线性代数精彩应用案例 (之一)

李尚志
(北京航空航天大学理学院， 100083)

线性代数是大学最重要的基础课程之一. 它的内容比起另一门最重要的基础课 — 微积分要少得多，但是还是有很多学生感到线性代数难学，特别是难以入门. 其主要原因在于线性代数一开始就从天而降许多抽象的概念，将初学者先打了 "一百杀威棒".

在我们通过建设国家精品课程《线性代数》形成的十五规划教材《线性代数》(李尚志著，高教出版社， 2006) 中，为了帮助初学者克服学习抽象概念时所遇到的困难，我们不是从定义出发而是从问题出发来组织课程内容，首先提出一些重要而又能引起学生兴趣的问题，引导学生一步步建立数学模型来描述和解决这些问题，在解决问题的过程中引出概念和方法. 在得出这些概念和方法之后，还提供了应用它们来解决问题的更多的例子. 以下是其中的两个例子： (1) 求斐波那契数列的通项公式； (2) 对任意正整数 $n \geq 3$ 设计 n 阶幻方. 这两个问题都是数学史上有名的问题，都有它们各自的专门的解答方法. 然而，通过如下的分析可以看到：无需学习和记住任何专门的方法，只要利用线性代数中一些众所周知的基本概念，问题就迎刃而解.

一、斐波那契数列

例 1 数列 $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ 如果满足条件

$$F_1 = F_2 = 1; \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (\text{对所有的正整数} \quad n \geq 3)\ ,$$

就称为斐波那契 (Fibonacci) 数列. 试求斐波那契数列的通项公式.

解 先求满足递推关系

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \tag{1}$$

的等比数列 $\{a_n\}$, 其中 $a_n = a_1 q^{n-1}$. 于是 (1) 成为

$$a_1 q^{n-1} = a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-3}, \quad \text{即} \quad q^2 = q + 1, \quad \text{即} \quad q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

可见，满足条件 (1) 的等比数列有两个可能的公比 $q_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 和 $q_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

如果等比数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 = a_2 = 1$, 则公比为 1, 既不等于 q_1 也不等于 q_2, 因此不可能满足条件 (1). 但是，如果将满足条件 (1) 的两个等比数列 $\{a, aq_1, aq^2, \dots,\}$ 与 $\{b, bq_2, bq_2^2, \dots,\}$ 逐项相加得到数列

$$\{c_n\} = \{a_n + b_n\} = \{a + b, aq_1 + bq_2, aq_1^2 + bq_2^2, \dots,\} \tag{2}$$

则数列 (2) 仍然满足条件 (1). 如果能适当选择 a, b 使 $c_1 = c_2 = 1$ 即

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ aq_1 + bq_2 = 1 \end{cases} \tag{3}$$

则 $\{c_n\}$ 就符合斐波那契数列 $\{F_n\}$ 所满足的全部条件. 容易看出，满足条件的斐波那契数列 $\{F_n\}$ 是唯一的. 因此，满足条件 (3) 的 a, b 决定的数列 (2) 就是所求的斐波那契数列.

由于 q_1, q_2 已知，可以将条件 (3) 看成以 a, b 为未知数的二元一次方程组，解之得

$$\begin{cases} a = \dfrac{q_2 - 1}{q_2 - q_1} \\ b = \dfrac{1 - q_1}{q_2 - q_1} \end{cases}$$

从而

$$F_n = aq_1^{n-1} + bq_2^{n-1} = \frac{q_1^{n-1}(q_2 - 1) + q_2^{n-1}(1 - q_1)}{q_2 - q_1}$$

由于 $q_1 + q_2 = 1, q_2 - 1 = -q_1, 1 - q_1 = q_2$, 又 $q_2 - q_1 = \sqrt{5}$. 因此

$$F_n = \frac{q_2^n - q_1^n}{q_2 - q_1} = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \qquad \square$$

以上的解法的关键是：满足条件 (1) 的两个等比数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 之和 $\{c_n\}$ 仍然满足条件 (1), (虽然 $\{c_n\}$ 一般说来不再是等比数列), 适当选择 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 就可以使 $\{c_n\}$ 的前两项都等于 1.

