



1	图的定义	001
2	顶点的度	011
3	托兰定理	019
4	树	030
5	欧拉问题	038
6	哈密顿问题	046
7	平面图	055
8	拉姆赛问题	062
9	竞赛图	074
	习题解答	081



图论是以图作为研究对象的一个数学分支. 这里说的图,是指由一些点及连接这些点对的一些线段构成的图形,用来直观地表示具有某种二元关系的集合.

近年来,图论研究发展迅速,在诸多领域里获得了广泛的应用.

我们经常遇到这样一些现象或问题:

在一群人中,有的两人之间互相认识,有的互不相识;

一次足球锦标赛有若干个队参加,其中有的两队之间比赛过,有的没有比赛过;

有若干个大城市,有的两个城市之间有航线相通,有的没有航线相通;

平面上的一个点集,其中任意两点之间有的距离为 1,有的距离不为 1.

在上面这些现象或问题中都包含两方面的内容: 其一是一些“对象”,如人群、足球队、城市、点等等; 其二是这些对象两两之间的某种特定关系,如“互相认识”、“比赛过”、“通航”、“距离为 1”等. 为了表示这些对象和他们之间的关系,我们可以用一个点表示一个对象,称这些点为顶点,如果两个对象之间有所讨论的关系,就在相应的两点之间连上一条线,称这些线为边,这样就构成了一个图形.

这个用来表示某类对象及他们间特定关系的,由若干个顶点与连接某些顶点的边的图形,我们直观地称之为图\*.

例如图 1-1 中给出了 3 个图  $G_1$ 、 $G_2$ 、 $G_3$ ,其中顶点由小圆圈表示.

\* 图的一般数学定义为: 一个图  $G$  是一个三元组  $(V, E, \psi)$ , 其中  $V$  和  $E$  是两个不相交的集合,  $V$  非空,  $\psi$  是  $E$  到  $V$  的元素对集合中的一个映射.  $V$ 、 $E$ 、 $\psi$  分别称为图  $G$  的顶点集、边集和关联函数.

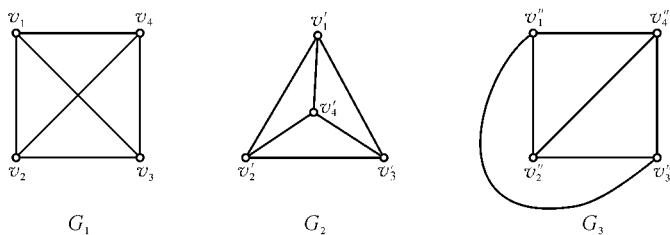


图 1-1

我们注意到,在直观地叙述图的定义中,并没有规定这些顶点的位置以及边的曲直长短也没有规定这些顶点、边都要在同一平面中.然而要求作为连接两点的边不要通过第三点,也不要与自己相交.在图论中,如果两个图  $G$  与  $G'$  的顶点之间可以建立起一一对应,并且  $G$  中连接顶点  $v_i$  与  $v_j$  之间的边数  $k$  ( $k = 0, 1, 2, \cdots$ ) 与连接  $G'$  中相应的顶点  $v'_i$  与  $v'_j$  的边数相同时,便称图  $G$  与  $G'$  是同构的,认为  $G$  与  $G'$  是相同的图.

例如,图 1-1 中的三个图  $G_1$ 、 $G_2$ 、 $G_3$  是同构的.

如果对图  $G = (V, E)$  与  $G' = (V', E')$  有  $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ , 即图  $G'$  的顶点都是图  $G$  的顶点,图  $G'$  的边也都是图  $G$  的边,则称  $G'$  是  $G$  的子图. 例如图 1-2 中的  $G_1$ 、 $G_2$  都是  $G$  的子图.

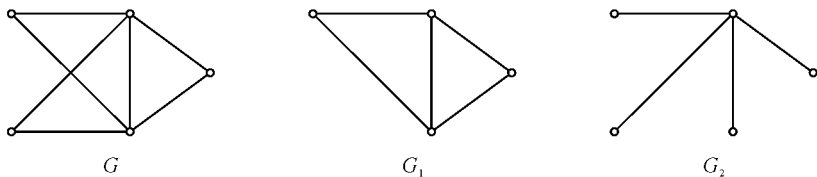


图 1-2

若在一个图  $G$  中的两个顶点  $v_i$  与  $v_j$  之间有边  $e$  相连,则称点  $v_i$  与  $v_j$  是相邻的,否则就称点  $v_i$  与  $v_j$  是不相邻的. 如果顶点  $v$  是边  $e$  的一个端点,称点  $v$  与边  $e$  是关联的. 在图 1-3 中,顶点  $v_1$  与  $v_2$  是相邻的,而顶点  $v_2$  与顶点  $v_5$  是不相邻的. 顶点  $v_3$  与边  $e_4$  是关联的.

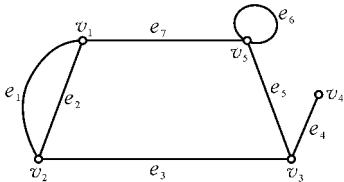


图 1-3

有些顶点本身也有边相连,这样的边称为环. 如图 1-3 所示的边  $e_6$  是环.

连结两个顶点的边有时可能不止一条,若两个顶点之间有  $k$  ( $k \geq 2$ ) 条边

相连,则称这些边为平行边.例如,图 1-3 中的边  $e_1$ 、 $e_2$  是平行边.

如果一个图没有环,并且没有平行边,这样的图称为简单图.图 1-1 中的  $G_1$ 、 $G_2$ 、 $G_3$  都是简单图,而图 1-3 所示的就不是一个简单图.在简单图中,连结顶点  $v_i$  与  $v_j$  之间的边可用  $(v_i, v_j)$  表示.当然,  $(v_i, v_j)$  与  $(v_j, v_i)$  表示的是同一条边.

如果一个简单图中,每两个顶点之间都有一条边,这样的图称为完全图.通常将有  $n$  个顶点的完全图记为  $K_n$ .图 1-4 中是完全图  $K_3$ 、 $K_4$ 、 $K_5$ .

完全图  $K_n$  的边的数目是  $C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$ .

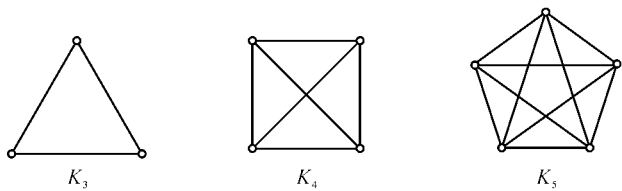


图 1-4

在图  $G = (V, E)$  中,若顶点个数  $|V|$  ( $|V|$  也称为  $G$  的阶)和边数  $|E|$  都是有限的,则称图  $G$  是有限图.如果  $|V|$  或  $|E|$  是无限的,则称  $G$  为无限图.

本篇中,除非特别说明,我们所说的图都是指有限简单图.

利用上述的这些基本概念可以帮助我们思考并解决一些问题.

例 1 某大型聚会有 605 个人参加.已知他们每个人都至少和其中的另一个人握过手.证明:必有一人至少和其中的两个人握过手.

证明 将 605 个人用 605 个点  $v_1, v_2, \dots, v_{605}$  表示,如果其中两个人握过手,就在相应的顶点之间连一条边.

本例要证明:必有一人至少和其中的两个人握过手.倘若不然,则每个人至多和其中一个人握过手,再从题设的每个人至少和其中一个人握过手,于是便有,每个人恰与其他一个人握过手.这样就得出,图  $G$  恰由若干个两点间连一条边的图形构成(图 1-5).

设图  $G$  有  $r$  条边,则  $G$  便有  $2r$  (偶数)个顶点,这与  $G$  的顶点数为 605 (奇数)矛盾.

本例得以证明.

例 2 能否让马跳动几次,将图 1-6 所示的阵势变为如图 1-7 所示的阵势? (“马”按照国际象棋规则跳动)

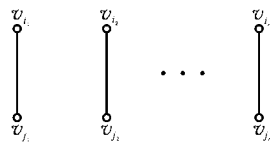


图 1-5

白马		白马
黑马		黑马

图 1-6

白马		黑马
黑马		白马

图 1-7

1	4	7
2	5	8
3	6	9

图 1-8

如图 1-8 所示,将九个方格编号. 再把每个方格对应为平面上一点. 若马能从一个方格跳往另一个方格,则在相应两点之间连一条边,如图 1-9.

图 1-9

图 1-10

图 1-11

于是由图 1-6 所示的开始的阵势以及图 1-7 所示的要求变成的阵势分别变成了图 1-10、图 1-11 中的两个图形.

显然,马在一个圆上的前后跟随顺序是无法从两白两黑紧贴转化为黑白相间的,所以不能按要求改变阵势.

**例 3** 有  $n$  名选手  $A_1, A_2, \dots, A_n$  参加数学竞赛,其中有些选手是互相认识的,而且任何两个不相识的选手都恰好有两个共同的熟人. 若已知选手  $A_1$  与  $A_2$  互相认识,但他俩没有共同的熟人,证明他俩的熟人一样多.

**证明** 用  $n$  个点  $v_1, v_2, \dots, v_n$  表示这  $n$  名选手  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ,如果两个选手互相认识,那么就在相应的两个点之间连一条边,这样就得到一个简单图  $G$ . 图  $G$  中的顶点满足: 任意两个不相邻的顶点都恰好有两个共同相邻的顶点. 要证明的是相邻的两个顶点  $v_1$  与  $v_2$  各自引出的边的条数一样多.

如果记与  $v_1$  相邻的顶点集合为  $N(v_1)$ ,与  $v_2$  相邻的顶点集合为  $N(v_2)$ . 若在  $N(v_1)$  中除  $v_2$  外还有点  $v_i$ ,则  $v_i \notin N(v_2)$ . 否则  $A_1$  与  $A_2$  有共同熟人  $A_i$ . 于是  $v_2$  与  $v_i$  除  $v_1$  外还应有一个与它们共同相邻的点  $v_j$ ,则  $v_j \in N(v_2)$ . 如图 1-12 所示. 对于  $N(v_1)$  中不同于  $v_2$  的点  $v_i, v_k$ ,它们不可能与

图 1-12

$N(v_2)$ 中除  $v_1$  外的一个点  $v_j$  都相邻(否则,两个不相邻的顶点  $v_1, v_j$  有三个共同相邻的顶点  $v_2, v_i, v_k$ ). 因而,对于  $N(v_1)$ 中不同于  $v_i$  的  $v_k$ ,必在  $N(v_2)$  中存在不同于  $v_j$  的相邻点  $v_l$ . 由此可得  $N(v_1)$ 中的顶点个数不大于  $N(v_2)$  中的顶点个数. 同样地,  $N(v_2)$ 中的顶点个数不大于  $N(v_1)$ 中的顶点个数. 于是,从点  $v_1$  与  $v_2$  引出的边的条数是相等的.

**例 4** 九名数学家在一次国际数学会议上相遇,发现他们中的任意三个人中,至少有两个人可以用同一种语言对话. 如果每个数学家至多可说三种语言,证明至少有三名数学家可以用同一种语言对话. (1978 年美国数学奥林匹克试题)

**证明** 用九个点  $v_1, v_2, \dots, v_9$  表示这九名数学家,如果某两个数学家能用第  $i$  种语言对话,则在它们相应的顶点之间连一条边并涂以相应的第  $i$  种颜色,这样就得到了一个有九个顶点的简单图  $G$ ,它的边涂上了颜色,每三点之间至少有一条边,每个顶点引出的边至多有三种不同的颜色. 要证明的是: 图  $G$  中存在三个点,它们两两相邻,且这三条边具有相同的颜色(这种三角形称为同色三角形).

如果边  $(v_i, v_j), (v_i, v_k)$  具有相同的第  $i$  种颜色,则按边涂色的意义,点  $v_j$  与  $v_k$  也相邻,且边  $(v_j, v_k)$  也具有第  $i$  种颜色. 所以对顶点  $v_1$  来说,有两种情形:

(1) 点  $v_1$  与点  $v_2, \dots, v_9$  都相邻,根据抽屉原则知,至少有两条边,不妨设为  $(v_1, v_2), (v_1, v_3)$ ,具有相同的颜色,从而  $\triangle v_1 v_2 v_3$  是同色三角形.

(2) 点  $v_1$  与点  $v_2, \dots, v_9$  中的至少一个点不相邻,不妨设点  $v_1$  与点  $v_2$  不相邻. 由于每三点之间至少有一条边,所以从  $v_3, v_4, \dots, v_9$  发出的,另一个端点是  $v_1$  或  $v_2$  的边至少有 7 条,由此可知,点  $v_3, v_4, \dots, v_9$  中至少有 4 个点与点  $v_1$  或  $v_2$  相邻,不妨设点  $v_3, v_4, v_5, v_6$  与点  $v_1$  相邻,如图 1-13 所示.

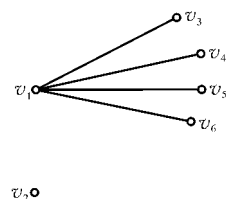


图 1-13

于是边  $(v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_5), (v_1, v_6)$  中必定有两条具有相同的颜色,设  $(v_1, v_3), (v_1, v_4)$  同色,则  $\triangle v_1 v_3 v_4$  是同色三角形.

**注:** 若把题中的九改成八,命题就不成立了. 图 1-14 给出的是一个反例.  $v_1, v_2, \dots, v_8$  表示 8 个顶点 1, 2,  $\dots, 12$  表示 12 种颜色,则图中无同色三角形.

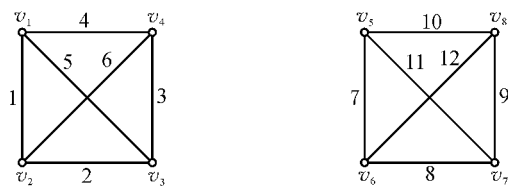


图 1-14

下面这个例子是 2000 年全国高中数学联赛加试第 3 题.

例 5 有  $n$  个人, 已知他们中的任意两人至多通电话一次, 他们中的任意  $n-2$  个人之间通电话的总次数相等, 都是  $3^m$  次, 其中  $m$  是自然数. 求  $n$  的所有可能值.

解 显然  $n \geq 5$ . 记  $n$  个人为几个点  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . 若  $A_i, A_j$  之间通电话, 则连  $(A_i, A_j)$ . 因此这  $n$  个点中必有边相连, 不妨设为  $(A_1, A_2)$ .

倘若设  $A_1$  与  $A_3$  之间无边, 分别考虑  $n-2$  个点  $A_1, A_4, A_5, \dots, A_n$ ;  $A_2, A_4, A_5, \dots, A_n$ ; 及  $A_3, A_4, A_5, \dots, A_n$ . 由题意知  $A_1, A_2, A_3$  分别与  $A_4, A_5, \dots, A_n$  之间所连边的总数相等, 记为  $k$ .

将  $A_2$  加入到  $A_1, A_4, A_5, \dots, A_n$  中, 则这  $n-1$  个点之间边的总数  $S = 3^m + k + 1$ . 从这  $n-1$  点中任意去掉一点剩下的  $n-2$  个点所连边数都是  $3^m$ , 故每个点都与其余  $n-2$  个点连  $k+1$  条边. 从而

$$S = \frac{1}{2}(n-1)(k+1).$$

同理, 考虑  $A_3$  加入  $A_1, A_4, A_5, \dots, A_n$  中所得的  $n-1$  个点的情况可知边的总数为  $t = 3^m + k = \frac{1}{2}(n-1)k$ .

因为  $S = t + 1$ , 得

$$\frac{1}{2}(n-1)(k+1) = \frac{1}{2}(n-1)k + 1,$$

即  $n = 3$ , 矛盾. 所以  $A_1, A_3$  之间有边.

同理  $A_2, A_3$  之间也有边. 进而  $A_1, A_2$  与所有  $A_i (i = 3, 4, \dots, n)$  之间有边.

对于  $A_i, A_j (i \neq j)$ , 因为  $A_i$  与  $A_1$  之间有边, 可知  $A_i$  与  $A_j$  之间有边. 因此这  $n$  个点构成一个完全图. 所以

$$3^m = \frac{1}{2}(n-2)(n-3).$$

故  $n = 5$ .

例 6 有  $n (n > 3)$  个人, 他们之间有些人互相认识, 有些人互相不认识, 而且至少有一人没有与其他人都认识. 问: 与其他人都认识的人数的最大值是多少? (美国数学竞赛试题)

解 作图  $G$ : 用  $n$  个点表示这  $n$  个人, 两顶点相邻当且仅当相应的两个人互相认识.

由于至少有一人没有与其他人都认识, 所以图  $G$  中至少有两点不相邻, 设  $v_1, v_2$  之间没有边  $e = (v_1, v_2)$ . 则图  $G$  的边数最多时的图形为  $K_n - e$ , 即从完全图  $K_n$  中去掉边  $e$  后所得的图. 从而与其他顶点都相邻的顶点个数的最大值为  $n-2$ . 故与其他人都认识的人数的最大值是  $n-2$ .

下面这个例子是 1988 年第 29 届国际数学奥林匹克试题.

例 7 设  $n$  为一正整数, 且  $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$  是某个集合  $B$  的子集. 设

- (1) 每一个  $A_i$  恰含有  $2n$  个元素;
- (2) 每一个  $A_i \cap A_j (1 \leq i < j \leq 2n+1)$  恰含有一个元素;
- (3)  $B$  的每个元素至少属于  $A_i$  中的两个.

问对怎样的  $n$ , 可以将  $B$  中元素各标上数 0 或 1, 使得每个  $A_i$  恰含有  $n$  个标上了 0 的元素?

解 首先, (3) 中的“至少”实际上也可以改成“恰”. 因为如果有一个元素  $a_1 \in A_1 \cap A_{2n} \cap A_{2n+1}$ , 那么剩下的  $2n-2$  个子集  $A_2, A_3, \dots, A_{2n-1}$  每个至多含  $A_1$  中一个元素, 从而  $A_1$  中至少有一个元素不属于  $A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_{2n-1} \cup A_{2n} \cup A_{2n+1}$ , 这与 (3) 矛盾.

于是作完全图  $K_{2n+1}$ , 每一个顶点  $v_i$  表示一个子集  $A_i$ , 每一条边  $(v_i, v_j) = b_{ij} (1 \leq i, j \leq 2n+1, i \neq j)$  表示集  $A_i$  与  $A_j$  所共有的那个元素. 于是题目就转化为: 对怎样的  $n$ , 可以给  $K_{2n+1}$  的每条边贴一个 0 或 1 的标签, 使得从图中任一点  $v_i$  出发的  $2n$  条边中恰有  $n$  条边贴有 0 的标签.

因为  $K_{2n+1}$  有  $n(2n+1)$  条边, 如果上述贴标签的要求能够满足, 则贴 0 的边共有  $\frac{1}{2}n(2n+1)$  条, 于是  $n$  必须是偶数.

反之, 若  $n = 2m$  是偶数, 我们把  $K_{2n+1}$  中的边  $(v_i, v_{i-m}), (v_i, v_{i-m+1}), \dots, (v_i, v_{i-1}), (v_i, v_{i+1}), \dots, (v_i, v_{i+m}), i=1, 2, \dots, 2n+1$ , 全标上 0, 其余的标上 1, 则得本题所要求的贴标签方法 (要注意的是, 顶点的下标的加法是按模  $2n+1$  进行的, 即  $v_{(2n+1)+i} = v_i$ ).

所以, 当且仅当  $n$  为偶数时, 可以满足题目要求.



下面这道题是 1995 年 IMO 预选题.

**例 8** 有  $12k$  人参加会议, 每人都恰好与  $3k+6$  人握过手, 并且对其中任意两人, 与这两个人都握过手的人数皆相同. 问有多少人参加会议?

**解** 设对任意两人, 与他们都握过手的有  $n$  人. 考虑某个  $a$ , 与  $a$  握过手的全体记为  $A$ , 与  $a$  没有握过手的全体记为  $B$ . 由题设  $|A| = 3k+6$ ,  $|B| = 9k-7$ .

再考虑  $b \in A$ , 与  $a, b$  都握过手的  $n$  个人都在  $A$  中, 因此,  $b$  与  $A$  中  $n$  个人握手, 与  $B$  中  $3k+5-n$  人握手.

考虑  $c \in B$ , 与  $a, c$  都握过手的  $n$  人都在  $A$  中.

于是  $A$  与  $B$  之间握手总数为

$$(3k+6)(3k+5-n) = (9k-7)n,$$

$$n = \frac{(3k+6)(3k+5)}{12k-1}.$$

从而 
$$16n = \frac{(12k-1+25)(12k-1+21)}{12k-1}.$$

显然  $(3, 12k-1) = 1$ , 所以  $(12k-1) | 25 \times 7$ . 由于  $12k-1$  除以 4 余 3, 所以  $12k-1 = 7, 5 \times 7, 5^2 \times 7$ . 经检验只有  $12k-1 = 5 \times 7$  产生整数解  $k = 3, n = 6$ .

下面构造一个由 36 点组成的图, 图中每点引出 15 条边, 且对每一对点与它们相连的点均为 6 个.

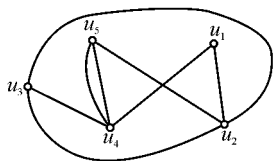
自然地, 我们可用 6 个完全图  $K_6$ . 把 36 个点分成六组, 同组的六人编号, 排成一个  $6 \times 6$  方阵

1	2	3	4	5	6
6	1	2	3	4	5
5	6	1	2	3	4
4	5	6	1	2	3
3	4	5	6	1	2
2	3	4	5	6	1

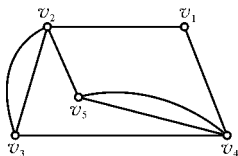
对方阵中的每个点, 它与同行、同列、同编号的 15 个点相连, 与其余点不相连. 易见, 与任意两位代表都握过手的恰好有 6 人.

# 习题 1

- 1 设图  $G = (V, E)$ ,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_5\}$ ,  $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_1, v_3)\}$ . 画出  $G$  的图形.
- 2 设图  $G = (V, E)$  是简单图,  $|V| = n$ ,  $|E| = e$ , 则  $e \leq \frac{n(n-1)}{2}$ .
- 3 说明下面两个图是同构的.



