# 基于计算误差建模的功率分配优化设计

低位宽计算在降低硬件开销和计算时间的同时，也会不可避免地降低预编码的性能。考虑SVD预编码场景，低位宽计算误差主要体现在SVD计算和功率分配计算两方面。由前述低位宽SVD算子实现章节可知，低位宽SVD计算中存在大量的迭代和循环，这些迭代和循环会导致每一步的误差不断向下传播和累积，最后导致不可忽视的总计算误差的出现。而功率分配矩阵计算过程中的计算误差就小的多，这主要是因为功率分配计算中的迭代较少，甚至直接存在闭式解，所以其计算误差相较SVD计算就小的多。因此，在考虑SVD预编码的场景下，本章忽略功率分配过程中的计算误差，只考虑SVD计算中出现的计算误差。

本章将对低位宽SVD计算误差进行统计建模，并基于该计算误差模型，分析计算误差对通信指标带来的负面影响，最后进行功率分配优化设计，以降低低位宽计算带来的性能损失，提高系统预编码性能。

## SVD计算误差建模

考虑低位宽计算下的SVD预编码场景，接收信号可以表示为：

其中表示低位宽SVD的计算误差，表示流数。和分别表示信道矩阵的左右奇异矩阵，表示前个信道系数。是发送端预编码矩阵，其中表示功率分配矩阵。是接收端均衡矩阵，其中。表示复圆高斯随机噪声，满足。是随机发送符号，满足。为了便于分析，不失一般性，我们假设、和互不相关。

理论上，低位宽SVD计算的计算误差取决于计算位宽大小和计算次数。对于任意一次低位宽SVD计算，结果矩阵每个元素的计算位宽是相同的，并且从统计的角度来看，结果矩阵每个元素所经历过的计算次数也可以认为是大致相同的。因此，根据上述分析，我们可以认为中的各个元素满足独立同分布。为了进一步便于分析，我们将中的每个元素都建模为独立同分布的均值为０，方差为的复圆高斯随机变量。

## 表征计算误差对性能指标的影响

低位宽计算场景中，计算误差的出现会给通信性能指标带来负面影响，一个重要的问题是具体表征计算误差对通信性能指标的影响程度。下面，我们将从式所示的信号模型入手，从理论上推导出计算误差对通信BER、MSE和SINR性能的具体影响。

### 计算误差对MSE的影响

根据式的信号模型，接收信号的MSE可以被表示为：

对比没有计算误差的情况（即）：

可见，计算误差会额外增加接收信号的MSE（体现在项），并且这种影响是负面的。

下面使用计算机仿真直观体现计算误差对MSE的影响，仿真参数设置如表8.1所示。仿真结果如图8.1所示，可见计算误差非常小（如0.0001）时，计算误差对MSE性能的影响不大；但是当计算误差继续增大，MSE性能便会快速下降，计算误差达到0.01时，MSE性能随着SNR提高而提高的幅度就变得非常有限，计算误差达到0.1时，MSE性能则完全由计算误差决定。

表8.1 仿真参数设置表

|  |  |
| --- | --- |
| 调制方式 | 64QAM |
| 信道模型 | 瑞利信道 |
| 信道维度 | 8×64 |
| 数据流数 | 4 |
| 发送功率 | 4 |
| 功率分配方式 | 平均功率分配 |
| 计算误差方差 | 0~0.1 |
| 信道实现数 | 1e5 |