实际上，满足条件 (1) 的任意两个数列的和仍然满足条件 (1), 满足条件 (1) 的任意一个数列 $\{a_n\}$ 的常数倍 $\{\lambda a_n\}$ 仍然满足条件 (1). 考虑由复数组成的全体数列 $\{a_n\}$ 组成的集合 V 对于通常的加法和数乘构成的复数域 C 上的线性空间 V, 则其中满足条件 (1) 的全体数列组成的集合

$$U = \{\{a_n\} \mid a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall\ n \geq 3\}$$

对加法和数乘封闭，是 V 的一个子空间． U 中每个数列 $\alpha = \{a_n\}$ 由它的前两项 a_1, a_2 唯一决定，可以记作 $f(a_1, a_2)$. 映射 $f : (a_1, a_2) \mapsto f(a_1, a_2)$ 是二维数组空间 C^2 到 U 的同构，因此 U 是二维空间．通过解方程 $q^2 = q + 1$ 找到了两个不同的根 q_1, q_2, 也就是在 U 中找到了两个线性无关的等比数列 $f(1, q_1), f(1, q_2)$, 它们构成了 U 的一组基，只要再找出斐波那契数列 $f(1, 1)$ 在这组基下的坐标 (a, b), 即找出满足条件

$$f(1, 1) = af(1, q_1) + bf(1, q_2) \quad 即 \quad (1, 1) = a(1, q_1) + b(1, q_2)$$

也就是条件 (3) 的 a, b, 就能由等比数列 $f(1, q_1), f(1, q_2)$ 的通项公式得到斐波那契数列 $f(1, 1)$ 的通项公式.

例 1 可以推广到更一般的情形:

问题 1　对任意给定的复数 b, c, 如果数列 $\{u_n\}$ 满足条件

$$u_n = bu_{n-1} + cu_{n-2} \qquad (\forall\ n \geq 3) \tag{4}$$

并且已知这个数列的前两项 u_1, u_2, 求 u_n. $\square$

仍用 V 表示复数组成的全体数列 $\{a_n\}$ 组成的复数域上线性空间．则满足条件 (4) 的全体数列组成 V 的 2 维子空间 W, 其中每个数列 $\{u_n\}$ 由前两项决定，可以记为 $\varphi(u_1, u_2)$. 通过解方程 $q^2 = bq + c$ 可以求出 W 中首项为 1 的等比数列 $\{1, q, q^2, \ldots\}$. 如果方程 $q^2 = bq + c$ 有两个不同的根 q_1, q_2, 则等比数列 $\varphi(1, q_1), \varphi(1, q_2)$ 组成 W 的一组基，解方程组

$$x(1, q_1) + y(1, q_2) = (u_1, u_2)$$

求出 $\varphi(u_1, u_2)$ 在这组基下的坐标 (x, y), 就可以由等比数列 $\varphi(1, q_1), \varphi(1, q_2)$ 的通项公式求出 $\varphi(u_1, u_2)$ 的通项公式.

但是，如果方程 $q^2=bq+c$ 两根相等， W 中的等比数列就不能构成 W 的基，除了等比数列 $\varphi(1,q)=\{1,q,q^2,\ldots\}$ 之外还需要求出 W 中与 $\varphi(1,q)$ 线性无关并且它的通项公式已知的另外一个数列与 $\varphi(1,q)$ 共同构成 W 的一组基，才能得到任一个 $\varphi(u_1,u_2)$ 的通项公式. 不过，我们可以采取另一个方法来解例 1, 这个方法可以推广到例 2 的所有的情况，包括方程 $q^2=bq+c$ 两根不相等或相等的情况.

例 1 **解法** 2

考虑由数列 $\{F_1,F_2,\ldots,F_n,\ldots\}$ 中相邻两项组成的数组 $\alpha_{n-1}=(F_{n-1},F_n)$ 组成的序列 $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\}$. 由 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ 得到序列 $\{\alpha_n\}$ 的相邻两项 $\alpha_{n-2}=(F_{n-2},F_{n-1})$ 与 $\alpha_{n-1}=(F_{n-1},F_n)$ 之间有关系

$$\begin{pmatrix}F_{n-1}\\F_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_{n-1}\\F_{n-2}+F_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_{n-2}\\F_{n-1}\end{pmatrix},$$

即

$$\alpha_{n-1}=A\alpha_{n-2}\,,\qquad \text{其中}\quad A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

序列的 $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\}$ 每一项 α_{n-1} 可以由前一项 α_{n-2} 乘矩阵 A 得到，就好象是以 A 为“公比”的“等比数列”, 与等比数列类似可以得到它的通项:

$$\begin{pmatrix}F_{n-1}\\F_n\end{pmatrix}=\alpha_{n-1}=A\alpha_{n-2}=A^2\alpha_{n-3}=\cdots=A^{n-2}\alpha_1=A^{n-2}\begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix}=A^{n-2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

只要算出了 A^{n-2}, 就能得到 F_n. 为了算出 A^{n-2}, 利用矩阵相似的理论和方法，先将 A 相似于尽可能简单的形状.

