组合优化理论

第3章 对偶理论

主讲人：陈安龙

一、问题的提出

对偶性是线性规划问题的最重要的内容之一。每一个线性规划（LP）必然有与之相伴而生的另一个线性规划问题，即任何一个求 maxZ 的LP都有一个求 minZ 的LP。其中的一个问题叫"原问题"，记为"P"，另一个称为"对偶问题"，记为"D"。

例1、资源的合理利用问题

已知资料如表所示，问应如何安排生产计划使得既能充分利用现有资源又使总利润最大？

单件消耗 产品 / 资源	甲	乙	资源限制
A	5	2	170（钢材）
B	2	3	100（煤炭）
C	1	5	150（设备）
单件利润	10	18	

数学模型：

$$\max Z = 10x_1 + 18x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 170 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 100 \\ x_1 + 5x_2 \le 150 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

(原问题）

下面从另一个角度来讨论这个问题：

假定：该厂的决策者不是考虑自己生产甲、乙两种产品，而是将厂里的现有资源用于接受外来加工任务，只收取加工费。试问该决策者应制定怎样的收费标准（合理的）？

分析问题：

1、每种资源收回的费用不能低于自己生产时的可获利润；

2、定价又不能太高，要使对方能够接受。

设y_1, y_2, y_3分别为三种资源的收费单价，所以有下式：

$$5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 10$$

$$2y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 18$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

就目标而言，用下式可以表达：

$$W = 170y_1 + 100y_2 + 150y_3$$

一般而言，W越小越好，但因需双方满意，故

$\min W = 170y_1 + 100y_2 + 150y_3$ 为最好。

该问题的数学模型为：

$$\min W = 170y_1 + 100y_2 + 150y_3$$

$$\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 10 \\ 2y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 18 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

（对偶问题）

模型对比：

$$\max Z = 10x_1 + 18x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 170 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 100 \\ x_1 + 5x_2 \le 150 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

(原问题)

$$\min W = 170y_1 + 100y_2 + 150y_3$$

$$\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 10 \\ 2y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 18 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

（对偶问题）

对偶问题的形式

定义 设原线性规划问题为 则称下列线性规划问题

$$
\begin{aligned}
&Max \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&s.t \begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\
x_j \ge 0 \left(j = 1,2,\cdots,n \right)
\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Min \quad W = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \\
&s.t \begin{cases}
a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\
a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\
\cdots \\
a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \ge c_n \\
y_i \ge 0 \left(i = 1,2,\cdots,m \right)
\end{cases}
\end{aligned}
$$

为其对偶问题，其中 y_i (i=1,2,…,m) 称为*对偶变量*。

上述对偶问题称为*对称型对偶问题*。

原问题简记为(P)，对偶问题简记为(D)