(1)



(2)

(第 3 题图)

- 4 有  $n$  个药箱, 每两个药箱里有一种相同的药, 每种药恰好在两个药箱里出现, 问有多少种药?
- 5 一次会议有  $n$  名教授  $A_1, A_2, \dots, A_n$  参加, 证明可以将这  $n$  个人分为两组, 使得每一个人  $A_i$  在另一组中认识的人数  $d_i$  不少于他在同一组中认识的人数  $d'_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).
- 6 18 个队进行比赛, 每一轮中每个队与另一个队比赛一场, 并且在其他轮比赛中这两个已赛过的队彼此不再比赛, 现在比赛已进行完 8 轮. 证明一定有三个队在前 8 轮比赛中, 彼此之间尚未比赛过.
- 7 某次会议有  $n$  名代表出席, 已知任意的四名代表中都有一个人与其余的三个人握过手, 证明任意的四名代表中必有一个人与其余的  $n-1$  名代表都握过手.
- 8 有三所中学, 每所有学生  $n$  名. 每名学生都认识其他两所中学的  $n+1$  名学生. 证明: 从每所中学可以选出一名学生, 使选出来的 3 名学生互相认识.
- 9 一个很大的棋盘上有  $2n$  个红色的方格, 对任何两个红色方格可从其中一个出发, 每步横或竖走到相邻的红色方格而到另一个方格中. 证明: 所有的红色方格可以分为  $n$  个长方形.

- 10 某参观团有 2 000 个人,其中任意 4 个人中一定有某一个人认识其他三人. 问: 认识该参观团所有成员的人数最少是多少?
- 11 在一个车厢里,任何  $m$  ( $m \geq 3$ ) 个旅客都有唯一的公共朋友(当甲是乙的朋友时,乙也是甲的朋友. 任何人不作为他自己的朋友). 问: 在这个车厢里,有多少人?
- 12 平面上给定五点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$ ,其中任三点不共线,试证: 任意用线段连接某些点(这些线段称为边),若所得图形中不出现以这五点中任三点为顶点的三角形,则此图不可能有 7 条或更多的边.



图  $G$  中与顶点  $v$  关联的边数(约定环计两次)称为图  $G$  中顶点  $v$  的度(或次数),记作  $d_G(v)$ . 在不致混淆的时候,简记为  $d(v)$ . 我们用  $\delta(G)$  与  $\Delta(G)$  分别表示  $G$  中顶点的最小度和最大度. 也分别简记为  $\delta$  和  $\Delta$ .

在图 2-1 中,  $d(v_1) = 1$ ,  $d(v_2) = 3$ ,  $d(v_3) = d(v_4) = 2$ ,  $\delta = 1$ ,  $\Delta = 3$ .

图  $G$  中,若顶点  $v$  的度是奇数,则称点  $v$  为奇顶点;若顶点  $v$  的度是偶数,则称点  $v$  为偶顶点. 图 2-1 中,点  $v_1, v_2$  是奇顶点,点  $v_3, v_4$  是偶顶点.

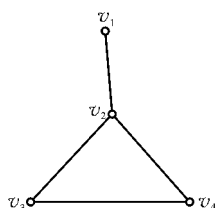


图 2-1

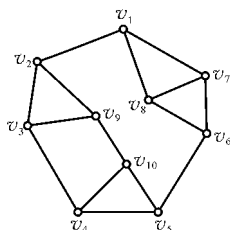


图 2-2

在图  $G = (V, E)$  中,如果对所有  $v \in V$ , 均有  $d(v) = k$ , 则称图  $G$  是  $k$  正则的. 完全图  $K_n$  是  $(n-1)$  正则图. 图 2-2 中是一个 3 正则图.

关于图  $G$  中所有顶点的度之和与边数之间有如下结论.

定理一 设  $G$  是  $n$  阶图, 则  $G$  中  $n$  个顶点的度之和等于边数的两倍.

记  $G$  中  $n$  个顶点为  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , 边数为  $e$ , 则

$$d(v_1) + d(v_2) + \dots + d(v_n) = 2e.$$

证明 所有顶点的度的和  $d(v_1) + d(v_2) + \dots + d(v_n)$  表示以顶点  $v_1, v_2, \dots, v_n$  中某个顶点为一个端点的边的总数. 由于一条边有两个端点, 因此图  $G$  的每条边在和  $d(v_1) + d(v_2) + \dots + d(v_n)$  中被计入两次. 所以所有顶点的度的和为边数的两倍.

例如在图 2-1 中,  $e = 4$ ,  $d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) = 1 + 3 + 2 + 2 = 8 = 2e$ .

定理一通常称为握手引理, 在二百多年前欧拉就给出了这样一个著名的结论: 如果许多人在见面时握了手, 那么握手的次数为偶数. 进而推得: 握过奇数次手的人有偶数个. 这个推论就是

定理二 对于任意的图  $G$ , 奇顶点的个数一定是偶数.

证明 设  $G$  中的顶点为  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , 且  $v_1, \dots, v_t$  是奇顶点,  $v_{t+1}, \dots, v_n$  是偶顶点. 由定理一,

$$d(v_1) + \dots + d(v_t) + d(v_{t+1}) + \dots + d(v_n) = 2e,$$

$$d(v_1) + \dots + d(v_t) = 2e - d(v_{t+1}) - \dots - d(v_n).$$

因为  $d(v_{t+1}), \dots, d(v_n)$  都是偶数, 故上式右边是偶数, 而  $d(v_1), \dots, d(v_t)$  都是奇数, 要使它们的和为偶数,  $t$  必须是偶数. 即  $G$  中奇顶点个数为偶数.

例 1 在  $n(n > 2)$  个人中, 至少有两个人, 他们的朋友数目一样多.

证明 用  $n$  个顶点  $v_1, v_2, \dots, v_n$  表示这  $n$  个人, 如果两人是朋友, 则在它们相应的顶点之间连一条边, 得一简单图  $G$ . 要证明的是图  $G$  中至少有两个顶点的度相同.

在  $n$  阶简单图中, 一个顶点至多只能与另外  $n-1$  个顶点相邻, 所以每个顶点的度  $\leq n-1$ . 于是图  $G$  只有下列的度是可能的:

$$0, 1, 2, \dots, n-1.$$

然而这  $n$  个数不能都作为图  $G$  的顶点的度. 因为一个度为 0 的顶点不和其他点相邻, 而度为  $n-1$  的顶点与其他  $n-1$  个顶点都相邻. 因此对  $G$  来说, 只有下列的度才是可能的:

$$0, 1, 2, \dots, n-2,$$

或

$$1, 2, 3, \dots, n-1.$$

由抽屉原则得知, 这  $n$  个点中, 至少有两个点的度是相同的.

例 2 国际乒乓球男女混合双打大奖赛有 24 对选手参加, 赛前一些选手握了手, 但同一对选手之间不握手. 赛后某个男选手问每个选手的握手次数, 各人的回答各不相同, 问这名男选手的女搭档和多少人握了手?

解 48 名选手用 48 个顶点  $v, v_0, v_1, \dots, v_{46}$  表示, 其中  $v$  代表那名男选手. 两人握过手就在他们相应的顶点之间连一条边, 得图  $G$ . 在  $G$  中,

$d(v_i) \leq 46, i = 0, 1, 2, \dots, 46$ . 并且当  $i \neq j$  时,  $d(v_i) \neq d(v_j)$ . 所以除顶点  $v$  外, 其他顶点的度分别为

$$0, 1, 2, \dots, 45, 46.$$

不妨设  $d(v_i) = i, i = 0, 1, 2, \dots, 46$ . 对顶点  $v_{46}$  来说, 他只和顶点  $v_0$  不相邻, 故  $v_{46}$  和  $v_0$  是搭档. 在  $G$  中去掉顶点  $v_0, v_{46}$  以及它们相邻的边, 得图  $G_1$ , 在  $G_1$  中除  $v$  外, 各顶点的度仍然不同, 且度都减小 1, 同样道理,  $v_{45}$  和  $v_1$  是搭档. 依次可得  $v_{44}$  和  $v_2, \dots, v_{24}$  和  $v_{22}$  是搭档. 于是  $v_{23}$  和  $v$  是搭档. 所以那个男选手的女搭档握了 23 次手.

注: 本题中的 24 改为 34, “男女搭档”改为“正副领队”便是第 26 届国际数学奥林匹克预选题. 将 24 改为 16, “男女搭档”改为“甲、乙两个足球队”, 就是 1985 年全国高中数学联赛第二试第 3 题.

例 3 某国的每个城市都有 100 条道路通往其他城市, 并且由任何一个城市都可到达其他任何一个城市. 今有一条道路关闭修理. 证明: 现在仍可由任何城市抵达其他任何城市.

证 假设关闭的道路是  $AB$ , 我们只需证明现在仍可由  $A$  到  $B$ . 否则包含顶点  $A$  的连通子图中, 除  $A$  点外所有顶点的度都为偶数. 这与定理二矛盾.

注: 本题的关键是考察图的连通子图. 连通的概念很重要, 我们在后面的例题中还会遇到.

下题是 1996 年第 10 届伊朗数学奥林匹克试题.

例 4 一条河的两岸有一些城市, 城市的总数不少于 3 个. 城市由一些航线连接着, 每条航线将位于两岸的一对城市联系在一起, 每个城市恰好与另一边的  $k$  个城市连接. 人们可以在任何两座城市之间往来. 证明: 如果航线中有一条被取消, 人们还是可以在任何两座城市之间往来.

证明 不妨称河的两岸分别为北岸与南岸. 北岸的  $n$  个城市用点  $x_1, x_2, \dots, x_n$  表示, 其全体记为  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ; 南岸的  $m$  个城市用点  $y_1, y_2, \dots, y_m$  表示, 其全体记为  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ . 如果北岸的城市  $x_i$  与南岸的城市  $y_j$  之间有航线, 则连接成为边  $(x_i, y_j)$ , 所有的边组成的集合记为  $E$ . 这就得到了一个由顶点集  $X, Y$  与边集  $E$  构成的图, 称为二部分图, 也称为偶图, 记为  $G = (X, Y; E)$ . 题中的后两个条件即是: 由任一顶点引出的边都是  $k$  条; 图  $G$  是连通的, 即任意两个顶点之间都有由若干条边连接而成的路. 题目的结论是: 从  $E$  中删去任意一条边  $e$ , 图  $G' = (X, Y; E - e)$  仍然是连通的.

因为每个顶点恰与  $k$  条边相关联, 所以有

$$|X|k = |E| = |Y|k,$$

其中  $|X|, |E|, |Y|$  表示集合  $X, E, Y$  中元素的个数. 于是有  $|X| = |Y|$ , 即  $n = m$ . 又因  $|X| + |Y| \geq 3$ , 所以  $|X| = |Y| \geq 2$ .

现去掉  $G$  的一条边, 得到的图为  $G'$ . 若  $G'$  不连通, 则  $G'$  由两个连通部分  $G_1, G_2$  构成.

$$\begin{aligned} \text{设} \quad X &= X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2 = \emptyset, \\ Y &= Y_1 \cup Y_2, Y_1 \cap Y_2 = \emptyset. \\ G_1 &= (X_1, Y_1; E_1), G_2 = (X_2, Y_2; E_2). \end{aligned}$$

去掉的一条边是连接  $X_1$  与  $Y_2$  的顶点, 则

$$\begin{aligned} |X_1|k - 1 &= |E_1| = |Y_1|k, \\ |X_2|k &= |E_2| = |Y_2|k - 1, \end{aligned}$$

从而  $(|X_1| - |Y_1|)k = 1$ , 得  $k = 1$ .

又  $G$  连通, 则  $|X| = 1$ , 与  $|X| \geq 2$  矛盾.  
故  $G'$  连通, 从而结论成立.

**例 5** 某俱乐部共有 99 名成员, 每一个成员都声称只愿意和自己认识的人一起打桥牌. 已知每个成员都至少认识 67 名成员. 证明一定有 4 名成员, 他们可以在一起打桥牌. (1966 年波兰数学竞赛试题)

**证法一** 作一个图  $G$ : 用 99 个点表示 99 名成员, 如果两名成员相互认识, 就在相应的两个顶点之间连一条边. 已知条件是: 对任意顶点  $v, d(v) \geq 67$ . 欲证  $G$  中含有一个 4 阶完全图  $K_4$ .

在  $G$  中任取一个顶点  $u$ , 由于  $d(u) \geq 67$ , 所以存在顶点  $v$ , 使得与  $v$  相邻且与  $u$  不相邻的顶点至多为  $(99 - 1 - 67) = 31$  个. 同样, 与  $v$  不相邻且与  $u$  相邻的顶点也至多 31 个. 于是图  $G$  中至少有  $(99 - 31 - 31 - 2) = 35$  个顶点和  $u, v$  均相邻. 如图 2-3 所示, 设顶点  $x$

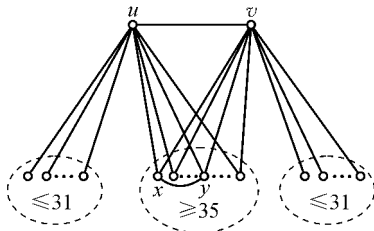


图 2-3

和顶点  $u, v$  均相邻. 由于  $d(x) \geq 67$ , 并且  $G$  中至多只有  $(31 + 31 + 2) = 64$  个不同时和  $u, v$  均相邻的顶点, 因此顶点  $x$  至少还和一个与  $u, v$  均相邻的

顶点  $y$  相邻. 从而  $u, v, x, y$  是 4 个两两相邻的顶点. 于是命题得证.

证法二 用顶点表示成员, 如果两个人不认识就在相应的顶点之间连一条边, 得图  $G'$ . 由于每个人认识的人数不少于 67, 所以对每个顶点  $v$ , 都有  $d(v) \leq 99 - 1 - 67 = 31$ . 要证明的是:  $G'$  中存在四个点, 两两之间不相邻.

对于顶点  $u$ , 取一个不与它相邻的顶点  $v$ , 则剩下的 97 个顶点中与  $u$  或  $v$  相邻的顶点个数不超过

$$d(u) + d(v) \leq 31 + 31 = 62,$$

因而存在与  $u, v$  均不相邻的顶点  $x$ , 与顶点  $u, v, x$  中至少有一个相邻的顶点个数不超过

$$d(u) + d(v) + d(x) \leq 3 \times 31 = 93,$$

所以在剩下的 96 个点中, 必有一个点  $y$  与  $u, v, x$  均不相邻, 于是  $u, v, x, y$  所代表的 4 个人是互相认识的, 他们可以在一起打桥牌.

注 1: 若将题中的 67 人改为 66 人, 则不一定能找出 4 个互相认识的人来. 反例如图 2-4 所示. 将顶点集  $V$  分成三个子集  $\{v_1, v_2, \dots, v_{33}\}, \{v_{34}, v_{35}, \dots, v_{66}\}, \{v_{67}, v_{68}, \dots, v_{99}\}$ . 同一个子集中任意两顶点均不相邻, 不同子集中的任意两点均相邻. 显然每个顶点的度都是 66, 任意 4 点中, 至少有 2 点属于同一子集, 从而它们不相邻. 也就是说图中不存在两两相邻的 4 顶点.

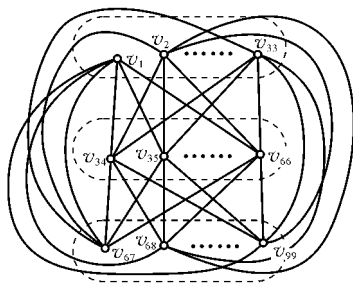


图 2-4

注 2: 本题可推广为:

俱乐部有  $n(n \geq 4)$  人, 其中每人都至少认识其中的  $\lceil \frac{2n}{3} \rceil + 1$  个人, 则在这  $n$  个人中必定可以找到 4 个人, 他们是两两认识的.

注 3: 如果  $G$  是  $n$  阶简单图, 从完全图  $K_n$  中把属于  $G$  的边全部去掉后, 得到的图称为  $G$  的补图, 通常记为  $\overline{G}$ . 证法一中的图  $G$  与证法二中的图  $G'$ , 互为补图.

注 4: 利用容斥原理可得本题另一巧妙解法, 请读者自行证之.

例 6 某地区网球俱乐部的 20 名成员举行 14 场单打比赛, 每人至少上场一次. 证明: 必有六场比赛, 其中 12 个参赛者各不相同. (1989 年美国数学奥林匹克试题)



证明 用 20 个顶点  $v_1, v_2, \dots, v_{20}$  代表 20 名成员, 两名选手比赛过, 则在相应的顶点之间连一条边, 得图  $G$ .

图  $G$  中有 14 条边, 设各顶点的度为  $d_i, i = 1, 2, \dots, 20$ . 由题意知  $d_i \geq 1$ . 根据定理一,

$$d_1 + d_2 + \dots + d_{20} = 2 \times 14 = 28.$$

在每个顶点  $v_i$  处抹去  $d_i - 1$  条边, 由于一条边可能同时被其两端点抹去, 所以抹去的边数不超过

$$(d_1 - 1) + (d_2 - 1) + \dots + (d_{20} - 1) = 28 - 20 = 8.$$

故抹去了这些边后所得的图  $G'$  中至少还有  $14 - 8 = 6$  条边, 并且  $G'$  中每个顶点的度至多是 1. 从而这 6 条边所相邻的 12 个顶点是各不相同的. 即这 6 条边所对应的 6 场比赛的参赛者各不相同.

例 7 设  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  是平面上的点集, 其中任意两点之间的距离至少是 1, 证明最多有  $3n$  对点, 每对点的距离恰好是 1.

证明 取这  $n$  个点作为顶点, 两顶点相邻当且仅当两点之间的距离为 1, 得一个图  $G$ .  $G$  中的边数记为  $e$ .

显然图  $G$  中和顶点  $x_i$  相邻的点是在以  $x_i$  为圆心, 半径为 1 的圆周上. 由于集  $S$  中任意两点之间的距离  $\geq 1$ , 故圆周上至多含有  $S$  中的 6 个点, 所以  $d(x_i) \leq 6$ .

对图  $G$  用定理一, 有

$$d(x_1) + d(x_2) + \dots + d(x_n) = 2e,$$

$$6n \geq 2e,$$

即  $e \leq 3n$ . 就是说图  $G$  中的边数  $e$  不超过  $3n$ . 所以这  $n$  个点中至多有  $3n$  对点, 每对点的距离恰好是 1.

例 8 设在平面上有  $n$  个给定的点. 求证其中距离为 1 的点的对数不超过  $\frac{n}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}n^{\frac{3}{2}}$ .

证 把  $n$  个点视为图  $G$  的顶点, 记  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  为图  $G$  的顶点集, 在距离为 1 的两点之间连一边, 则由定理一,

$$2e = d(v_1) + d(v_2) + \dots + d(v_n).$$

用  $C_i$  表示以  $v_i$  为圆心、半径为 1 的圆, 这  $n$  个圆两两交点总数不超过

$2C_n^2 = n(n-1)$  个.

另一方面,若  $v_k, v_j$  与  $v_i$  相邻,则  $v_i \in C_k \cap C_j$ , 因此,  $v_i$  作为  $C_1, C_2, \dots, C_n$  中两圆的交点恰好被计数了  $C_{d(v_i)}^2$  次,故

$$C_{d(v_1)}^2 + C_{d(v_2)}^2 + \dots + C_{d(v_n)}^2 \leq 2C_n^2 = n(n-1). \quad ①$$

由 Cauchy 不等式,有

$$C_{d(v_1)}^2 + C_{d(v_2)}^2 + \dots + C_{d(v_n)}^2 \geq \frac{2}{n}e^2 - e. \quad ②$$

由①, ②式得  $\frac{2}{n}e^2 - e \leq n(n-1),$

即  $2e^2 - ne - n^2(n-1) \leq 0.$

解得  $e \leq \frac{n}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}n^{\frac{3}{2}}.$



## 习 题 2

017

- 1 设图  $G = (V, E)$ ,  $|V| = n$ ,  $|E| = e$ , 证明:  $\delta \leq \frac{2e}{n} \leq \Delta$ .
- 2 图  $G$  有  $n$  个顶点,  $n+1$  条边. 证明: 图  $G$  中至少有一个顶点的度  $\geq 3$ .
- 3 空间中是否存在这样的多面体, 它有奇数个面, 每个面又都有奇数条边?
- 4 小城共有 15 部电话, 能否用电线连接它们, 使得每部电话恰好与 5 部别的电话相连?
- 5 参加某次学术讨论会共有 123 个人, 已知每个人至少和 5 位与会者讨论过问题. 证明: 至少有一个人和 5 位以上的与会者讨论过问题.
- 6 在一次会议中, 已知每个议员至多与三人不相识, 证明: 一定可以把所有议员分为两组, 使每一组中, 每个议员至多与一人不相识.
- 7 有  $2n$  个人在一起聚会, 其中每个人至少同其中的  $n$  个人认识, 证明这  $2n$  个人中总可以找出 4 个人来, 这 4 个人可以围着圆桌坐下, 使得每个人旁边都是认识的人 ( $n \geq 2$ ).
- 8 已知 9 个人  $v_1, v_2, \dots, v_9$  中  $v_1$  和 2 个人握过手,  $v_2, v_3$  各和 4 个人握过手,  $v_4, v_5, v_6, v_7$  各和 5 个人握过手,  $v_8, v_9$  各和 6 个人握过手, 证明这 9 个人中一定可以找出 3 个人, 他们互相握过手.

- 9 一个旅行团中共 14 人,在山上休息时,他们想打桥牌,而其中每个人都曾和其中的 5 个人合作过. 现规定只有 4 个人中任两个人都未合作过,才能在一起打一局牌. 这样,打了三局就没法再打下去了. 这时,来了另一位旅游者,他当然没有与该旅行团中的任何人合作过. 如果他也参加打牌,证明一定可以再打一局桥牌.
- 10 对于平面上任意  $n$  个点构成的点集  $P$ ,如果其中任意两点之间的距离均已确定,那么就称这个点集是“稳定的”. 求证: 在  $n(n \geq 4)$  个点的平面点集  $P$  中,无三点共线,且其中的  $\frac{1}{2}n(n-3)+4$  个两点之间的距离已被确定,那么点集  $P$  就是“稳定的”. (1999 年上海市高中数学竞赛题)
- 11 棱长为  $n$ (自然数)的立方体被平行于它的侧面的平面切成  $n^3$  个单位立方体,其中有多少对公共顶点不多于 2 的单位立方体?
- 12 某国首都有 21 条航线连接其他城市,而 A 城只有一条航线与某个城市连接,其他各城市中的每个城市都有 20 条航线连接别处. 证明: 由首都可以飞抵 A 城.