A 的特征多项式 $\varphi_A(\lambda)=\lambda^2-\lambda-1$, 解得特征值为 $\lambda_1=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$ 和 $\lambda_2=\dfrac{1-\sqrt5}{2}$. 分别求得特征向量 $X_1=\begin{pmatrix}1\\\lambda_1\end{pmatrix}$ 和 $X_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda_2\end{pmatrix}$. 以 X_1,X_2 为两列组成可逆方阵 $P=(X_1,X_2)=\begin{pmatrix}1&1\\\lambda_1&\lambda_2\end{pmatrix}$, 则

$$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1&\\&\lambda_2\end{pmatrix}P^{-1},\qquad A^{n-2}=P\begin{pmatrix}\lambda_1&\\&\lambda_2\end{pmatrix}^{n-2}P^{-1}=P\begin{pmatrix}\lambda_1^{n-2}&\\&\lambda_2^{n-2}\end{pmatrix}P^{-1},$$

$$\begin{pmatrix}F_{n-1}\\F_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\\lambda_1&\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1^{n-2}&\\&\lambda_2^{n-2}\end{pmatrix}\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix}\lambda_2&-1\\-\lambda_1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix}*\\\lambda_2^n-\lambda_1^n\end{pmatrix}.$$

从而

$$F_n=\frac{\lambda_2^n-\lambda_1^n}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)^n}{\sqrt5}.\qquad\square$$

例 2 设数列 $\{u_n\}$ 满足条件 $u_n=bu_{n-1}+cu_{n-2}$, 且方程 $q^2=bq+c$ 两根相等. 已知 u_1,u_2, 求 u_n.

解 设方程 $q^2=bq+c$ 即 $q^2-bq-c=0$ 的相等的两根为 q, 则 $b=2q,c=-q^2$. 于是 $u_n=2qu_{n-1}-q^2u_{n-2}$,

考虑序列 $\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_2\\u_3\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}u_{n-1}\\u_n\end{pmatrix},\ldots,$

$$\begin{aligned}\text{则}\quad\begin{pmatrix}u_{n-1}\\u_n\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0&1\\c&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{n-2}\\u_{n-1}\end{pmatrix}=\cdots\\&=\begin{pmatrix}0&1\\c&b\end{pmatrix}^{n-2}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

如果能写 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & b \end{pmatrix} = P^{-1}JP$

使 $J = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

则 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & b \end{pmatrix} = P^{-1}J^{n-2}P$.

A 的特征多项式 $\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2q\lambda + q^2 = (\lambda - q)^2$. 因而 $(A - qI)^2 = 0$, (其中 I 是单位阵). 取 $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 满足条件 $X_1 = (A - qI)X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 则 $(A - qI)X_1 = 0$, $(A - qI)X_2 = X_1$, 从而 $AX_1 = qX_1$, $AX_2 = X_1 + qx_2$. 以 X_1, X_2 为两列组成可逆方阵 $P = (X_1, X_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix}$, 则

$$AP = A(X_1, X_2) = (qX_1, X_1 + qX_2) = (X_1, X_2)\begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & q \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & q \end{pmatrix}.$$

从而

$$A = P\begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & q \end{pmatrix}P^{-1}, \qquad A^{n-2} = P\begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & q \end{pmatrix}^{n-2}P^{-1}.$$

