شبکه های ارتفاعی : سرشکنی کمترین مربعات بر اساس مدل خطی ترازیابی (Z) به روش مستقیم یا هندسی با دستگاه ترازیاب

❖ **سرشکنی به روش کمترین مربعات بر اساس مدل معادلات پارامتریک یا مشاهدات**

- **سرشکنی شبکه ارتفاعی مدل خطی: مشاهدات ترازیابی مستقیم (هندسی)**

- **سرشکنی کمترین مربعات در مدل پارامتریک**

- **ماتریس A ماتریس ضرایب یا طرح و یا ماتریس مشتقات معادلات نسبت به مجهولات می باشد.**
- **در برخی کتابها بردار تصحیحات یا بردار خطاها را با v و در برخی با e یا بردار باقیمانده ها یا r(residuals) نشان می دهند.**
- **در برخی کتابها ماتریس وزن را با W و در برخی با P نشان می دهند .**

- **در برخی کتابها ماتریس مشاهدات (بردار مشاهدات) را با L و در برخی کتابها با Y نشان می دهند.**

• مقدمه: اگر حداقل مشاهده مورد نیاز برای حل مسئله n_0 و تعداد کل مشاهدات مستقل n باشد، تعداد مشاهدات اضافی را درجه آزادی گفته و با df نشان می‌دهیم:

Degree of Freedom ← $df = n - n_0$

در صورتی که تعداد مجهولات u باشد: در اینجا $u = n_0$

$$df = n - u$$

u : تعداد مجهولات

n : تعداد مشاهدات

$$n = u$$

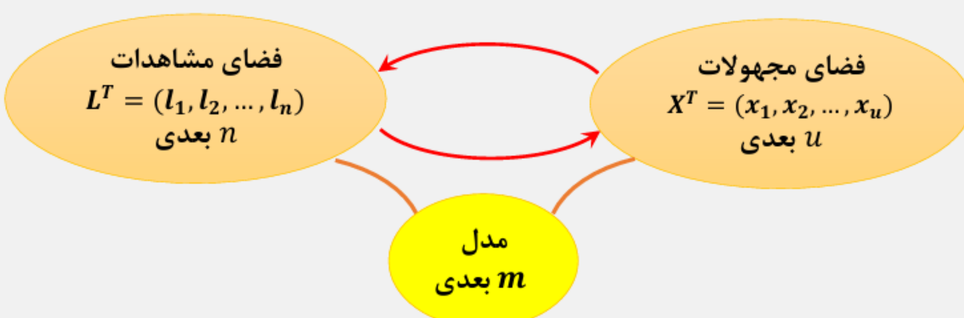
$$n < u$$

$$n > u$$

درجه آزادی زمانی مفهوم خواهد داشت که مشاهدات و مدل ریاضی سازگار بوده و تعداد مشاهدات برای حل مسئله کافی باشد

سرشکنی به روش کمترین مربعات بر اساس مدل معادلات پارامتریک یا مشاهدات

- در حالت کلی در سه فرم مسئله را بررسی می‌نماییم:
- m اینجا تعداد معادلات است که با تعداد مشاهدات برابر است $m = n$



- در سرشکنی ۳ حالت داریم:
  - مدل با جواب یکتا : تعداد مشاهدات برابر با تعداد مجهولات $n = u$
  - مدل فرومعین : تعداد معادلات کمتر از تعداد مجهولات $n < u$
  - مدل فرا معین : تعداد معادلات بیشتر از تعداد مجهولات $n > u$

n : تعداد مشاهدات

u : تعداد مجهولات

سرشکنی شبکه ارتفاعی مدل خطی: مشاهدات ترازیابی مستقیم (هندسی)

- سرشکنی کمترین مربعات در مدل پارامتریک
  - سرشکنی شبکه ارتفاعی مدل خطی: مشاهدات اختلاف ارتفاع ترازیابی مستقیم (هندسی)