1941 年,匈牙利数学家托兰(Turán)为了回答这样的问题:“ $n$  个顶点的图  $G$  不包含  $m$  个顶点的完全图  $K_m$ , 则图  $G$  的最大边数是多少?”而提出了他的著名定理,从而开创了图论研究的一个新方向“极图理论”,极图理论是近年来图论中比较活跃的分支之一. 匈牙利数学家波洛巴斯(B. Bollobás)在 1978 年专门写了一本《极图理论》,是这方面最具权威的著作.

下面先从  $k$  部图的定义谈起.

如果图  $G$  的顶点集  $V$  可以分解为  $k$  个两两不交非空子集的并,即

$$V = \bigcup_{i=1}^k V_i, \quad V_i \cap V_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

并且没有一条边,其两个端点都在上述同一子集内,我们称这样的图  $G$  为  $k$  部图. 记作  $G = (V_1, V_2, \dots, V_k; E)$ .

图 3-1 所示的是一个 2 部图,2 部图又称偶图. 图 3-2 所示的是一个 3 部图.

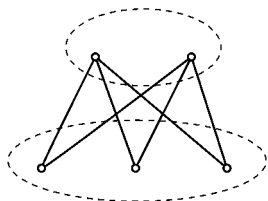


图 3-1

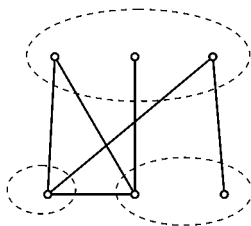


图 3-2

显然任何  $n$  阶图是一个  $n$  部图.

如果在一个  $k$  部图  $G = (V_1, V_2, \dots, V_k; E)$  中,  $|V_i| = m_i$ . 任何两点  $u \in V_i, v \in V_j, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, k$ , 均有  $u$  和  $v$  相邻, 则称  $G$  是完全  $k$  部图, 记作  $K_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ . 图 3-1 所示的是完全偶图  $K_{2,3}$ .

完全偶图  $K_{m,m}$  和  $K_{m,m+1}$  中分别有  $m^2$  和  $m(m+1)$  条边, 于是图中边数  $= \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$  (此处  $\lfloor x \rfloor$  表示不超过  $x$  的最大整数,  $n$  是图的阶), 完全偶图  $K_{m,m}$  和  $K_{m,m+1}$  中显然不含三角形, 下面的定理一表明, 在不含三角形的图中, 这两类图中边的数目最多.

定理一 有  $n$  个顶点且不含三角形的图  $G$  的最大边数为  $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ .

证明 设  $v_1$  是  $G$  中具有最大度数的顶点,  $d(v_1) = d$ . 又设与  $v_1$  相邻的  $d$  个顶点为

$$v_n, v_{n-1}, \dots, v_{n-d+1}.$$

由于  $G$  不含三角形, 所以  $v_n, v_{n-1}, \dots, v_{n-d+1}$  中任意两点都不相邻, 故  $G$  的边数  $e$  满足

$$\begin{aligned} e &\leq d(v_1) + d(v_2) + \dots + d(v_{n-d}) \\ &\leq (n-d) \cdot d \leq \left( \frac{n-d+d}{2} \right)^2 \\ &= \frac{n^2}{4}. \end{aligned}$$

因为边数  $e$  为整数, 所以  $e \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ .

最大值是可以达到的, 当  $n = 2m$  时, 取  $G = K_{m,m}$ ; 当  $n = 2m+1$  时, 取  $G = K_{m,m+1}$ .

定理一的证明, 用数学归纳法也可完成, 留给读者作为习题.

例 1 设图  $G$  有 20 个顶点, 101 条边. 证明  $G$  中一定有两个具有公共边的三角形.

证明 可将 20 改为更一般的自然数  $2n (n \geq 2)$ , 用数学归纳法证明: 图  $G$  有  $2n (n \geq 2)$  个顶点,  $n^2 + 1$  条边, 则  $G$  中一定有两个具有公共边的三角形.

当  $n = 2$  时,  $G$  有 4 个顶点, 5 条边, 作完全图  $K_4$ ,  $K_4$  有  $C_4^2 = 6$  条边, 容易验证不论在  $K_4$  中去掉哪条边, 总有两个具有公共边的三角形, 即命题在  $n = 2$  时成立.

假设命题在  $n = k (k \geq 2)$  时成立. 设  $G$  有  $2(k+1)$  个顶点  $v_1, v_2, \dots, v_{2k+2}$ ,  $(k+1)^2 + 1 = k^2 + 2k + 2$  条边. 因为

$$\left\lfloor \frac{(2k+2)^2}{4} \right\rfloor = \lfloor k^2 + 2k + 1 \rfloor < k^2 + 2k + 2,$$

根据定理一,  $G$  中一定有一个三角形, 不妨设是  $\triangle v_1 v_2 v_3$ , 且  $d(v_1) \leq d(v_2) \leq d(v_3)$ .

如果  $v_4, v_5, \dots, v_{2k+2}$  中有一点与  $v_1, v_2, v_3$  中的两个点都相邻, 那么就得到了两个有公共边的三角形.

如果  $v_4, v_5, \dots, v_{2k+2}$  中的每一点, 至多只和  $v_1, v_2, v_3$  中的一个点相邻, 则由顶点集  $\{v_4, v_5, \dots, v_{2k+2}\}$  引向顶点集  $\{v_1, v_2, v_3\}$  的边数不超过

$$(2k+2) - 3 = 2k - 1.$$

那么由  $\{v_1, v_2\}$  引向  $\{v_4, v_5, \dots, v_{2k+2}\}$  的边数  $\leq \frac{2}{3}(2k-1)$ , 从  $G$  中去掉顶点  $v_1, v_2$  以及与它们相邻的边, 得图  $G'$ ,  $G'$  的顶点个数是  $2k$ , 且边的数目

$$\begin{aligned} e' &\geq k^2 + 2k + 2 - 3 - \frac{2}{3}(2k-1) \\ &= k^2 + \frac{2}{3}k - \frac{1}{3} \geq k^2 + 1. \quad (\text{因为 } k \geq 2) \end{aligned}$$

由归纳假设,  $G'$  中有两个有公共边的三角形, 这两个有公共边的三角形也是  $G$  中的三角形.

从而命题得证.

**例 2**  $S$  为  $m$  个正整数对  $(a, b)$  ( $1 \leq a, b \leq n, a \neq b$ ) 所组成的集合 ( $(a, b)$  与  $(b, a)$  被认为是相同的). 证明: 至少有  $\frac{4m}{3n} \left( m - \frac{n^2}{4} \right)$  个三元数组  $(a, b, c)$ , 适合:  $(a, b), (a, c)$  及  $(b, c)$  都属于  $S$ . (1989 年亚太地区数学奥林匹克试题)

**证明** 作一个图  $G$ : 用点  $v_i$  表示数  $i, i = 1, 2, \dots, n$ . 当且仅当  $(i, j) \in S$  时, 点  $v_i$  与点  $v_j$  相邻. 于是图  $G$  有  $n$  个顶点,  $m$  条边. 要证明的问题就是:  $G$  中至少有  $\frac{4m}{3n} \left( m - \frac{n^2}{4} \right)$  个三角形.

令顶点  $v_i$  的度为  $d_i$ ,  $G$  中边的集合为  $E$ . 设  $(v_i, v_j) \in E$ , 则它的两个端点  $v_i, v_j$  向其余  $n-2$  个顶点共引出  $d_i + d_j - 2$  条边, 故至少有  $d_i + d_j - n$  对分别由  $v_i, v_j$  引向同一顶点的边, 它们与边  $(v_i, v_j)$  构成三角形, 因此  $G$  中至少有  $d_i + d_j - n$  个三角形包含边  $(v_i, v_j)$ . 又因为  $G$  中每个三角形被计算了三次, 故  $G$  中至少有

$$k = \frac{1}{3} \sum_{(v_i, v_j) \in E} (d_i + d_j - n)$$

个三角形. 由于顶点  $v_i$  的度  $d_i$  在上述和式中出现  $d_i$  次, 边的条数为  $m$ , 故

$$k = \frac{1}{3} \left( \sum_{i=1}^n d_i^2 - mn \right). \quad ①$$

因为  $\sum_{i=1}^n d_i = 2m$ , 对①式用柯西不等式, 得

$$\begin{aligned} k &\geq \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n d_i \right)^2 - mn \right] \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{4m^2}{n} - mn \right) \\ &= \frac{4m}{3n} \left( m - \frac{n^2}{4} \right). \end{aligned}$$

注: 本题是根据图论中这样的问题: “设  $G$  是有  $m$  条边的  $n$  阶图, 则  $G$  中的三角形个数一定不小于  $\frac{4m}{3n} \left( m - \frac{n^2}{4} \right)$ ” 改编而成的.

设  $n = mk + r (k \geq 1, 0 \leq r < m)$ . 我们以  $T_m(n)$  记完全  $m$  部图  $K_{n_1, n_2, \dots, n_m}$ , 这里  $n_1 = n_2 = \dots = n_r = k + 1$ ,  $n_{r+1} = \dots = n_m = k$ . 令  $e_m(n)$  表示  $T_m(n)$  的边数. 如图 3-3 所示的是  $T_3(5)$ ,  $e_3(5) = 8$ .  $e_m(n)$  的计算公式如下, 证明留作习题.

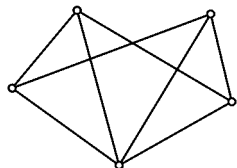


图 3-3

$$e_m(n) = C_{n-k}^2 + (m-1)C_{k+1}^2, \text{ 其中 } k = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor.$$

若  $G = (V_1, V_2, \dots, V_m; E)$  是任一  $n$  阶  $m$  部图, 令  $p_i = |V_i|$  ( $\sum_{i=1}^m p_i = n$ ), 可以验证  $G$  的边数  $\leq e_m(n)$ , 并且当等号成立时必有  $G$  与  $T_m(n)$  同构 (证明留作习题). 换句话说,  $T_m(n)$  是包含边数最多的  $n$  阶  $m$  部图, 并且是唯一的这样的图.

显然任意一个  $m$  部图不含  $K_{m+1}$ . 托兰进一步证明了  $T_m(n)$  是边数最多的、不含  $K_{m+1}$  的  $n$  阶图, 并且是唯一的这样的图.

**定理二** 设  $n$  阶图  $G$  不含  $K_{m+1}$ , 则  $G$  的边数  $e(G) \leq e_m(n)$ ; 当且仅当  $G$  和  $T_m(n)$  同构时等号成立.

这便是托兰定理, 证明这里略去. 有兴趣的读者可参阅 J·A·邦迪和 U·S·R·默蒂著的《图论及其应用》.

例 3 设  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  是平面上的 6 点, 其中任意三点不共线.

(i) 如果这些点之间任意连接 13 条线段, 证明: 必存在 4 点, 它们每两点之间都有线段连接.

(ii) 如果这些点之间只有 12 条线段, 请你画一个图形, 说明 (i) 的结论不成立 (不必用文字说明).

(iii) 结论 (i) 能否加强为: 必存在 4 个 4 阶完全图, 给出反例或证明.

解 (i) 把题目转化成图论语言就是: 图  $G$  有 6 个顶点, 13 条边, 证明  $G$  中含有  $K_4$ .

容易算得  $e_4(6) = 12 < 13$ , 根据定理二,  $G$  中必含有  $K_4$ .

(ii) 构造完全 3 部图  $K_{2,2,2}$ , 如图 3-4 所示. 因从  $K_{2,2,2}$  中任取 4 点, 总有两点属于同一部分, 而这两点是不相邻的, 因此任取 4 点均不构成  $K_4$ .

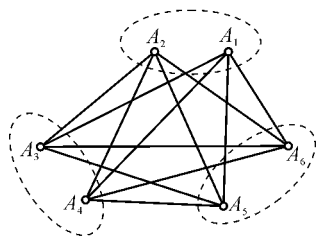


图 3-4

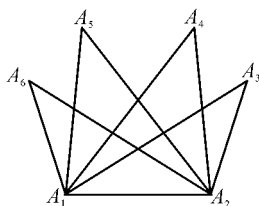


图 3-5

注: 对于 (i), 不用定理二当然也能证明, 而且方法很多, 这里仅举两种.

(1) 因为 6 个点的度数之和  $= 2 \times 13 = 26$ , 所以这 6 个点中至少有两个点的度数为 5 (否则, 度数之和  $\leq 5 + 5 \times 4 = 25 < 26$ ), 不妨设  $d(A_1) = d(A_2) = 5$ . 与  $A_1$  或  $A_2$  关联的边共 9 条, 如图 3-5 所示. 于是在  $A_3, A_4, A_5, A_6$  之间还有  $13 - 9 = 4$  条边. 这 4 条边的任一条的两个端点与  $A_1, A_2$  这 4 点构成  $K_4$ .

(2) 因为 6 阶完全图有 15 条边, 所以图  $G$  就是在  $K_6$  中去掉两条边. 分两种情况讨论:

① 两边有公共点, 如图 3-6, 则四点组  $A_2, A_4, A_5, A_6$  组成  $K_4$ ;

图 3-6

图 3-7



② 两边无公共点,如图 3-7,则四点组  $A_1, A_3, A_5, A_6$  组成  $K_4$ .

(iii) 按上述两种情况来讨论: 情况①中有 6 个  $K_4$  组  $(A_1, A_4, A_5, A_6), (A_2, A_4, A_5, A_6), (A_3, A_4, A_5, A_6), (A_2, A_3, A_4, A_5), (A_1, A_3, A_4, A_6), (A_1, A_3, A_5, A_6)$ .

情况②中有 4 个  $K_4$  组  $(A_1, A_3, A_5, A_6), (A_1, A_4, A_5, A_6), (A_1, A_3, A_4, A_5), (A_1, A_2, A_4, A_5)$ .

所以,必存在 4 个 4 阶完全图.

例 4 在有 8 个顶点的简单图中,没有四边形(即由四点  $A, B, C, D$  和四条边  $AB, BC, CD, DA$  组成的图)的图的边数的最大值是多少?(1992 年中国数学奥林匹克试题)

解 边数的最大值为 11.

首先,如图 3-8 所示,图中有 8 个顶点和 11 条边,但其中没有四边形.

下面我们证明:若一个简单图有 12 条边,则其中一定含有四边形.

首先指出两个明显的事实:

(a) 设  $A \neq B$  是两个顶点.如果点  $A$  与点  $C_1, \dots, C_k$  均有边相连,  $B$  至少与  $\{C_1, \dots, C_k\}$  中的两点分别有边相连,则图中必有四边形.

(b) 如果 4 点之间连有 5 条边,则图中必有四边形.

设有 8 个顶点,12 条边的图中没有四边形,其中点  $A$  是引出边最多的顶点之一.

(1) 设  $A$  共引出  $s \geq 5$  条边,与  $A$  有边相连的顶点的集合为  $S$ ,除点  $A$  及  $S$  中的点之外的所有顶点的集合记为  $T$ .于是由(a)和(b)知, $S$  中点之间连线数不超过  $\left[\frac{s}{2}\right]$ ,  $T$  中点之间连线数至多为  $C_{|T|}^2$ ,  $S$  与  $T$  之间连线数至多为  $|T|$ .因而,图中连线总数至多为

$$s + \left[\frac{s}{2}\right] + |T| + C_{|T|}^2 = 7 + \left[\frac{s}{2}\right] + C_{|T|}^2.$$

当  $s \geq 5$  时,边数小于 12,矛盾.

(2) 点  $A$  恰引出 4 条边:  $AA_j (j = 1, 2, 3, 4)$ . 设另外 3 点是  $B_1, B_2, B_3$ . 于是  $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  之间至多两条边,  $\{B_1, B_2, B_3\}$  之间至多 3 条边,这两个点集之间至多 3 条边. 因为图中共有 12 条边,故知 3 类边数恰分别为 2, 3, 3. 不妨设第 3 组的 3 条线为  $A_j B_j (j = 1, 2, 3)$ . 因为第 1 组有两条边

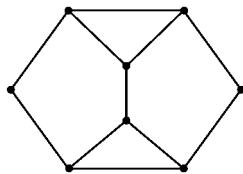


图 3-8

且二者没有公共端点,故 $\{A_1, A_2, A_3\}$ 之间有一条边,不妨设为 $A_1A_2$ ,于是 $A_1A_2B_2B_1$ 为四边形,矛盾.

(3) 点 $A$ 恰引出3条线,从而每点都引出3条线.设点 $A$ 和 $B$ 之间没有连线,两点各引出的3条线分别为 $AA_j, BB_j (j = 1, 2, 3)$ .于是由(a)知 $\{A_1, A_2, A_3\}$ 与 $\{B_1, B_2, B_3\}$ 至多有1个公共点.

如果二者没有公共点,则它们的各3点间都至多有一条边,两个三点集之间至多有3条连线.从而图中连线总数至多为11,矛盾.

如果两个三点集之间恰有1个公共点,则考察第8点 $C$ .由抽屉原理知,它引出的3条线中必有两条引向同一个三点集,这导致四边形,矛盾.

综上,我们证明了在有8个顶点和12条边的图中必有四边形.从而,所求的边数的最大值为11.

例5 设 $G$ 是 $n$ 阶简单图, $G$ 中不含四边形,则其边数

$$e \leq \frac{1}{4}n(1 + \sqrt{4n-3}).$$

证 设 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是图 $G$ 的顶点集,对于任意的顶点 $v_i \in V$ ,与 $v_i$ 相邻的顶点对 $\{x, y\}$ 有 $C_{d(v_i)}^2$ 个.由于图 $G$ 中没有四边形,所以,当 $v_i$ 在 $V$ 中变化时,所有的顶点对 $\{x, y\}$ 都是互不相同的,否则,点对 $\{x, y\}$ 分别在 $C_{d(v_i)}^2$ 和 $C_{d(v_j)}^2$ 中被计数,那么 $v_i, x, v_j, y$ 就组成一个四边形.所以

$$\sum_{i=1}^n C_{d(v_i)}^2 \leq C_n^2.$$

由柯西不等式,有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n C_{d(v_i)}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d^2(v_i) - e \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n d(v_i) \right)^2 - e \\ &= \frac{2}{n}e^2 - e, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{2}{n}e^2 - e &\leq C_n^2, \\ e^2 - \frac{n}{2}e - \frac{1}{4}n^2(n-1) &\leq 0, \end{aligned}$$

解得

$$e \leq \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3}).$$

说明 本题得到了一个  $n$  阶简单图不含四边形, 其边数的一个上界. 但这还不是最大值, 对于一般的  $n$ , 边数的最大值还有待于进一步的研究. 例 4 证明了  $n = 8$  时, 最大值为 11.

例 6 由  $n$  个点和这些点之间的  $l$  条线段组成一个空间图形, 其中  $n = q^2 + q + 1, l \geq \frac{1}{2}q(q+1)^2 + 1, q \geq 2, q \in \mathbf{N}$ .

已知此图中任意四点不共面, 每点至少有一条连线段, 存在一点至少有  $q+2$  条连线段. 证明: 图中必存在一个空间四边形(即由四点  $A, B, C, D$  和四条连线段  $AB, BC, CD, DA$  组成的图形). (2003 年全国高中数学联赛试题)

证 本题条件中任意四点不共面实际是为了保证无三点共线, 故从图论角度看, 只需证明图中存在四边形即可. 解答本题可以援引例 5 思路, 但直接应用不可行. 考虑将与  $d(v_1) \geq q+2$  的点  $v_1$  相连的  $d(v_1)$  个点去掉, 剩下的点对有  $C_{n-d(v_1)}^2$  个.

如例 5, 没有四边形时  $C_{n-d(v)}^2 \geq \sum_{i=2}^n C_{d(v_i)-1}^2$ .

同样  $\sum_{i=2}^n (d(v_i) - 1) = 2l - n + 1 - d(v)$

结合 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned} & \frac{[n-d(v_1)][n-d(v_1)-1]}{2} \\ & \geq \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=2}^n [n-d(v_i)]^2 - \sum_{i=2}^n [n-d(v_i)] \right\} \\ & \geq \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{n-1} [2l-n+1-d(v_1)]^2 - [2l-n+1-d(v_1)] \right\} \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & (n-1)[n-d(v_1)][n-d(v_1)-1] \\ & \geq [2l-n+1-d(v_1)][2l-2n+2-d(v_1)] \\ & \geq [q^3+q^2-d(v_1)+2][q^3-q+2-d(v_1)] \\ & = [nq-q+2-d(v_1)][nq-q-n+3-d(v_1)] \end{aligned}$$

这与  $(q+1)[n-d(v_1)] < nq-q+2-d(v_1)$  及  $q[n-d(v_1)-1] \leq nq-q-n+3-d(v)$  矛盾.

所以图中必有四边形.

作为托兰定理的应用,再举一个几何例子.

平面点集  $S$  中任意两点的距离的最大值记为  $d$ . 如果  $d$  是一个有限数, 称  $d$  是点集  $S$  的直径.

设  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  是由  $n$  个点组成的直径为 1 的点集.  $n$  个点确定了  $C_n^2$  个点对的距离. 对于 0 和 1 之间的数  $d$ , 可以提出这样的问题: 在直径为 1 的点集  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  中有多少点对, 其距离大于  $d$ . 这里我们仅讨论  $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$  这一特殊情形.

先看  $n = 6$  的情形, 这时  $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ . 把它们放在一个正六边形的顶点上, 使点对  $(x_1, x_4), (x_2, x_5), (x_3, x_6)$  的距离为 1, 如图 3-9 所示,  $S$  的直径为 1. 易知点对  $(x_1, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_5), (x_4, x_6), (x_5, x_1), (x_6, x_2)$  的距离为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . 所以在这个直径为 1 的点集中存在 9 个点对, 其距离大于  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

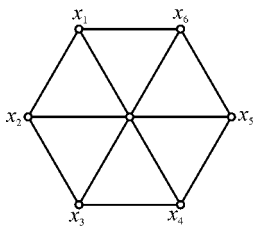


图 3-9

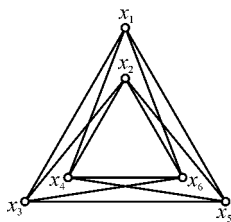


图 3-10

但是 9 并非是在 6 个点上所能做到的最好答案. 如果按图 3-10 所示来安排这 6 个点的话(其中点  $x_1, x_3, x_5$  构成边长为 1 的正三角形, 点  $x_2, x_4, x_6$  构成边长为 0.8, 中心与  $\triangle x_1 x_3 x_5$  重合, 边分别与  $\triangle x_1 x_3 x_5$  平行的正三角形), 则除了点对  $(x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_6)$  外, 其余的点对的距离均大于  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . 因此我们有  $C_6^2 - 3 = 12$  个点对, 其距离大于  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . 事实上, 这是我们所能做到的最好答案. 对于一般情形, 这个问题的解由下面的定理三给出.