矩阵 $\begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ 可以写为 $qI + N$ 的形式，其中 $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 与 I 交换且满足 $N^2 = 0$. 因此可以用牛顿二项式定理求得

$$(qI + N)^{n-2} = (qI)^{n-2} + (n-2)(qI)^{n-3}N = \begin{pmatrix} q^{n-2} & (n-2)q^{n-3} \\ 0 & q^{n-2} \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned} A^{n-2} = P(qI + N)^{n-2}P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q^{n-2} & (n-2)q^{n-3} \\ 0 & q^{n-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & * \\ -(n-2)q^{n-1} & (n-1)q^{n-2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^{n-2}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ -(n-2)q^{n-1}u_1 + (n-1)q^{n-2}u_2 \end{pmatrix}.$$

所求通项公式为

$$u_n = -(n-2)q^{n-1}u_1 + (n-1)q^{n-2}u_2. \tag{5}$$

如果在例 2 得到的通项公式 (5) 中取 $u_1 = 1, u_2 = q$, 就得到 $u_n = q^{n-1}$, 此时的数列 $\{u_n\} = \{1, q, q^2, \ldots, q^{n-1}, \ldots\}$ 就是满足条件 $u_n = 2qu_{n-1} - q^2u_{n-2}$ 的全体数列组成的二维空间 W 中的等比数列. 如果在通项公式 (5) 中取 $u_1 = 0, u_2 = q$, 则 $u_n = (n-1)q^{n-1}$, 数列 $\{u_n\} = \{0, q, 2q^2, 3q^3, \ldots, (n-1)q^{n-1}, \ldots\}$. 可见，当方程 $q^2 = bq + c$ 的两根相等、都等于 q 时，满足条件 $u_n = bu_{n-1} + cu_{n-2}$ 的全体数列组成的空间 W 中可以取等比数列 $\{1, q, q^2, \ldots, q^{n-1}, \ldots, \}$ 与数列 $\{0, q, 2q^2, \ldots, (n-1)q^{n-1}, \ldots\}$ 组成一组基，将 W 中任意数列 $\{u_n\}$ 写成这组基的线性组合来求通项 u_n.

以上例题的解法可以加以推广，解决下面的更一般的问题：

问题 2 设 $k \geq 1$ 是任意正整数， $a_1, \ldots, a_k$ 是任意给定的 k 个复数，假定由复数组成的数列 $\{u_n\}$ 满足条件

$$u_n = a_1u_{n-1} + a_2u_{n-2} + \cdots + a_ku_{n-k}, \quad \forall\ n > k\,. \tag{5}$$

如果已经知道该数列的前 k 项 $u_1, u_2, \ldots, u_k$, 求它的通项 u_n. $\square$

问题 1 和问题 2 有专门的方法和技巧来解决. 但是，我们在前面所采用的解法，不需要学习和记住什么专门的方法和技巧，只是从线性代数的观点出发对问题进行分析、将问题转化为用线性代数中现成的方法来解决. 一般地说，将需要解决的问题用数学的语言来描述、转化为可以用已有的数学工具 (或发明出新的数学工具) 来解决，这就是数学建模. 而我们将解递推方程的的问题 1 和问题 2 用线性代数的语言来描述，用线性代数的方法来解决，这可以说是线性代数建模.

二、幻方

例 3 (幻方) 试将正整数 $1, 2, \ldots, 9$ 填入 3×3 的方格表中，使每行、每列、每条对角线上的 3 个数之和都取同一个值. $\square$

更一般地，有

问题 3 对任意正整数 $n \geq 3$, 将正整数 $1, 2, \ldots, n^2$ 填入 $n \times n$ 的方格表中，使每行、每列、每条对角线上的 n 个数之和都取同一个值. $\square$

幻方的设计是一个古老的数学问题. 表面上看，幻方的设计只用到整数的加法这样的简单算术知识. 然而，要设计满足条件的幻方并不容易，前人有许多专门的方法和技巧，可以写成很厚的书. 我们这里没有必要去叙述和学习这些方法和技巧，只是借助于线性代数的一个简单的概念使幻方的设计和检验变得非常简单，可以对每个正整数 $n \geq 3$ 设计出一批幻方. (注意，$n = 1$ 时过分简单没有意义，$n = 2$ 不可能，因此只考虑 $n \geq 3$ 的情况.) 我们在这里的目的并非在于幻方本身，而是以此为例说明看起来抽象的数学概念有着意想不到的广泛而精彩的应用.

先来看 5 阶幻方.

例 4 (**5 阶幻方构造法**) 试将正整数 $1, 2, \ldots, 25$ 填入 5×5 的方格中，使每行、每列、每条对角线上的 5 个数之和都取同一个值.