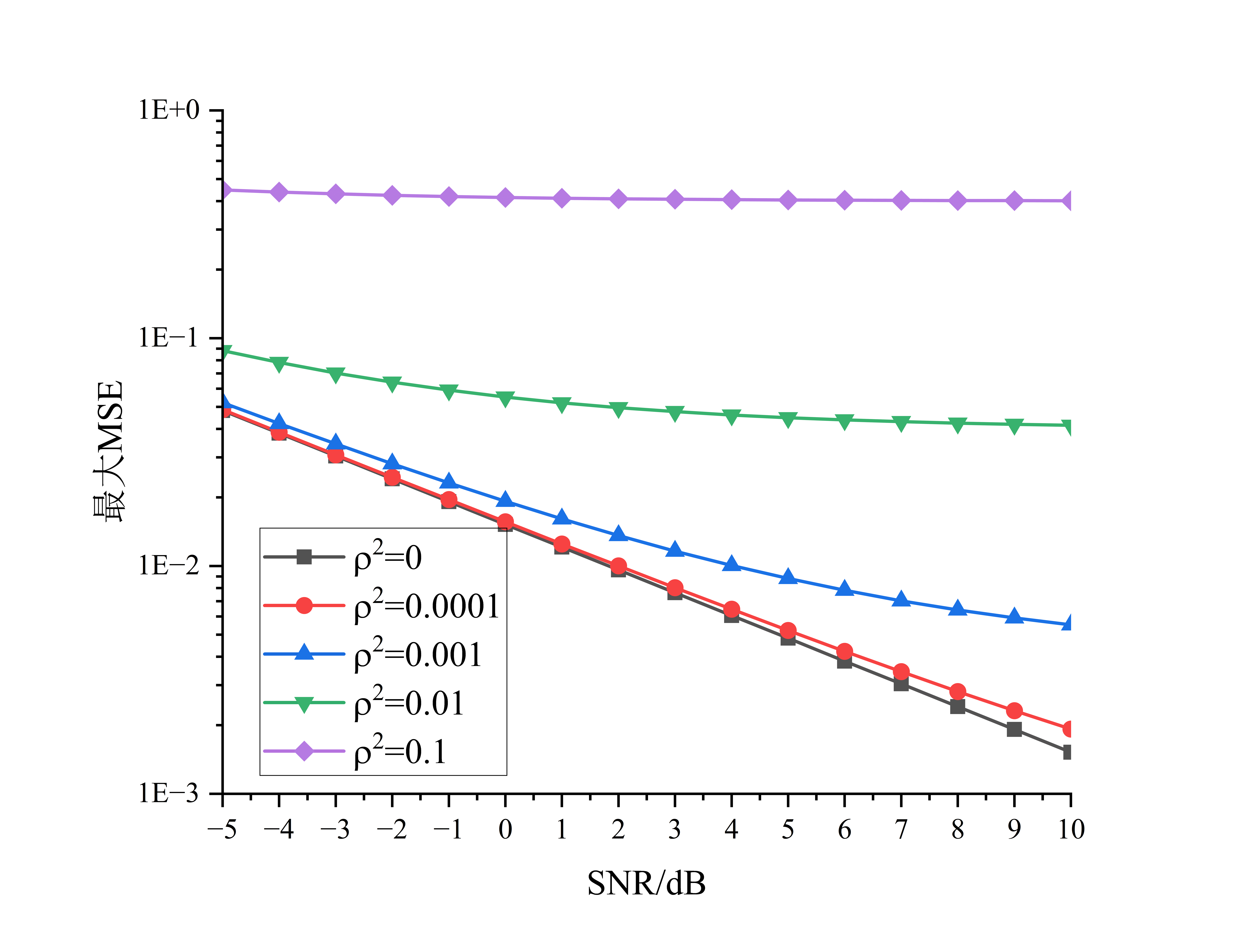


图8.1 计算误差对MSE性能的影响

### 计算误差对SINR的影响

根据式的信号模型，第个流的信号可以表示为：

其中表示只有第个对角线位置为1，其余位置为0的方阵。那么，第个流的SINR为：

对比没有计算误差的情况（即），第个流的SNR为：

比较二者的差异，可见系统的SINR性能也会收到计算误差的影响。

下面使用计算机仿真直观体现计算误差对SINR的影响，仿真参数设置如表8.1所示。仿真结果如图8.2所示，可见计算误差会显著影响系统的SINR性能，0.001的计算误差就可以显著影响到SINR的性能。