对偶问题的矩阵形式

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$C=[c_1,c_2,\cdots,c_n]$$

$$Y=[y_1,y_2,\cdots,y_m]$$

原始问题（P）

Max Z=CX

s.t. $AX \leq b$

$X \geq 0$

对偶问题（D）

Min W=Yb

s.t. $YA \geq C$

$Y \geq 0$

原始问题

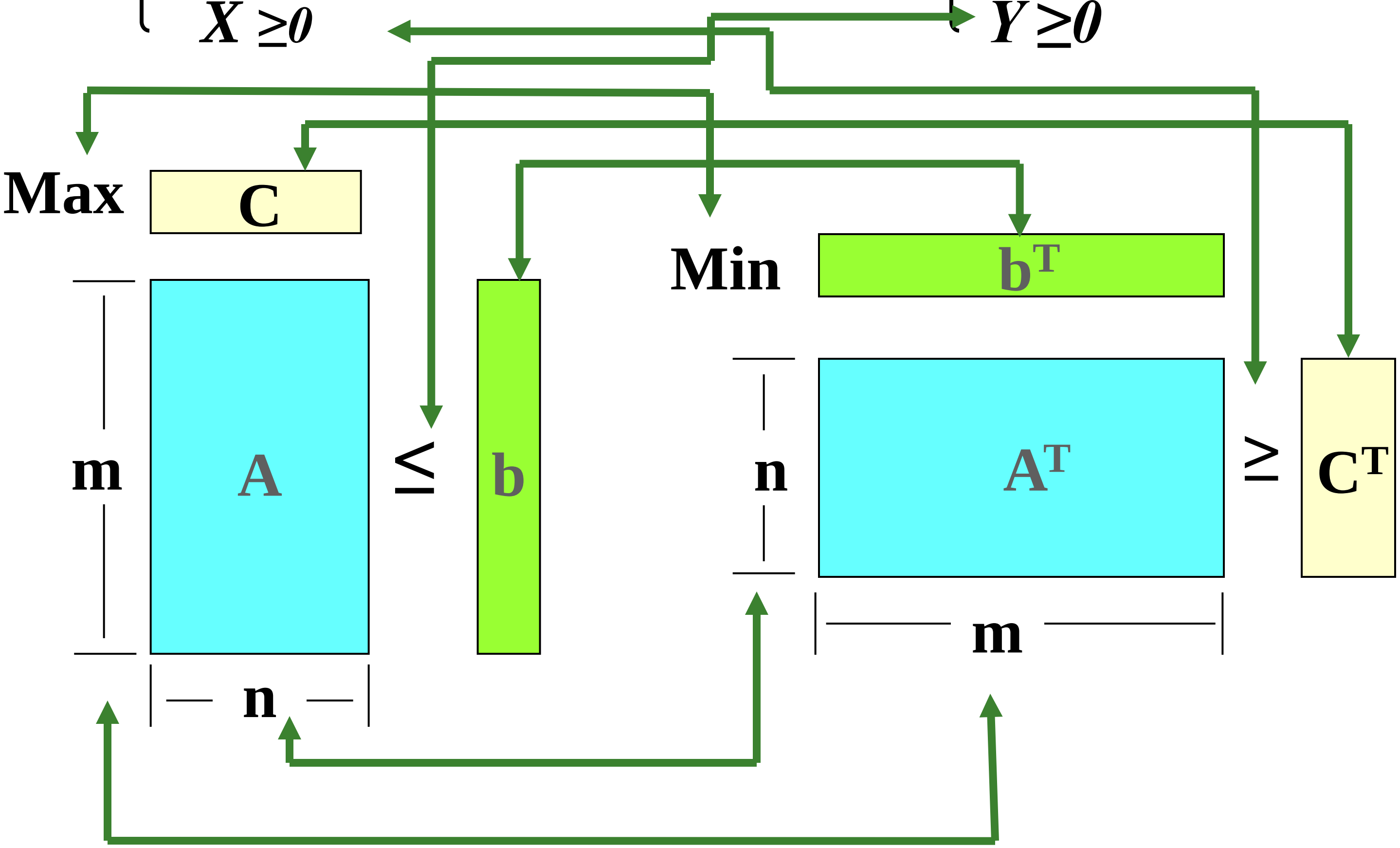
$Max\ Z=CX$

s.t. $\begin{cases} AX\le b \\ X\ge 0 \end{cases}$

对偶问题

$Min\ W=Yb=b^TY^T$

s.t. $\begin{cases} YA\ge C \text{或者} A^TY^T\ge C^T \\ Y\ge 0 \end{cases}$



原始问题与对偶问题的对应关系

Min w		Max z					
		$x_1 \geq 0$	$x_2 \geq 0$	…	$x_n \geq 0$	
		x_1	x_2	…	x_n	
$y_1 \geq 0$	y_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	$\leq b_1$
$y_2 \geq 0$	y_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	$\leq b_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$y_m \geq 0$	y_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	$\leq b_m$
		$\geq c_1$	$\geq c_2$	…	$\geq c_m$	

例1：求线性规划问题的对偶规划

$$\text{Max} \quad z = 5x_1 + 6x_2$$

$$s.t \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 7 \\ 4x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解：由原问题的结构可知为对称型对偶问题

$$\text{Min} \quad w = 7y_1 + 9y_2$$

$$s.t \quad \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 \ge 5 \\ -2y_1 + y_2 \ge 6 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

例2：求线性规划问题的对偶规划

$$Max \quad Z = 5x_1 - 6x_2$$

$$s.t \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 7 \\ 4x_1 + x_2 \ge 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解：由原问题的结构可知不是对称型对偶问题，可先化为对称型，再求其对偶规划。

$$Max \quad Z = 5x_1 - 6x_2$$

$$s.t \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 7 \\ -4x_1 - x_2 \le -9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$Min \quad W = 7y_1 - 9y_2$$

$$s.t \quad \begin{cases} 3y_1 - 4y_2 \ge 5 \\ -2y_1 - y_2 \ge -6 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

例3： 求线性规划问题的对偶规划

$$
\begin{aligned}
&Max \quad Z = 5x_1 + 6x_2 \\
&s.t \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 7 \\ 4x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

解： 由原问题的结构可知不是对称型对偶问题，可先化为对称型，再求其对偶规划。

$$
\begin{aligned}
&Max \quad Z = 5x_1 + 6x_2 \\
&s.t \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 7 \\ 3x_1 - 2x_2 \ge 7 \\ 4x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
&Max \quad Z = 5x_1 + 6x_2 \\
&s.t \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 7 \\ -3x_1 + 2x_2 \le -7 \\ 4x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

上式已为对称型对偶问题，故可写出它的对偶规划

$$
\begin{aligned}
&Min \quad Z = 7y_1' - 7y_1'' + 9y_2 \\
&s.t \quad \begin{cases} 3y_1' - 3y_1'' + 4y_2 \ge 5 \\ -2y_1' + 2y_1'' + y_2 \ge 6 \\ y_1', y_1'', y_2 \ge 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

令 $y_1 = y_1' - y_1''$ 则上式化为

$$
\begin{aligned}
&Min \quad Z = 7y_1 + 9y_2 \\
&s.t \quad \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 \ge 5 \\ -2y_1 + y_2 \ge 6 \\ y_1\text{无限制}, y_2 \ge 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Max \quad Z = 5x_1 + 6x_2 \\
&s.t \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 7 \\ 4x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

对偶关系对应表

原问题（或对偶问题）		对偶问题（或原问题）	
目标函数 max		目标函数 min	
约束条件	m个	n个	变量
	≤	≥0	
	≥	≤0	
	=	无约束	
变量	n个	m个	约束条件
	≥0	≥	
	≤0	≤	
	无约束	=	
	约束条件右端项	目标函数变量的系数	
	目标函数变量的系数	约束条件右端项	

对偶问题的基本性质

定理1 对偶问题(D)的对偶就是原问题(P)。

$$\begin{aligned} Max \quad & Z = CX \\ s.t \quad & \begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases} \end{aligned}$$

对偶的定义 →

$$\begin{aligned} Min \quad & W = Yb \\ s.t \quad & \begin{cases} YA \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases} \end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned} Max \quad & W' = -Yb \\ s.t \quad & \begin{cases} -YA \le -C \\ Y \ge 0 \end{cases} \end{aligned}$$

对偶的定义 ←

$$\begin{aligned} Min \quad & Z' = -CX \\ s.t \quad & \begin{cases} -AX \ge -b \\ X \ge 0 \end{cases} \end{aligned}$$

