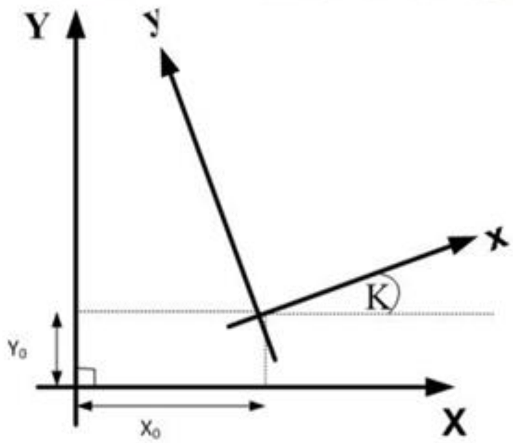
معادله افاین دو بعدی

(2D Affine Transformation)

- در تبدیل ساده ی دوبعدی فرض بر این بود که در فضای دوبعدی مقیاس در تمام جهات یکسان است. در صورتی که مقیاس در امتداد محور های سیستم‌های مختصات یکسان نباشد، تبدیل افاین دو بعدی مطرح می‌شود.



- با مراجعه به معادله ی $\vec{X} = \lambda R\vec{x} + \vec{X}_0$

در صورتی که فاکتور مقیاس در دو جهت

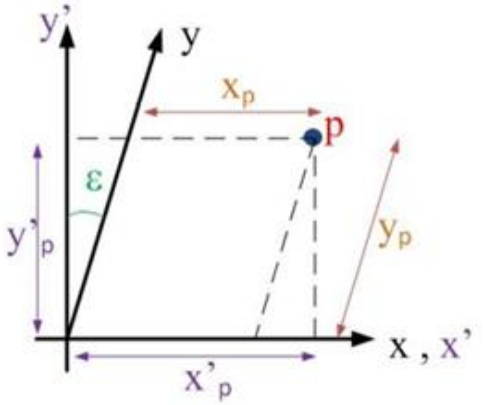
x و y یکی نباشد $\lambda = [\lambda_x \quad \lambda_y]$

به معادله ی افاین متعامد یا هلمرت خواهیم رسید.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos k & \sin k \\ -\sin k & \cos k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$$

البته در حالت ذکر شده فرض بر تعامد محورهای مختصات بر یکدیگر بوده است (ε=۰) که به این حالت خاص از تبدیل افاین Orthogonal affine یا Helmert نیز می نامند.

در حالت عمومی در تبدیل افاین علاوه بر یکسان نبودن مقیاس در جهت محورها، یک پارامتر دیگر به نام عدم تعامد محورها نیز وجود دارد، به عبارت دیگر محورهای x و y به یکدیگر عمود نباشند و زاویه ی بین آنها (ε-۹۰) باشد.

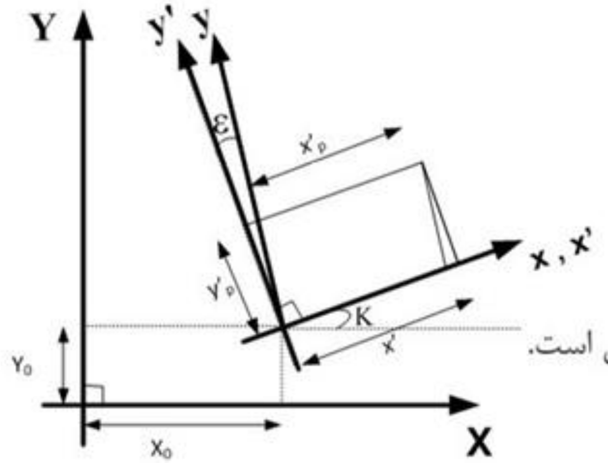


$$x'_p = x_p + y_p.\sin\xi$$
$$y'_p = y_p.\cos\xi$$
$$\begin{bmatrix} x'_p \\ y'_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\xi \\ 0 & \cos\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix}$$

که در حالت کلی تبدیل افاین دو بعدی شامل ۶پارامتر زیر خواهد بود:

یک دوران - دو انتقال - دو مقیاس - یک عدم تعامد محورها

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\xi \\ 0 & \cos\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos k & \sin k \\ -\sin k & \cos k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$$



ضرائب مقیاس: $\lambda_x \quad \lambda_y$

دوران (rotation): k

عدم تعامد (non- perpendicularity): ε

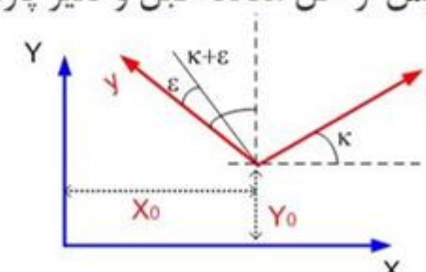
شیفت: X_0 , Y_0

نکته: متعامد نبودن محورهای سیستم بسیار جزیی است.

$$\sin\xi \cong \varepsilon \quad \cos\xi \cong 1$$

- پس از حل معادله قبل و تغیر پارمتر (ساده سازی) به معادله ی زیر خواهیم رسید:

$$X = a.x + by + c$$
$$Y = d\,x + e.y + f$$



- فرم ماتریسی عبارت فوق :

$$\begin{bmatrix} X \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$$

- حال اگر بخواهیم این ماتریس را برای nنقطه بنویسیم خواهیم داشت:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ \vdots \\ X_n \\ Y_n \end{bmatrix}}_{L_{2n\times1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix}}_{A_{2n\times6}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}}_{X_{6\times1}}$$

در فتوگرامتری از این تبدیل در چند حالت استفاده می‌شود:

- وقتی کشیدگی خطی روی یک فیلم در امتداد طول و عرض یکی نباشد.
- وقتی محورهای مختصات یک کمپراتور بر هم عمود نباشد.
- توجیه داخلی تحلیلی، در این حالت علاوه بر تامین بند های فوق ارتباط بین سیستم مختصات دستگاهی و عکسی برقرار می‌گردد.