解 先将 $0, 1, 2, 3, 4$ 各重复 5 次填入表中，使每行、每列、每条对角线上的 5 个数之和都取同一个值. 例如，如下两张表就符合要求：

$$A_5 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}, \qquad B_5 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ \hline 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ \hline \end{array}.$$

(其中表 A_5 是从第一行的 $0, 1, 2, 3, 4$ 开始将每一行的各数向右移动 2 格 (模 5) 得到下一行得到. 这里，模 5 的意思是：如果右移 2 格移动到表的外面了，就向右移动 $2 - 5 = -3$ 格、也就是向左移动 3 格. 而表 B_5 则是将 A 关于第 3 列作轴对称得到.)

两张表中, 每行、每列、每条对角线上的 5 个数都是 0,1,2,3,4 的一个排列, 其和当然取同一个值 $0+1+2+3+4$. 而且，在第一表 A_5 中取值相同的 5 个位置，在第二张表 B_5 中填的都是 5 个不同的数. 将第一张表所有的数同乘以 5, 再与第二张表中同一位置的数相加，得到的表 $C_5 = 5A_5 + B_5$ 的每行、每列、每条对角线上的 5 个数之和仍都取同一个值. 且 C 的各个位置的整数两两不同，取遍从 0 到 24 的 25 个不同的整数. 再将表 C_5 中所有位置的整数同时加 1, 得到的表 X_5 的每行、

每列、每条对角线上的 5 个数之和仍都取同一个值，而表中出现的整数是从 1 到 25 的 25 个不同整数.

$$C_5 = 5A_5 + B_5 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ \hline 17 & 21 & 0 & 9 & 13 \\ \hline 5 & 14 & 18 & 22 & 1 \\ \hline 23 & 2 & 6 & 10 & 19 \\ \hline 11 & 15 & 24 & 3 & 7 \\ \hline \end{array}, \quad X_5 = C_5 + H_5 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 5 & 9 & 13 & 17 & 21 \\ \hline 18 & 22 & 1 & 10 & 14 \\ \hline 6 & 15 & 19 & 23 & 2 \\ \hline 24 & 3 & 7 & 11 & 20 \\ \hline 12 & 16 & 25 & 4 & 8 \\ \hline \end{array}$$

(其中 H_5 是所有元素全为 1 的 5×5 的方格表). □

例 4 的主要思路是：

将幻方满足的条件 “**每行、每列、每条对角线上的** 5 **个数之和取同一个值**” 简称为 **相等条件**. 将满足相等条件的所有的 5×5 方格表 (实际上是 5×5 矩阵)

$$X = (x_{ij})_{5\times 5} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{51} & \cdots & x_{55} \end{pmatrix}$$

的全体组成的集合记作 U. 则 U 中任意两个 5×5 矩阵 $X=(x_{ij})_{5\times 5}$ 和 $Y=(y_{ij})_{5\times 5}$ 相加得到的 5×5 矩阵 $X+Y=(x_{ij}+y_{ij})_{5\times 5}$ 仍满足相等条件，仍在 U 中； U 中任一 X 与任一有理数 λ 相乘得到的 5×5 矩阵 $\lambda X=(\lambda x_{ij})_{5\times 5}$ 也在 U 中. 由此可见 U 是有理数域 Q 上的一个线性空间. 我们在 U 中选取容易构造的矩阵 A_5, B_5, H_5 作线性组合 $5A_5+B_5+H_5$ 就得到了所需要的幻方.

例 4 中实际上是将 0 到 24 的每个整数 a 用它除以 5 的商 q 和余数 r 来代表： $a=5q+r$, 其中 $0\le q, r<5$. 将 $0,1,2,3,4$ 分别重复 5 次构造两个表 A_5, B_5 使它们都满足 U 所要求的条件，并且在 A_5 中取值相等的 5 个位置在 B_5 中的取值各不相同. 以 A_5 中的数作为商、 B_5 中的数作为余数，得到的线性组合 $5A_5+B_5$ 仍满足 U 的条件，并且由 0 到 24 的 25 个不同的整数组成. 再加上 U 中全部由 1 组成的方阵 H_5 就得到由 1 到 25 的整数组成的幻方 X_5.