↑

定理2（弱对偶定理）

若 X 和 Y 分别为原问题(P)及其对偶问题(D)的任意可行解，则有 $CX \le Yb$ 成立。

证明：

(P) $\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

$$s.t.\ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & (i = 1, \cdots, m) \\ x_j \ge 0 & (j = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

(D) $\min w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

$$s.t.\ \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j & (j = 1, \cdots, n) \\ y_i \ge 0 & (i = 1, \cdots, m) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i \\ &\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \ge \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

或者 证明：

$$(P)\quad \mathrm{Max}\quad Z = CX$$
$$\mathrm{s.t}\quad \begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

$$(D)\quad Min\quad W = b^T Y^T = Yb$$
$$s.t\quad \begin{cases} A^T Y^T \ge C^T \text{或} YA \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

所以 $Yb \ge YAX \ge CX$

推论1

若 X 和 Y 分别为原问题(P)及其对偶问题(D)的一对可行解，则 问题(P)及问题(D)的都有最优解。

证明： 当X和Y为原问题和对偶问题的一个可行解

有 $AX \le b$ $YA \ge C$

$YAX \le Yb$ $YAX \ge CX$

原问题目标函数值 $\boxed{CX \le YAX \le Yb}$ 对偶问题目标函数值

所以原问题的目标函数值有上界，即可找到有限最优解；对偶问题有下界，也存在有限最优解。

推论2： 若原问题(P)有可行解，但无有限最优解，则对偶问题(D)无可行解。

证明： 使用反正法：假设原问题(P)有可行解，对偶问题（D）也存在可行解

由推论1知，原问题(P)和对偶问题（D）都有最优解，则与原问题无最优解矛盾。

定理 3：(对偶定理) 如果（*P*）问题（（*D*）问题）有最优解，那么（*D*）问题（（*P*）问题）也有最优解，且目标函数值相等。

证明： 用单纯形法求原问题的最优解：

(P) $$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & (i = 1, \cdots, m) \\ x_j \ge 0 & (j = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + 0\sum_{i=1}^{m} x_{si}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{si} = b_i & (i = 1, \cdots, m) \\ x_j \ge 0, x_{si} \ge 0 & (j = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			c_1	$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_n	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	
C_B	基	b	x_1	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n	x_{s1}	$\cdots$	x_{sl}	$\cdots$	x_{sm}	θ_i
0	x_{s1}	b_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1k}	$\cdots$	a_{1n}	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	θ_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
0	x_{sl}	b_l	a_{l1}	$\cdots$	$[a_{lk}]$	$\cdots$	a_{ln}	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	θ_l $\leftarrow$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
0	x_{sm}	b_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mk}	$\cdots$	a_{mn}	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	θ_m
$c_j - z_j$			δ_1	$\cdots$	$\delta_k \uparrow$	$\cdots$	δ_n	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	

$$\max \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + 0\sum_{i=1}^{m} x_{si}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{si} = b_i & (i=1,\cdots,m) \\ x_j \geq 0, x_{si} \geq 0 & (j=1,\cdots,n) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\sigma_j = c_j - z_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} = c_j - C_B P_j}$$

$$\max \quad z = \boldsymbol{CX} + \boldsymbol{0X_s}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{IX_s} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{X_s} \geq \boldsymbol{0} \end{cases}$$

$c_j \to$			c_1	$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_n	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	θ_i
C_B	基	b	x_1	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n	x_{s1}	$\cdots$	x_{sl}	$\cdots$	x_{sm}	
0	x_{s1}	b_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1k}	$\cdots$	a_{1n}	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	θ_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
0	x_{sl}	b_l	a_{l1}	$\cdots$	$[a_{lk}]$	$\cdots$	a_{ln}	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\theta_l \leftarrow$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
0	x_{sm}	b_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mk}	$\cdots$	a_{mn}	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	θ_m
$c_j - z_j$			δ_1	$\cdots$	$\delta_k \uparrow$	$\cdots$	δ_n	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	

$$\max \quad z = CX + 0X_s$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} AX + IX_s = b \\ X \geq 0, X_s \geq 0 \end{cases}$$

基变量系数	基变量	基可行解	非基变量	基变量
			X	X_s
0	X_s	b	A	I
$c_j - z_j$			C	0

基变量系数	基变量	基可行解	非基变量	基变量
			X	X_s
0	X_s	b	A	I
$c_j - z_j$			C	0

基变量系数	基变量	基可行解	非基变量		基变量
			X_B	X_N	X_s
0	X_s	b	B	N	I
$c_j - z_j$			C_B	C_N	0

基变量系数	基变量	基可行解	非基变量		基变量
			X_B	X_N	X_s
0	X_s	b	B	N	I
$c_j - z_j$			C_B	C_N	0

B^{-1}存在 进行初等行变换

基变量系数	基变量	基可行解	基变量	非基变量	
			X_B	X_N	X_s
C_B	X_B	$B^{-1}b$	I	$B^{-1}N$	B^{-1}
$c_j - z_j$			0	$C_N - C_B B^{-1}N$	$-C_B B^{-1}$

表中的检验数 C_j-Z_j的推导过程如下：

$$\max \quad z = CX + 0X_s$$
s.t. $$\begin{cases} AX + IX_s = b \\ X \ge 0, X_s \ge 0 \end{cases}$$

$X_B = (x_1,\ldots,x_m)^T$ ， $X_N = (x_{m+1},\ldots,x_n)^T$

$A = (B, N)$ $\quad C = (C_B, C_N)$

$$(B \quad N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} + IX_s = b \rightarrow BX_B + NX_N + IX_s = b$$