定理三 设  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  是平面上直径为 1 的点集, 则距离大于  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  的点对的最大可能的数目是  $\left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$ . 并且对每个  $n$ , 存在直径为 1 的一个

点集  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , 它恰好有  $\left[\frac{n^2}{3}\right]$  个点对, 其距离大于  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

证明 作图  $G$ :  $n$  个顶点表示这  $n$  个点, 两顶点相邻当且仅当这两点之间的距离大于  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . 我们先证明  $G$  不包含  $K_4$ .

对于平面上任意 4 个点, 它们的凸包只有 3 种情况: 线段、三角形、四边形, 如图 3-11 所示. 显然在每一种情况下都有一个不小于  $90^\circ$  的角  $x_i x_j x_k$ .

对于这 3 个点  $x_i, x_j, x_k$ , 它们两两之间的距离不可能都大于  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  且小于等于 1. 因为若  $d(x_i, x_j)$  (此处用  $d(x, y)$  表示  $x$  和  $y$  之间的距离) 和  $d(x_j, x_k)$  都大于  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 且  $\angle x_i x_j x_k \geq 90^\circ$ , 则

$$d(x_i, x_k) \geq \sqrt{d^2(x_i, x_j) + d^2(x_j, x_k)} > 1.$$

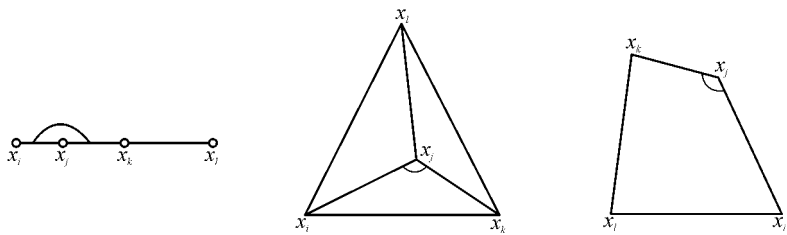


图 3-11

由于点集  $S$  的直径为 1, 故  $G$  中的任意 4 个点中, 至少有一对点不相邻, 即  $G$  中不含  $K_4$ .

根据定理二,  $G$  的边数不超过  $e_3(n) = \left[\frac{n^3}{3}\right]$ .

我们可以构造一个直径为 1 的点集  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , 其中恰有  $\left[\frac{n^2}{3}\right]$  个点对, 其距离大于  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . 作法如下:

选择  $r$ , 使  $0 < r < \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ , 并画出三个半径为  $r$  的圆, 它们的中心两两相距  $1 - 2r$ , 如图 3-12 所示. 把  $x_1, x_2, \dots, x_{\left[\frac{n}{3}\right]}$  放在一个圆内,  $x_{\left[\frac{n}{3}\right]+1}, \dots, x_{\left[\frac{2n}{3}\right]}$  放在另一个圆内,  $x_{\left[\frac{2n}{3}\right]+1}, \dots, x_n$  放在第三个圆内, 并且使

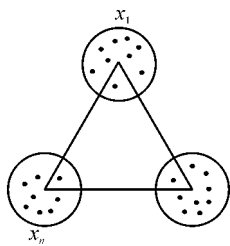


图 3-12

得  $x_1$  与  $x_n$  的距离为 1. 显然该集的直径为 1, 当且仅当  $x_i$  和  $x_j$  分属两个不同的圆时,  $d(x_i, x_j) > \frac{\sqrt{2}}{2}$ . 所以恰好存在  $\left\lceil \frac{n^2}{3} \right\rceil$  个点对  $(x_i, x_j)$ , 使得  $d(x_i, x_j) > \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

### 习 题 3

- 1 证明: 如果偶图  $G = (X, Y; E)$  是  $\delta$  正则的, 则  $|X| = |Y|$ .
- 2 用数学归纳法证明定理一.
- 3 作一个不含三角形的, 有 20 个顶点, 100 条边的简单图.
- 4 证明: 如果简单图  $G$  有  $2n+1$  个顶点,  $n^2+n+1$  条边, 则  $G$  一定含有一个三角形.
- 5 (1) 证明:  $e_m(n) = C_{n-k}^2 + (m-1)C_{k+1}^2$ , 其中  $k = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$ .  
(2) 设  $G$  为有  $n$  个顶点的完全  $m$  部图, 则  $e(G) \leq e_m(n)$ .
- 6  $X$ 、 $Y$  两国留学生各  $n(n>2)$  人, 每个  $X$  国学生都与一些(不是所有)  $Y$  国学生跳过舞, 每个  $Y$  国学生至少与一个  $X$  国学生跳过舞, 证明一定可以找到两个  $X$  国学生  $x, x'$  及两个  $Y$  国学生  $y, y'$ , 使得  $x$  与  $y, x'$  与  $y'$  跳过舞, 而  $x$  与  $y', x'$  与  $y$  没有跳过舞.
- 7 用托兰定理证明练习题二中的第 9 题.
- 8 设图  $G$  有  $n(n>5)$  个顶点, 则在  $G$  和  $G$  的补图  $\bar{G}$  中总共含有至少  $\frac{1}{24}n(n-1)(n-5)$  个三角形.
- 9  $X$  是一个  $n$  元集, 指定它的  $m$  个  $k$  元子集  $A_1, A_2, \dots, A_m$  为红  $k$  子集. 求证: 若  $m > \frac{(k-1)(n-k)+k}{k^2} \cdot C_n^{k-1}$ , 则必存在一个  $X$  的  $k+1$  元子集, 它的所有  $k$  元子集都是红  $k$  子集.
- 10 记  $K_{3,3}$  为图, 求证: 一个有 10 个顶点 40 条边的图, 必含有一个  $K_{3,3}$ .
- 11 半径为 6 公里的圆形城市, 有 18 辆警车巡逻, 它们之间用无线电通讯联系. 若无线电使用范围为 9 公里, 证明不管什么时候最少有两辆车, 每一辆车可以和其余五辆车通讯联系.
- 12 设空间中有  $2n(n\geq 2)$  个点, 其中任意 4 点不共面, 它们之间连有  $n^2+1$  条线段, 则这些线段至少构成  $n$  个不同的三角形.



在各种各样的图中,有一类简单的,然而重要的图,就是所谓的“树”.树之所以重要,不仅因为它在许多领域中有着广泛的应用,而且在于图论本身.在图论中,树是一种非常简单的图,所以在探讨关于图的一般性猜想时,可以首先研究树这种情形.

先引入几个概念.

在图  $G$  中,一个由不同的边组成的序列:

$$e_1, e_2, \dots, e_m.$$

如果其中边  $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . 则称这个序列是从  $v_0$  到  $v_m$  的链. 数  $m$  称为这条链的长.  $v_0$  与  $v_m$  称为这条链的端点. 并且这条链记为  $v_0 v_1 \dots v_m$ .

如果一条链的两个端点  $v_0$  与  $v_m$  重合,称这条链为圈\*.

在图 4-1 中,  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$  组成一条链,  $e_1, e_2, e_3$  组成一个圈.

如果图  $G$  中的任意两个顶点  $u$  与  $v$ , 都有一条从  $u$  到  $v$  的链, 称这样的图  $G$  为连通图. 不是连通的图称为不连通图.

图 4-1 中的图是连通图. 图 4-2 中的图是不连通图.

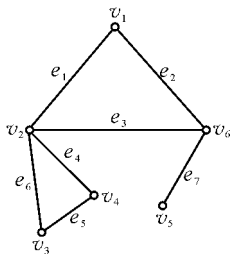


图 4-1

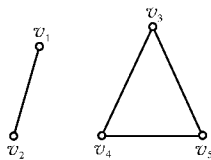


图 4-2

\* 本书所指的“圈”实为“闭链”. 与通常图论书中的“圈”有别. 图论中的圈是指: 在“闭链” $v_0 v_1 \dots v_m (v_0 = v_m)$ 中, 点  $v_1, v_2, \dots, v_m$  互不相同.

现在给出树的定义.

一个连通且没有圈的图称为树. 通常用字母  $T$  来表示树.

根据树的定义, 树显然是简单图. 图 4-3 是一个有 8 个顶点的树.

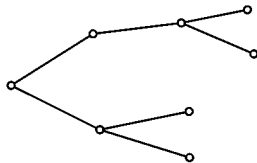


图 4-3

显然, 一个不含圈的图必定是由一个或数个顶点不交的树所组成的. 我们称这样的图为森林.

图 4-4 所示是一个森林, 它由 3 个树组成.



图 4-4

度为 1 的顶点称为悬挂点(或树叶).

定理一 如果树  $T$  的顶点数  $\geq 2$ , 则  $T$  中至少有两个悬挂点.

证法一 设想我们从某个顶点  $u$  出发, 沿着  $T$  的边走, 已经走过的边不再重复. 由于树是没有圈的, 因此不会回到已经走过的点, 也就是说每个顶点至多走一次. 如果我们走到一个点不是悬挂点, 由于这个点的度大于 1, 还可以继续走下去. 但  $T$  的顶点个数是有限的, 所以不可能永远走下去. 如果在顶点  $v$  处不能再继续走下去了, 则顶点  $v$  就是一个悬挂点.

我们从一个悬挂点  $v$  出发, 又可以走到另一个悬挂点  $v'$ , 所以树  $T$  至少有两个悬挂点.

证法二 设  $\mu = uv_1v_2\cdots v_kv$  是树  $T$  中的一条最长的链, 可以证明  $d(u) = d(v) = 1$ , 即  $u, v$  是悬挂点.

事实上, 若  $d(u) \geq 2$ , 则存在不同于  $v_1$  的顶点  $w$  与  $u$  相邻, 如果  $w$  是  $v_2, \cdots, v_k, v$  中的一个, 则出现圈, 与树的定义矛盾. 如果  $w$  是不同于  $v_2, \cdots, v_k, v$  的点, 则  $wuv_1\cdots v_kv$  是比  $\mu$  更长的链, 这与  $\mu$  的取法矛盾. 从而  $d(u) = 1$ . 同样地,  $d(v) = 1$ . 所以树  $T$  至少有两个悬挂点.

注: 证明一是“构造性”的, 证明二是用“最长链”的方法, 这是两个很重要的解题方法.

定理二 设树  $T$  的顶点数为  $n$ , 则它的边数  $e = n - 1$ .

证明 对顶点数  $n$  用数学归纳法.

当  $n = 1$  时,  $e = 0$ , 结论正确.



假设当  $n = k$  时结论成立. 设  $T$  是有  $k+1$  ( $k \geq 1$ ) 个顶点的树, 由定理一,  $T$  至少有两个悬挂点, 设  $v$  是其中之一, 则去掉  $v$  及与它关联的边, 就得到一个有  $k$  个顶点的树  $T'$ , 根据归纳假设  $T'$  有  $k-1$  条边, 所以  $T$  的边数为  $k$ , 从而结论对一切自然数  $n$  都成立.

定理三 设  $T$  是有  $n$  个顶点、 $e$  条边的图. 则下述三个命题是等价的:

- (1) 图  $T$  是树;
- (2) 图  $T$  无圈, 并且  $e = n - 1$ ;
- (3) 图  $T$  连通, 并且  $e = n - 1$ .

证明 由(1)推出(2):

设图  $T$  是树, 则由树的定义知  $T$  无圈, 由定理二知,  $e = n - 1$ , 故(2)成立.

由(2)推出(3):

只要证明  $T$  是连通的即可, 用反证法. 设  $T$  是不连通的, 它有  $k$  ( $k \geq 2$ ) 个连通分支, 因为每个连通分支都无圈, 故每个连通分支都是树. 若第  $i$  个分支有  $p_i$  个顶点, 根据定理二知, 第  $i$  个分支有  $p_i - 1$  条边, 故

$$e = (p_1 - 1) + \cdots + (p_k - 1) = n - k \leq n - 2.$$

这与  $e = n - 1$  矛盾. 于是证得  $T$  是连通的.

由(3)推出(1):

只要证得  $T$  无圈, 则  $T$  便是树. 当  $n = 1$  时结论显然成立. 设  $n \geq 2$ , 那么  $T$  必有悬挂点. 否则, 因  $T$  连通且  $n \geq 2$ , 故  $T$  中每个顶点的度  $\geq 2$ , 于是

$$e = \frac{1}{2} [d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n)] \geq \frac{1}{2} \times 2n = n.$$

这与  $e = n - 1$  矛盾.

现对  $n$  用数学归纳法证明  $T$  无圈.

当  $n = 2$  时,  $e = 1$ , 此时  $T$  无圈.

设  $n = k$  时命题成立.  $T$  是有  $k+1$  个顶点的图, 顶点  $v$  是  $T$  的悬挂点. 在  $T$  中去掉  $v$  及与它关联的边得到图  $T'$ , 由归纳假设可知  $T'$  无圈, 在  $T'$  中加入  $v$  及与它关联的边又得到图  $T$ , 故  $T$  是无圈的. 从而命题正确.

定理三说明了“连通”、“无圈”及“ $e = n - 1$ ”这三个性质中的任何两个都足以保证图  $T$  是树, 所以也都可以作树的定义.

例 1 若  $T$  是树, 则

- (i)  $T$  是连通图, 但  $T$  中去掉任一条边后, 所得的图  $G$  不连通.

(ii)  $T$  无圈,但添加任何一条边后,得到的图  $G$  便包含一个且仅包含一个圈.

反之,若图  $T$  满足(i)或(ii),则  $T$  是树.

证明 (i) 若图  $G$  是连通的,则  $G$  仍然是树,所以  $G$  有  $n-1$  条边,与  $T$  的边数相等,矛盾.

(ii) 若  $G$  没有圈,则  $G$  仍是树,故  $G$  有  $n-1$  条边,与  $T$  的边数相同,这是不可能的,所以  $G$  含有圈. 显然  $G$  仅含一个圈.

若(i)或(ii)成立,则  $T$  是树,留作习题.

本题刻划了树的一个特征,在点数给定的所有图中,树是边数最少的连通图,也是边数最多的无圈图. 由此可见,在任意一个图  $G$  中,若  $e < n-1$ , 则  $G$  是不连通的,若  $e > n-1$ , 则  $G$  必有圈.

树的另一个特征也是很有用的.

例 2 设  $T$  是树,则  $T$  中任何两个顶点之间恰有一条链;反之,若图  $T$  中,任何两点之间恰有一条链,则  $T$  必是树.

证明 若  $T$  是树,由于  $T$  是连通的,所以  $T$  中任意两个顶点之间至少有一条链,又因为  $T$  无圈,任意两点之间必只能有一条链.

反之,若  $T$  中任何两点之间恰有一条链,则  $T$  显然是连通的,同时  $T$  也必定无圈. 否则,圈上的任意两点之间就至少有两条链,这与假设矛盾.

例 3  $n$  个城市,每个城市都可以通过一些中转城市与另一个城市通话,证明至少有  $n-1$  条直通的电话线路,每条连结两个城市.(匈牙利数学竞赛试题)

证明 作图  $G$ : 用  $n$  个顶点表示  $n$  个城市,若两个城市之间有直通电话,则在相应的顶点之间连一条边. 由题意知,图  $G$  是连通图. 故  $G$  的边数一定  $\geq n-1$ ,从而至少有  $n-1$  条直通的电话线路连结两个城市.

本题也可以这样考虑: 若得到的连通图  $G$  有圈,我们就去掉这个圈的一条边,得图  $G_1$ ,此时  $G_1$  比  $G$  少了一条边,但仍然是连通的. 如果  $G_1$  还有圈,再去掉圈的一条边得连通图  $G_2$ ,……这样继续下去,直到图中没有圈,这个图当然就是树. 它有  $n-1$  条边. 故图  $G$  至少有  $n-1$  条边.

上面所得到的树称为原来连通图  $G$  的生成树. 在生成树上添上若干条边,就可以得到(生成)原来的图.

例 4 某地区网球俱乐部的 20 名成员已举行 14 场单打比赛,每人至少上场一次. 求证: 其中必有 6 场比赛,12 个参赛者各不相同.

证 本题在第二节已经讲过,这里我们再从树的角度给出另一种证明.

用 20 个点代表 20 名参赛者. 若两人比一场则在他们之间连边. 这样共有 14 条边, 每点至少连出 1 条边, 所证结论相当于: 可以找出 6 条边两两不相邻.

设图中共有  $n$  个连通分支, 其中第  $i$  个分支点数为  $v_i$ , 边数为  $e_i$ . 显然  $e_i \geq v_i - 1$ , 故  $\sum_{i=1}^n e_i \geq \sum_{i=1}^n (v_i - 1) = \sum_{i=1}^n v_i - n$ . 而  $\sum_{i=1}^n e_i = 14$ ,  $\sum_{i=1}^n v_i = 20$ , 故  $14 \geq 20 - n$ ,  $n \geq 20 - 14 = 6$ . 由于每点至少连出一条边, 因此不可能存在一个连通分支, 它仅含一个孤立点. 故从每个连通分支中各取一条边, 即可保证两两不相邻, 边数至少为 6. 原命题得证.

由图 4-5 可知, 顶点数为 20, 边数为 14, 任选 7 条边, 则必有两边在同一连通分支内, 它们必定相邻. 故 6 为最佳结果.

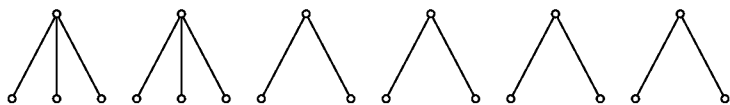


图 4-5

**例 5** 以一些圆(圆面)覆盖平面上给定的  $2n$  个点. 证明: 若每个圆至少覆盖  $n+1$  个点, 则任意两个点能由平面上的一条折线所连结, 而这条线段整个地被一些圆所覆盖.

**证明** 以这  $2n$  个点为顶点, 若存在一个圆, 它覆盖着两个点, 则在这两顶点之间连一条边, 得到一个图  $G$ . 由题意知,  $G$  中每个顶点的度不小于  $n$ . 每条边之所以能画出, 就表明它能整个地被一个圆所覆盖, 于是我们只需证明  $G$  是连通图.

若  $G$  不是连通图, 则存在一个连通分支  $G_1$ , 至多含有  $n$  个顶点, 这样对  $G_1$  中每一个顶点  $v$ , 都有  $d(v) \leq n-1$ , 与题意矛盾, 从而  $G$  是连通图.

**例 6**  $n(n > 3)$  名乒乓球选手单打比赛若干场后, 任意两个选手已赛过的对手恰好都不完全相同. 证明: 总可以从中去掉一名选手, 而使余下的选手中, 任意两个选手已赛过的对手仍然都不完全相同. (1987 年全国高中数学联赛第二试第 3 题)

**证明** 用  $n$  个顶点  $v_1, v_2, \dots, v_n$  表示这  $n$  名选手, 如果命题不成立, 即每一个选手都是不可去选手. 对选手  $v_k (1 \leq k \leq n)$ , 因为他不是可去选手, 所以去掉  $v_k$  后, 总可以找到一对选手  $v_i$  与  $v_j$ , 他们所赛过的选手相同(若有不止一对这样的选手, 则任取其中的一对), 这说明  $v_i$  和  $v_j$  赛过的选手仅差  $v_k$ . 不妨设  $v_i$  与  $v_k$  赛过, 而  $v_j$  与  $v_k$  未赛过, 在这样的一对点  $v_i$  与  $v_j$  之间连

一条边,并标上数字  $k$ . 这样就得到一个有  $n$  个顶点,  $n$  条边的图,并且这  $n$  条边上标有  $n$  个互不相同的数.

由于  $n$  个顶点  $n$  条边的图一定有圈,设  $v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_k}$  为一个圈,沿着这个圈前进时,每通过一条边就相当于比赛选手增加或者减少一个人,并且增加或减少的人是互不相同的. 由于沿着圈前进一周后仍回到  $v_{i_1}$ ,即与  $v_{i_1}$  比赛过的选手再增加或者减少不同的选手,最后的结果仍与  $v_{i_1}$  原来赛过的选手相同,产生矛盾.

因此,在  $n$  个选手中至少有一个可去选手.

**例 7** 在一次演讲中,有五名数学家每人均打两次盹,并且每两人均有同时在打盹的时刻. 证明:一定有三个人,他们有同时打盹的时刻. (1986 年美国数学奥林匹克试题)

**证明** 作图  $G$ : 用  $v_1, v_2, \cdots, v_{10}$  这 10 个顶点表示这五位数学家的十次盹,当且仅当第  $i$  次盹与第  $j$  次盹有共同时刻时,在  $v_i$  与  $v_j$  之间连一条边.

由题意,每两个数学家均有同时在打盹的时刻,从而图  $G$  中的边数至少是  $C_5^2 = 10$  条. 而图  $G$  的顶点数为 10,故  $G$  中必有圈.

设这个圈为  $v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_k} v_{i_1}$ ,且  $v_{i_1}$  是圈中最先结束的一个盹,那么当  $v_{i_1}$  刚结束时, $v_{i_2}$  及  $v_{i_k}$  还在进行,这就证明了有三位数学家有同时打盹的时刻.

**例 8** 某居民区内有 1 990 个居民,每天他们之中每个人都把昨天听到的消息告诉给他所有的熟人,而且任何消息都能逐渐地被全区居民所知道. 证明:可以指定 180 个居民,使得同时向他们报导某一消息,那么至多经过 10 天,这一消息便为全区居民所知道.

**证明** 用点表示这些居民,两个顶点相邻就表示相应的居民是熟人,这样就得到了一个有 1 990 个顶点的图  $G$ .

由题意知,图  $G$  是连通的. 不妨设这个图是树  $T_{1990}$  (否则用这个图的生成树来代替它),在树  $T_{1990}$  中,取一条最长的链,设为

$$v_1^{(1)} v_2^{(1)} v_3^{(1)} \cdots v_{11}^{(1)} \cdots v_n^{(1)}.$$

取  $v_{11}^{(1)}$  作为一个居民代表,并将边  $(v_{11}^{(1)}, v_{12}^{(1)})$  去掉. 这时  $T_{1990}$  被分成两棵树,前一棵树中,每个顶点  $v$  到  $v_{11}^{(1)}$  的距离不大于 10 (否则在树  $T_{1990}$  中,  $v$  到  $v_n^{(1)}$  是一条比  $v_1^{(1)}$  到  $v_n^{(1)}$  更长的链). 于是代表  $v_{11}^{(1)}$  所知道的消息,前一棵树的顶点所表示的人在 10 天之内都能知道.

