# تبدیل پروجکتیو سه‌بعدی
# (3D Projective Transformation)

- پروجکتیو سه‌بعدی حالت خاصی از Rational Function می‌باشد.

با پیدایش هندسه‌ی dynamic و فتوگرامتری فضایی معادلات توابع کسری رایج شده‌اند که از نوع پروجکتیوند.

$$\begin{cases} x = \dfrac{p_1(x,y,z)}{p_2(x,y,z)} = \dfrac{(1 \quad z \quad y \quad x \quad \dots \quad z^3 \quad y^3 \quad x^3)(a_0 \quad \dots \quad a_{19})^T}{(1 \quad z \quad y \quad x \quad \dots \quad z^3 \quad y^3 \quad x^3)(1 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{19})^T} \\ y = \dfrac{p_3(x,y,z)}{p_4(x,y,z)} = \dfrac{(1 \quad z \quad y \quad x \quad \dots \quad z^3 \quad y^3 \quad x^3)(c_0 \quad \dots \quad c_{19})^T}{(1 \quad z \quad y \quad x \quad \dots \quad z^3 \quad y^3 \quad x^3)(1 \quad d_1 \quad \dots \quad d_{19})^T} \\ z = \dfrac{p_5(x,y,z)}{p_6(x,y,z)} = \dfrac{(1 \quad z \quad y \quad x \quad \dots \quad z^3 \quad y^3 \quad x^3)(e_0 \quad \dots \quad e_{19})^T}{(1 \quad z \quad y \quad x \quad \dots \quad z^3 \quad y^3 \quad x^3)(1 \quad f_1 \quad \dots \quad f_{19})^T} \end{cases}$$

معادله فوق ۱۱۷ (۲۰×۳+۱۹×۳ معادله درجه سه) پارامتر مجهول دارد.

$$\begin{cases} x = \dfrac{p_1(x,y,z)}{p_2(x,y,z)} = \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z}{1 + b_0 x + b_1 y + b_2 z} \\ y = \dfrac{p_3(x,y,z)}{p_4(x,y,z)} = \dfrac{c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z}{1 + d_0 x + d_1 y + d_2 z} \\ z = \dfrac{p_5(x,y,z)}{p_6(x,y,z)} = \dfrac{e_0 + e_1 x + e_2 y + e_3 z}{1 + f_0 x + f_1 y + f_2 z} \end{cases}$$

پروجکتیو سه‌بعدی نمایش درجه یک از چند جمله های کسرهای فوق می‌باشد.

در حالت کلی حالت کسری (تقسیم) چندجمله‌ای‌های درجه نخست به شکل زیر می‌باشد:

$$x = \frac{a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z + a_{14}}{a_{41}X + a_{42}Y + a_{43}Z + a_{44}} \quad y = \frac{a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z + a_{24}}{a_{51}X + a_{52}Y + a_{53}Z + a_{54}} \quad z = \frac{a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z + a_{34}}{a_{61}X + a_{62}Y + a_{63}Z + a_{64}}$$

برای ساده تر شدن این معادلات مخرج ها را یکسان فرض می کنیم ($P_4=P_5=P_6$). به عبارتی ارتباط بین فضا را با ۱۶ پارامتر ایجاد می کنیم که از این تعداد $a_{44}$ را می‌توان حذف نمود. اگر این کار را نکنیم و این را به شکل مجهول وارد محاسبات کنیم ماتریس سینگولار (singular) خواهد شد. بنابراین ارتباط بین فضاها با ۱۵ پارامتر مستقل برقرار می‌شود.

$$x = \frac{a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z + a_{14}}{a_{41}X + a_{42}Y + a_{43}Z + 1} \quad y = \frac{a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z + a_{24}}{a_{41}X + a_{42}Y + a_{43}Z + 1} \quad z = \frac{a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z + a_{34}}{a_{41}X + a_{42}Y + a_{43}Z + 1}$$

- اگر $a_{41}=a_{42}=a_{43}=0$ به افاین سه‌بعدی خواهیم رسید:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z + a_{14} \\ y &= a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z + a_{24} \\ z &= a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z + a_{34} \end{aligned}$$

که در افاین سه‌بعدی دوازده مجهول $\begin{pmatrix} T_x, & T_y, & T_z & * & \omega, & \varphi, & \kappa \\ \xi_{xy}, & \xi_{xz}, & \xi_{yz} & * & \lambda_x, & \lambda_y, & \lambda_z \end{pmatrix}$ داشتیم.

- اگر معادله ی این تبدیل به صورت $x=AX+A_0$ باشد، ماتریس ضرائب به صورت زیر می‌باشد:

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- $|A|=1$ شکل الزاما حفظ نمی‌شود ولی مساحت حفظ می‌شود
- $|A|>1$ شکل بزرگتر می‌شود
- $|A|<1$ شکل کوچکتر می‌شود
- اگر $A^TA=K.I$ نشان دهنده‌ی حالتی از تعامد کامل است و ضریب مقیاس در تمام جهات برابر و یکسان است یعنی:

$$A^T A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}, \xi_{xy} = \xi_{xz} = \xi_{yz} = 0 \quad , \quad \lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = k$$

در این حالت تعداد پارامترها به هفت عدد کاهش می‌یابد.

- اگر $A^TA=I$ تعداد پارامترها به شش عدد کاهش می‌یابد (که مخصوص اجسام صلب است و در آن ضریب مقیاس یک است )

- تبدیل پروجکتیو سه بعدی

$$x' = \frac{a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4}{d_1 x + d_2 y + d_3 z + 1}$$

$$y' = \frac{b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4}{d_1 x + d_2 y + d_3 z + 1}$$

$$z' = \frac{c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4}{d_1 x + d_2 y + d_3 z + 1}$$