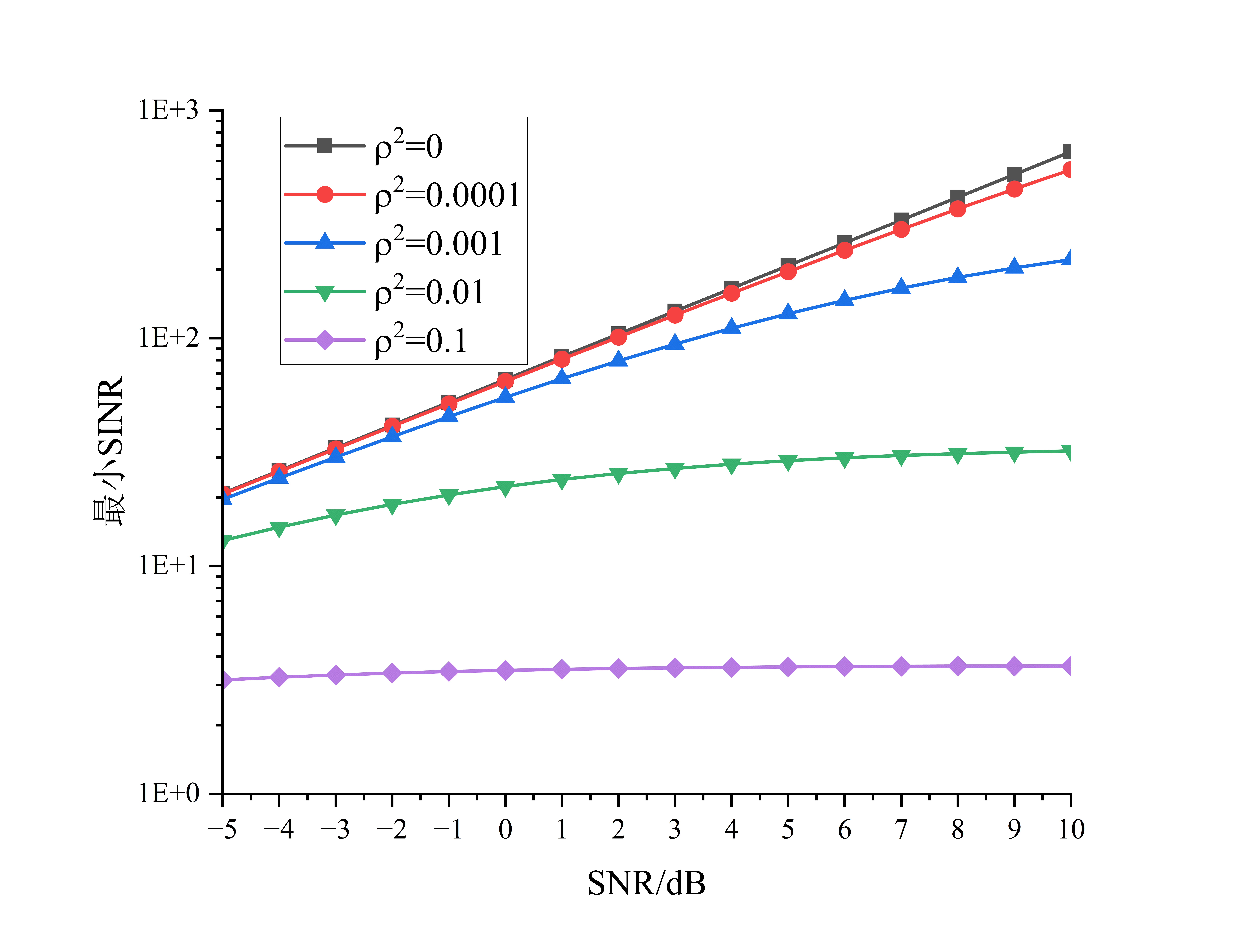


图8.2 计算误差对SINR的影响

### 计算误差对BER的影响

当系统使用M-QAM调制时，第流的BER的近似公式为：

其中表示互补误差函数，的比特信干噪比，可以被表示为：

其中表示符号信干噪比，表示符号周期，表示带宽，满足=1。这样，第流的BER可以被表示为：

可见计算误差也会影响BER性能。

下面使用计算机仿真直观体现计算误差对BER的影响，仿真参数设置同样如表8.1所示。仿真结果如图8.３所示，与之前的结果类似，可以看出计算误差的出现显著影响了系统的BER性能，尤其是当计算误差较大时。