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N - B^{-1}X_s$$

$$Z = C_B X_B + C_N X_N + 0X_s$$

$$Z = C_B(B^{-1}b - B^{-1}NX_N - B^{-1}X_s) + C_N X_N + 0X_s$$

$$Z = C_B B^{-1}b + 0X_B + (C_N - C_B B^{-1}N)X_N - C_B B^{-1}X_s$$

若 $C_N - C_B B^{-1}N \le 0$ $\quad -C_B B^{-1} \le 0$

最优解$X^* = B^{-1}b$

最优值$=C_B B^{-1}b$

(P) $\max\ Z = CX$

$$\text{s.t}\quad \begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

(D) $\min\ W = Yb$

$$s.t\quad \begin{cases} YA \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

若$C_N - C_B B^{-1} N \le 0$ ---（1）

$-C_B B^{-1} \le 0$ ---（2）

原问题：

最优解$X^* = B^{-1}b$

最优值$=C_B B^{-1}b$

令$Y = C_B B^{-1}$，则由(1)(2)有 $C_N - YN \le 0$,

因$C_B - YB = 0$，故 $C - YA = [C_B, C_N] - Y[B, N]$

$= [C_B - YB, C_N - YN]$

$= [0, C_N - YN] \le 0$

即 $YA \ge C$，说明Y是D的可行解

此时对偶问题D的目标函数值：$w = Yb = C_B B^{-1} b$

由最优性定理知，Y是D的最优解。

推论：

若一对对偶问题中的任意一个有最优解，则另一个也有最优解，且目标函数最优值相等。

一对对偶问题的关系，有且仅有下列三种：

1. 都有最优解，且目标函数最优值相等；
2. 两个都无可行解；
3. 一个问题无界，则另一问题无可行解。

定理5（互补松弛定理）

若 X 和 Y 分别为(P)和(D)的可行解，则 X、Y 为最优解的充分必要条件是 $\begin{cases} Y(b-AX)=0 \\ (YA-C)X=0 \end{cases}$ 同时成立。

证：（必要性） 原问题 对偶问题

$$\begin{aligned} &Max \quad Z = CX \\ &s.t \begin{cases} AX + X_s = b \\ X, X_s \ge 0 \end{cases} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &Min \quad W = Yb \\ &s.t \begin{cases} YA - Y_s = c \\ Y, Y_s \ge 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$AX + X_s = b \ \left(X_s = b - AX\right) \qquad YA - Y_s = C \ \left(Y_s = YA - C\right)$$