بردار مجهولات

$$A_{n\times u}\vec{X}_{u\times 1}=\vec{L}_{n\times 1}$$

به دلیل وجود خطا در مشاهدات، مدل ناسازگار می‌باشد. به منظور سازگار کردن مدل فوق (یافتن مجهولاتی که در مدل فوق صدق می‌کند) تصحیحاتی به مشاهدات اضافه می‌کنیم:

بردار مجهولات برآورد شده

ماتریس ضرائب

$$A_{n\times u}\hat{\vec{X}}_{u\times 1}=\vec{L}^{o}_{n\times 1}+\vec{V}_{n\times 1}=\hat{\vec{L}}_{n\times 1}$$

بردار برآورد مشاهدات

بردار مشاهدات

بردار تصحیحات

در نتیجه در سرشکنی کمترین مربعات با حل مسئله بهینه‌سازی مقید زیر جواب بهینه محاسبه می‌گردد

بردار مجهولات برآورد شده

$$\begin{cases} g(x)=0 \\ f(x)\rightarrow min \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{n\times u}\hat{\vec{X}}_{u\times 1}=\vec{L}^{o}_{n\times 1}+\vec{V}_{n\times 1} \\ \vec{V}^{T}_{1\times n}P_{n\times n}\vec{V}_{n\times 1}\rightarrow min \end{cases} \longrightarrow \hat{\vec{X}}=(A^{T}PA)^{-1}A^{T}P\vec{L}^{o}$$

اصل کمترین مربعات

ماتریس وزن

$$f=\vec{V}^{T}_{1\times n}P_{n\times n}\vec{V}_{n\times 1}\rightarrow min \quad or \quad \sum p_i v_i \rightarrow min \ or \ \left\|P_{n\times n}\vec{V}_{n\times 1}\right\|^{2}\rightarrow min$$

$$\vec{V}_{n\times 1}=\vec{L}^{o}_{n\times 1}-A_{n\times u}\hat{\vec{X}}_{u\times 1}$$

$$\rightarrow f=\left(\vec{L}^{o}_{n\times 1}-A_{n\times u}\hat{\vec{X}}_{u\times 1}\right)^{T}P_{n\times n}\left(\vec{L}^{o}_{n\times 1}-A_{n\times u}\hat{\vec{X}}_{u\times 1}\right)\rightarrow min$$

$$\partial f/\partial X=\partial(L^{T}PL-L^{T}PAX-X^{T}A^{T}PL+X^{T}A^{T}\,PAX)/\partial X=0$$

$$\partial f/\partial X=\ -2A^{T}PL+2\,A^{T}\,PAX=0$$

$$\hat{X}=\left(A^{T}\,PA\right)^{-1}A^{T}PL$$

- **سرشکنی کمترین مربعات در مدل پارامتریک**
  - خطی (سرشکنی شبکه ارتفاعی : مشاهدات اختلاف ارتفاع ترازیابی مستقیم)

$$\vec{\hat{X}} = (A^T P A)^{-1} A^T P \vec{L}^o$$ ← بردار مجهولات برآورد شده

$$\hat{V} = A\hat{X} - \vec{L}^o$$ ← بردار تصحیحات برآورد شده

فاکتور واریانس اولیه

$$\textstyle\sum_{\hat{X}} = C_{\hat{X}} = \sigma_0^2 (A^T P A)^{-1}$$ ← ماتریس واریانس کوواریانس مجهولات

$$\textstyle\sum_{\hat{L}} = A \sum_{\hat{X}} A^T$$ ← ماتریس واریانس کوواریانس برآورد مشاهدات

$$\hat{L} = L^o + \hat{V} \quad \Longrightarrow \textstyle\sum_{\hat{L}} = \sum_{L} - \sum_{\hat{V}} \Rightarrow \sum_{\hat{V}} = \sum_{L} - A \sum_{\hat{X}} A^T$$

ماتریس واریانس کوواریانس مشاهدات

ماتریس واریانس کوواریانس تصحیحات برآورد شده