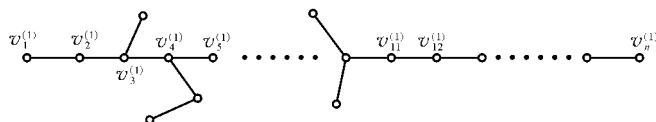


图 4-6

对后一棵树,也有一条最长的链,设为

$$v_1^{(2)} v_2^{(2)} v_3^{(2)} \cdots v_{11}^{(2)} \cdots v_m^{(2)}.$$

这里  $m \leq 1990 - 11 = 1979$ . 同样地,取  $v_{11}^{(2)}$  作为一个居民代表,并去掉边  $(v_{11}^{(2)}, v_{12}^{(2)})$ ,将这棵树再分为两棵树.

这样继续下去,当选好  $v_{11}^{(i)} (i \leq 179)$  时,剩下的树的顶点数  $\leq 11$ ,这时代表总数为  $i + 1 \leq 180$ ,命题成立. 否则陆续得出代表

$$v_{11}^{(1)}, v_{11}^{(2)}, \cdots, v_{11}^{(179)}.$$

每个代表都可以把一个消息在 10 天之内告知他那个居民区中的居民.

最后剩下一棵树,至多有

$$1990 - 11 \times 179 = 21$$

个顶点. 设

$$v_1 v_2 \cdots v_k$$

是它的一条最长链,若  $k \geq 11$ ,则取  $v_{11}$  作为第 180 个居民代表  $v_{11}^{(180)}$ ,若  $k < 11$ ,则取  $v_1$  作为第 180 个居民代表  $v_{11}^{(180)}$ . 这样选出的 180 个居民代表

$$v_{11}^{(1)}, v_{11}^{(2)}, \cdots, v_{11}^{(179)}, v_{11}^{(180)}$$

是满足题目要求的 180 个居民.



- 1 如果连通图  $G$  的顶点数  $\geq 2$ ,则  $G$  中至少存在两个顶点,将这两个顶点及其关联的边去掉后,图仍然连通(没有顶点的“图”也看作是连通图).
- 2 坐标纸上的 11 条纵线和 11 条横线构成一个图,图的顶点是纵、横线的交点(格点),边是格点间的纵、横线段,问至少应当去掉多少条边才能使每点的度  $< 4$ ? 至多可以去掉多少条边还能使图保持连通?

- 3** 若图  $G$  有  $n$  个顶点,  $n-1$  条边, 则  $G$  为树. 这个命题正确吗? 为什么?
- 4** 已知一棵树  $T$  有 3 个 3 度顶点, 一个 2 度顶点, 其余的都是悬挂点.  
(1)  $T$  中有几个悬挂点? (2) 试画出两棵满足上述度数要求的不同构的树.
- 5** 一棵树有  $n_i$  个顶点的度数为  $i, i = 1, 2, \dots, k$ .  $n_2, \dots, n_k$  均为已知数, 问  $n_1$  应为多少? 若  $n_r (3 \leq r \leq k)$  未知,  $n_j (j \neq r)$  均已知, 问  $n_r$  应为多少?
- 6** 设  $d_1, d_2, \dots, d_n$  是  $n$  个正整数,  $n \geq 2$ , 已知  $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$ . 证明存在一棵顶点度数分别为  $d_1, d_2, \dots, d_n$  的树.
- 7** 平面上有  $n (n \geq 3)$  条线段, 其中任意 3 条都有公共端点, 则这  $n$  条线段有一个公共端点.
- 8** 一个  $n$  行  $n$  列的数表(矩阵), 每两行都不完全相同. 证明一定存在某一行, 去掉这一列后, 每两行仍然不完全相同.
- 9** 记图  $G$  的所有顶点集合为  $V$ , 所有边的集合为  $E$ . 求证: 若  $|E| \geq |V| + 4$ , 则  $G$  中必有两个无公共边的圈. (Pösa 定理)
- 10** 某天晚上 21 个人之间通了电话, 有人发现这 21 人共通话 102 次, 且每两人至多通话一次. 他还发现, 存在  $m$  个人, 第 1 个人与第 2 个人通了话, 第 2 个人与第 3 个人通了话,  $\dots$ , 第  $m-1$  个人与第  $m$  个人通了话, 第  $m$  个人又与第 1 个人通了话, 他不肯透露  $m$  的具体值, 只说  $m$  是奇数. 求证 21 个人中必存在 3 人, 他们两两通了话.
- 11** 某国有若干个城市, 某些城市之间有道路相连, 由每个城市连出 3 条道路. 证明: 存在一个由道路形成的圈, 它的长度不能被 3 整除.



欧拉 (Euler) 问题起源于著名的七桥游戏. 位于欧洲的哥尼斯堡 (Königsberg), 景致迷人, 碧波荡漾的普莱格尔 (Pregel) 河横贯其境. 河中有两个岛  $A$  与  $D$ , 河上有七座桥连接这两个岛及河的两岸  $B$ 、 $C$  (如图 5-1 所示).

问: 一个旅游者能否通过每座桥一次且仅一次?

这便是著名的哥尼斯堡七桥问题.

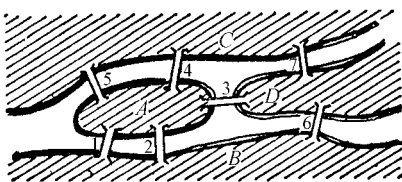


图 5-1

天才的欧拉, 以其独具的慧眼, 看出了这个似乎是趣味几何问题的潜在意义. 1736 年, 他发表了题为《哥尼斯堡的七座桥》的论文, 解决了七桥问题. 通常认为这是图论的第一篇论文. 欧拉把图 5-1 变成一个图  $G$ , 如图 5-2 所示. 岛  $A$ 、 $D$  及河岸  $B$ 、 $C$  变成 4 个顶点, 图  $G$  中的 7 条边表示七座桥. 于是七桥游戏就变成了一笔画问题: 能否一笔画出这个图, 每条边都无遗漏也无重复地画到? 而一笔画出这个图并未一定要求最后回到原来的出发点, 也就是说, 图  $G$  能否一笔画成 (且最后回到原出发点) 的问题就等价于这个图是不是一个链 (圈).

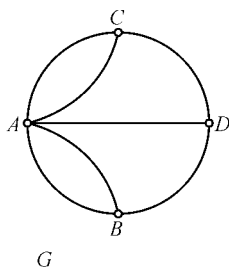


图 5-2

如果图  $G$  是一条从  $v_1$  到  $v_{n+1}$  的链, 那么每一个不同于  $v_1$  及  $v_{n+1}$  的顶点  $v_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) 都是偶顶点. 因为对顶点  $v_i$  来说, 有一条进入  $v_i$  的边就有一条从  $v_i$  引出的边, 而且进、出的边不能重复已走过的边. 所以与  $v_i$  相邻的边总是成双的. 故图  $G$  至多有两个奇顶点, 即  $v_1$  与  $v_{n+1}$ . 如果  $G$  是一个圈, 根据上面的推理,  $v_1$  与  $v_{n+1}$  也是偶顶点. 因此, 如果图  $G$  是一个链 (圈), 那么  $G$  的奇顶点的个数等于 2 (等于 0). 这就是图  $G$

是一条链(圈)的必要条件. 换句话说, 如果图  $G$  的奇顶点个数大于 2, 那么图  $G$  就不是一条链, 从而不能一笔画.

在图 5-2 中,  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  都是奇顶点, 因而这个图不是一条链, 所以不能一笔画出. 也就是说一个旅游者要既无重复也无遗漏地走过图 5-1 中的七座桥是不可能的.

下面给出“一笔画定理”.

**定理一** 有限图  $G$  是一条链或圈(即可以一笔画成)的充要条件是:  $G$  是连通的, 并且奇顶点个数等于 0 或 2. 当且仅当奇顶点的个数等于 0 时, 连通图  $G$  是一个圈.

**证明** 必要性上面已经证明了, 下证充分性.

如果  $G$  连通, 奇顶点的个数为 0, 则  $G$  一定是一个圈.

从  $G$  中任一顶点  $v_0$  出发, 经关联的边  $e_1$  进入  $v_1$ , 因为  $d(v_1)$  是偶数, 由  $v_1$  再经关联的边  $e_2$  可进入  $v_2$ , 如此继续下去, 每条边仅取一次, 经过若干步后必可回到  $v_1$ , 于是得到一个圈  $\mu_1: v_0 v_1 \cdots v_0$ .

如果  $\mu_1$  恰好是图  $G$ , 则命题得证. 否则在  $G$  中去掉  $\mu_1$  后得子图  $G_1$ , 则  $G_1$  中每个顶点也都是偶顶点. 因图  $G$  是连通的, 所以在  $G_1$  中必定存在一个和  $\mu_1$  公共的顶点  $u$ , 在  $G_1$  中存在一个从  $u$  出发到  $u$  的一个圈  $\mu_2$ , 于是  $\mu_1$  和  $\mu_2$  合起来仍是一个圈. 重复上述过程, 因为  $G$  中总共只有有限条边, 总有一个时候, 得到的圈恰好是图  $G$ .

如果  $G$  连通, 奇顶点个数为 2. 不妨设  $u$ 、 $v$  是两个奇顶点, 在  $u$ 、 $v$  之间连一条边  $e$  得图  $G'$ . 于是  $G'$  中奇顶点个数为 0, 故  $G'$  是一个圈. 从而去掉  $e$  后,  $G$  便是一条链.

进一步有如下问题, 若一个连通图  $G$  的奇顶点个数不是 0 或 2, 那么要多少笔才能画成呢? 我们已经知道, 一个图中的奇顶点个数是偶数, 于是有如下结论.

**定理二** 如果连通图  $G$  有  $2k$  个奇顶点, 则图  $G$  可以用  $k$  笔画成, 并且至少要用  $k$  笔才能画成.

**证明** 把这  $2k$  个奇顶点分成  $k$  对:  $v_1, v'_1; v_2, v'_2; \cdots, v_k, v'_k$ , 在每对点  $v_i, v'_i$  之间添加一条边  $e_i$ , 得图  $G'$ . 图  $G'$  没有奇顶点, 所以  $G'$  是一个圈. 再把这  $k$  条新添的边去掉, 这个圈至多分为  $k$  段, 即  $k$  条链. 这说明图  $G$  是可以由  $k$  笔画成的.

设图  $G$  可以分成  $h$  条链, 由定理一, 每条链上至多有两个奇顶点, 所以

$$2h \geq 2k,$$



即  $h \geq k$ . 图  $G$  至少要用  $k$  笔才能画成.

**例 1** 图 5-3 所示是一幢房子的平面图形, 前门进入是一个客厅, 由客厅可通向四个房间. 如果现在你由前门进去, 能否通过所有的门走遍所有的房间和客厅, 然后从后门走出, 而且要求每扇门只能进出一次?

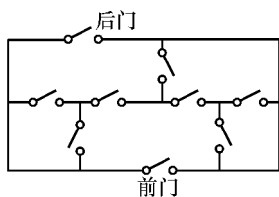


图 5-3

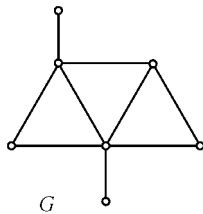


图 5-4

**解** 答案是否定的.  
把 5 个房间以及前门外面和后门外面作为顶点, 两个地方有门相通就在相应的顶点之间连一条边, 得到图  $G$ , 如图 5-4 所示. 在图  $G$  中, 奇顶点的个数是 4, 故  $G$  不是一条链. 所以问题的答案是否定的.

**例 2** 图 5-5 中的图需 5 笔才能画成, 图 5-6 中的图 4 笔可以画成.

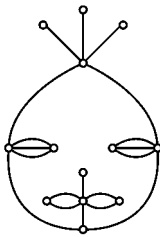


图 5-5

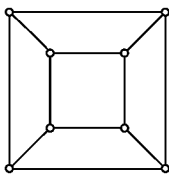


图 5-6

**例 3** 在  $8 \times 8$  黑白方格的棋盘上跳动一只马, 不论跳动方向如何, 要使这只马跳遍棋盘的每一格且每格只经过一次, 问这是否可能? (一只马跳动一次是指从  $2 \times 3$  黑白方格组成的长方形的一个对角跳到另一个对角上)

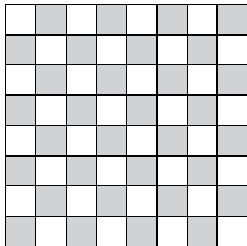


图 5-7

56	41	58	35	50	39	60	33
47	44	55	40	59	34	51	38
42	57	46	49	36	53	32	61
45	48	43	54	31	62	37	52
20	5	30	63	22	11	16	13
29	64	21	4	17	14	25	10
6	19	2	27	8	23	12	15
1	28	7	18	3	26	9	24

图 5-8

解 在图 5-8 中给出这个问题的一个解答.

解决这类问题,常常用以下 4 种方法尝试:

1. 每次将马放到使它能走到的(尚未走过的)方格为最少的位置,即先走“出路”少的方格,后走“出路”多的方格.
2. 将棋盘分为几个部分,在每个部分中找一条哈密顿链(见第六节),然后把它们连接起来.
3. 在棋盘上找几个圈,然后将这些圈连接起来.
4. 将一个较小的棋盘镶上边,产生一个大棋盘上的哈密顿链.

例 4 在图 5-9 中,甲、乙两只蚂蚁分别处在  $A$ 、 $B$  两点. 甲蚂蚁向乙蚂蚁提出:“咱俩比赛,看谁先把这个图中的九条边都爬遍后到达  $E$  点.”乙蚂蚁同意. 假定两只蚂蚁爬的速度相同且同时开始. 问: 究竟哪只蚂蚁最先到达  $E$  点?

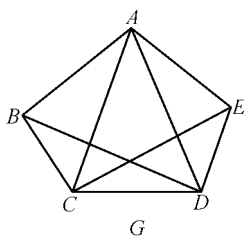


图 5-9

解 把  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$  作为顶点,原来的九条线段作为 9 条边,得图  $G$ . 则  $G$  是连通图,且奇顶点个数为 2,根据定理一,它是一条链.

由于点  $B$  是奇顶点, $E$  也是奇顶点,所以从  $B$  到  $E$  存在着一链,例如

$$BCDACEABDE,$$

对乙蚂蚁来说,它可以从  $B$  点出发,沿着这条链到达  $E$  点.

但顶点  $A$  是偶顶点,从  $A$  出发到达  $E$  不可能不重复地走遍图  $G$  中的所有边,它至少要重复经过某一条边. 所以蚂蚁乙可以选择一条正确路线比蚂蚁甲先爬到  $E$  点.

例 5 如图 5-10 所示,大三角形的三个顶点分别涂以  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三种颜色. 在大三角形内取若干个,将它分为若干个小三角形,每两个小三角形或者有一条公共边,或者有一个公共点,或者完全没有公共点. 将每个小三角形的顶点也分别涂以  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三种颜色之一,证明不管怎样涂色,都有一个小三角形,它的三个顶点的颜色全不相同.

证明 在大三角形外及小三角形内部各取一点作顶点,当两个面有一条公共边  $AB$  时,就在相应的两个顶点之间连一条边,得图  $G'$ ,如图 5-11 所示.

一个具有颜色  $A$ 、 $B$ 、 $C$  顶点的小三角形对应于  $G'$  中的度为 1 的顶点. 其余的小三角形均对应于  $G'$  中度为 0 或 2 的顶点. 由于大三角形外部的一

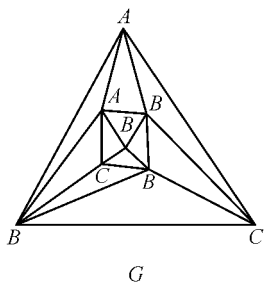


图 5-10

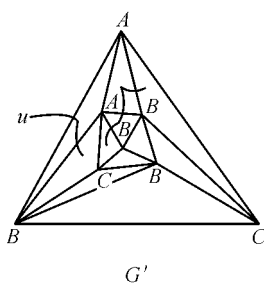


图 5-11

一个顶点  $u$  的度是 1, 且奇顶点的个数为偶数, 所以  $G'$  中除了  $u$  外, 至少还有一个奇顶点  $v$ . 这就是说在图 5-11 中至少有一个小三角形, 它的三个顶点分别为  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三种颜色.

注: 利用本题的结论可以推出著名的 Brouwer 不动点原理.

例 6 凸  $n$  边形及  $n-3$  条在形内不相交的对角线组成的图形称为一个剖分图.

求证: 当且仅当  $3|n$  时, 存在一个剖分图是可以一笔画的圈 (即可以从一个顶点出发, 经过图中各线段恰一次, 最后回到出发点). (第 5 届全国中学生数学冬令营试题)

证明 先用数学归纳法证明充分性.

$n=3$  时, 命题显然成立.

设对任何凸  $3k$  边形, 存在一个剖分图是可以一笔画的圈. 对一个凸  $3(k+1) = 3k+3$  边形  $A_1A_2A_3 \cdots A_{3k+3}$ , 连接  $A_4A_{3k+3}$ . 由于  $A_4A_5 \cdots A_{3k+3}$  是凸  $3k$  边形, 根据归纳假设,  $A_4A_5 \cdots A_{3k+3}$  存在一个剖分图是一个可以一笔画的圈, 作此剖分图, 并连接  $A_2A_4$ ,  $A_2A_{3k+3}$ , 于是便得到一个凸  $3k+3$  边形  $A_1A_2A_3 \cdots A_{3k+3}$  的剖分图. 因  $A_4A_5 \cdots A_{3k+3}$  的剖分图是一个圈, 故从  $A_{3k+3}$  出发, 经过这个剖分图中的每一条边恰一次后可回到  $A_{3k+3}$ , 再经  $A_{3k+3}A_1$ ,  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_3A_4$ ,  $A_4A_2$ ,  $A_2A_{3k+3}$  后, 又回到  $A_{3k+3}$ , 这就证明了凸  $3k+3$  边形  $A_1A_2A_3 \cdots A_{3k+3}$  也存在一个剖分图是一个可以一笔画的圈. 于是充分性得证.

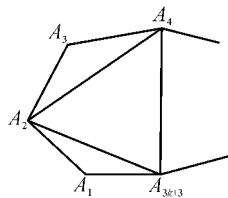


图 5-12

再证必要性. 因为一个凸  $n$  边形存在剖分图是可以一笔画的圈, 则它的每个顶点都是偶顶点. 显然凸四边形和凸五边形不存在每个顶点都是偶顶

点的剖分图. 从而当  $3 \leq n < 6$  时, 如果凸  $n$  边形存在每个顶点都是偶顶点的剖分图, 则  $n = 3$ .

设当  $3 \leq n < 3k$  ( $k > 2$ ) 时, 如果凸  $n$  边形存在每个顶点都是偶顶点的剖分图, 则  $3|n$ . 现考虑  $3k \leq n < 3(k+1)$  的情况. 设凸  $n$  边形  $A_1A_2 \cdots A_n$  有一个每个顶点都是偶顶点的剖分图. 易知任意凸  $n$  ( $n > 3$ ) 边形的任何剖分, 都把此凸  $n$  边形分割成没有公共内部的  $n-2$  个三角形, 而且这些三角形中至少有两个以这个凸  $n$  边形两条相邻边为两边. 因此不妨设  $A_1A_3$  是凸  $n$  边形  $A_1A_2 \cdots A_n$  剖分图中的一条对角线 (如图 5-13 所示). 于是  $A_1A_3$  还是剖分图中另一个  $\triangle A_1A_3A_i$  的一边. 由假设  $A_1A_2 \cdots A_n$  的剖分图使得每个顶点都是偶顶点, 故  $i \neq 4$ , 否则  $A_3$  是奇顶点. 同样  $i \neq n$ , 否则  $A_1$  为奇顶点. 因此  $4 < i < n$ . 由  $A_1A_2 \cdots A_n$  的这个剖分图分别给出凸  $i-2$  边形  $A_3A_4 \cdots A_i$  和凸  $n-i+2$  边形  $A_1A_2 \cdots A_n$  的剖分图, 而且这两个剖分图所对应的凸多边形的每个顶点都是偶顶点. 因此, 根据归纳假设知

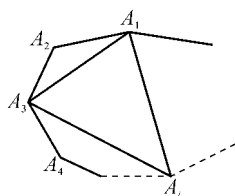


图 5-13

$$3 \mid i-2, 3 \mid n-i+2,$$

所以  $3 \mid n$ . 从而必要性得证.

必要性也可用涂色方法来证. 对凸  $n$  边形的一个剖分图, 可以对其中的三角形涂上两种颜色, 使得有公共边的两个三角形涂有不同的颜色. 这可以这样进行: 有顺序地引出对角线, 每条对角线将多边形的内部划分为两部分, 其中一部分保持原来的颜色, 而另一部分改变颜色, 这个过程直到所需的对角线全部引出, 便得到所需的涂色.

因为凸  $n$  边形有剖分图是一笔画的圈, 故每个顶点都是偶顶点. 这样在每个顶点处的三角形个数是奇数. 于是在上述涂色下多边形所有边属于同色的三角形, 不妨设为黑色的 (如图 5-14). 用  $m$  表示白色三角形的边数, 显然  $3 \mid m$ , 每个白三角形的边同时也是黑三角形的边, 而多边形所有边是黑三角形的边, 故黑三角形的边数为  $m+n$ . 由  $3 \mid m+n$ , 使得  $3 \mid n$ .

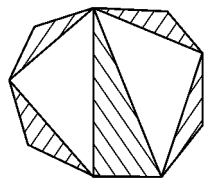


图 5-14

例 7 设  $n > 3$ , 考虑在同一圆周上的  $2n-1$  个互不相同的点所成的集合  $E$ . 将  $E$  中一部分点染成黑色, 其余的点不染色. 如果至少有一对黑点, 以它们为端点的两条弧中有一条的内部 (不包含端点) 恰含  $E$  中  $n$  个点, 则称这种染色方式为“好的”. 如果将  $E$  中  $k$  个点染黑的每一种染色方式都是好

的,求  $k$  的最小值.(第 31 届 IMO 试题)

解 将  $E$  中的点按逆时针方向依次用顶点  $v_1, v_2, \dots, v_{2n-1}$  表示,并在顶点  $v_i$  与  $v_{i+(n+1)}$  之间连一条边,  $i = 1, 2, \dots, 2n-1$ . (我们约定  $v_{j+(2n-1)k} = v_j, k \in \mathbb{Z}$ ). 这样便得一个图  $G$ ,  $G$  中每个顶点的度为 2 (即与两个点相邻), 并且  $v_i$  与  $v_{i+3}$  与同一个点相邻. 由于  $G$  中的每个点都是偶顶点, 所以  $G$  是由一个或几个圈所组成的.