显然，例 4 中给出的方案不是唯一的. 比如，矩阵 A_5 的转置显然仍在 U 中，可以作为 B_5. 实际上，将 A_5 绕中心作旋转 (旋转 $90°, 180°, 270°$) 或作轴对称，得到的矩阵都可以作为 B_5. 也可以将每一行的数右移 3 位 (模 5) 得到下一行来作为 A_5 或者 B_5, 等等.

用与例 4 相同的方法可以构造 n 等于其它值的 n 阶幻方，只要 n 不被 2 或 3 整除. 用同样的思路、将例 4 的方法稍加变通可以对每个正整数 n 得出一批 n 阶幻方. 例如

3 **阶幻方构造法**

$$A_3 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad B_3 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \qquad X_3 = 3A_3 + B_3 + H_3 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 9 & 2 \\ \hline 3 & 5 & 7 \\ \hline 8 & 1 & 6 \\ \hline \end{array}$$

利用这个方法可以对所有的奇数 $n=2m+1\ge 3$ 构造出 n 阶幻方：

奇数 $n=2m+1$ **阶幻方构造法**

$$A_n = \begin{pmatrix} m & m+1 & \cdots & m-1 \\ m-1 & m & \cdots & m-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m+1 & m+2 & \cdots & m \end{pmatrix}$$

将 A_n 关于正中间的那一列 (第 $m+1$ 列) 作轴对称得到 B_n, nA_n+B_n 的每个元素加 1 即为所求 n 阶幻方 X_n.

6 阶幻方构造法

由 3 阶幻方 X_3 构造一个满足相等条件的 6 阶方阵 B_6:

$$X_3=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&9&2\\\hline 3&5&7\\\hline 8&1&6\\\hline\end{array}\quad\Rightarrow\quad B_6=\begin{array}{|cc|cc|cc|}\hline 4&4&9&9&2&2\\4&4&9&9&2&2\\\hline 3&3&5&5&7&7\\3&3&5&5&7&7\\\hline 8&8&1&1&6&6\\8&8&1&1&6&6\\\hline\end{array}$$

设计一个由 2 阶块组成的满足相等条件的 6 阶方阵，使每个 2 阶块由 $0,1,2,3$ 组成：

$$A_6=\begin{array}{|cc|cc|cc|}\hline 0&1&2&3&3&0\\3&2&1&0&2&1\\\hline 0&3&0&1&2&3\\1&2&2&3&1&0\\\hline 2&1&3&0&1&2\\3&0&1&2&0&3\\\hline\end{array}$$

设计的顺序是：先确定中间的块 $\begin{pmatrix}0&1\\2&3\end{pmatrix}$ 使它的两条对角线元素之和都是 3. 再填写它的右边和下面的块使已确定的 3 块满足相等条件. 剩下的 6 块每两块作为一组 (其中第 (1,1) 与 (1,2) 块为一组，第 (2,1) 与 (3,1) 块为一组，第 (1,3) 与第 (3,3) 为一组), 让每组分别满足关于行和列的相等条件，并兼顾对角线的相等条件.

将 A_6 的 9 倍与 B_6 相加，就得到一个满足条件的 6 阶幻方：

$$X_6=9A_6+B_6=\begin{array}{|cc|cc|cc|}\hline 4&13&27&36&29&2\\31&22&18&9&20&11\\\hline 3&30&5&14&25&34\\12&21&23&32&16&7\\\hline 26&17&28&1&15&24\\35&8&10&19&6&33\\\hline\end{array}$$

$2k$ (k 为奇数) 阶幻方构造法

仿照 6 阶幻方可以对任意奇数 $k\geq 3$ 构造出 $2k$ 阶幻方. 与构造 6 阶幻方时的 B_6 类似，在任一 k 阶幻方 $X=(x_{ij})_{k\times k}$ 中将每个元素 x_{ij} 换成 2 阶块 $\begin{pmatrix}x_{ij}&x_{ij}\\x_{ij}&x_{ij}\end{pmatrix}$ 可以得到一个满足相等条件的 $2k$ 阶方阵 B_{2k}. 以构造 6 阶幻方时的 A_6 为中心向各方向扩展，可以得到一个由 2 阶块组成的满足相等条件的 $2k$ 阶方阵，其中每个二阶块由 $0,1,2,3$ 组成的 2 阶方阵：

$$A_{2k}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline M_{11}&M_{12}&M_{13}\\\hline M_{21}&A_6&M_{23}\\\hline M_{31}&M_{32}&M_{33}\\\hline\end{array}$$

