Unos conjuntos abiertos particulares

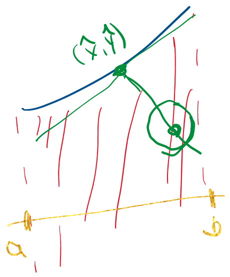
sábado, 17 de agosto de 2024 07:07 p. m.

Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ una función diferenciable en (a,b), consideremos

$S_f^- = \{(x,y)\in(a,b)\times\mathbb{R} \mid f(x)<y\}$, $S_f^+ = \{(x,y)\in(a,b)\times\mathbb{R} \mid f(x)>y\}$,

entonces S_f^+ y S_f^- son abiertos.

Sol: Caso I: f es convexa.



En esa situación, notemos las siguientes observaciones

Obs 1: Dado $(\hat{x},\hat{y})\in\mathbb{R} \ni f(x)=y$

entonces la recta

$$\mathcal{L}=\{y=f(\hat{y})+f'(\hat{y})(x-\hat{x})\}$$
$$=\{f'(\hat{y})x-y=f'(\hat{y})\hat{x}-f(\hat{y})\}$$

es tangente a la gráfica y pasa por $(\hat{x},\hat{y})$. Todo punto $(h,k)\in S_f^-$

de la forma

$$(h,k)=(\hat{x},\hat{y})+(f'(\hat{y}),-1)\lambda, \quad \lambda>0$$

Satisface que si $r<\min\left\{\frac{\lambda}{\sqrt{1+(f'(\hat{y}))^2}}, |b-h|, |a-h|\right\}$

$$\Rightarrow B_r(h,k)\subseteq S_f^-$$

Dem: Si $(\hat{h},\hat{k})\in B_r(h,k)$

$$|h-\hat{h}| < \left\|\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\hat{h}\\\hat{k}\end{pmatrix}\right\|<r$$

$\Rightarrow$ $|h-\hat{h}|<|h-b|$ y $|h-\hat{h}|<|h-a|$, $h\in(a,b)\Rightarrow\hat{h}\in(a,b)$

$\therefore$ existe el valor $f(\hat{h})\in\mathbb{R}$, usando el semiplano inferior a $\mathcal{L}$

$\Rightarrow$ (h,k) está en el semiplano inferior a $\mathcal{L}$ por lo visto en clase

y como f es convexa $\Rightarrow (h,k)\in S_f^-$ ■

Dem. del caso I: S_f^- es abierto por obs. 1.

Dem del caso I: S_f^- es abierto por obs. 1.

Para S_f^+, sea $(h,K) \in S_f^+$, trazamos su proyección ortogonal a la gráfica en (h_0, K_0)

Sea $r_0 = d\left(\binom{h}{K}, \binom{h_0}{K_0}\right)$ y sean

$A_1, \dots, A_n \in S_{r_0}\binom{h}{k} \cap G_f$ donde

$G_f = \{(x,y) \mid f(x) = y\}$ es la grafica de f, definimos

$r_i := d\left(A_i, \binom{h}{k}\right)$, $\forall\, i = 1, \dots, n$ y sea

$$r < \min\{r_0, \dots, r_n, |b-h|, |a-h|\}$$

$$\Rightarrow B_r\binom{h}{k} \subseteq S \quad \blacksquare$$

Caso II: f es concava. La prueba se sigue de definir $g := -f$ y usando que, por caso I S_g^- y S_g^+ son abierto.

Caso III: f es general: Dado que $f'(x) = 0$ tiene un conjunto numerable de soluciones, digamos $\{x_1, \dots, x_n\}$

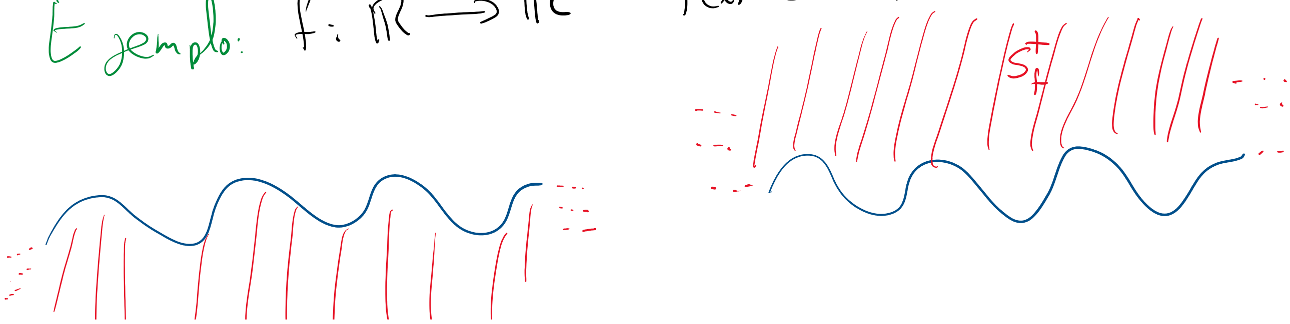
Sea $f_i : (x_i, x_{i+1}) \to \mathbb{R}$ $\quad f_i(x) = f(x)$

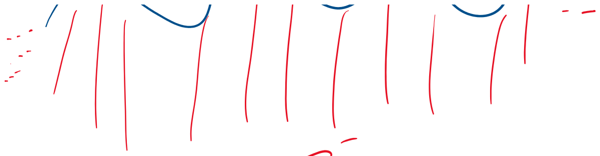
$\Rightarrow$ f_i es concava o convexa, se aplica el caso I

y S_f^-, S_f^+ son la unión de abiertos $S_{f_i}^-$ y/o $S_{f_i}^+$

$\therefore$ S_f^-, S_f^+ son abiertos $\blacksquare$

Ejemplo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \sin(x)$ entonces





Sf

son abiertos.