Obligatorisk oppgave 4 - MAT301 - Matematikk III

5/4/22

1

Lag en regulær triangulering av området $0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2$ i xy-planet, hvor avstanden mellom vertexene er 0.5 i x-retning og 0.5 i y-retning.Tegn figur for den regulære trianguleringen til punktene i xy-planet. Indekser nodene (vertexene) for de 8 første trekantene. Sett opp en topologi/struktur for trianguleringen med node/vertex indekser og naboinformasjon for de 8 første trekantene.

2

Gitt en skjøtvektor $\{0, 0, 0, 2, 3\}$

a) Bestem alle lineære B-spline basisfunksjoner. Vis framgangsmåten.

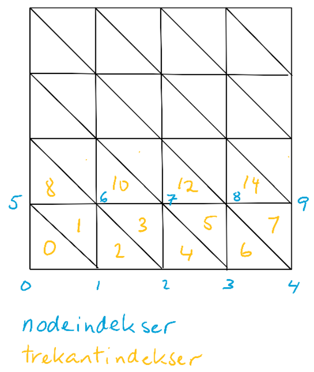
b) Bestem alle kvadratiske B-spline basisfunksjoner. Vis framgangsmåten.

3 Fasit

3.1

Flere mulige svar. Nummerering fra nederste venstre hjørne: Nodene på nederste linje blir 0,1,2,3,4 nodene på nest nederste linje blir 5,6,7,8,9. Med diagonaler sv-nø får vi trekantene 0:015, 1:516, 2:1126, 3:627, 4:237, 5:738, 6:348, 7:849. Med topologi (for hver node legger vi til indeksen til nodens motstående trekant, og bruker -1 til å angi at ingen trekant fins) blir det da:

```
0 1 5   1  -1  -1
5 1 6   2   8   0
1 2 6   3   1  -1
6 2 7   4  10   2
2 3 7   5   3  -1
7 3 8   6  12   4
3 4 8   7   5  -1
8 4 9  -1  14   6
```

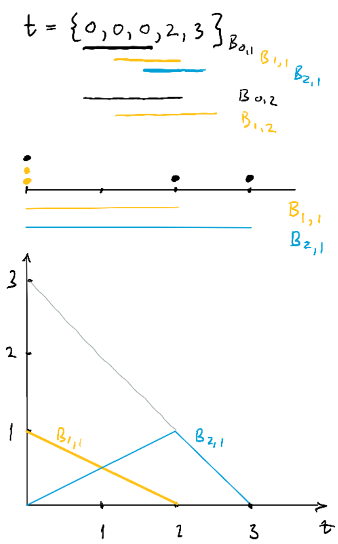


Figur 1: Triangulering med indeksering av de 8 første trekantene og nodene som inngår.

3.2

Det er 5 elementer i skjøtvektoren, altså $n + d + 1 = 5$. De lineære basisfunksjonene går over 3 skjøter (d+2), så vi kan få tre av dem. Dette er skissert på figuren. De lineære basisfunksjonene er 1 i midterste skjøt og 0 i endene (første og siste skjøt), hvis da ikke alle tre skjøtene er like.

Siden vi har 3 like skjøter i starten, blir $B_{0,1}(t) = 0$ - det trenger man ikke regne ut, da det er ellers-delen i den rekursive definisjonen som gjelder.



Figur 2: De lineære bsaisfunksjonene på $\mathbf{t} = \{0, 0, 0, 2, 3\}$.

Første komponenten til $B_{1,1}(t)$ blir 0 $B_{1,0}(t) = 0$ fordi $t_1 = t_2$. Når vi bruker den rekursive definisjonen får vi da:

$$\begin{aligned} B_{0,1}(t) &= 0 \\ B_{1,1}(t) &= (1 - \frac{t}{2})B_{2,0} = \frac{2-t}{2}B_{2,0} \\ B_{2,1}(t) &= \frac{t}{2}B_{2,0} + (3-t)B_{3,0} \end{aligned}$$

De kvadratiske basisfunksjonene: Vi får $w_{1,2} = \frac{t-t_1}{t_3-t_1} = \frac{t}{2}$ og $1 - w_{1,2} = \frac{2-t}{2}$. Videre $w_{2,2} = \frac{t-t_2}{t_4-t_2} = \frac{t}{3}$ og $1 - w_{2,2} = \frac{3-t}{3}$.

$$B_{0,2}(t) = w_{0,2}B_{0,1} + (1 - w_{1,2})B_{1,1} = 0 + (\frac{2-t}{2})(\frac{2-t}{2})B_{2,0} = \frac{(2-t)^2}{4}B_{2,0}$$

og

$$\begin{aligned} B_{1,2}(t) &= w_{1,2}B_{1,1} + (1 - w_{2,2})B_{2,1} \\ &= \frac{t}{2} \cdot \frac{2-t}{2}B_{2,0} + (\frac{3-t}{3})(\frac{t}{2}B_{2,0} + (3-t)B_{3,0}) \\ &= \frac{2t-t^2}{4}B_{2,0} + \frac{3t-t^2}{6}B_{2,0} + \frac{(3-t)^2}{3}B_{3,0} \\ &= (-\frac{5}{12}t^2 + t)B_{2,0} + \frac{(3-t)^2}{3}B_{3,0} \end{aligned}$$