Obligatorisk oppgave 3 i MAT301 - Fasit

24. mars 2022

1

La A(4,0), B(0,0), C(0,4) og D(4,4) være kontrollpunktene til en kubisk Bezierkurve.

a) Tegn opp kontrollpolygonet og vis hvordan du bruker deCasteljau algoritmen til å finne punktet på kurven som svarer til parameterverdien $t = \frac{1}{2}$.

a) Tegn opp et nytt kontrollpolygon og vis hvordan du bruker deCasteljau algoritmen til å finne punktet på kurven som svarer til parameterverdien $t = \frac{3}{4}$.

c) Skisser Bezierkurven på figuren fra a) eller b).
a, b, c: Se figur til slutt.

d) Vis ved utregning hvordan du kommer fram til de to punktene på Bezierkurven i a) og b)

Bruker notasjonen $\mathbf{c_0}$, $\mathbf{c_1}\dots$

$$\begin{aligned}
\mathbf{c_{00}} &= \frac{1}{2}(4,0) + \frac{1}{2}(0,0) = (2,0) \\
\mathbf{c_{10}} &= \frac{1}{2}(0,0) + \frac{1}{2}(0,4) = (0,2) \\
\mathbf{c_{20}} &= \frac{1}{2}(0,4) + \frac{1}{2}(4,4) = (2,4) \\
\mathbf{c_{01}} &= \frac{1}{2}(2,0) + \frac{1}{2}(0,2) = (1,1) \\
\mathbf{c_{11}} &= \frac{1}{2}(0,2) + \frac{1}{2}(2,4) = (1,3) \\
\mathbf{c_{20}} &= \frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(1,3) = (1,2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c_{00}} &= \frac{1}{4}(4,0) + \frac{3}{4}(0,0) = (1,0) \\
\mathbf{c_{10}} &= \frac{1}{4}(0,0) + \frac{3}{4}(0,4) = (0,3) \\
\mathbf{c_{20}} &= \frac{1}{4}(0,4) + \frac{3}{4}(4,4) = (3,4) \\
\mathbf{c_{01}} &= \frac{1}{4}(1,0) + \frac{3}{4}(0,3) = (\frac{1}{4},\frac{9}{4}) \\
\mathbf{c_{11}} &= \frac{1}{4}(0,3) + \frac{3}{4}(3,4) = (\frac{9}{4},\frac{15}{4}) \\
\mathbf{c_{20}} &= \frac{1}{4}(\frac{1}{4},\frac{9}{4}) + \frac{3}{4}(\frac{9}{4},\frac{15}{4}) = (\frac{14}{8},\frac{27}{8})
\end{aligned}
$$

2

Gitt en kvadratisk kurve som interpolerer punktene P(0,2), Q(2,0) og R(3,2). PQR er altså kontrollpunktene.

a) Bruk Neville's algoritme til å regne ut punktet på kurven som svarer til parameterverdien $t = \frac{1}{2}$.

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{1}{2}(0,2) + \frac{1}{2}(2,0) = (1,1) \\
Y &= \frac{3}{2}(2,0) - \frac{1}{2}(3,2) = (\frac{3}{2},-1) \\
XY &= \frac{3}{4}(1,1) + \frac{1}{4}(\frac{3}{2},-1) = (\frac{9}{8},\frac{1}{2})
\end{aligned}
$$

b) Bruk Neville's algoritme til å regne ut punktet på kurven som svarer til parameterverdien $t = \frac{3}{2}$.

$$
\begin{aligned}
X &= -\frac{1}{2}(0,2) + \frac{3}{2}(2,0) = (3,-1) \\
Y &= \frac{1}{2}(2,0) + \frac{1}{2}(3,2) = (\frac{5}{2},1) \\
XY &= \frac{1}{4}(3,-1) + \frac{3}{4}(\frac{5}{2},1) = (\frac{21}{8},\frac{1}{2})
\end{aligned}
$$

c) La $\leq t \leq 2$ og skisser kurven. Se figur til slutt.

3

Gitt et triangel med hjørner (-1,0), $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ og $(-\frac{1}{2},1)$, i rekkefølge mot urviseren.

a) Regn ut de barysentriske koordinatene til punktet $(-\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ med hensyn på dette trianglet.

b) Regn ut de barysentriske koordinatene til punktet (1, 1) med hensyn på dette trianglet.

c) Forklar hvordan fortegn på de barysentriske koordinatene forteller noe om plasseringen til et punkt i forhold til det aktuelle trianglet.

Setter P=(-1,0), $Q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ og $R = (-\frac{1}{2}, 1)$. Vi får $\vec{u} = Q - P = [\frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$ og $\vec{v} = R - P = [\frac{1}{2}, 1]$ som gir $A = \vec{u} \times \vec{v} = \frac{5}{4}$.