$$Z = CX = (YA - Y_s)X = YAX - Y_s X$$

$$W = Yb = Y(AX + X_s) = YAX + YX_s$$

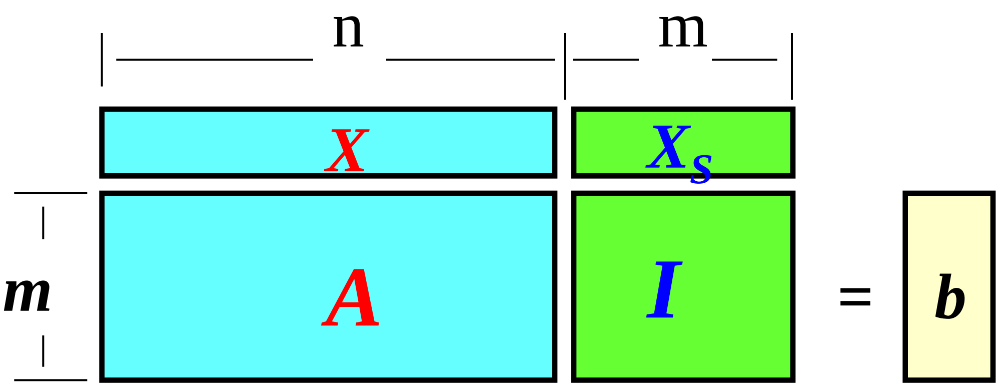
$$YX_s + Y_s X = 0$$

原始问题和对偶问题变量、松弛变量的维数

$$\mathrm{Max}\ \ Z=CX$$

$$\text{s.t.}\quad AX+X_S=b$$

$$X,\ X_S \geq 0$$



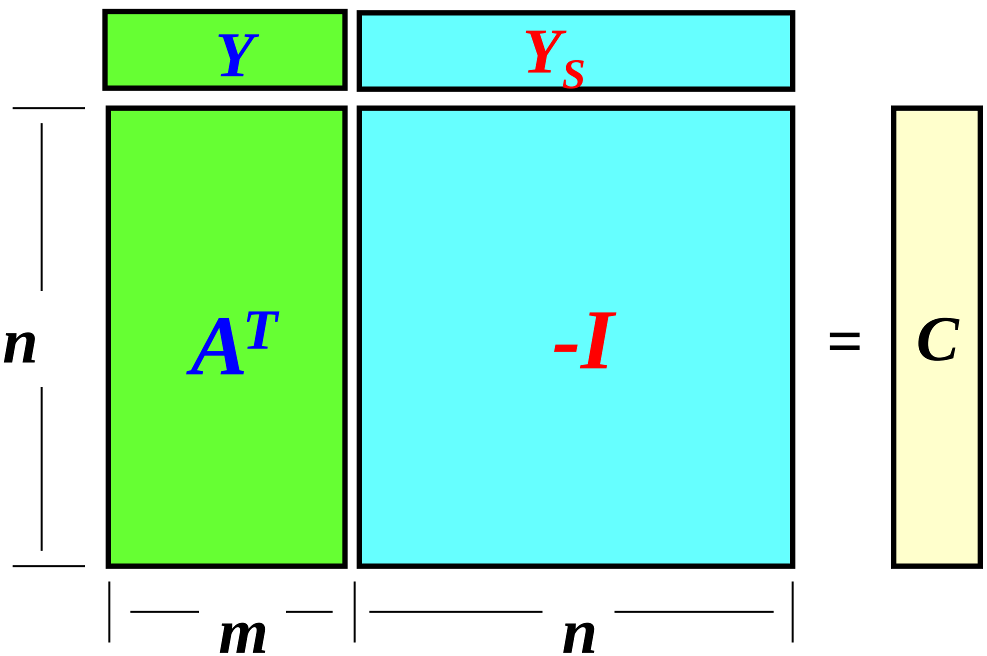
$$\mathrm{Min}\ \ W=Yb$$

$$\text{s.t.}\ \ YA-Y_S=C$$

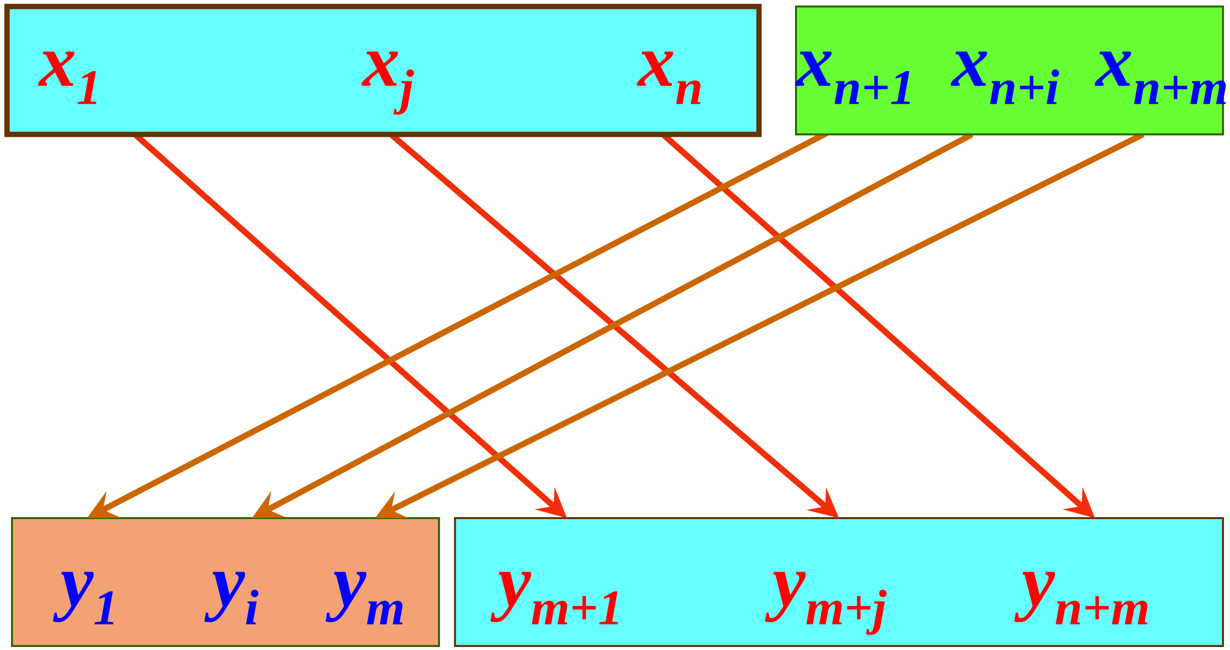
$$W,\ W_S \geq 0$$

$$XY_S=0$$

$$X_SY=0$$



原始问题的变量　　原始问题的松弛变量



对偶问题的变量　　对偶问题的松弛变量

$$x_j y_{m+j}=0 \quad y_i x_{n+i}=0 \quad (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$$

在一对变量中，其中一个大于0，另一个一定等于0

$$\min Z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 9x_5$$

例、已知

$$\begin{cases} x_2 + x_3 - 5x_4 + 3x_5 \geq 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 \geq 3 \\ x_{1-5} \geq 0 \end{cases}$$

试通过求对偶问题的最优解来求解原问题的最优解。

解：对偶问题为

$$\max W = 2y_1 + 3y_2$$

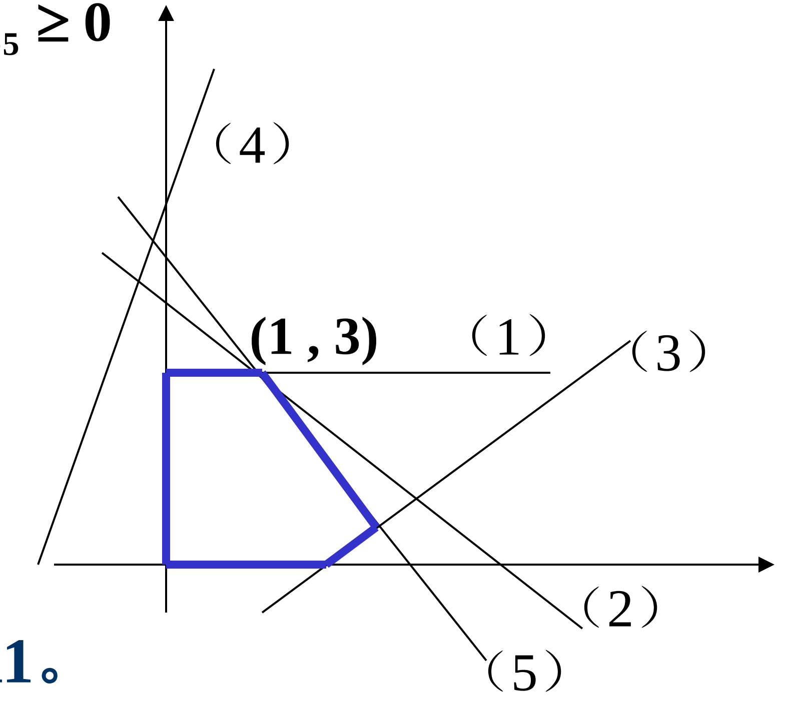
$$\begin{cases} y_2 \leq 3 & (1) \\ y_1 + y_2 \leq 4 & (2) \\ y_1 - y_2 \leq 2 & (3) \\ -5y_1 + y_2 \leq 5 & (4) \\ 3y_1 + 2y_2 \leq 9 & (5) \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\min Z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 9x_5$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 - 5x_4 + 3x_5 \geq 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 \geq 3 \\ x_{1-5} \geq 0 \end{cases}$$

$$\max W = 2y_1 + 3y_2$$

$$\begin{cases} y_2 \leq 3 & (1) \\ y_1 + y_2 \leq 4 & (2) \\ y_1 - y_2 \leq 2 & (3) \\ -5y_1 + y_2 \leq 5 & (4) \\ 3y_1 + 2y_2 \leq 9 & (5) \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$