(i) 当  $3 \mid (2n-1)$  时, 图  $G$  由三个圈组成, 每个圈的顶点集为

$$\begin{aligned} & \left\{ v_i \mid i = 3k, k = 1, 2, \dots, \frac{2n-1}{3} \right\}, \\ & \left\{ v_i \mid i = 3k+1, k = 0, 1, \dots, \frac{2n-4}{3} \right\}, \\ & \left\{ v_i \mid i = 3k+2, k = 0, 1, \dots, \frac{2n-4}{3} \right\}. \end{aligned}$$

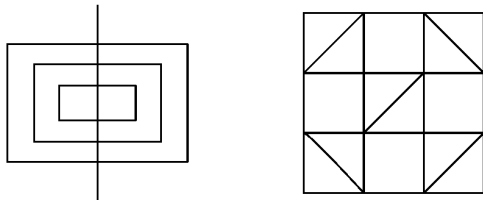
由于每个圈上的顶点数都是  $\frac{2n-1}{3}$ , 故每个圈上至多可以取出  $\frac{1}{2} \left( \frac{2n-1}{3} - 1 \right) = \frac{n-2}{3}$  个点, 两两互不相邻 (注意  $\frac{2n-1}{3}$  是奇数). 总共可以取出  $n-2$  个点互不相邻. 由抽屉原则, 至少要染黑  $n-1$  个点, 才能保证至少有一对黑点相邻.

(ii) 当  $3 \nmid (2n-1)$  时,  $v_1, v_2, \dots, v_{2n-1}$  中的每一个点都可以表为  $v_{3k}$  的形式, 因此图  $G$  是一个长为  $(2n-1)$  的圈. 在这圈上可以取出  $n-1$  个互不相邻的点, 而且至多可以取出  $n-1$  个互不相邻的点. 因而至少要染黑  $n$  个点, 才能保证至少有一对黑点相邻.

综上所述, 当  $3 \nmid (2n-1)$  时,  $k$  的最小值是  $n$ , 当  $3 \mid (2n-1)$  时,  $k$  的最小值为  $n-1$ .



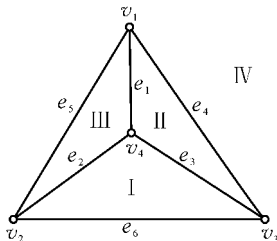
- 1  $n$  为何值时, 完全图  $K_n$  是圈?  $n$  为何值时,  $K_n$  是一条链? 当  $m, n$  为何值时, 完全偶图  $K_{m, n}$  是圈?
- 2 已知图  $G$  至少要  $k$  笔才能画成, 删去一边后得到图  $G'$ , 问  $G'$  至少需要几笔才能画成?
- 3 判断下图中的两个图形是否能一笔画.



(第 3 题图)

- 4 在圆上任取  $n(n > 2)$  个点, 把每个点用线段与其余各点相连接, 能否一笔画出所有这些线段, 使它们首尾相接, 最后回到出发点?
- 5 如果在一次会议上, 每个人都至少与  $\delta \geq 2$  个人交换过意见, 证明一定可以找到  $k$  个人  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , 使得  $v_1$  与  $v_2$  交换过意见,  $v_2$  和  $v_3$  交换过意见,  $\dots$ ,  $v_{k-1}$  与  $v_k$  交换过意见,  $v_k$  与  $v_1$  交换过意见. 其中  $k$  为大于  $\delta$  的某个整数.

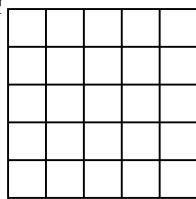
- 6 如图所示, 图  $G$  有 4 个顶点, 6 条边, 它们都在同一平面上, 这个平面被 6 条边分成 4 个区域 I, II, III, IV, 称这些区域为面. 设有两个点  $Q_1, Q_2$  在这些面中, 证明平面上不存在一条连接  $Q_1$  与  $Q_2$  的线  $\mu$  同时满足:
- (1)  $\mu$  截每条边  $e_i$  恰好一次 ( $i = 1, 2, \dots, 6$ );
- (2)  $\mu$  不过任一顶点  $v_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ).



(第 6 题图)

- 7  $n$  个点  $v_1, v_2, \dots, v_n$  顺次排在一条直线上, 每点涂上红色或蓝色. 如果相邻点间的线段  $v_i v_{i+1}$  的两端颜色不同, 把它叫做标准线段. 已知  $v_1$  与  $v_n$  的颜色不同, 证明标准线段的个数一定是奇数.
- 8 在  $\triangle ABC$  的边上及内部取若干个点, 将  $\triangle ABC$  分成一些小三角形, 每两个小三角形或者有一个公共顶点, 或者有一条公共边, 或者完全没有公共点. 然后将  $\triangle ABC$  的内部所取的各点任意标上字母  $A, B, C$ . 将大三角形的  $AB$  边上的点标上  $A$  或  $B$ ,  $BC$  边上的点标上  $B$  或  $C$ ,  $CA$  边上的点标上  $C$  或  $A$ . 证明一定有一个小三角形, 它的三个顶点为  $A, B, C$ .

- 9 在下面由 25 个小正方形组成的图形中, 试设计一条从  $A$  点出发的路径, 走过所有小正方形的边, 最后回到  $A$  点, 并且使得路径最短.



(第 9 题图)



1856年,著名英国数学家哈密顿(Willian Rowan Hamilton)提出一个名为“环游世界”的游戏. 他用一个正十二面体的二十个顶点代表二十个大城市,要求沿着棱,从一个城市出发,经过每个城市恰好一次,然后回到出发点.

这个游戏曾经风靡一时,在这个游戏中提到了这样一种链(圈):它经过图上各顶点一次并且仅仅一次. 这种链(圈)称为哈密顿链(圈),一个图若包含哈密顿圈,则称这个图是哈密顿图.

从表面上看,哈密顿问题与欧拉问题很相似,但实际上有着本质的区别,它是图论中尚未解决的困难问题之一. 迄今为止还没有找到判断它的充分必要条件,所以对不同类型的问题,有不同的判断方法,下面通过例题作些介绍.

例1 图6-1有无哈密顿链或哈密顿圈?

解 按照图6-1中所给的编号,可以看出这样的圈是存在的.

这里是采用“直接求解”的方法来解决环游世界的问题,即从图的某一个顶点出发,采用一步步试探的方法,来找出图的哈密顿链(圈). 如果找到了一条解就出来了,如果找不到,就可能没有解. 这

种方法一般只用在比较简单的图上,而且多用在肯定有哈密顿链(圈)存在的情况.

例2 在一次国际数学家大会上,7位来自不同国家的数学家会话能力如下:

A: 英语.

B: 英语和汉语.

C: 英语、意大利语和西班牙语.

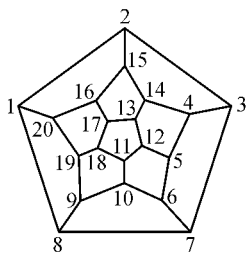


图 6-1

- D: 汉语和日语.
- E: 德语和意大利语.
- F: 法语、日语和西班牙语.
- G: 法语和德语.

问怎样安排这 7 名数学家围着一个圆桌坐下,使得每个人都能和他身边的两个人交谈?

解 设 7 个顶点 A、B、C、D、E、F、G 对应这 7 名数学家,其中会用同一种语言的人对应的顶点之间连一条边,这样就得到了一个图 G,如图 6-2 所示. 于是原来的排座问题就变成了在图 6-2 中找一条哈密顿圈的问题了. 按圈上顶点的顺序来排座位,那么每个人和他相邻的两个人都能交谈.

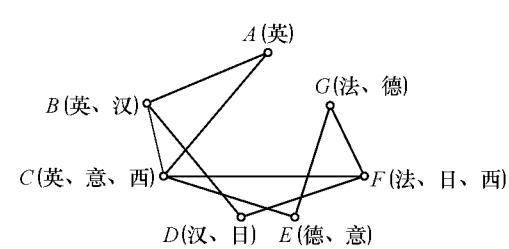


图 6-2

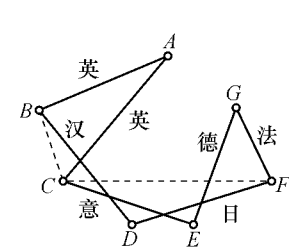


图 6-3

在图 6-2 中用粗线画出的一个圈,就是我们所求的解. 也就是说,如果按照 A、B、D、F、G、E、C 的顺序排座位,每个人就都可以和他的两个邻座交谈,所采用的语言种类标明在图 6-3 中的对应边上.

例 3 判断图 6-4 所示的图 G 有无哈密顿链或哈密顿圈?

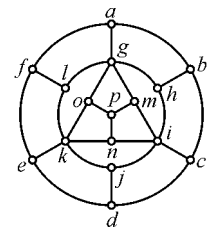


图 6-4

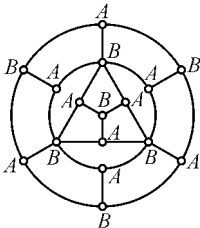


图 6-5

解 我们将图中某个顶点标上 A,例如把点 a 标上 A,所有与 a 相邻的点均标上 B,连续不断地用 A 标记所有与已标上 B 相邻的点,用 B 标记所有与已标上 A 的相邻的点. 直到图中所有点标记完毕. 如图 6-5 所示. 如果这个图 G 中有一条哈密顿链,那么它必定交替通过点 A 和点 B,因而点 A 的数



目与点  $B$  的数目相等或相差 1. 但是图 6-5 中点  $A$  有 9 个, 点  $B$  有 7 个, 两者相差为 2, 因此不可能有一条哈密顿链.

一般地, 对于一个偶图  $G = (V_1, V_2, E)$ , 有一个简单的方法可以断定它没有哈密顿链或哈密顿圈.

定理一 在偶图  $G = (V_1, V_2, E)$  中, 如果  $|V_1| \neq |V_2|$ , 那么  $G$  一定无哈密顿圈. 如果  $|V_1|$  与  $|V_2|$  的差大于 1, 那么  $G$  一定无哈密顿链.

可以采用同例 3 完全相同的方法证明.

例 4 图 6-6 是半个国际象棋盘, 一匹马在右下角, 试问: 马能否连续地把棋盘上所有的格都跳到一次并且仅仅一次? 如果去掉了棋盘对角上的两个黑色方格, 又将怎样?

解 我们考虑这样的图: 将棋盘方格对应于图的顶点, 如果马从棋盘上的一个方格跳一次后能到另一个方格, 就在这两个方格所对应的顶点之间连上一条边. 于是问题就转化为判断棋盘所对应的这个图是否有一条哈密顿链.

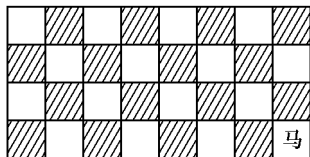


图 6-6

在图中, 顶点是否相邻是由马跳的方式决定的, 也就是说每个顶点只能跟和它组成一个“日”字的对角线上的顶点相邻. 棋盘上组成“日”字对角线的方格所着的颜色正好是相反的, 让图上每个顶点涂上它所对应的方格颜色. 这样, 图上每条边所相邻的两个顶点的颜色都是一黑一白, 并且黑、白顶点的个数是相等的, 这就可能有哈密顿链. 用试探的方法可以找到一条链. 如图 6-7 所示的就是一个答案.

15	18	7	22	11	28	5	24
8	21	16	27	6	23	2	29
17	14	19	10	31	12	25	4
20	9	32	13	26	3	30	1

图 6-7

现在来看问题的第二部分. 仍采用涂色法将问题转化为求对应的图是否存在哈密顿链的问题. 由于黑顶点个数是 14, 白顶点个数是 16, 根据定理一, 这个图中没有哈密顿链. 即对于去

掉两个黑色方格的半个棋盘来说, 马是无法连续地把每个方格都跳到一次并且仅仅一次.

对于一个连通图, 是否存在哈密顿链(圈)的问题, 虽然直到最近还不知道有什么充要条件, 然而许多第一流的数学家经过一个多世纪的努力, 已经知道一些必要条件和一些充分条件, 下面给出一个简单图具有哈密顿链的充分条件.

定理二 设  $G$  是  $n(n \geq 3)$  阶简单图, 且对每一对顶点  $v, v'$  有

$$d(v) + d(v') \geq n - 1,$$

则图  $G$  有哈密顿链.

证明 先证明  $G$  是连通图. 若  $G$  有两个或两个以上的连通部分, 设其中之一有  $n_1$  个顶点, 另一部分有  $n_2$  个顶点. 分别从中各取一顶点  $v_1$ 、 $v_2$ , 则  $d(v_1) \leq n_1 - 1$ ,  $d(v_2) \leq n_2 - 1$ . 故

$$d(v_1) + d(v_2) \leq n_1 + n_2 - 2 < n - 1,$$

这与题设矛盾, 所以  $G$  是连通图.

现证明存在哈密顿链. 证明的方法实际上给出一种哈密顿链的构造步骤.

设在  $G$  中有一条从  $v_1$  到  $v_p$  的链:  $v_1 v_2 \cdots v_p$ . 如果有  $v_1$  或  $v_p$  与不在这条链上的一个顶点相邻, 我们可扩展这条链, 使它包含这个顶点. 否则,  $v_1$  和  $v_p$  都只与这条链上的顶点相邻, 这时存在一个圈包含顶点  $v_1, v_2, \cdots, v_p$ . 假设与  $v_1$  点相邻的顶点集是  $\{v_{j_1}, v_{j_2}, \cdots, v_{j_k}\}$ , 这里  $v_{j_1}, v_{j_2}, \cdots, v_{j_k}$  都是链  $v_1 v_2 \cdots v_p$  中的点, 且  $p < n$ .

如果  $v_1$  与  $v_p$  相邻, 则显然存在一个圈  $v_1 v_2 \cdots v_p v_1$ .

如果  $v_1$  和  $v_p$  不相邻, 则必然存在一点  $v_l$  ( $2 \leq l \leq p$ ) 和  $v_1$  相邻, 而  $v_{l-1}$  和  $v_p$  相邻, 如图 6-8 所示. 因为否则  $v_p$  最多只和  $p-k-1$  个顶点相邻, 即排除  $v_{j_1-1}, v_{j_2-1}, \cdots, v_{j_k-1}$  和  $v_p$  自身, 这样

$$d(v_1) + d(v_p) \leq k + (p - k - 1) = p - 1 < n - 1,$$

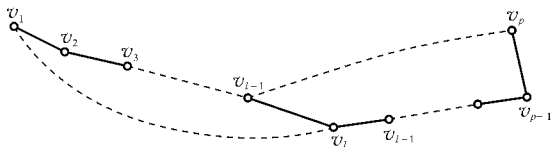


图 6-8

这与假设矛盾. 因而存在  $v_1, v_2, \cdots, v_p$  的圈  $v_1 v_l v_{l+1} \cdots v_p v_{l-1} v_{l-2} \cdots v_2 v_1$ .

若  $p = n$ , 实际上已存在一个哈密顿圈. 若  $p < n$ , 因为  $G$  是连通的, 所以在  $G$  中必有一个不属于这个圈的顶点  $v'$  与  $v_1 v_2 \cdots v_p$  中的某一顶点  $v_k$  相邻, 如图 6-9 所示. 于是就得到一个包含  $v_1, v_2, \cdots, v_p, v'$  的圈:  $v' v_k v_{k+1} \cdots v_{l-1} v_p v_{p-1} \cdots v_l v_1 v_2 \cdots v_k v'$ . 不断重复上面的步骤直到存在一条具有  $n-1$  条边的链为止.

易知定理二的条件对于图中哈密顿链的存在性只是充分的, 但并不是

必要条件. 设  $G$  是  $n$  边形, 如图 6-10, 其中  $n=6$ , 虽然任何两个顶点的度之和是  $4 < 6-1$ , 但在  $G$  中有一条哈密顿链.

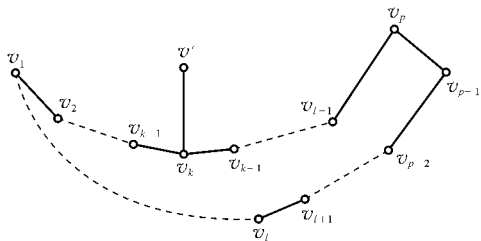


图 6-9

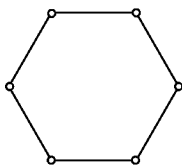


图 6-10

1960 年, Ore 在美国数学月刊上给出了哈密顿图的一个充分条件.  
定理三 (Ore, 1960)  $G$  是  $n (n \geq 3)$  阶简单图, 且对每一对不相邻的顶点  $v, v'$  有

$$d(v) + d(v') \geq n,$$

那么图  $G$  有哈密顿圈.

证明 当  $n=3$  时, 由所给条件知  $G$  一定是完全图  $K_3$ , 命题成立.  
设  $n \geq 4$ , 用反证法证明. 设  $G$  是有  $n$  个顶点且满足度数条件却没有哈密顿圈的图.

不妨设  $G$  是具有这种性质的边数最大的图, 也就是说  $G$  添上一条边就具有哈密顿圈 (否则  $G$  可以添加一些边, 直到不能再添为止, 加边后顶点的度数条件仍满足), 由此得出在图  $G$  中有一条包含图中每一个顶点的哈密顿链, 记为  $v_1 v_2 \cdots v_n$ . 则  $v_1$  与  $v_n$  不相邻, 于是

$$d(v_1) + d(v_n) \geq n.$$

那么在  $v_2, v_3, \cdots, v_{n-1}$  中必有一点  $v_i$ , 使  $v_1$  与  $v_i$  相邻,  $v_n$  与  $v_{i-1}$  相邻, 如图 6-11 所示. 否则, 有  $d(v_1) = k$  个点  $v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k} (2 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n-1)$  与  $v_1$  相邻, 而  $v_n$  与  $v_{i_1-1}, v_{i_2-1}, \cdots, v_{i_k-1}$  都不相邻, 从而

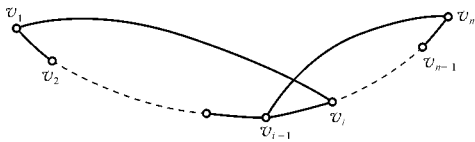


图 6-11

$$d(v_n) \leq n-1-k,$$

则  $d(v_1) + d(v_n) \leq k + n - 1 - k = n - 1 < n$ ,

这与条件矛盾. 故  $G$  存在一条哈密顿圈  $v_1 v_2 \cdots v_{i-1} v_n v_{n-1} \cdots v_i v_1$ . 这又与假设矛盾. 从而命题得证.

对于完全图  $K_n (n \geq 3)$ , 显然有哈密顿圈.

**例 5**  $n$  个人参加一次会议, 在会议期间, 每天都要在一张圆桌上共进晚餐. 如果要求每次晚餐就座时, 每个人相邻就座者都不相同, 问这样的晚餐最多能进行多少次?

**证明** 用  $n$  个点表示  $n$  个人, 作完全图  $K_n$ , 则  $K_n$  中的一个哈密顿圈就是一次晚餐的就座方法. 可见, 晚餐最多能进行的次数就是  $K_n$  中无公共边的哈密顿圈的个数.

$K_n$  中有  $\frac{1}{2}n(n-1)$  条边, 每个哈密顿圈有  $n$  条边, 因此, 边不相重的哈密顿圈最多有  $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$  个. 当  $n = 2k + 1$  时, 将顶点  $0, 1, 2, \dots, 2k$  排列如图. 先取一个哈密顿圈  $(0, 1, 2, 2k, 3, 2k-1, 4, \dots, k+3, k, k+2, k+1, 0)$ , 然后绕  $0$  点依次顺时针旋转  $\frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \dots,$

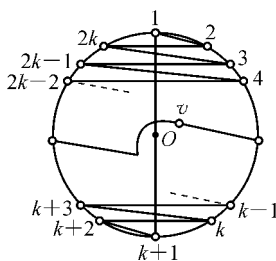


图 6-12

$(k-1)\frac{\pi}{k}$ , 共产生  $k = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$  个无公共边的哈密顿圈, 如果  $n = 2k + 2$ , 那么每次在中间添加一个顶点  $v$ , 同样有  $k$  个哈密顿圈.

由定理三可以推得下面的定理四. 这是 1952 年数学家 Dirac 给出的.

**定理四**  $G$  是  $n (n \geq 3)$  阶简单图, 如果每个顶点  $v$  的度  $d(v) \geq \frac{n}{2}$ , 则图  $G$  一定存在哈密顿圈.

**例 6** 在 7 天内安排 7 门课的考试, 要使得同一位教师所教的两门课考试不排在接连的两天里. 如果每一位教师教的考试课最多 4 门, 证明这种安排是可能的.

**证明** 设  $G$  是有 7 个顶点的图, 每个顶点对应一门考试课, 如果两个顶点对应的考试课是由不同教师担任的, 则在这两个顶点之间连一条边, 因为这个教师所教的课不超过 4 门, 故每个顶点的度数至少是 3. 任意两个顶点的度数之和至少是 6, 根据定理二,  $G$  有一条哈密顿链. 由于这条链上任何一条边相邻的两顶点对应的两门课不是同一位教师教的, 所以, 可以按照这条

哈密顿链上的顶点顺序安排这 7 门课的考试.

**例 7** 某工厂生产由 6 种不同颜色的纱织成的双色布. 已知花布品种中, 每种颜色至少分别和其他 3 种不同的颜色搭配. 试证可以挑出 3 种双色布, 它们恰好含有 6 种不同的颜色. (匈牙利数学竞赛试题)

**证明** 用 6 个顶点表示 6 种颜色的纱, 若两种颜色的纱能搭配织成一种双色布, 就在相应的顶点之间连一条边, 这样就得到一个图  $G$ . 已知条件是, 每种颜色的纱至少和其他三种颜色的纱搭配, 也即对任意顶点  $v_i$ ,  $d(v_i) \geq 3$ . 欲证的是, 图  $G$  中存在三条边, 其中任意两条边都没有公共端点.