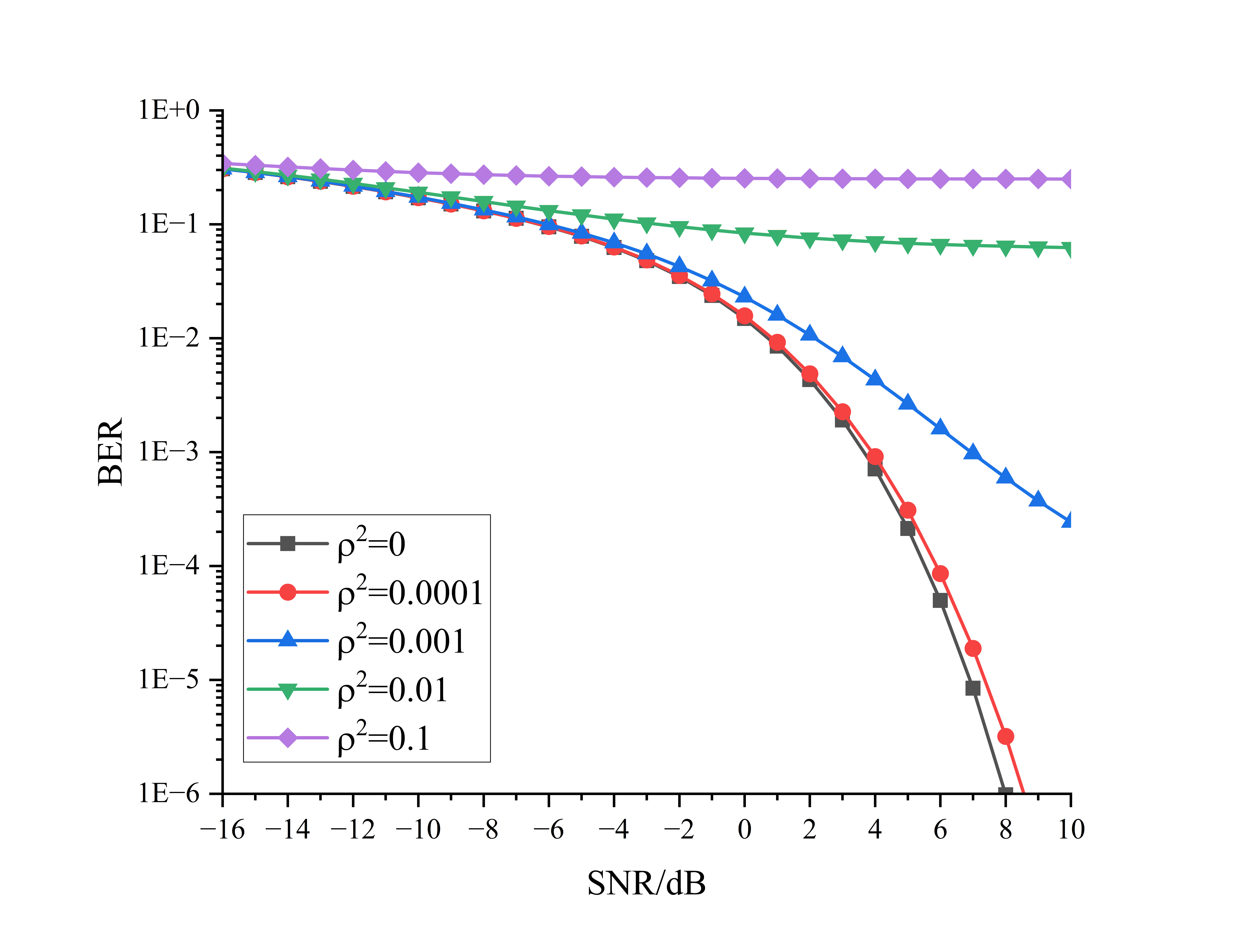


图8.3 计算误差对BER性能的影响

## 功率分配优化设计

从上述分析和仿真中可以看出，计算误差会显著影响通信系统的性能。因此，一个重要的问题是如何减少甚至消除计算误差带来的这种负面影响。从式可以看出，计算误差的出现实际上是直接改变了接收信号的表达式，这就要求在进行系统设计（功率分配）的时候，必须要考虑低位宽计算引入的计算误差，否则系统的性能将会收到较大的影响。下面，将低位宽计算带来的计算误差考虑在内，从优化的角度，在不同的设计准则下，对功率分配矩阵进行优化设计，以尽可能地降低计算误差带来的负面影响。

### 最小最大MSE准则

考虑系统设计准则是最小化系统最大的MSE，即：

其中，是一个极小值。这个问题是一个凸问题，可以直接使用数值软件（如CVX）求解，但是数值算法计算复杂度较高，因此，下面使用Lagrange乘子法求解。

首先，Lagrange函数可以表示为：

写出KKT条件：

使用反证法分析可得在最优点处不等式约束一定取等号，即：

将带入中，可以解出：

将带回，可得：

再将带入，可得：

解出，便可根据式解出。具体算法见算法8.1。

|  |
| --- |
| 算法8.1 最小化最大MSE的功率分配算法 |
| 1. 输入： 2. 使用式解出 3. 使用解出 4. 输出： |

### 最大最小SINR准则

考虑系统设计准则式最大化最小的SINR，即：

该问题是一个难解的非凸优化问题，下面进行问题的转化和求解。

上述问题可以使用几何规划或者二次转换技术求解，但是这些方案都需要进行大量迭代，计算复杂度均较高，下面使用低复杂度的基于幂迭代的求解算法。首先，使用反证法可以得到：

令是一个的矩阵，其中：

可以得到：

其中：

因为是一个非奇异矩阵，所以有：

是一个原始非负矩阵，根据Perron-Frobenius定理，只有一个满足的实数特征向量解，该解对应的特征根是最大的特征值。求取方阵最大特征值及其对应的特征向量可以采用幂迭代算法，如算法8.2所示。最大化最小SINR的功率分配算法如算法8.3所示。

|  |
| --- |
| 算法8.2 幂迭代算法 |
| 1. 输入： 2. 初始化为一个随机向量 3. Repeat:  6. Until Convergence 7. 输出： |

|  |
| --- |
| 算法8.3 最大化最小SINR的功率分配算法 |
| 1. 输入： 2. 构造 3. 使用幂迭代算法解出最大特征值对应的特征向量 4. **使用构造出功率分配向量** 5. 输出： |

### 最小BER和准则

考虑系统设计准则是最小化系统所有流的BER和，可以形成下列优化问题：

因为上述问题是一个难解的非凸问题，转而优化目标函数的近似。使用近似表达式，可以得到：

这样，优化问题变为：

其中下文中简写为。上述问题仍然是非凸问题，为了解决该问题，还需使用二次转换技术将问题变为：

当固定时，辅助变量的更新方法如下：

这样，上述关于的问题就变成了一个凸问题，可以使用数值软件（如CVX）高效求解，求解算法见算法8.4。

|  |
| --- |
| 算法8.4最小化BER和的功率分配算法 |
| 1. 输入： 2. 初始化 3. Repeat: 4. 固定，求解问题，解出 5. 固定，根据更新 6. Until Convergence 7. 输出： |