用图解法求出： $Y^*=（1, 3）$， W=11。

将 $y^*_1=1$， $y^*_2=3$ 代入对偶约束条件，

（1）（2）（5）式为紧约束，（3）（4）为松约束。

令原问题的最优解为 $X^* = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T$，则根据互补松弛条件，

必有 $x_3 = x_4 = 0$

又由于$y^*_1>0$， $y^*_2>0$，原问题的约束必为等式，即

$$\begin{cases} x_2+3x_5=2 \\ x_1+x_2+2x_5=3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1=1+x_5 \\ x_2=2-3x_5 \end{cases}$$

此方程组为无穷多解

令 $x_5=0$, 得到$x_1=1$，$x_2=2$

即 $X^*_1=(1,2,0,0,0)^T$为原问题的一个最优解

$Z^*=11$

再令 $x_5=2/3$，得到$x_1=5/3$，$x_2=0$

即$X^*_2=(5/3,0,0,0,2/3)^T$也是原问题的一个最优解

$Z^*=11$

例、已知原问题的最优解为

$X^* =（0，0，4）^T$，Z=12 。

试求对偶问题的最优解。

$$\max Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \le 2 \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 \ge 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

解：

$$\min W = 2y_1 + y_2 + 4y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 1 & (1) \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \le 4 & (2) \\ -5y_1 + 6y_2 + y_3 = 3 & (3) \\ y_1 \ge 0, y_2 \le 0, y_3\text{无约束} \end{cases}$$

将X^* =（0，0，4）^{T}代入原问题中，有下式：

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -20 & < 2 \\ 3x_1 - \quad x_2 + 6x_3 = 24 & > 1 \\ \quad x_1 + \quad x_2 + \ x_3 \ = 4 & = 4 \end{cases}$$

所以，根据互补松弛条件，必有$y^*_1 = y^*_2 = 0$，代入对偶问题（3）式，y_3 =3。因此，对偶问题的最优解为

Y^*=（0，0，3），W=12。

对偶单纯形法

对偶单纯形法是应用对偶原理求解原始线性规划的一种方法——在原始问题的单纯形表格上进行对偶处理。

注意：不是解对偶问题的单纯形法！

对偶单纯形法的基本思想

1、对“单纯形法”求解过程认识的提升

从更高的层次理解单纯形法

初始可行基（对应一个初始基本可行解）

→迭代→另一个可行基（对应另一个基本可行解），直至所有检验数≤0为止。

所有检验数≤0意味着

$$C_N - C_B B^{-1} N \leq 0 \Rightarrow YA \geq C \quad ,$$

说明原始问题的最优基也是对偶问题的**可行基**。

换言之，当原始问题的基B既是原始可行基又是对偶可行基时，**B成为最优基**。

定理6 B是线性规划的最优基的充要条件是: B是可行基，同时也是对偶可行基。

LP原问题:

$$\begin{aligned} & Max\, Z = \mathbf{CX} \\ & s.t. \begin{cases} \mathbf{AX} = \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

若B是A中的一个基

可行基 → B对应的解是基本可行解，则B是可行基

对偶可行基 → 若单纯形乘子 $\boldsymbol{Y} = \mathbf{C_B B^{-1}}$ 是对偶问题的可行解，则B是对偶可行基

$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$ 是对偶问题的可行解 ⇔ 等价 ⇔ 检验数 $\sigma_N \leq 0$

$$\mathbf{YA} \geq \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C_B B^{-1} A} \geq \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} - \mathbf{C_B B^{-1} A} \leq 0 \rightarrow \sigma_N \leq 0$$

证明：

$$\mathbf{C}-\mathbf{C}_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\le \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{C}_{B}\vdots\mathbf{C}_{N})-\mathbf{C}_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{B}\vdots\mathbf{N})\le \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{C}_{B}\vdots\mathbf{C}_{N})-(\mathbf{C}_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\vdots\mathbf{C}_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\le \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{C}_{B}-\mathbf{C}_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\vdots\mathbf{C}_{N}-\mathbf{C}_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\le \mathbf{0}$$

$$\mathbf{C}_{B}-\mathbf{C}_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}=\mathbf{0}$$
$$\mathbf{C}_{N}-\mathbf{C}_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\le \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{N}\le 0$$