因为对图  $G$  中任一顶点  $v_i$ ,  $d(v_i) \geq 3$ , 根据定理四,  $G$  有哈密顿圈, 记为  $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_1$ , 则边  $(v_1, v_2)$ ,  $(v_3, v_4)$ ,  $(v_5, v_6)$  就是三条两两没有公共端点的边.

我们往往用一个图满足充分条件来肯定这个图是哈密顿图, 而用一个图不满足必要条件来否定这个图是哈密顿图. 下面给出一个图是哈密顿图的必要条件.

**定理五** 如果图  $G$  有哈密顿图, 从  $G$  中去掉若干个顶点  $v_1, v_2, \dots, v_k$  及与它们关联的边得到图  $G'$ , 那么  $G'$  的连通分支不超过  $k$  个.

**证明** 设  $c$  是图  $G$  中的哈密顿圈, 将  $k$  个顶点以及它们关联的边去掉后,  $c$  最多分为  $k$  段, 因此  $G'$  的连通分支至多为  $k$  个.

**例 8** 证明图 6-13 没有哈密顿图.

**证明** 从图 6-13 中将顶点  $v_1, v_2$  以及它们关联的边去掉, 得到的  $G'$  有三个连通分支, 不满足定理五的必要条件, 所以图 6-13 没有哈密顿图.

最后再举一个例子作为本节的结束.

**例 9** 若  $A_0 A_1 A_2 \dots A_{2n-1}$  为一个正  $2n$  边形, 连接它的所有对角线, 这样得到一个图  $G$ . 证明: 图  $G$  的每个哈密顿圈都必定包含两条边, 它们在图中是平行线.

**证明** 设  $A_i A_j$  与  $A_k A_l$  平行, 由于  $A_i$  与  $A_l$  之间和  $A_j$  与  $A_k$  之间顶点数相同, 所以  $i - l = k - j$ , 于是得到  $A_i A_j$  与  $A_k A_l$  平行的充要条件是

$$i + j \equiv k + l \pmod{2n}.$$

设  $A_{i_0} A_{i_1} \dots A_{i_{2n-1}}$  是一个哈密顿圈 ( $i_0, i_1, \dots, i_{2n-1}$  是  $0, 1, \dots, 2n-1$

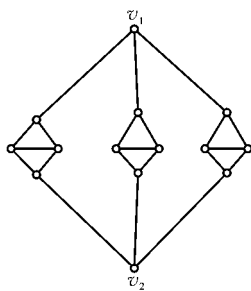


图 6-13

的一个排列),而其中任意的两条边在图中不是平行线. 因此  $i_0 + i_1, i_1 + i_2, i_2 + i_3, \dots, i_{2n-1} + i_0$  这  $2n$  个数中的任意两个关于模  $2n$  都不同余,即上述这  $2n$  个数是模  $2n$  的一组完全剩余系. 于是

$$\begin{aligned} & (i_0 + i_1) + (i_1 + i_2) + \dots + (i_{2n-1} + i_0) \\ & \equiv 0 + 1 + 2 + \dots + 2n - 1 = 2n^2 - n \\ & \equiv n \pmod{2n}. \end{aligned}$$

另一方面,有

$$\begin{aligned} & (i_0 + i_1) + (i_1 + i_2) + \dots + (i_{2n-1} + i_0) \\ & = 2(i_0 + i_1 + i_2 + \dots + i_{2n-1}) \\ & = 2(0 + 1 + 2 + \dots + 2n - 1) \\ & = 2n(2n - 1) \\ & \equiv 0 \pmod{2n}. \end{aligned}$$

上面得出了两个矛盾的结果,从而命题得证.

## 习 题 6

- 1  $n$  为何值时,完全图  $K_n$  是哈密顿图? 对什么样的  $m, n$ , 完全偶图  $K_{m, n}$  是哈密顿图?
- 2 对于正四面体、正六面体、正八面体及正二十面体所表示的图是哈密顿图.
- 3 正二十面体用纸制成,能否把它剪成两部分,使每个面也剪成两部分,而截痕不通过二十面体的顶点?
- 4 一只老鼠吃  $3 \times 3 \times 3$  立方体的乳酪,其方法是借助于打洞通过所有的  $27$  个  $1 \times 1 \times 1$  子立方体. 如果它在一个角上开始,然后依次走向未吃的立方体,问它吃完时能否恰在立方体的中心?
- 5 今要将  $6$  人分成  $3$  组(每组  $2$  个人)去完成  $3$  项任务. 已知每个人至少与其余  $5$  个人中的  $3$  个人能相互合作. (1) 能否使得每组的  $2$  个人都能相互合作? (2) 你能给出几种不同的分组方案?
- 6 某国王有  $2n$  个大臣,其中某些大臣互相有怨仇,但每个大臣的仇人(限

于大臣内部)不超过  $n-1$  人(互为仇人),问能否让他们围圆桌而坐,使仇人不相邻?

**7** 已知在 9 个小孩中,每个小孩至少认识其他 4 个小孩,能否让这 9 个小孩排成一行,使得每个小孩和与他相邻的小孩都认识?

**8** 一位厨师用 8 种原料做菜,每种菜都用 2 种原料搭配. 已知每种原料都至少用在 4 种菜里,问: 能否从这位厨师做的菜中选出 4 种,恰好包括了 8 种不同的原料?

**9** 一个有限集合的全部子集,可以如此排列,使任何相邻的两个子集恰相差一个元素.

**10** 平面上  $n$  个点和若干条边所成的图不是哈密顿图,但若任意去掉一点及与之相连的边,则剩下的图为哈密顿图. 求  $n$  的最小值.

**11** 围着圆桌至少坐着五个人,那么一定可以调整他们的座位,使得每人两侧出现新的邻座.



如果一个图能画在平面上使得它的边仅在端点相交,则称这个图为平面图.

有些图形从表面上看有几条边是相交的,但是不能就此肯定它不是平面图,例如图 7-1(1),表面看有几条边相交,但是把它画成与它同构的图 7-1(2),则可看出它是一个平面图.

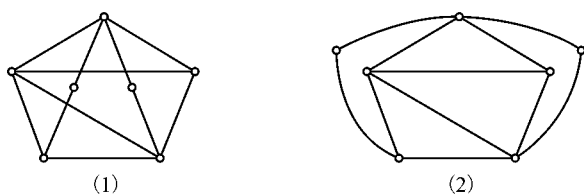


图 7-1

我们说到一个平面图,总假定它已经按这样的要求画好了. 一个平面图的顶点和边把平面分成一个一个互相隔开的区域,每一个这样的区域称为平面图的一个面. 这些面中有一个在所有边的外面,称为外部面,其余的就称为内部面. 例如图 7-2 中,  $F_1$ 、 $F_2$ 、 $F_3$ 、 $F_4$  是内部面,  $F_5$  是外部面.

在中学课本中已经见到过关于凸多面体的欧拉公式,设凸多面体有  $v$  个顶点、 $e$  条棱和  $f$  块面,则  $v - e + f = 2$ . 我们可以把这个公式推广到平面图上来.

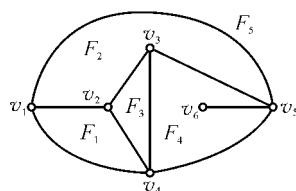


图 7-2

定理一(欧拉定理) 如果一个连通的平面图  $G$  有  $v$  个顶点、 $e$  条边、 $f$  个面,那么

$$v - e + f = 2.$$

证明 对  $G$  的边数用数学归纳法.



若  $G$  只有一个顶点, 则  $v = 1, e = 0, f = 1$ , 故  $v - e + f = 2$  成立.

若  $G$  为一条边, 则  $v = 2, e = 1, f = 1$ , 所以  $v - e + f = 2$  成立.

设  $G$  为  $k$  条边时欧拉公式成立, 即  $v_k - e_k + f_k = 2$ . 现考察  $G$  为  $k+1$  条边时的情形.

由于在  $k$  条边的连通图上增加一条边, 使它仍为连通图, 只有两种情形:

(i) 增加一个新顶点  $v'$ ,  $v'$  与图中的一点  $v$  相邻, 如图 7-3(1) 所示, 此时  $v_k$  与  $e_k$  都增加 1, 而面数  $f_k$  不变, 故

$$(v_k + 1) - (e_k + 1) + f_k = v_k - e_k + f_k = 2.$$

(ii) 用一条边连接图中的两个顶点  $v$  和  $v'$ , 如图 7-3(2) 所示, 这时  $e_k$  和  $f_k$  都增加 1 而顶点数  $v_k$  没有变, 故

$$v_k - (e_k + 1) + (f_k + 1) = v_k - e_k + f_k = 2.$$

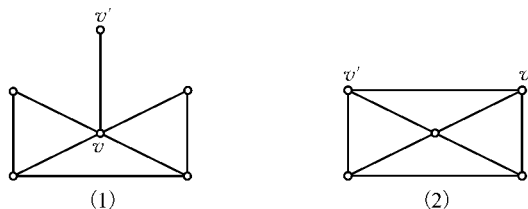


图 7-3

按归纳法原理, 定理对任何正整数  $e$  成立.

欧拉定理的一个重要应用是由此可以决定一个平面简单图中最多的边数. 因为一个面上至少有 3 条边,  $f$  个面的边界上至少有  $3f$  条边. 另外, 一条边最多是 2 个面的边界, 所以

$$2e \geq 3f, f \leq \frac{2}{3}e.$$

代入欧拉公式:

$$2 = v - e + f \leq v - e + \frac{2}{3}e,$$

即

$$e \leq 3v - 6.$$

这就证明了下面的定理.

定理二 一个连通的平面简单图  $G$  有  $v (v \geq 3)$  个顶点及  $e$  条边, 则  $e \leq 3v - 6$ .

其实定理二对不连通的平面简单图也成立. 应用定理二可以判定某些图是非平面图.

例 1 证明完全图  $K_5$  不是平面图.

证明 因为  $v = 5, e = 10$  不满足  $e \leq 3v - 6$ , 所以  $K_5$  不是平面图.

例 2 证明  $K_{3,3}$  图不是平面图.

证明 如果  $K_{3,3}$  是平面图, 因为在  $K_{3,3}$  中任取 3 个顶点, 其中必有两个顶点不相邻, 故每一个面都至少有 4 条边围成, 由

$$4f \leq 2e, f \leq \frac{e}{2}.$$

代入欧拉公式

$$2 = v - e + f \leq v - e + \frac{e}{2},$$

即

$$e \leq 2v - 4.$$

在  $K_{3,3}$  中,  $v = 6, e = 9$ , 且  $9 > 2 \times 6 - 4$ , 矛盾. 故  $K_{3,3}$  不是平面图.

欧拉公式和导出的不等式虽然可以用来否定一些图是平面图, 但是它对于肯定一个图是平面图却无能为力. 1930 年波兰数学家库拉托夫斯基证明了一个简洁而漂亮的结果: 所有非平面图都包含着  $K_5$  或  $K_{3,3}$  作为子图. 为了明确地叙述这个结果, 先给出两个图“同胚”的概念.

如果两个图中的一个图是由另一个图的边上插入一些新的顶点而得到的, 那么, 这两个图称为同胚的.

图 7-4 中的两个图是同胚的.

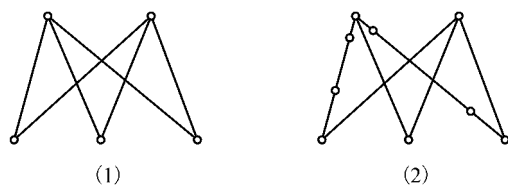


图 7-4

根据两个图同胚的概念, 可以知道一个图的边上插入或删除一些度数为 2 的顶点后, 不影响图的平面性. 下面给出库拉托夫斯基定理:

定理三 一个图是平面图当且仅当它不包含同胚于  $K_5$  或  $K_{3,3}$  的子图.

这个定理虽然很基本, 但证明很长, 故从略.

例 3 图 7-5、图 7-6 是平面图吗?

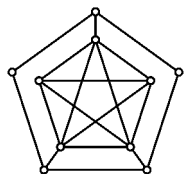


图 7-5

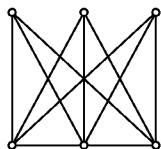


图 7-6

解 图 7-5 包含了一个  $K_5$  图, 图 7-6 包含了一个  $K_{3,3}$  图, 根据库拉托夫斯基定理, 这两个图都是非平面图.

例 4 正多面体有几种? 它们的棱数、顶数和面数各是多少? 每个顶点连接几条棱?

证明 因为正多面体每个顶点至少有三个面拼在一起, 所以当正多边形的每个内角大于等于  $120^\circ$  时, 显然形不成正多面体的顶点. 所以只能考虑以正五边形、正方形和正三角形为基础搭成什么样的正多面体了.

(1) 以正五边形为面的多面体.

因为正五边形内角为  $\frac{3}{5}\pi$ , 而  $\frac{3}{5}\pi \times 4 > 2\pi$ , 所以以正五边形为面的正多面体每个顶点皆 3 次, 于是  $3v = 2e$ ,  $\frac{5f}{2} = e$ , 代入欧拉公式得

$$\frac{2}{3}e - e + \frac{2}{5}e = 2,$$

解得  $e = 30, v = 20, f = 12$ .

即以正五边形为面的正多面体只有一种, 它是 20 个顶点、30 条棱且每个顶点处有 3 条棱的正十二面体.

(2) 对以正方形、正三角形为面的正多面体, 请读者自行证明, 共有如下图所示 4 种. 从而正多面体只有 5 种.

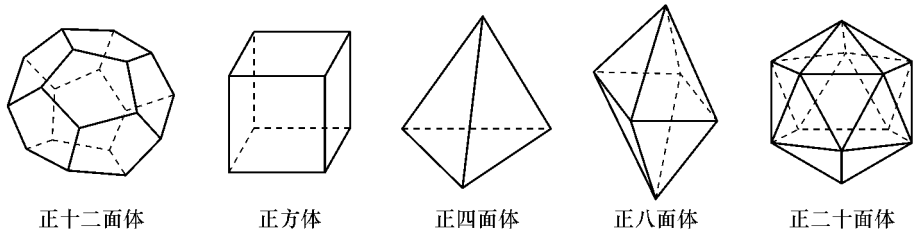


图 7-7

例5 如果一个正方形被划分为  $n$  个凸多边形,当  $n$  为定值时,求这些凸多边形边数的最大值.

证明 由欧拉公式知一个凸多边形被划分为  $n$  个多边形,则  $v - e + n = 1$  (因为  $f = n + 1$ ).

由于一个正方形被划分为  $n$  个凸多边形,因此这些多边形的每个顶点,如果它不是正方形的顶点,必是至少 3 个凸多边形的顶点. 用  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  分别表示正方形的顶点,用  $v$  表示除  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  外的任一顶点,则

$$d(v) \leqslant 3(d(v) - 2).$$

由上式对除  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  外的所有点求和,得

$$\begin{aligned} 2e - (d(A) + d(B) + d(C) + d(D)) \\ \leqslant 3(2e - (d(A) + d(B) + d(C) + d(D)) - 6(v - 4)), \end{aligned}$$

于是

$$4e \geqslant 2(d(A) + d(B) + d(C) + d(D)) + 6(v - 4),$$

由于  $d(A) \geqslant 2$ ,  $d(B) \geqslant 2$ ,  $d(C) \geqslant 2$ ,  $d(D) \geqslant 2$ , 所以

$$2e \geqslant 8 + 3(v - 4).$$

由

$$v - e + n = 1,$$

得

$$3(e + 1) = 3v + 3n \leqslant 2e + 4 + 3n,$$

即

$$e \leqslant 3n + 1.$$

过正方形的一边相继作  $n - 1$  条邻边的平行线,将这个正方形分为  $n$  个矩形,总边数为  $4 + 3(n - 1) = 3n + 1$ .

综上,所求边的最大值为  $3n + 1$ .

1968 年,两位苏联数学家柯耶瑞夫(Kozyrev)和戈林伯格(Grinberg)给出了平面图具有哈密顿圈的一个必要条件.

定理四 如果一个平面图有哈密顿圈  $c$ ,用  $f'_i$  表示在  $c$  的内部的  $i$  边形的个数,用  $f''_i$  表示在  $c$  的外部的  $i$  边形的个数,则

$$(1) \quad 1 \cdot f'_3 + 2 \cdot f'_4 + 3 \cdot f'_5 + \cdots = n - 2;$$

$$(2) \quad 1 \cdot f''_3 + 2 \cdot f''_4 + 3 \cdot f''_5 + \cdots = n - 2;$$

$$(3) \quad 1 \cdot (f'_3 - f''_3) + 2 \cdot (f'_4 - f''_4) + 3 \cdot (f'_5 - f''_5) + \cdots = 0.$$

其中  $n$  为  $G$  的顶点数,显然也是  $c$  的长.

证明 设  $c$  的内部有  $d$  条边. 由于  $G$  是平面图,它的边都不相交,所以一条边把它经过的面分成两部分. 设想这些边是一条一条地放进图里去的,每放进一条边就使  $c$  内部的面增加一个,因此  $d$  条边把  $c$  的内部分成了  $d + 1$  个面. 于是  $c$  的内部的面的总数为

$$f'_2 + f'_3 + f'_4 + f'_5 + \cdots = d + 1. \tag{①}$$

在  $c$  内每个  $i$  边形中记上数字  $i$ ,各面所记数字之和就是围成这些面的边的总数, $c$  内部的每一条边都被数了两次,而  $c$  上的  $n$  条边,每条边都只数了一次,于是

$$2f'_2 + 3f'_3 + 4f'_4 + 5f'_5 + \cdots = 2d + n \tag{②}$$

②式减去①式的两倍,得

$$1 \cdot f'_3 + 2 \cdot f'_4 + 3 \cdot f'_5 + \cdots = n - 2. \tag{③}$$

类似地可以推得

$$1 \cdot f''_3 + 2 \cdot f''_4 + 3 \cdot f''_5 + \cdots = n - 2. \tag{④}$$

③、④两式相减即得

$$1 \cdot (f'_3 - f''_3) + 2 \cdot (f'_4 - f''_4) + 3 \cdot (f'_5 - f''_5) + \cdots = 0.$$

例 6 证明戈林伯格图(图 7-8)无哈密顿圈.

证明 设这个图含哈密顿圈. 因为它只有 5 边形、8 边形和 9 边形,根据定理四有

$$3(f'_5 - f''_5) + 6(f'_8 - f''_8) + 7(f'_9 - f''_9) = 0.$$

由此得  $7(f'_9 - f''_9) \equiv 0(\text{mod } 3).$

这与  $f'_9 + f''_9 = 1$  矛盾.

故戈林伯格图无哈密顿圈.

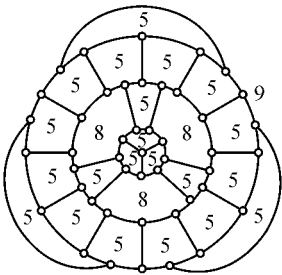
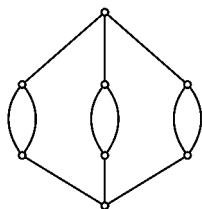


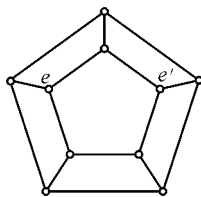
图 7-8

## 习 题 7

- 1 设  $G$  是简单平面图, 则它一定有一个度数  $\leq 5$  的顶点.
- 2 证明: 小于 30 条边的简单平面图有一个顶点度数  $\leq 4$ .
- 3 证明: 在 6 个顶点 12 条边的连通简单平面图中, 每个面用 3 条边围成.
- 4 设  $G$  是有 11 个或更多顶点的图, 证明  $G$  或  $\bar{G}$  是非平面图.
- 5 将平面分成  $f$  个区域, 每两个区域都相邻, 问  $f$  最大为多少?
- 6 证明: 除四面体外, 不存在这样一个凸多面体, 它的每一个顶点和所有其余的顶点之间都有棱相连接.
- 7 有  $n$  个车站组成的公路网, 每个站至少有 6 条公路引出, 求证必有两条公路在平面上相交.
- 8 对哪些  $n$ , 存在  $n$  条棱的多面体?
- 9 一个凸多面体有  $10n$  个面. 求证: 有  $n$  个面边数相同.
- 10 证明下图无哈密顿圈.



(第 10 题图)



(第 11 题图)

- 11 上图有哈密顿圈, 证明任一哈密顿圈如果有边  $e$ , 那么这个圈一定不含边  $e'$ .
- 12 设  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ( $n \geq 3$ ) 是平面上的一个点集, 它的任意两点间的距离至少为 1. 证明最多有  $3n - 6$  个点对, 它们之间的距离为 1.



通常,我们把与图的染色、拉姆赛(Ramsey,英国逻辑学家)数、抽屉原则关联的问题称为拉姆赛问题.

我们先从匈牙利的一个竞赛题谈起. 1947 年匈牙利数学奥林匹克中出了这样一道试题:

**例 1** 证明: 在任何六个人中,总可以找到三个相互认识的人或三个相互不认识的人.

我们用六个顶点表示六个人,如果某两个人互相认识,就在相应的两点间连一条边并涂上红色,某两个人互相不认识,就在相应的两点间连一条边并涂上蓝色. 要证明的结论就是这个涂了色的  $K_6$  中一定有一个各边同色的三角形.

无独有偶,这个变形就是 1953 年美国普特南数学竞赛试题: 空间中的六个点,任意三点不共线,任意四点不共面,成对地连接它们得到十五条线段. 用红色或蓝色染这些线段(一条线段只染一种颜色),求证: 无论如何染色,总存在同色三角形.

下面我们证明这个普特南试题,它可作为以后证明的模式.

**证明** 设  $A_1, A_2, \dots, A_6$  是所给的六点. 考虑由  $A_1$  出发的 5 条线段  $A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_1A_6$ . 因这 5 条线段只有红、蓝两种颜色,因此至少有 3 条染成同一种颜色. 不妨设这 3 条线段就是  $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4$ , 且它们都染成红色(实线表示红色,虚线表示蓝色). 若  $\triangle A_2A_3A_4$  三边都是蓝色(如图 8-1),它即为同色三角形. 若  $\triangle A_2A_3A_4$  至少有一条边,例如  $A_2A_3$  为红色(如图 8-2),则  $\triangle A_1A_2A_3$  是同色三角形. 总之,无论是哪种情况,都有同色三角形.

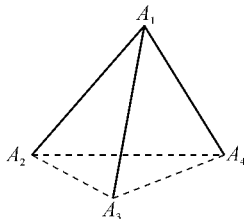


图 8-1

从本例我们还易知,当  $n \geq 6$  时,给完全图  $K_n$  的所有边染两种颜色的某

一种(以后简称两色完全图  $K_n$ ), 则总存在同色三角形.

