تبدیل افاین سه‌بعدی
(3D Affine Transformation)

در تبدیل ساده ی سه‌بعدی فرض بر این بود که در فضای سه‌بعدی مقیاس در تمام جهات یکسان است. در صورتی که مقیاس در امتداد محور های سیستم‌های مختصات یکسان نباشد، تبدیل افاین سه‌بعدی مطح می‌شود.

$$\vec{X} = \lambda R\vec{x} + \vec{X}_0 \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \vec{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

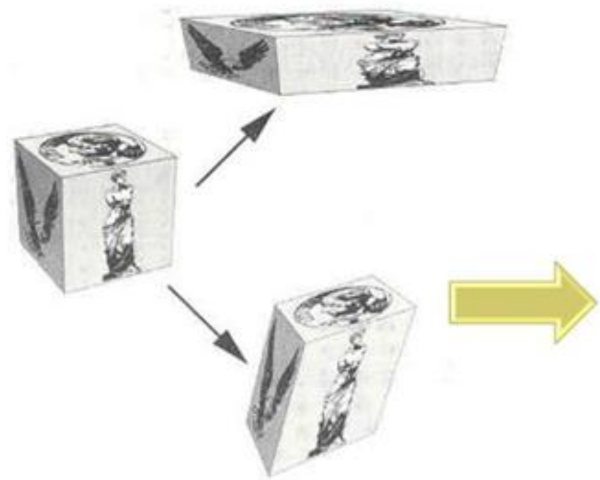
بنابراین تعداد پارامترها در این تبدیل برابر خواهد بود با:

$$\lambda = 1 \quad , \quad \vec{x} = [\lambda_x .x \quad \lambda_y .y \quad \lambda_z .z]^T = \begin{bmatrix} \lambda_x .x \\ \lambda_y .y \\ \lambda_z .z \end{bmatrix}$$

سه دوران-سه انتقال-سه مقیاس (با فرض تعامد محورهای مختصات بر یکدیگر)

البته در حالت ذکر شده فرض بر تعامد محورهای مختصات بر یکدیگر بوده است (ε=۰) که به این حالت خاص از تبدیل افاین Orthogonal affine یا Helmert نیز گفته می‌شود.

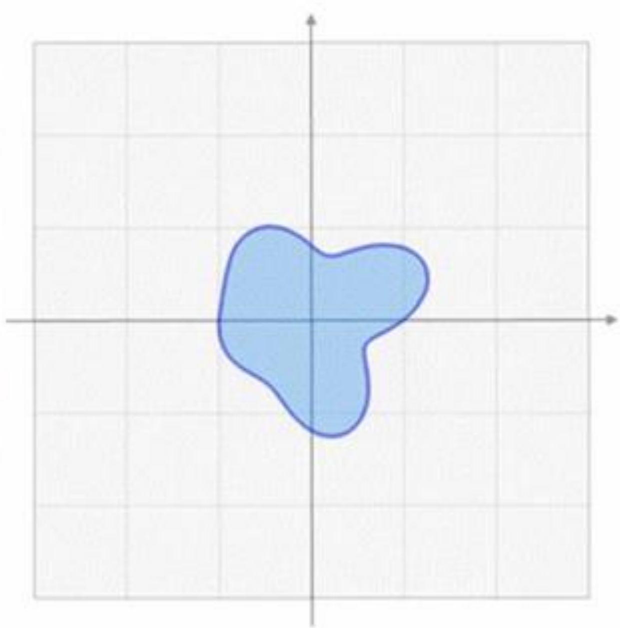
در حالت عمومی در تبدیل افاین علاوه بر یکسان نبودن مقیاس در جهت محورها ($\lambda_x \quad \lambda_y \quad \lambda_z$)، سه پارامتر دیگر به نام عدم تعامد محورها($\xi_x \quad \xi_y \quad \xi_z$) نیز وجود دارد.



که در حالت کلی تبدیل افاین سه‌بعدی شامل ۱۲پارامتر زیر خواهد بود:

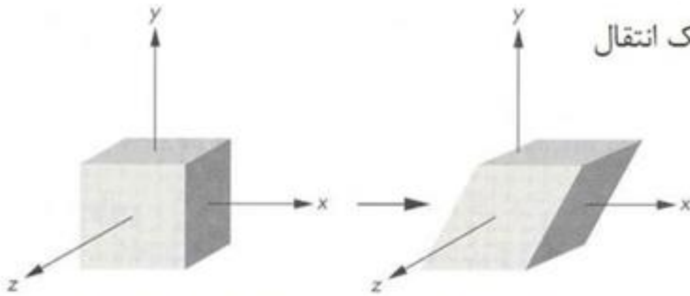
- سه پارامتر انتقال
- سه پارامتر دوران
- سه پارامتر مقیاس
- سه پارامتر عدم تعامد محورها

Affine transformations on the 2D plane can be performed in three dimensions. Translation is done by shearing along over the z axis, and rotation is performed around the z axis.