单纯形法的求解过程就是：

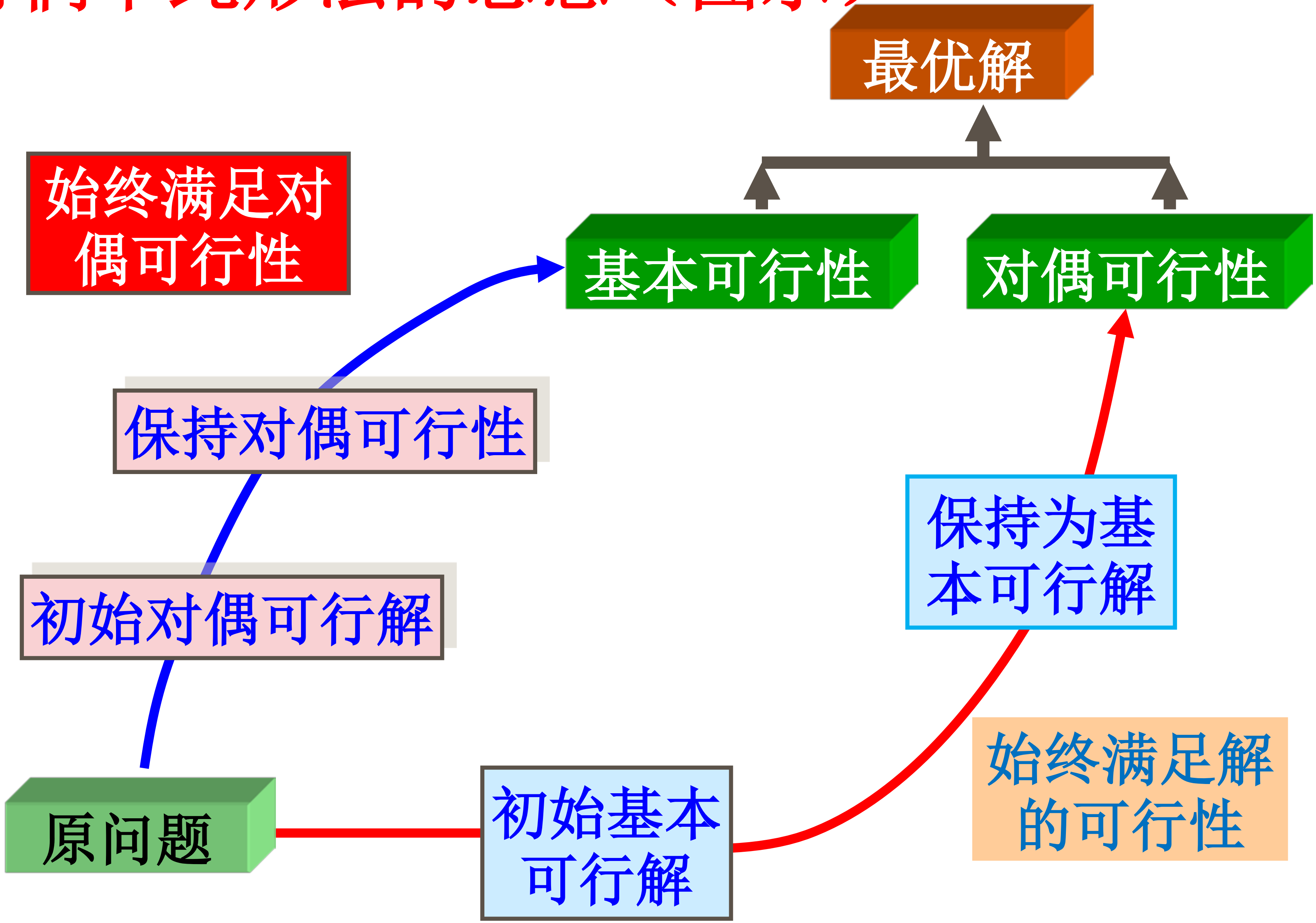
在保持原始可行的前提下(b列保持≥0)，

通过逐步迭代实现对偶可行(检验数行≤0)。

2、 对偶单纯形法思想：

换个角度考虑LP求解过程：保持对偶可行的前提下（检验数行保持≤0），通过逐步迭代实现原始可行（b列≥0，从非可行解变成可行解）。

对偶单纯形法的思想（图示）



三、对偶单纯形法的实施

1、使用条件： ①检验数全部≤0；

②解答列至少一个元素 < 0；

2、实施对偶单纯形法的基本原则：

在保持对偶可行的前提下进行基变换——每一次迭代过程中取出基变量中的一个负分量作为换出变量去替换某个非基变量(作为换入变量),使原始问题的非可行解向可行解靠近。

3、计算步骤：

求解如右的*LP* 问题：

$$\max\ z = cx$$
$$s.t.\quad Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Step1 建立初始单纯形表，计算检验数行。

c		c_1	c_2	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	c_{m+2}	$\cdots$	c_n	
c_B	x_B	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	$\cdots$	x_n	b
c_1	x_1	1	0	$\cdots$	0	a'_{1m+1}	a'_{1m+2}	$\cdots$	a'_{1n}	b'_1
c_2	x_2	0	1	$\cdots$	0	a'_{2m+1}	a'_{2m+2}	$\cdots$	a'_n	b'_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_m	x_m	0	0	$\cdots$	1	a'_{mm+1}	a'_{mm+2}	$\cdots$	a'_{mn}	b'_m
检验数		0	0	$\cdots$	0	σ_{m+1}	σ_{m+2}	$\cdots$	σ_n	$-z^{(0)}$

小于等于零

检验数全部≤0
（非基变量检验数<0）

- 解答列≥0——已得最优解；
- 至少一个元素<0,转下步；

至少一个检验数>0

- 解答列≥0——原始单纯形法；
- 至少一个元素<0,另外处理；

Step 2 若 $b'=B^{-1}b \geq 0$，则停止计算，当前的解 $x=B^{-1}b$ 即为原问题的最优解，否则转入下一步；

Step 3 确定换出基变量：

令 $$b_l' = \min\{b_i' \mid 1 \leq i \leq m\}$$

转 Step 2

则取 x_l 为换出基变量；

Step 4 若 $a_{lj}' \geq 0 \quad (j=1,2,\cdots,n)$ 则停止计算，原问题无可行解，否则转入下一步；

Step 5 确定换入基变量：若 $\theta = \min\left\{\frac{\sigma_j}{a_{lj}'} \middle| a_{lj}' < 0, 1 \leq j \leq n\right\} = \frac{\sigma_k}{a_{lk}'}$