其中的 A_6 就是构造 6 阶幻方时的 6 阶方阵， M_{11}, M_{21} 全部由 2 阶块 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ 组成， M_{13}, M_{23} 全部由 2 阶块 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 组成， M_{31} 全部由 2 阶块 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 组成， M_{33} 全部由 2 阶块 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 组成， M_{12} 全部由 $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 组成， M_{32} 全部由 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ 组成．例如，当 $k=5$ 时

$$A_{10} = \begin{array}{|cc|cc|cc|cc|cc|}
\hline
0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 2 & 3 \\
3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & 2 & 3 \\
3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\
3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\
3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\
\hline
3 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 2 & 3 \\
\hline
\end{array}$$

构造好 A_{2k}, B_{2k} 之后， $k^2 A_{2k} + B_{2k}$ 就是符合要求的 $2k$ 阶幻方．

4 阶幻方构造法

$$A_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline
3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline
3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline
0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline
\end{array}, \quad
B_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
0 & 3 & 3 & 0 \\ \hline
1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline
2 & 1 & 1 & 2 \\ \hline
3 & 0 & 0 & 3 \\ \hline
\end{array}, \quad
X_4 = 4A_4 + B_4 + H_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
1 & 8 & 12 & 13 \\ \hline
14 & 11 & 7 & 2 \\ \hline
15 & 10 & 6 & 3 \\ \hline
4 & 5 & 9 & 16 \\ \hline
\end{array}$$

由 k 阶幻方 ($k=2m$ 为偶数) 构造 $2k$ 阶幻方的方法

设已构造了一个 k 阶幻方 $X_k = (x_{ij})_{k\times k}$．将其中每个元素 x_{ij} 用 2 阶块 $\begin{pmatrix} x_{ij} & x_{ij} \\ x_{ij} & x_{ij} \end{pmatrix}$ 代替可得到一个满足相等条件的 $2k$ 阶方阵 B_{2k}．以 4 阶方阵

$$A_4 = \begin{array}{|cc|cc|}
\hline
0 & 1 & 2 & 3 \\
2 & 3 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 3 & 2 \\
3 & 2 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

为块构造 $2k$ 阶 (即 $4m$ 阶) 方阵

$$A_{2k} = \begin{pmatrix} A_4 & \cdots & A_4 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_4 & \cdots & A_4 \end{pmatrix}.$$

则 $4A_{2k} + B_{2k}$ 是符合要求的 $2k$ 阶幻方．

例如，由 4 阶幻方 X_4 可以构造 8 阶幻方 X_8:

$$A_8 = \begin{array}{|c|c|}\hline A_4 & A_4 \\ \hline A_4 & A_4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|cc|cc|cc|cc|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$X_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 8 & 12 & 13 \\ \hline 14 & 11 & 7 & 2 \\ \hline 15 & 10 & 6 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 9 & 16 \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad B_8 = \begin{array}{|cc|cc|cc|cc|}\hline 1 & 1 & 8 & 8 & 12 & 12 & 13 & 13 \\ 1 & 1 & 8 & 8 & 12 & 12 & 13 & 13 \\ \hline 14 & 14 & 11 & 11 & 7 & 7 & 2 & 2 \\ 14 & 14 & 11 & 11 & 7 & 7 & 2 & 2 \\ \hline 15 & 15 & 10 & 10 & 6 & 6 & 3 & 3 \\ 15 & 15 & 10 & 10 & 6 & 6 & 3 & 3 \\ \hline 4 & 4 & 5 & 5 & 9 & 9 & 16 & 16 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & 9 & 9 & 16 & 16 \\ \hline \end{array}$$

$$X_8 = 16A_8 + B_8 \,.$$

按照以上的方法，首先可以对 m 为奇数或 $m=4$ 构造 m 阶幻方．利用已构造出的 m 阶幻方可以构造出 $2m$ 阶幻方，然后再构造出 $2(2m)=4m$ 阶幻方，依此类推可以构造出任意 $n=2^k m$ 阶幻方，其中 k 为任意非负整数， m 为奇数或 $m=4$. 这样的 n 可以取遍所有 ≥ 3 的正整数.