## 数值仿真

本章在低位宽EFP计算的背景下，基于6.1节介绍的计算误差模型，给出不同系统设计准则下的功率分配设计算法的通信性能仿真结果并进行相应地分析。

### 仿真流程与参数设置

为了与基线仿真保持一致，本章的蒙特卡洛仿真中仍然将BLER作为系统性能指标。本章的具体仿真流程也与基线仿真保持一致，见图3.1。本章的仿真参数设置见表6.1，需要注意的是，除了特殊标注外，本章低位宽EFP存储方案均为E5M10。本章不同设计准则下的功率分配算法均需提前获知计算误差的方差，为此，我们分别使用低位宽EFP算子与FP64算子进行了1e5次SVD运算，并将二者的结果进行比较，最后确定计算误差的方差在0.0001左右，该值将会在后续的仿真结果中得到体现。

表6.1：仿真参数设置表

|  |  |
| --- | --- |
| 码长 | 648 |
| 码率 | 3/4 |
| 调制方式 | 64QAM |
| 信道模型 | 瑞利信道 |
| 信道维度 | 8×64 |
| 用户数 | 单用户 |
| 数据流数 | 8 |
| 预编码算法 | SVD预编码 |
| 计算位宽 | FP64/基线（FP16）/EFP16 |
| 计算误差方差设置 | 0/0.001/0.0001 |
| 信道实现数 | 1e4 |
| 性能指标 | BLER |

### 最小BER和准则下的性能比较

在不同的计算误差方差设置下，最小BER和准则下功率分配算法的BLER性能表现如图8.5所示。从图中可以看出，相比于基线算法，即使在不考虑计算误差的情况下（即），EFP存储方案下的最小BER和功率分配算法也可以获得大约0.3dB的性能增益。因此，最小BER和准则下的功率分配算法的性能优于平均功率分配。而如果将计算误差考虑在内，并且设置一个比较合适的计算误差方差值（如），那么该算法的性能增益可以达到1dB以上，使得EFP E5M10计算位宽下的BLER性能接近FP 64计算位宽下的性能表现。但是，如果计算误差方差设置的不合理（如），那么这种情况下的功率分配算法的性能表现甚至还不如不考虑计算误差的情况（即）。可见，设置一个合理的计算误差方差值，对于最小BER和准则下的功率分配算法具有重要的意义。

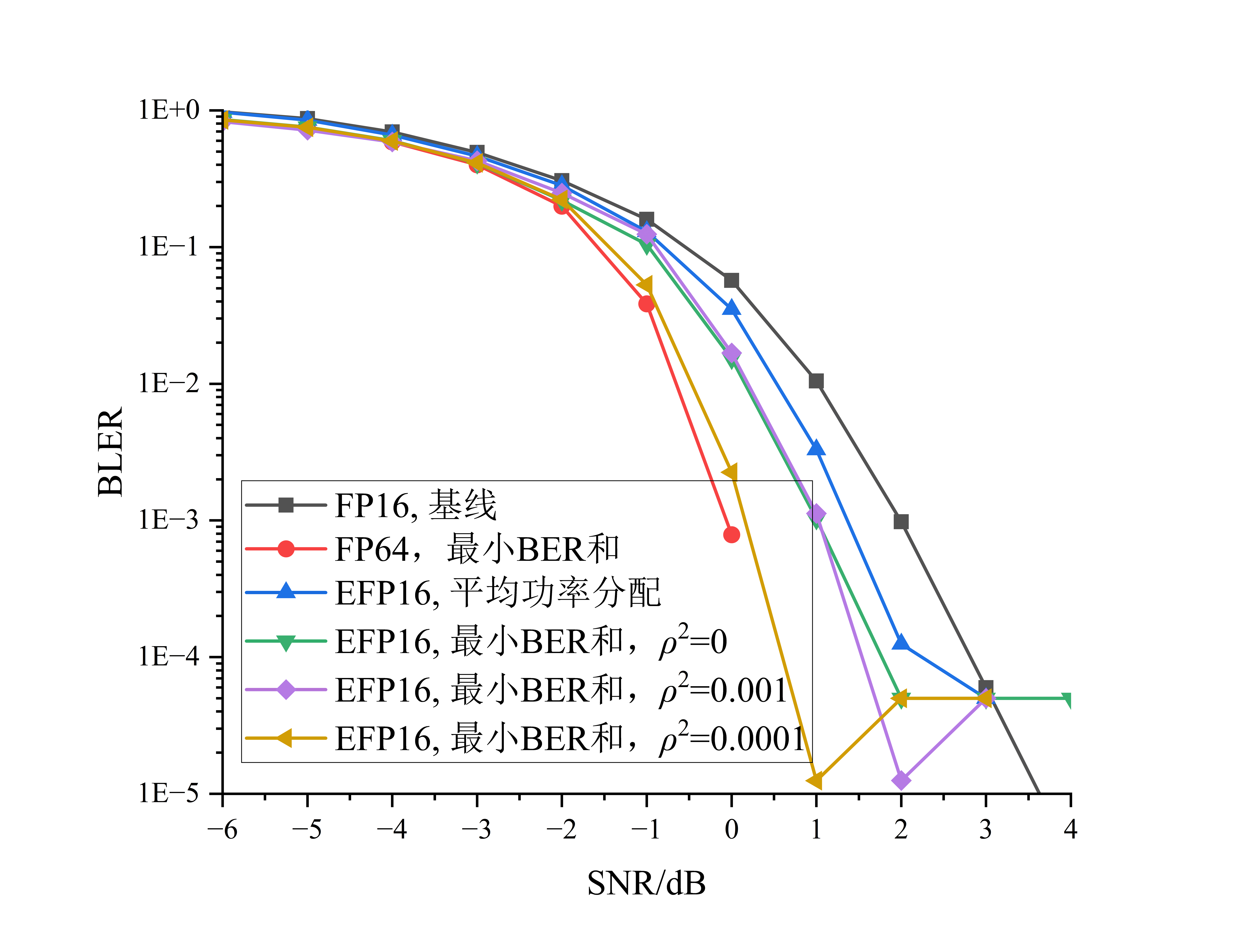


图8.5 最小BER和准则下功率分配算法的BLER性能

### 最小最大MSE准则下的性能比较

在不同的计算误差方差设置下，最小BER和准则下功率分配算法的BLER性能表现如图8.6所示。从图中可以看出，最小最大MSE准则下，EFP16以及FP64的性能差距不大，显示了该设计准则下的功率分配算法对计算位宽上的鲁棒性。此外，相比于平均功率分配算法，最小最大MSE准则下的功率分配算法优势明显，尤其是当信噪比比较高时，即使不考虑计算误差（即），性能增益也可以达到2dB以上。从图中还可以看出，设置一个合理的计算误差方差（如），可以提高算法的性能，而一个不合理的计算误差方差（如）会降低算法的性能，但是性能的差异并不明显。

