习题1

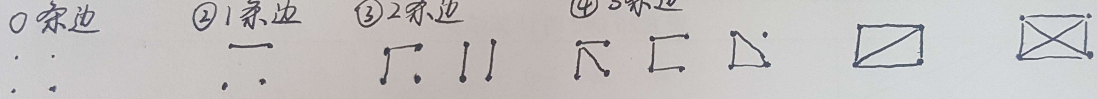
1、(3) 反证法：假设没有奇度点，则 $\forall v \in V(G)$，有 $d(v) \geq 2$，则有 $2m = \sum d(v) \geq 2n$，

可得 $m \geq n > n-1$，与已知矛盾。

∴恰有 $n-1$ 条边，则至少有一个奇度点。

5、∵四个顶点最多有 $C_4^2 = 6$ 条边，最少有0条边

① 0条边 ② 1条边 ③ 2条边 ④ 3条边 ⑤ ⑥



∴上述已经穷举了所有情形，~~由~~因此得证。

11. ① 由于7个顶点的简单图最大度不会超过6，∴序列 (7, 6, 5, 4, 3, 3, 2) 不是图序列。

② 由序列知，有2个顶点与其余顶点均邻接，即所有顶点的度数均大于等于2

∴此序列不是图序列。

12、设 $W = v_1 v_2 \dots v_k$ 是 G 中的一条最长路，由于 $\delta \geq 2$，因此必存在一点 $v_i \in \{v_1, \dots, v_k\}$，

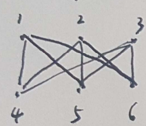
并且 v_i 与 v_k 邻接，则 $v_i, v_{i+1}, \dots, v_k$ 则为 G 中的一个圈。

习题2

3、反证法：若 G 中度为1的顶点个数 S 小于 K，则有 $2m = \sum_{v \in V} d(v) \geq 2[n-(S+1)] + k + S = 2n - 2 - S + K$
$\geq 2n - 1$

与 $m = n-1$ 矛盾，所以原命题得证。

12、 $K_{3,3}$



易知 $K_{3,3}$ 的拉氏矩阵：

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

第1行一列的余子式：

$$(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 81$$

∴ $K_{3,3}$ 的生成树有81颗。

习题3

4(1)、证：设 G 中有割边 $e = uv$，由割边定理可知 $w(G-e) > w(G) = 1$

则 $G-e$ 包含2个连通分支 G_1, G_2，由 $n \geq 3$，如有 $v \in G_2$，$V(G_2) \geq 2$，

显然有 $G-v = G_1 \cup (G_2 - v)$，且 $G_1 \cap (G_2 - v) = \phi$，则有 $w(G-v) \geq 2 > 1 = w(G)$

7、容易验证，$\overline{G} - v = \overline{G - v}$，因为 v 是 G 的割点，所以 $G-v$ 一定不是连通图。从而 $G-v$ 的补图是连通图。

因此，在 G 的补图中删去顶点 v 不会增加图的连通分支数。

∴ v 不是 G 的补图的割点。

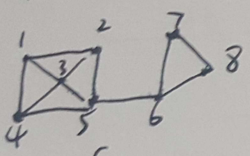
12、在G_1中，$K(G_1)=2$，最小点割为$\{6,8\}$

$\lambda(G_1)=2$，最小边割为$\{(8,9),(6,9)\}$

在G_2中，$K(G_2)=3$，最小点割$\{1,7,3\}$

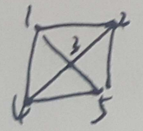
$\lambda(G_2)=3$，最小边割$\{(1,2),(2,7),(2,3)\}$

13、举例如下：



G

$K(G)=1$，最小割为$\{5\}$



H

又其子图H，$K(H)=3$

$\therefore$有$K(H)>K(G)$，得证。