则取 x_k 为换入基变量

Step 6 以 a_{lk}' 为主元，将主元素变成1，主元列变成单位向量，得到新的单纯形表。

循环以上步骤，直至求出最优解。

3、举例——用对偶单纯形法求解LP：

$$Min\, W = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

化为标准型 →

$$Max\, Z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

将两个等式约束两边分别乘以-1，得

$$\mathit{Max}\ Z=-2x_1-3x_2-4x_3$$

$$s.t.\begin{cases}-x_1-2x_2-x_3+x_4=-3\\-2x_1+x_2-3x_3+x_5=-4\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geq 0\end{cases}$$

以此形式进行列表求解，满足对偶单纯形法的基本条件，具体如下：

$c_j \rightarrow$			-2	-3	-4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0
0	x_5	-4	-2	1	-3	0	1
c_j-z_j			-2	-3	-4	0	0

换出变量 x_5 $\theta=\min\left\{\frac{-2}{-2},-,\frac{-4}{-3}\right\}=1$ 换入变量 x_1

			$c_j \rightarrow$	-2	-3	-4	0	0
C_B	X_B	b		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3		-1	-2	-1	1	0
0	x_5	-4		[-2]	1	-3	0	1
			$c_j - z_j$	-2	-3	-4	0	0
0	x_4	-1		0	[-5/2]	1/2	1	-1/2
-2	x_1	2		1	-1/2	3/2	0	-1/2
			$c_j - z_j$	0	-4	-1	0	-1
-3	x_2	2/5		0	1	-1/5	-2/5	1/5
-2	x_1	11/5		1	0	7/5	-1/5	-2/5
			$c_j - z_j$	0	0	-9/5	-8/5	-1/5

C_B	X_B	b \ c_j / x_j	-2 x_1	-3 x_2	-4 x_3	0 x_4	0 x_5
-3	x_2	2/5	0	1	-1/5	-2/5	1/5
-2	x_1	11/5	1	0	7/5	-1/5	-2/5
cj-zj		0	0	0	-3/5	-8/5	-1/5

最优解： $X^*=(11/5,\ 2/5, 0, 0, 0)^T$，

最优值： $\min W= -\max Z^* = -[11/5\times(-2)+2/5\times(-3)]= 28/5$

例：

Max z=-6x₁-3x₂-2x₃

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 20 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 - x_5 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_6 = 10 \\ x_j \geq 0, \text{对一切j} \end{cases}$$

c_j			-6	-3	-2	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	-20	-1	-1	-1	1	0	0
0	x_5	-6	-1/2	-1/2	-1/4	0	1	0
0	x_6	-10	-2	-1	-1	0	0	1
z_j			0	0	0	0	0	0
c_j-z_j			-6	-3	-2	0	0	0

找到一个满足最优检验的初始基本解

检验当前解不可行，选择b最小一行的变量作为换出变

换入变量$\min\{c_j-z_j/a_{ij}\}$

检验当前解不可行，选择b最小一行的变量作为换出变量；换入变量min{c_j-z_j/a_{ij}}

c_j			-6	-3	-2	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-2	x_3	20	1	1	1	-1	0	0
0	x_5	-1	-1/4	-1/4	0	-1/4	1	0
0	x_6	10	1	0	0	-1	0	1
z_j			-2	-2	-2	2	0	0
c_j-z_j			-4	-1	0	-2	0	0

c_j			-6	-3	-2	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-2	x_3	16	0	0	1	-2	4	0
-3	x_2	4	1	1	0	1	-4	0
0	x_6	10	-1	0	0	-1	0	1
z_j			-3	-3	-2	1	4	0
c_j-z_j			-3	0	0	-1	-4	0

最优解： $X^*=(0,4, 16, 0, 0,10)^T$，

最优值： $\max Z^* = -[4\times(-3)+16\times(-2)]= 44$

4、举例——用对偶单纯形法求解LP：

$$\begin{aligned} &MinW = 3y_1 + 9y_2 \\ &s.t.\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 2 \\ y_1 + 4y_2 \geq 3 \\ y_1 + 7y_2 \geq 3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

化为

标准型 $\rightarrow$

$$\begin{aligned} &MaxZ = -3y_1 - 9y_2 \\ &s.t.\begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 = 2 \\ y_1 + 4y_2 - y_4 = 3 \\ y_1 + 7y_2 - y_5 = 3 \\ y_1, \cdots, y_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

将三个等式约束两边分别乘以-1，然后列表求解如下：

C_B	X_B	b	c_j / y_j	-3	-9	0	0	0
				y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0	y_3	-2		-1	-1	1	0	0
0	y_4	-3		-1	-4	0	1	0
0	y_5	-3		-1	-7	0	0	1
-Z		0		-3	-9	0	0	0
比值				-3/-1	-9/-1	---	---	---

C_B	X_B	b	c_j	-3	-9	0	0	0
			y_j	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
-3	y_1	2		1	1	-1	0	0
0	y_4	-1		0	-3	-1	1	0
0	y_5	-1		0	-6	-1	0	1
-Z		6		0	-6	-3	0	0
比值				---	-6/-3	-3/-1	---	---

C_B	X_B	c_j \ y_j \ b	-3	-9	0	0	0
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
-3	y_1	5/3	1	0	-4/3	1/3	0
-9	y_2	1/3	0	1	1/3	-1/3	0
0	y_5	1	0	0	1	-2	1
-Z		8	0	0	-1	-2	0

最优解是$Y^*=(5/3, 1/3, 0, 0, 1)^T$,

目标函数最优值为$W_{min}=-Z_{max}=8$