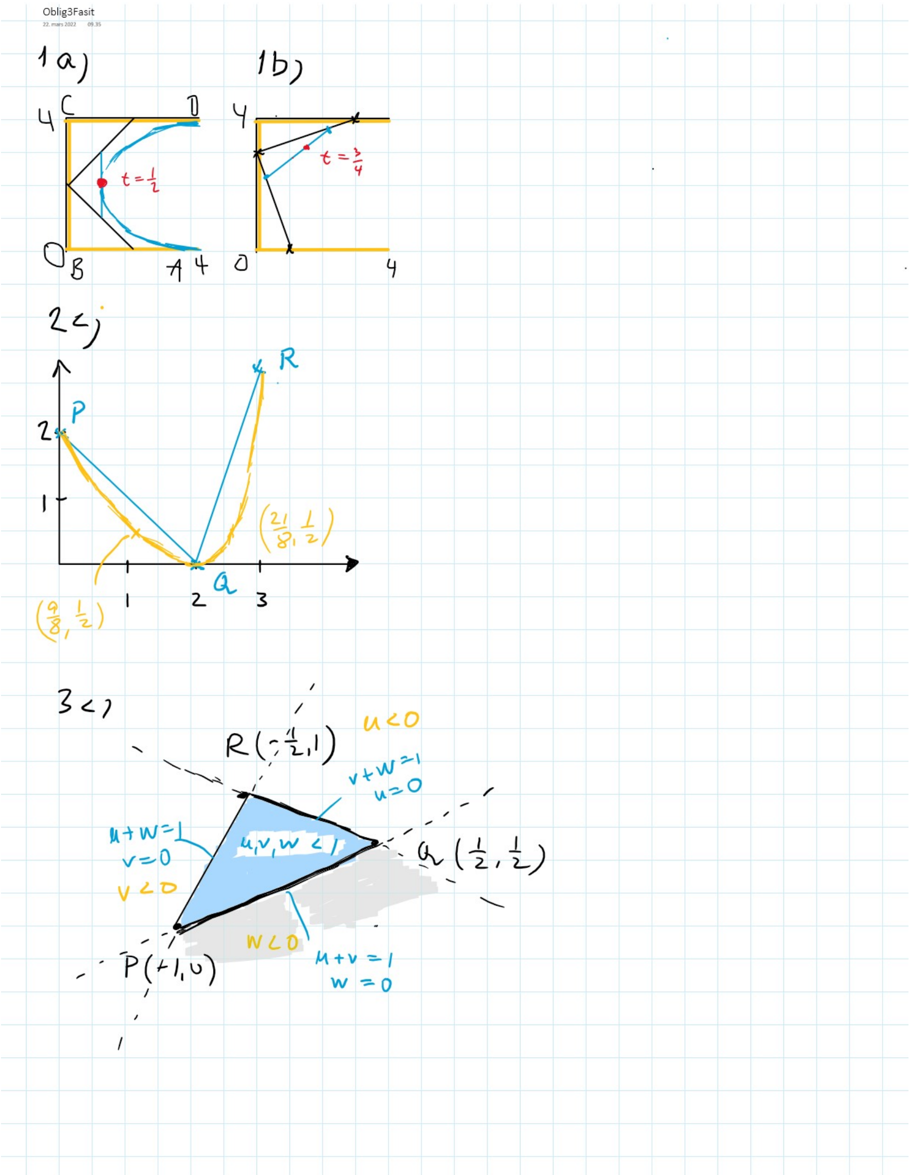
a) Setter $X = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ og kaller de barysentriske koordinatene u, v, w.

$$
\begin{aligned}
u &= (Q - X) \times (R - X)/A = [\frac{3}{4}, 0] \times [-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]/A = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{10} \\
v &= (R - X) \times (P - X)/A = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}]/A = \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{10} \\
w &= (P - X) \times (Q - X)/A = [-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}] \times [\frac{3}{4}, 0]/A = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{10}
\end{aligned}
$$

b) Setter nå X(1, 1) og kaller de barysentriske koordinatene u, v, w.

$$
\begin{aligned}
u &= (Q - X) \times (R - X)/A = [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}] \times [-\frac{3}{2}, 0]/A = -\frac{3}{5} \\
v &= (R - X) \times (P - X)/A = [-\frac{3}{2}, 0] \times [-2, -1]/A = \frac{6}{5} \\
w &= (P - X) \times (Q - X)/A = [-2, -1] \times [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]/A = \frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

c) Forklar hvordan fortegn på de barysentriske koordinatene forteller noe om plasseringen til et punkt i forhold til det aktuelle trianglet.


Oblig3Fasit
1a)
C
D
4
0
B
A
4
$t=\frac{1}{2}$
1b)
4
0
4
$t=\frac{3}{4}$
2c)
P
R
Q
2
1
1
2
3
$(\frac{9}{8}, \frac{1}{2})$
$(\frac{21}{8}, \frac{1}{2})$
3c)
$R(-\frac{1}{2}, 1)$
$Q(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$P(-1, 0)$
$u<0$
$v+w=1$
$u=0$
$u+w=1$
$v=0$
$v<0$
$u, v, w < 1$
$w<0$
$u+v=1$
$w=0$

Figur 1: