در خلاف جهت یاد شده وجود دارد.

برای این مثال دستگاه بدین صورت است:

$$\left\{ \begin{array}{l} 10I_1 - 40I_3 = 20 \\ 10I_V = 0 \\ -40I_3 + 10I_4 = 10 \\ -I_o - I_1 = 0 \\ I_o - I_2 - I_3 = 0 \\ +I_2 - I_4 = 0 \\ +I_1 - I_5 = 0 \\ +I_3 + I_5 - I_6 = 0 \end{array} \right. \quad (6.5)$$

از آنجایی که هر دستگاه معادلات خود یک معادله ماتریسی است پس داریم:

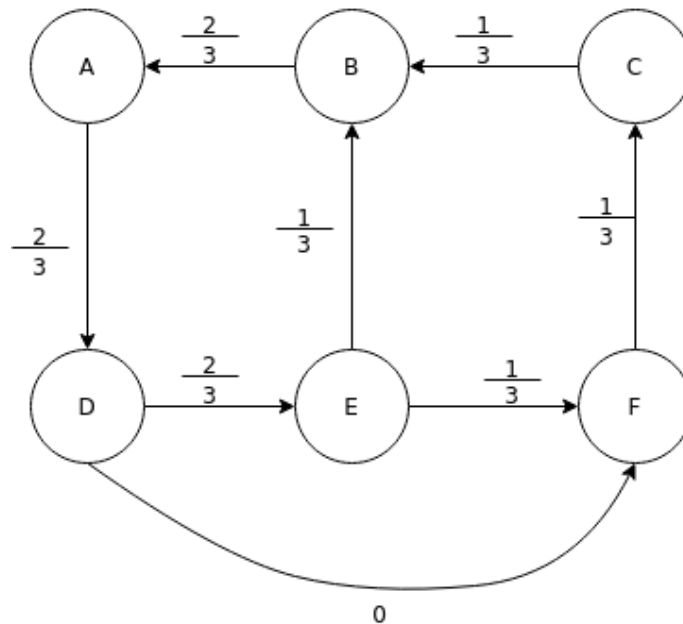
$$\begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & -40 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -40 & +10 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_o \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.5)$$



با حل معادله فوق نتیجه میشود:

$$\begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (۸.۵)$$

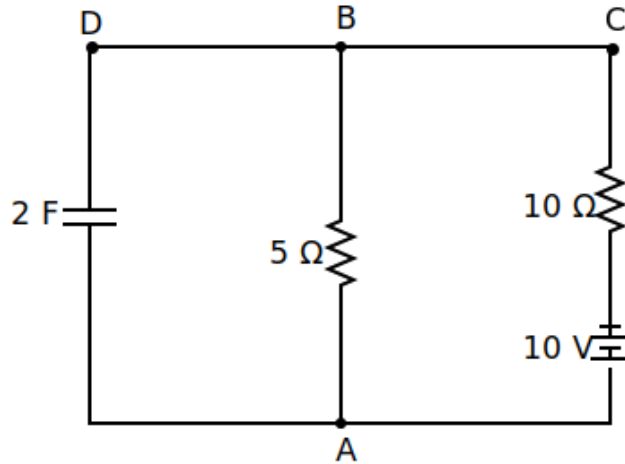
بدین گونه جریان هر شاخه پیدا میشود، همانطور که پیشتر یاد شد وجود علامت منفی به این معناست که جریان در خلاف جهت گمان شده وجود دارد. گراف کیرشهف پس از یافتن جواب را در شکل ۳.۵ میتوانید مشاهده کنید.



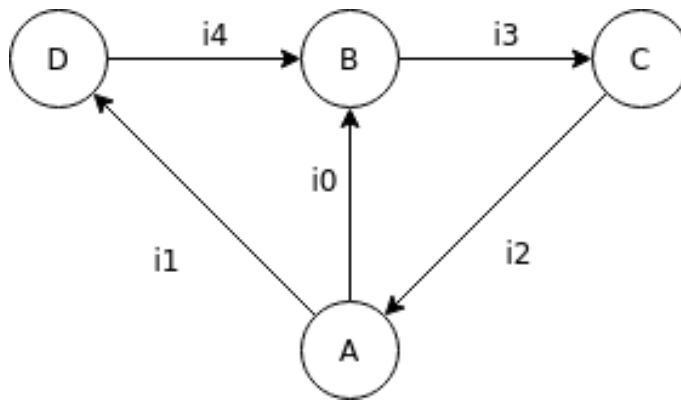
شکل ۳.۵: جواب مدار شکل ۱.۵

## ۵.۵ حل یک نمونه از مدار RC

مدار شکل ۴.۵ و گراف مدل شده آن را در نظر بگیرید؛ می‌خواهیم با روندی مشابه با مثال قبل اقدام به حل آن



شکل ۴.۵: یک نمونه مدار RC



شکل ۵.۵: گراف مدل شده مدار ۴.۵

بکنیم؛ وقتی قانون kvl را برای حلقه ABDA بنویسیم به معادله ۹.۵ می‌رسیم که یک معادله دیفرانسیلی است.<sup>۹</sup>

$$-5I_0(t) + \frac{1}{2} \int I_2(t) dt = 0 \quad (9.5)$$

<sup>۹</sup> در مدارهای RC، RL یا RCL جریان هر شاخه در طول زمان ثابت نیست به همین خاطر در معادله ۹.۵ جریان‌های هر شاخه به صورت یک متغیر وابسته به زمان در نظر گرفته شده‌اند.

همچنین ممکن است با وجود خازن های دیگر در شاخه های دیگر معادلات دیفرانسیل دیگری نیز موجود باشد؛ پس بایستی اقدام به حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل بکنیم. برای این مدار دستگاه معادلات در ۱۱.۵ آمده است.

$$\begin{cases} -5I_o(t) - \frac{1}{4} \int I_1(t) dt = 0 \\ -5I_o(t) - 10I_2(t) - 10 = 0 \\ I_o(t) - I_2(t) + I_4(t) = 0 \\ I_2(t) - I_3(t) = 0 \\ I_1(t) - I_4(t) = 0 \end{cases} \quad (10.5)$$

که با حل آن خواهیم داشت:

$$\begin{cases} I_o(t) = \frac{10}{9} + \frac{4}{9}i_1(t) \\ I_1(t) = -\frac{40}{9}e^{-t} \\ I_2(t) = \frac{10}{9} - \frac{5}{9}i_1(t) \\ I_3(t) = \frac{10}{9} - \frac{5}{9}i_1(t) \\ I_4(t) = i_1 \end{cases} \quad (11.5)$$

## ۶.۵ جمع بندی

برای یافتن پاسخ یک مدار الکتریکی به صورت خودکار نیازمند توسعه مدل کلی برای آن هستیم؛ در این فصل تلاش شد چگونگی مدل کردن توضیح داده شده و سپس روند اجرای این مدل بر چندین نمونه بررسی شود.

## فصل ۶

### اجرای برنامه

#### ۱.۶ پیشگفتار

در این فصل تلاش میشود که شیوه اجرا برنامه و خروجی گرفتن از آن توضیح داده شود؛ لازم به یادآوریست همانطور که در پیشنهاد آمده است تمرکز این پروژه طراحی یک اپلیکیشن نیست و هدف تنها ارائه یک مدل ریاضی برای مدارهای الکتریکی می باشد، همچنین به همین دلیل محیط google colab برای تست کردن مدل انتخاب شده است.

#### ۲.۶ مخزن پروژه

تمام برنامه ها و اسناد موجود برای این پروژه از طریق آدرس پیوند شده قابل دسترسی است، همچنین در فایل README.md توضیحات کوتاهی در مورد شیوه اجرا داده شده است، که البته در این فصل به توضیحات بیشتری پرداخته خواهد شد.

## ۳.۶ یافتن خودکار پاسخ مدار

نمونه ۴.۵ را در نظر بگیرید، میخواهیم پاسخ این مدار را به کمک برنامه نوشته شده بدست بیاوریم؛ نخست بایستی کتابخانه ای که نوشته شده را توسط دستور `pip install Gracc`<sup>۱</sup> نصب کنیم. سپس بایستی به گونه ای یک مدار الکتریکی را به عنوان ورودی به حل کننده بدهیم؛ برای اینکار تصمیم گرفته شده است که مدار الکتریکی به شکل یک متن توصیف شود و آن متن به عنوان ورودی به حل کننده داده شود.

شیوه اینکار بدین صورت است که در خط اول  $n$  که تعداد راس هاست و با یک فاصله  $m$  که تعداد یال هاست نوشته میشود. و در  $m$  خط بعدی شیوه اتصال راس ها می آید بدین گونه که  $x\ y\ z\ a\ b\ c$  نمایانگر این است که راس شماره  $x$  و راس شماره  $y$  به یکدیگر متصل اند؛ و در بین آنها یک مقاومت  $z$  اهمی، یک باتری  $a$  ولتی، یک خازن  $b$  فارادی و یک سلف  $c$  هنری موجود است؛ در صورت عدم وجود یکی از عناصر یک شده به جای مقدار آن صفر گذاشته و در صورت وجود چندین عنصر از یک نوع معادل آن را قرار میدهم.

مدار ۱.۵ و گراف کیرشهف آن ۲.۵ را در نظر بگیرید، میخواهیم این مدار را به صورت متن توصیف کنیم؛ آشکار است که این گراف شش راس و هشت یال دارد و مثلاً بین یال شماره صفر<sup>۲</sup> که  $A$  باشد و یال شماره سه که  $D$  باشد مسیری موجود است و آن مسیر دارای یک مقاومت ده اهمی و یک باتری بیست ولتی است؛ در نظر داشته باشید چون در گراف کیرشهف این مدار ۲.۵ مسیر از  $A$  به  $D$  در نظر گرفته شده و سمت منفی باتری بدین سو است بایستی مقدار آن منفی بیست ولت درج شود؛ اگر برای همه یال ها این روند را تکرار کنیم توصیف متنی این مدار بدین صورت ۱.۶ میشود: پس از توصیف متنی مدار بدین صورت ۱.۶ آنرا اجرا کرده و جواب را می یابیم. جواب نهایی در شکل ۲.۶ آمده است.<sup>۳</sup> میتوانید آن را با جوابی که در ۲.۵ به صورت دستی بدست آوردیم مقایسه کرده و از درستی جواب اطمینان حاصل کنید.

<sup>۱</sup> Gracc نام پروژه حاضر است که خود مخفف واژه های Graph و circuit است.

<sup>۲</sup> به صورت دلخواه شماره گذاری کنید!!

<sup>۳</sup> گراف بالایی خود مدار و پایینی جواب آن است

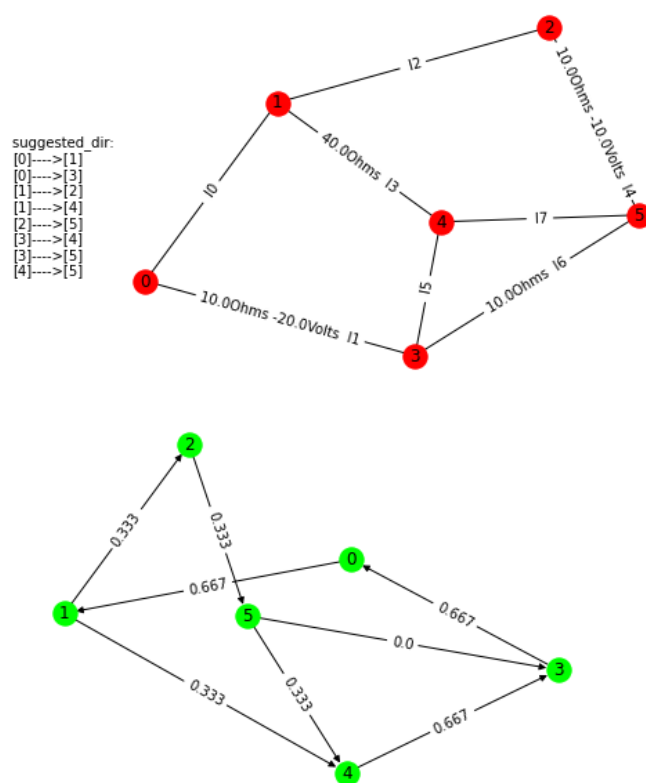
```

1      6 8
2      0 1 0 0 0 0
3      0 3 10 -20 0 0
4      1 4 40 0 0 0
5      1 2 0 0 0 0
6      2 5 10 -10 0 0
7      3 4 0 0 0 0
8      3 5 10 0 0 0
9      4 5 0 0 0 0

```

### شکل ۱.۶: توصیف متنی مدار ۱.۵

```
kg6 = grc.circuit_parser('circuit6.txt')
grc.plot_kirchoffgraph(kg6)
grc.plot_kirchoffgraph_after_solving(kg6)
```



شکل ۲.۶: جواب Gracc برای مدار ۱.۵

## فصل ۷

# نتیجه گیری و پیشنهاد ها

### ۱.۷ نتیجه گیری

پروژه حاضر یک شیوه برای مدل کردن مدار های الکتریکی و حل آن به صورت خودکار ارائه میدهد؛ همانطور که پیش تر اشاره شد تمرکز این پژوهش بر ایجاد یک کتابخانه پایتون بوده و هدف ایجاد یک اپلیکیشن مانند spice و بررسی آن از زاویه مهندسی نرم افزار نیست.

### ۲.۷ پژوهش های مشابه

شاید بتوان کتابخانه pypspice را شبیه ترین پژوهش به پژوهش حاضر نامید، که امکانات زیادی را در اختیار برنامه نویسان برای حل مدار های الکتریکی قرار میدهد؛ ولی تفاوت اصلی آن با این پروژه این است که pypspice مسائل را با آنالیز ها و مدل های متفاوتی انجام میدهد ولی در این پژوهش همه مسائل توسط یک مدل واحد حل میشود؛ بدین معنی که مفهوم مدار به عنوان یک گراف در نظر گرفته شده است.<sup>۱</sup>

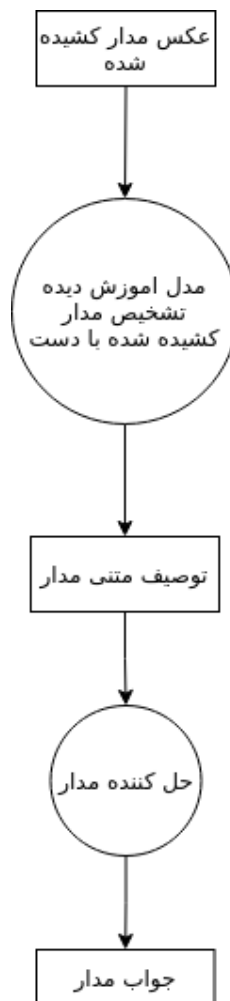
---

<sup>۱</sup> نام این پروژه از همین موضوع گرفته شده است؛ gracc یا همان graph of circuit



### ۳.۷ پیشنهاد برای ادامه پژوهش

همانطور که پیشتر در قسمت ۳.۶ توضیح داده شد، این پروژه از توصیف متنی برای مدارها استفاده میکند. ولی اگر مدلی طراحی کنیم که مدار را به صورت عکس از کاربر گرفته و آن را به توصیف متنی مدار تبدیل کند آنگاه میتوان با استفاده از ساختار شکل زیر با داشتن عکس مدار جواب آن را یافت! البته تلاش هایی در این زمینه شده که از طریق این پیوند قابل دسترسی است.



شکل ۱.۷: ساختار جواب دادن به مدار کشیده شده به صورت دستی

## مراجع

## مراجع

- L Toscano, S Stella and E Milotti (2015) Using graph theory for automated electric circuit solving,italy European Journal of Physics [١]
- Julie Isabel Arago Delage (2020) ELECTRICAL CIRCUIT SIMULATION, universitat de barcelona Facultat de matemàtiques i informàtica. [٢]
- F Dorfler,J W Simpson-Porco,F Bullo (2018) Electrical Networks and Algebraic Graph Theory: Models, Properties, and Applications, IEEE [٣]
- M mahoney (2015) Modeling graphs with electrical networks, university of berkeley [٤]
- Berdewad O. K., Dr. Deo S. D (2014) Application of Graph Theory in Electrical Network, gondwana university [٥]
- K thulasiraman (2002) circuit theory, university of oklahoma [٦]
- F mirzaee, S bismel (2014) A new Euler matrix method for solving systems of linear Volterra integral equations with variable coefficients, Egyptian Mathematical [٧]
- Charles K. Alexander and Matthew N.O. Sadiku (2013) Fundamentals of Electric Circuits, New York McGraw-Hill [٨]