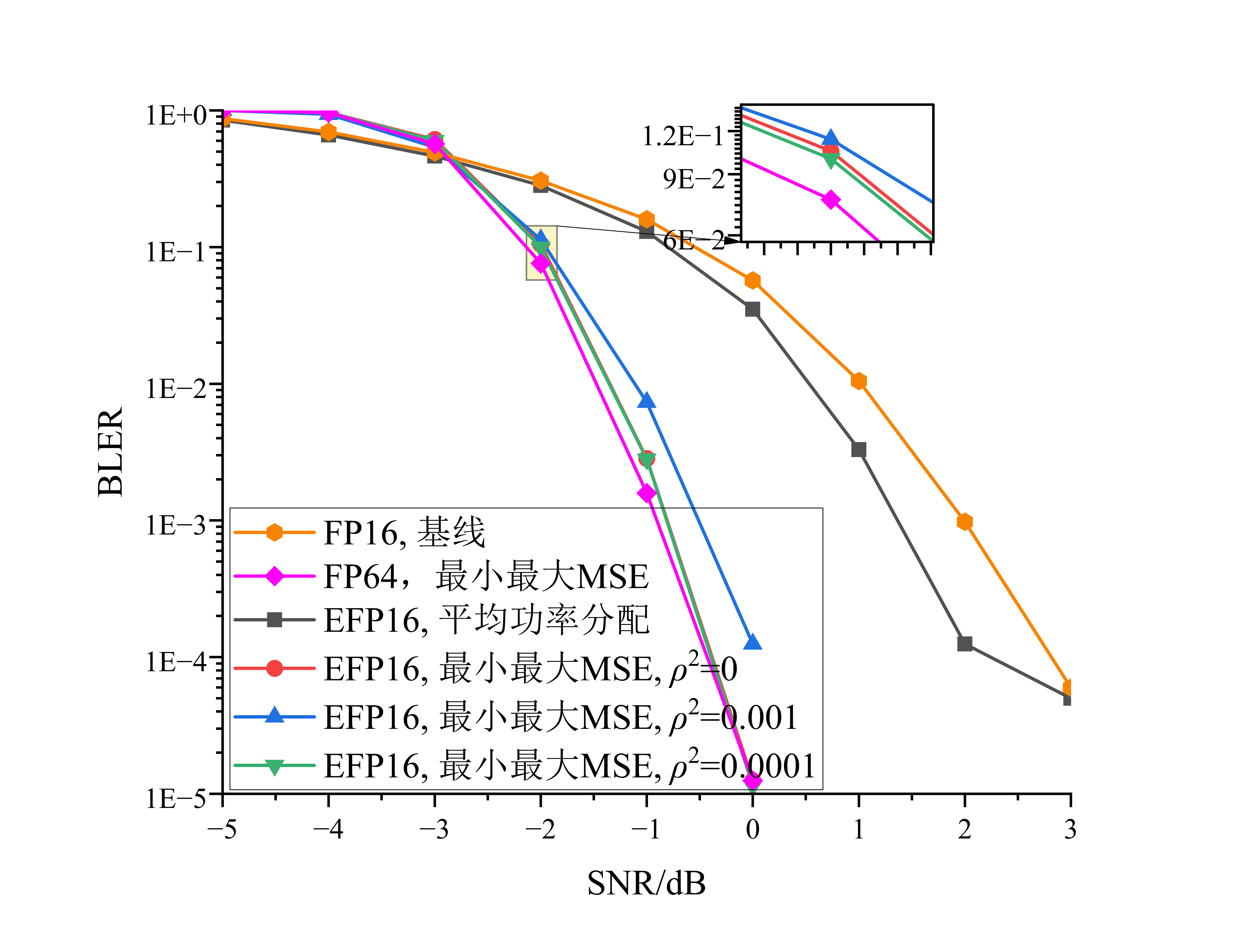


图8.6 最小最大MSE准则下功率分配算法的BLER性能

### 最大最小SINR准则下的性能比较

在不同的计算误差方差设置下，最小BER和准则下功率分配算法的BLER性能表现如图8.6所示。从图中可以看出，该设计准则下算法的性能表现几乎和最小最大MSE准则一致。在高信噪比时，表现出了巨大的性能增益，并且鲁棒性较强，不在赘述。

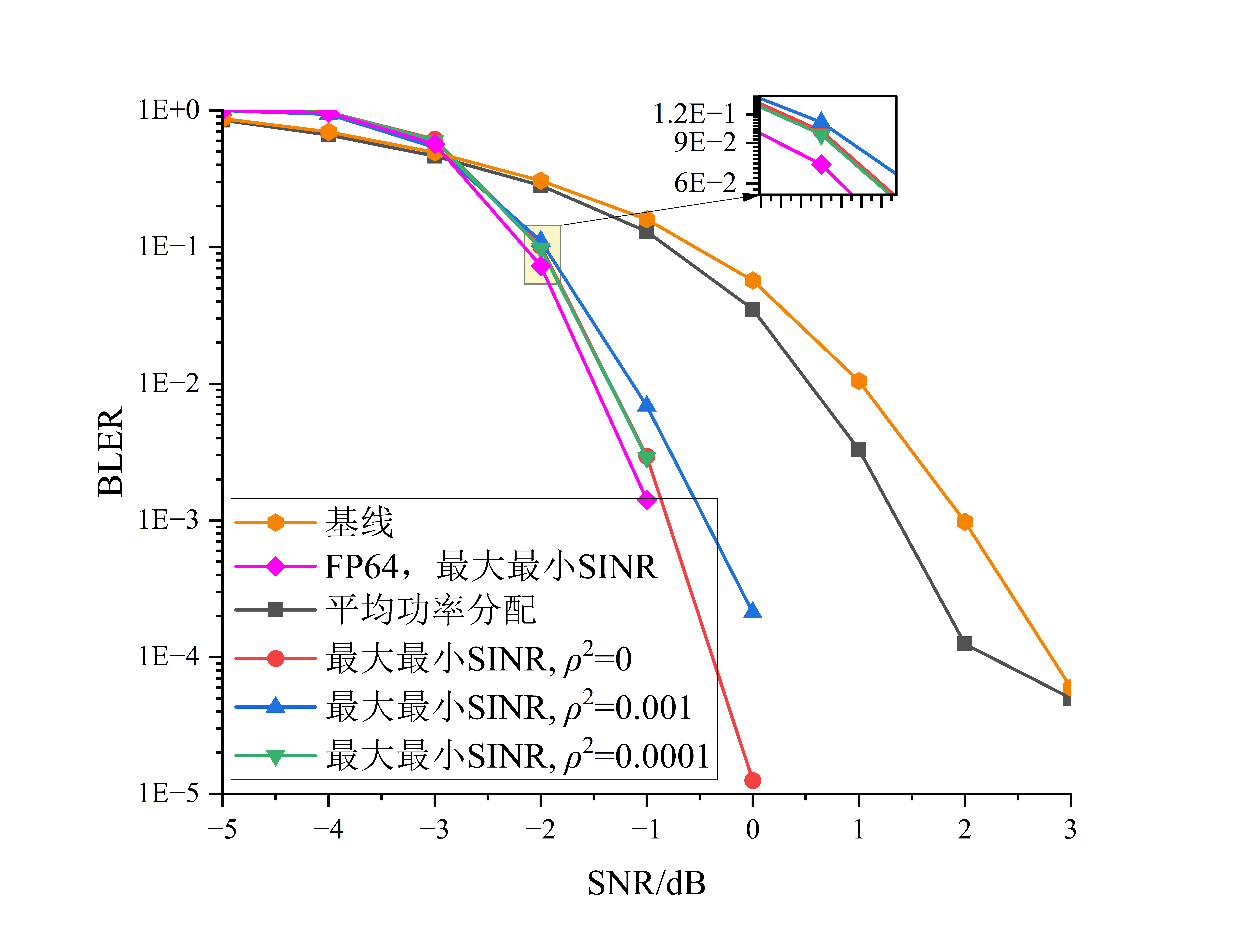


图8.7最大最小SINR准则下功率分配算法的BLER性能

### 不同设计准则的性能比较

不同设计准则下功率分配算法的BLER性能表现如图8.6所示。从图中可以看出，最小最大MSE准则和最大最小SINR准则的功率分配算法具有一致的性能，这是因为某种程度上SINR可以和MSE等价。并且，从图中还可以发现，在低信噪比条件下（低于-3dB），最小BER和准则下的功率分配算法较佳，而在信噪比较高时，最小最大MSE准则或最大最小SINR准则的性能最好。这说明，我们应该根据不同的信道条件去选择合适的功率分配算法，以获得最优的BLER性能。