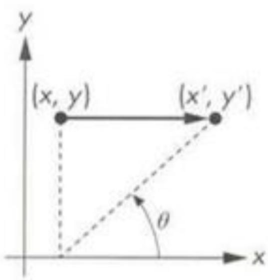


تاثیر shear مانند هل دادن یک شی هندسی در یک جهت موازی با یک صفحه سه‌بعدی (3D) یا در یک سیستم مختصات دو بعدی (2D) است.

در شکل روبرو سیلندر قرمز نتیجه اعمال یک انتقال shear بر روی سیلندر زرد است.



shear the object in the x direction



$$x' = \quad ?$$
$$y' =$$
$$z' =$$

$$x' = x + y\cot\theta$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

- Shear in the x direction

$$x' = x + y\cot\theta$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

$\xrightarrow{H_x(\theta)}$ $\mathbf{p}' = H_x\mathbf{p}$

?

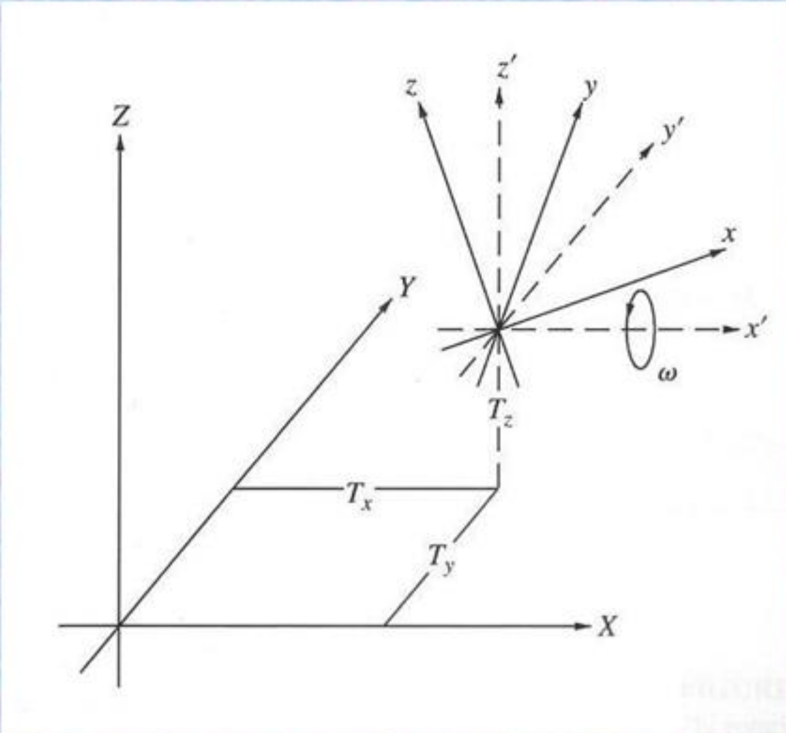
shearing matrix

$$H_x = \begin{bmatrix} 1 & \cot\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Inverse of a shearing matrix

$H_x^{-1}(\theta) = H_x(-\theta) =$? $\Rightarrow$ $$H_x^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & -\cot\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

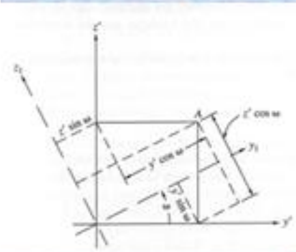
تبدیلهای سه بعدی به سه بعدی



- دورانهای سه بعدی
- انتقال سه بعدی
- ...