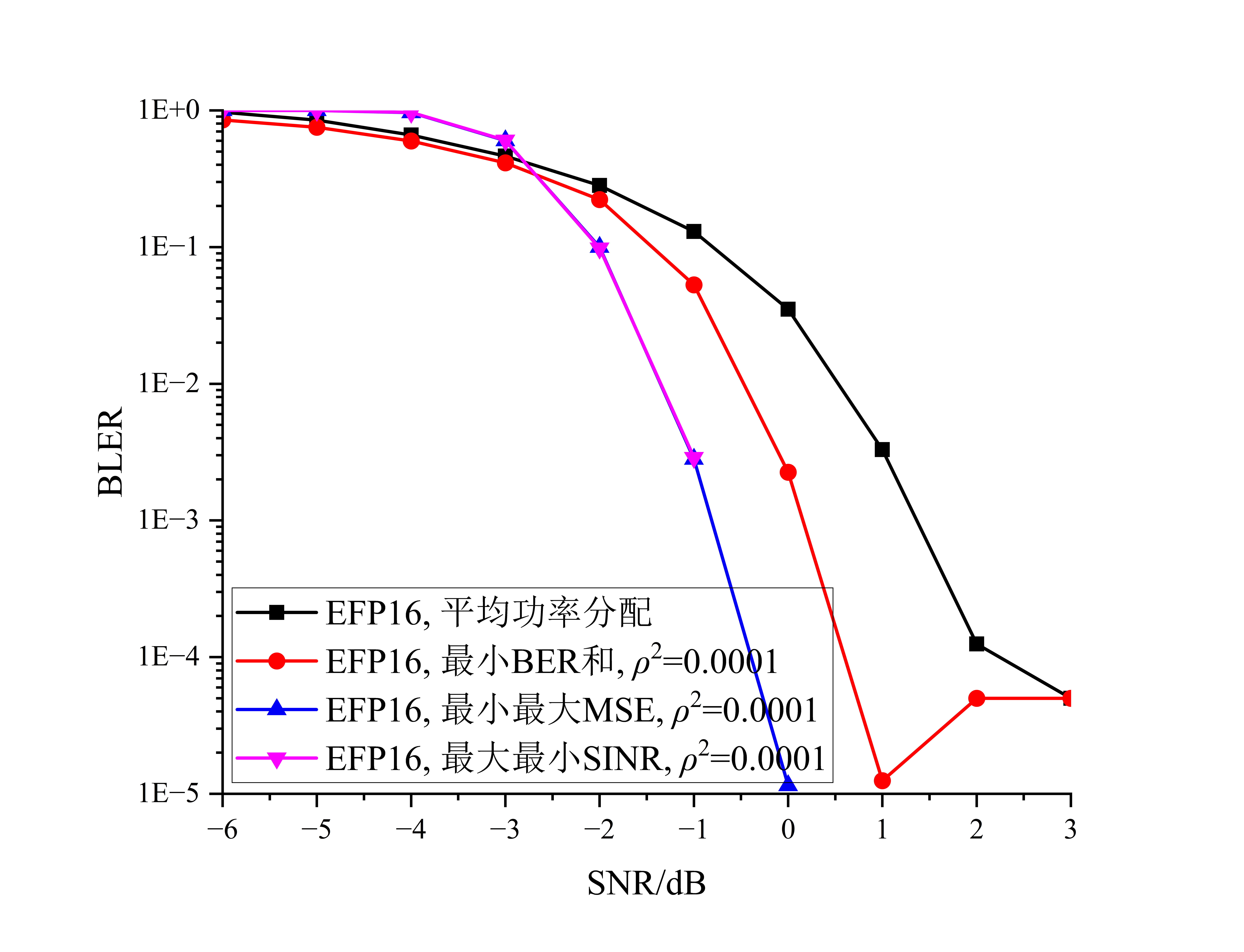


图8.8不同设计准则下功率分配算法的BLER性能比较

最后，根据以上分析和仿真，我们从性能、复杂度、可优化性和鲁棒性四个角度对不同设计准则下的功率分配算法进行总结，具体见表6.2。

表6.2：不同功率分配算法的总结

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 性能 | 复杂度 | 可优化性 | 鲁棒性 |
| 平均功率分配 | 最差 | **最低** | 最差 | 最差 |
| 最小BER和 | **低SNR最优** | 最高 | **最优** | 较差 |
| 最小最大MSE | **高SNR最优** | 较低 | 差 | **最优** |
| 最大最小SINR | **高SNR最优** | 较低 | 差 | **最优** |