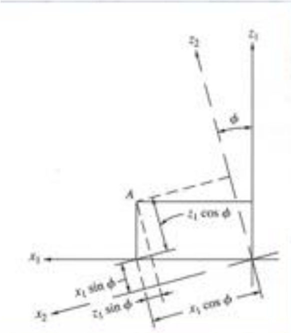
تبدیلهای سه بعدی به سه بعدی

- دوران امگا(**ω Rotation**)



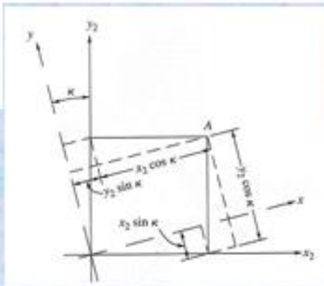
$$x_1 = x'$$
$$y_1 = y' \cos\omega + z' \sin\omega$$
$$z_1 = -y' \sin\omega + z' \cos\omega$$

- دوران فی (**φ Rotation**)



$$x_2 = -z_1 \sin\phi + x_1 \cos\phi$$
$$y_2 = y_1$$
$$z_2 = z_1 \cos\phi + x_1 \sin\phi$$

- دوران کاپا(**κ Rotation**)



$$x = x_2 \cos\kappa + y_2 \sin\kappa$$
$$y = -x_2 \sin\kappa + y_2 \cos\kappa$$
$$z = z_2$$

- دورانهای سه بعدی

$$x = x'(\cos\phi\cos\kappa) + y'(\sin\omega\sin\phi\cos\kappa + \cos\omega\sin\kappa) + z'(-\cos\omega\sin\phi\cos\kappa + \sin\omega\sin\kappa)$$
$$y = x'(-\cos\phi\sin\kappa) + y'(-\sin\omega\sin\phi\sin\kappa + \cos\omega\cos\kappa) + z'(\cos\omega\sin\phi\sin\kappa + \sin\omega\cos\kappa)$$
$$z = x'(\sin\phi) + y'(-\sin\omega\cos\phi) + z'(\cos\omega\cos\phi)$$

where
$$m_{11} = \cos\phi\cos\kappa$$
$$m_{12} = \sin\omega\sin\phi\cos\kappa + \cos\omega\sin\kappa$$
$$m_{13} = -\cos\omega\sin\phi\cos\kappa + \sin\omega\sin\kappa$$
$$m_{21} = -\cos\phi\sin\kappa$$
$$m_{22} = -\sin\omega\sin\phi\sin\kappa + \cos\omega\cos\kappa$$
$$m_{23} = \cos\omega\sin\phi\sin\kappa + \sin\omega\cos\kappa$$
$$m_{31} = \sin\phi$$
$$m_{32} = -\sin\omega\cos\phi$$
$$m_{33} = \cos\omega\cos\phi$$

$$X = MX'$$

$$x = m_{11}x' + m_{12}y' + m_{13}z'$$
$$y = m_{21}x' + m_{22}y' + m_{23}z'$$
$$z = m_{31}x' + m_{32}y' + m_{33}z'$$

$$M = \begin{bmatrix} \cos xx' & \cos xy' & \cos xz' \\ \cos yx' & \cos yy' & \cos yz' \\ \cos zx' & \cos zy' & \cos zz' \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = M^T$$

$$X' = M^T X$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$x' = m_{11}x + m_{21}y + m_{31}z$$
$$y' = m_{12}x + m_{22}y + m_{32}z$$
$$z' = m_{13}x + m_{23}y + m_{33}z$$

انتقال و مقیاس سه بعدی

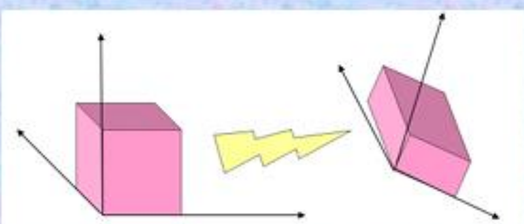
$$X = sx' + T_X \qquad X = sx' + T_X = s(m_{11}x + m_{21}y + m_{31}z) + T_X$$

$$Y = sy' + T_Y \qquad Y = sy' + T_Y = s(m_{12}x + m_{22}y + m_{32}z) + T_Y$$

$$Z = sz' + T_Z \qquad Z = sz' + T_Z = s(m_{13}x + m_{23}y + m_{33}z) + T_Z$$

تبدیل افاین سه بعدی

- تعمیم یافته افاین دو بعدی میباشد
- تبدیل افاین سه‌بعدی دارای سه پارامتر انتقال، سه پارامتر دوران، سه پارامتر مقیاس و سه پارامتر عمود نبودن محورهای مختصات می‌باشد.



$$x' = a_1x + a_2y + a_3z + a_4$$
$$y' = b_1x + b_2y + b_3z + b_4$$
$$z' = c_1x + c_2y + c_3z + c_4$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_4 \\ b_4 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

- خصوصیات تبدیل افاین: $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$

$$x' = a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4$$

$$y' = b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4$$

$$z' = c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & y & z & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$