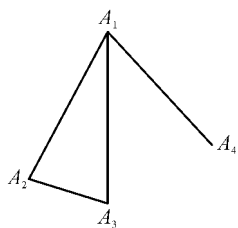


图 8-2

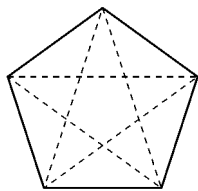


图 8-3

图 8-3 所示是一个染两色的完全图  $K_5$ , 其中没有同色三角形\*.

综上所述, 可得如下的结论.

**定理一** 两色完全图  $K_n$  必存在同色三角形的最小  $n$  是 6.

**例 2** 证明不能对  $K_{10}$  的边用四种颜色进行染色, 使得它的任何的  $K_4$  子图的边包含所有四种颜色.

**证明** 我们用反证法. 假设存在一种满足题目要求的染色方式.

若有一点连出 4 条同色的边, 不妨设  $AB$ 、 $AC$ 、 $AD$ 、 $AE$  全是蓝色的.  $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$  之间一定有一条边是蓝色的, 不妨设为  $BC$ , 则  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  之间有 4 条蓝边, 剩下两条边要染上三种颜色, 矛盾. 因此,  $A$  至多连出 3 条同色的边, 而且一定有一种颜色恰好染了三条边. 不妨设  $AB$ 、 $AC$ 、 $AD$  全是蓝色的.  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  之间有 6 条边, 所以其余的 3 条边一定各染一种颜色,  $BC$ 、 $BD$ 、 $CD$  之中无蓝色边.

考虑余下的 6 个点, 由定理一, 其中必有蓝色三角形或者有某个三角形无蓝色边.

若有三点  $E$ 、 $F$ 、 $G$  之间无蓝边, 则  $A$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $G$  之间无蓝边, 矛盾. 因此不妨假设三角形  $EFG$  为蓝色三角形. 因为  $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$  之间有蓝边, 故只能是  $BE$ 、 $CE$ 、 $DE$  之一为蓝色, 假设  $BE$  是蓝色的, 则  $B$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $G$  之间有四条蓝色边, 同上矛盾. 综上命题成立.

利用前面论述的结论, 我们可以解决 33 届国际数学奥林匹克试题:

**例 3** 给定空间中 9 个点, 其中任意四个点都不共面. 在每一对点之间都连着一一条线段. 试求出最小的  $n$  值, 使得将其中任意  $n$  条线段中的每一条任意地染为红、蓝两色之一, 在这  $n$  条线段的集合中都必然包含有一个各边

\* 反之, 不难证明: 没有同色三角形的两色完全图  $K_5$ , 必由两个不同色的五边形所组成. 换言之, 在两色完全图  $K_5$  中, 若既没有蓝色三角形, 又没有蓝色五边形, 则必有红色三角形.



同色的三角形.

解 题中“任意四点不共面”只是为了保证 9 点中无 3 点共线,因此本题仍是一个平面上的图形问题.于是问题归结为:平面上有 9 个点,无三点共线,每两点连边共有 36 条边.问至少取多少条边,才能保证把这些边任意染成红蓝色时,一定出现同色三角形.

构造一个 9 阶 32 边的双色图  $G$ . 顶点  $v_1$  与  $v_2, v_3, v_8, v_9$  4 点的连线染红色(实线),  $v_1$  与  $v_4, v_5, v_6, v_7$  4 点的连线染蓝色(虚线). 把  $v_1$  以外的 8 点分成 4 组, I:  $(v_2, v_3)$ , II:  $(v_4, v_5)$ , III:  $(v_6, v_7)$ ; IV:  $(v_8, v_9)$ . 称 I 与 II, II 与 III, III 与 IV 为相邻的组. 除  $v_1$  外的两点,属同一组的不连线,分属两相邻组的连实线(红色),分属两不相邻组的连虚线(蓝色),如图 8-4,  $G$  有  $C_9^2 - 4 = 32$  条边,其中染红色(实线)与蓝色(虚线)的各 16 条,易知  $G$  中不含同色三角形. 故

$$n \geq 33.$$

下面我们再证明  $n \leq 33$ .

设给定的 9 个点中有 33 条边染了色,故此时有 3 边不染色,不妨设为  $e_1, e_2, e_3$ . 在  $e_1, e_2, e_3$  中各取一个端点  $v_1, v_2, v_3$ ,从  $K_9$  中删除这 3 个点,其余的 6 点构成  $K_6$ ,于是用红蓝两色染色必出现同色三角形.

所以,  $n = 33$ .

为了推广定理一的结果,我们先只增加染色的数目.

用  $k$  种颜色  $c_1, c_2, \dots, c_k$  去染完全图  $K_n$  的边,每条边只染其中一种颜色,这样得到的完全图  $K_n$  简称为  $k$  色完全图  $K_n$ . 可以想象,当阶数  $n$  充分大时,  $k$  色完全图  $K_n$  中就必然会出现同色三角形,使得每一个  $k$  色完全图  $K_n$  都含同色三角形的最小  $n$  记为  $r_k$ ,于是定理一即是  $r_2 = 6$ . 至于  $r_1 = 3$  是不言自明的.

$r_k$  的存在性是由英国数学家、数理逻辑学家拉姆赛首先证明的,所以  $r_k$  叫拉姆赛数,关于  $r_k$  我们有如下结论.

定理二 (1) 对每个正整数  $k$ ,拉姆赛数  $r_k$  存在,并且当  $k \geq 2$  时,

$$r_k \leq k(r_{k-1} - 1) + 2;$$

(2) 对一切自然数  $k$ ,

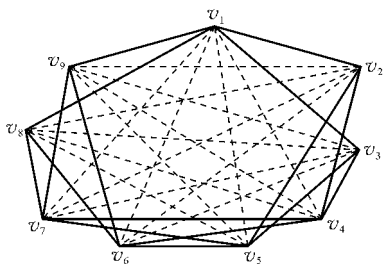


图 8-4

$$r_k \leq 1 + 1 + k + k(k-1) + \cdots + \frac{k!}{2!} + \frac{k!}{1!} + k!$$

证明 (1) 对  $k$  进行归纳. 我们已知  $r_1, r_2$  存在, 且  $r_1 = 3, r_2 = 6 \leq 2(r_1 - 1) + 2$ .

设  $r_k$  存在, 且  $r_k \leq k(r_{k-1} - 1) + 2$  成立. 取  $n = (k+1)(r_k - 1) + 2$ , 并设  $K_n$  是  $k+1$  色完全图, 它们的顶点为  $A_1, A_2, \cdots, A_n$ . 任取  $K_n$  的一个顶点  $A_1$ , 从它出发有  $n-1 = (k+1)(r_k - 1) + 1$  条边. 这些边共有  $k+1$  种颜色, 由抽屉原则, 这些边中至少有  $r_k$  条同色. 不妨设这  $r_k$  条边是  $A_1A_2, A_1A_3, \cdots, A_1A_{r_k+1}$ , 且都染  $c_1$  色. 考虑由顶点  $A_2, A_3, \cdots, A_{r_k+1}$  构成的  $r_k$  阶子图  $K_{r_k}$ . 若  $K_{r_k}$  含有  $c_1$  色边, 例如  $A_2A_3$ , 则  $\triangle A_1A_2A_3$  为同色三角形; 若  $K_{r_k}$  不含有  $c_1$  色边, 则  $K_{r_k}$  的边只有  $k$  种颜色, 即  $K_{r_k}$  为  $k$  色完全图, 按归纳假设,  $K_{r_k}$  含有同色三角形. 总之,  $K_n$  含有同色三角形. 于是知

$$M = \{m \mid \text{任何 } m \text{ 阶 } k+1 \text{ 色完全图都含有同色三角形}\}$$

是自然数集  $N$  的非空子集, 从而有最小值. 即  $r_{k+1}$  存在, 且  $r_{k+1} \leq n = (k+1)(r_k - 1) + 2$ .

(2) 用归纳法. 当  $k=1$  时,  $r_1 = 3 \leq 1+1+1$ . 设命题对  $k$  成立, 则应用 (1) 的结果及归纳假设, 得

$$\begin{aligned} r_{k+1} &\leq (k+1)(r_k - 1) + 2 \\ &\leq (k+1) \left[ 1 + k + k(k-1) + \cdots + \frac{k!}{2!} + \frac{k!}{1!} + k! \right] + 2 \\ &= (k+1) + (k+1)k + (k+1)k(k-1) + \cdots + \frac{(k+1)!}{2!} + \frac{(k+1)!}{1!} \\ &\quad + (k+1)! + 2 \\ &= 1 + 1 + (k+1) + (k+1)k + \cdots + \frac{(k+1)!}{2!} + \frac{(k+1)!}{1!} + (k+1)!, \end{aligned}$$

所以命题对  $k+1$  也成立.

如果利用高等数学中关于自然对数的底数  $e$  的展开式

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots,$$

可将 (2) 的结果简化成  $r_k \leq [k!e] + 1$ . 这里  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数.

定理二虽然证明了  $r_k$  的存在性, 并给出了  $r_k$  的一个上界. 但是  $r_k$  的准

确值,只知道三个,除了前面提及的  $r_1 = 3$ ,  $r_2 = 6$  外,还知道一个  $r_3 = 17$ . 事实上,根据定理二的(1),我们有  $r_3 \leq 3(r_2 - 1) + 2 = 3 \times 5 + 2 = 17$ . 直接仿照定理二的证明得出的这个结果还被编为 1964 年第六届国际数学奥林匹克试题:

有 17 位科学家,其中每一个人和其他的所有的人通信,他们在通信中只讨论 3 个题目,而且每两个科学家之间只讨论一个题目. 求证:至少有三个科学家相互之间讨论同一个题目.

另一方面,可以给完全图  $K_{16}$  的边涂上三种颜色,使得图中没有一个同色三角形,如图 8-5 所示,实线表示红边,虚线表示蓝边,未画线的表示黄边. 这就是说,  $r_3 \geq 17$ . 所以  $r_3 = 17$ .

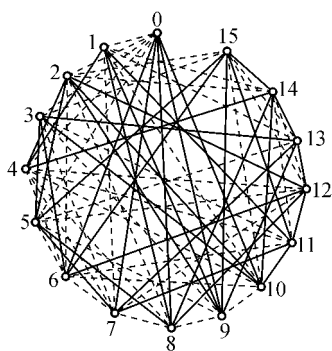


图 8-5

我们来看定理一的另一种推广:

设完全图  $K_n$  的每条边被染以红、蓝两色,即  $K_n$  是染红、蓝两色的完全图,则对固定的自然数  $p, q$ ,当  $n$  充分大时,红、蓝两色完全图  $K_n$  中,必然出现红色  $K_p$ ,或蓝色  $K_q$ . 我们把满足上述性质的最小  $n$  记为  $r(p, q)$ .  $r(p, q)$  也称为拉姆赛数.

用子图、补图的概念,  $r(p, q)$  也可说成使完全图  $K_n$  的任何  $n$  阶子图  $G$  或者包含一个完全子图  $K_p$ ,或者它的补图  $G$  包含一个完全子图  $K_q$  的  $n$  的最小值.

由定义及定理一,我们知  $r(3, 3) = r_2 = 6$ ,另外,还容易发现  $r(1, q) = r(p, 1) = 1$ .

为了更好地理解后面将要给出的  $r(p, q)$  的一般结果,我们证明一个具体的例子:  $r(3, 4) = 9$ . 先证  $r(3, 4) \leq 9$ ,它也可以用一个类似于例 1 的形式给出.

**例 4** 证明:在任何九个人中,总可以找到三个人相互认识或四个人相互不认识.

**证明** 我们用 9 个点  $A_1, A_2, \dots, A_9$  表示 9 个人,每两点连一条边. 约定:若  $A_i, A_j$  两人相互认识,则线段  $A_i A_j$  染红色,否则线段  $A_i A_j$  染蓝色. 要证明的是:在上述两色完全图  $K_9$  中,必存在红色  $K_3$ ,或者存在蓝色  $K_4$ .

若有一个顶点出发的红边数  $\geq 4$ ,设为  $A_1 A_2, A_1 A_3, A_1 A_4, A_1 A_5$ . 若

$A_2, A_3, A_4, A_5$  中有两个点的连线是红色的,例如  $A_2A_3$ , 则  $\triangle A_1A_2A_3$  为红色三角形. 若  $A_2, A_3, A_4, A_5$  中无两点连线是红色的, 则  $A_2, A_3, A_4, A_5$  为顶点的子图是蓝色  $K_4$ , 命题得证.

若每个顶点出发的红边数  $< 4$ , 则每个顶点出发的蓝边数都  $\geq 5$ . 考虑  $A_1, A_2, \dots, A_9$  为顶点连同所有蓝边构成的图, 奇顶点的个数是偶数, 所以必有一个顶点. 例如  $A_1$  是偶顶点, 即  $A_1$  出发的蓝边数是偶数, 所以  $A_1$  出发的蓝边数  $\geq 6$ . 设  $A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_1A_7$  为蓝边, 考虑六个顶点  $A_2, A_3, \dots, A_7$ , 它们每两点都有红边或蓝边连接. 按定理一, 或存在红色三角形, 或存在蓝色三角形. 在前一种情况下, 命题已经得证. 对后一种情况, 不妨设  $\triangle A_2A_3A_4$  为蓝色三角形, 则以  $A_1, A_2, A_3, A_4$  为顶点的完全图  $K_4$  是蓝色的. 命题也成立.

再考虑一个两色完全图  $K_8$ , 如图 8-6 所示. 我们用实线表示染红色的边, 用虚线表示染蓝色的边. 可见存在一种染法, 使  $K_8$

无红色  $K_3$ , 也无蓝色  $K_4$ , 说明  $r(3, 4) > 8$ .

综上所述, 即得  $r(3, 4) = 9$ .

关于  $r(p, q)$  我们有如下的结论.

定理三 (1)  $r(2, q) = q, r(p, 2) = p$ ;

(2)  $r(p, q) = r(q, p)$ ;

(3) 在  $p \geq 2, q \geq 2$  时,

$$r(p, q) \leq r(p, q-1) + r(p-1, q).$$

并且在  $r(p, q-1)$  与  $r(p-1, q)$  都是偶数时, 成立严格不等式.

为了叙述方便, 我们采用子图、补图的说法给出证明. (3) 的证明较难, 为了加深理解, 阅读时可参照例 4 的证明.

证明 (1) 设  $G$  是有  $q$  个顶点的图. 若  $G$  中有两个顶点相邻, 这时  $G$  含有  $K_2$ , 否则  $\bar{G}$  就是  $K_q$ . 所以  $r(2, q) \leq q$ . 又由  $q-1$  个两两不相邻的点所成的图  $G$  显然不含  $K_2$ , 它的补图  $\bar{G}$  是  $K_{q-1}$ , 不含  $K_q$ , 所以  $r(2, q) \geq q$ .

综上所述,  $r(2, q) = q$ . 同理可证,  $r(p, 2) = p$ .

(2) 设图  $G$  有  $r(p, q)$  个顶点, 则  $\bar{G}$  也有  $r(p, q)$  个顶点. 于是  $\bar{G}$  中含有  $K_p$ , 或者  $G$  中含有  $K_q$ . 换言之,  $G$  中含  $K_q$ , 或  $\bar{G}$  中含  $K_p$ , 故  $r(p, q) \geq r(q, p)$ .

同理  $r(q, p) \geq r(p, q)$ , 所以  $r(p, q) = r(q, p)$ .

(3) 设图  $G$  有  $r(p, q-1) + r(p-1, q)$  个顶点,  $v_1$  是  $G$  的一个顶点.

若  $d(v_1) \geq r(p-1, q)$ . 取  $\delta = r(p-1, q)$  个与  $v_1$  相邻的顶点  $v_2$ ,

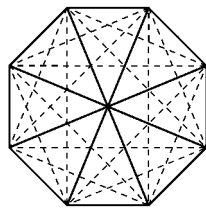


图 8-6

$v_3, \dots, v_\delta, v_{\delta+1}$ . 将  $G$  中其余的顶点以及关联的边去掉得  $G_1$ , 根据  $\delta = r(p-1, q)$  的定义,  $G_1$  中含有  $K_{p-1}$  或  $\overline{G_1}$  中含有  $K_q$ . 如果  $G_1$  含有  $K_{p-1}$ , 那么在  $G$  中,  $v_1$  与这个  $K_{p-1}$  组成完全图  $K_p$ . 如果  $\overline{G_1}$  中含有  $K_q$ , 则  $\overline{G}$  中也含有这个  $K_q$ .

若与  $v_1$  相邻的顶点数  $< r(p-1, q)$ , 则  $v_1$  至少与  $r(p, q-1)$  个顶点不相邻. 设与  $v_1$  不相邻的顶点为  $v_2, v_3, \dots, v_\varepsilon, v_{\varepsilon+1}$ , 其中  $\varepsilon = r(p, q-1)$ . 将  $G$  中除  $v_2, v_3, \dots, v_{\varepsilon+1}$  外的顶点以及关联的边去掉得图  $G_2$ . 根据  $\varepsilon = r(p, q-1)$  的定义,  $G_2$  中含有  $K_p$  或  $\overline{G_2}$  中含有  $K_{q-1}$ . 如果  $G_2$  中含有  $K_p$ , 则  $G$  中也含有这个  $K_p$ . 如果  $\overline{G_2}$  中含有  $K_{q-1}$ , 则  $\overline{G}$  中,  $v_1$  与这个  $K_{q-1}$  组成  $K_q$ .

综合起来使得

$$r(p, q) \leq r(p, q-1) + r(p-1, q).$$

如果  $r(p, q-1)$  与  $r(p-1, q)$  都是偶数. 取有  $r(p, q-1) + r(p-1, q) - 1$  个顶点的图  $G$ . 因奇顶点的个数是偶数, 而  $r(p, q-1) + r(p-1, q) - 1$  是奇数. 因而  $G$  中必有一个偶顶点  $v_1$ , 对于  $v_1$ , 或者  $d(v_1) \geq r(p-1, q) - 1$  或者  $v_1$  至少与  $r(p, q-1)$  个顶点不相邻. 因与  $v_1$  相邻的顶点数为偶数, 故在前一种情况,  $d(v_1) \geq r(p-1, q)$ , 照上面完全同样的证法得出

$$\begin{aligned} r(p, q) &\leq r(p, q-1) + r(p-1, q) - 1 \\ &< r(p, q-1) + r(p-1, q). \end{aligned}$$

至此定理三全部得证.

利用定理三的结果, 可以得出一些拉姆赛数  $r(p, q)$  的上界, 例如

$$\begin{aligned} r(3, 3) &\leq r(3, 2) + r(2, 3) = 3 + 3 = 6, \\ r(3, 4) &\leq r(3, 3) + r(2, 4) - 1 \leq 6 + 4 - 1 = 9, \\ r(3, 5) &\leq r(3, 4) + r(2, 5) \leq 9 + 5 = 14, \\ r(4, 4) &\leq r(4, 3) + r(3, 4) = 9 + 9 = 18. \end{aligned}$$

在前面已经证明了  $r(3, 3) = 6, r(3, 4) = 9$ , 类似地可以证明  $r(3, 5) = 14, r(4, 4) = 18$ . 由已知不等式, 当然只要证明  $r(3, 5) > 13, r(4, 4) > 17$  就够了. 这里证明前者, 后者的证明从略.

考察图 8-7 所示的图  $G$ , 它不含  $K_3$ , 它的补图  $\overline{G}$  不含  $K_5$ , 所以  $r(3, 5) > 13$ .

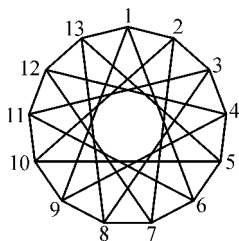


图 8-7

应用定理三,我们可以得出  $r(p, q)$  的一个简单的上界.

定理四 当  $p \geq 2, q \geq 2$  时,

$$r(p, q) \leq C_{p+q-2}^{p-1}.$$

证明 记  $l = p + q$ , 我们对  $l$  进行归纳.

当  $l = 4$  时,  $p = q = 2$ . 左边是  $r(2, 2) = 2$ , 右边是  $C_{4-2}^1 = 2$ , 命题成立.

设当  $l = k (k \geq 4)$  时, 命题成立. 当  $l = k + 1$  时, 在  $p = k - 1, q = 2$  或  $p = 2, q = k - 1$  的情况下,

$$r(k - 1, 2) = r(2, k - 1) = k - 1 = C_{k-1}^{k-2} = C_{k-1}^1.$$

命题成立. 当  $p \geq 3, q \geq 3, p + q = k + 1$  的情况下, 应用定理三的(3)及归纳假设, 有

$$\begin{aligned} r(p, q) &\leq r(p - 1, q) + r(p, q - 1) \\ &\leq C_{p+q-3}^{p-2} + C_{p+q-3}^{p-1} \\ &= C_{p+q-2}^{p-1}. \end{aligned}$$

命题仍成立.

根据数学归纳法, 定理四得证.

尽管如此,  $r(p, q)$  的准确值却不容易求得. 除  $r(1, q) = r(p, 1) = 1$ ,  $r(p, 2) = p, r(2, q) = q$  外, 目前已经确定的  $r(p, q)$  仅有少数几个, 它们列在下面的表中. 其中分数的分子表示下界, 分母表示上界.

$r(p, q) \begin{smallmatrix} q \\ p \end{smallmatrix}$	3	4	5	6	7	8
3	6	9	14	18	23	$\frac{28}{29}$
4	9	18	$\frac{25}{28}$	$\frac{34}{36}$		
5	14	$\frac{25}{28}$	$\frac{42}{55}$	$\frac{51}{94}$		
6	18	$\frac{34}{36}$	$\frac{38}{94}$	$\frac{102}{178}$		

如果把前面两种推广结合起来, 可得到如下的推广:

用  $l$  种颜色  $c_1, c_2, \dots, c_l$  去染完全图  $K_n$  的边, 每边染且只染一种颜色, 得到一个  $l$  色完全图. 当  $n$  充分大时,  $l$  色完全图  $K_n$  中, 或者包含一个  $c_1$

色的完全子图  $K_{p_1}$ , 或者包含一个  $c_2$  色的完全子图  $K_{p_2}$ , ..., 或者包含一个  $c_l$  色的完全子图  $K_{p_l}$ . 我们把满足上述性质的最小  $n$  记为  $r(p_1, p_2, \dots, p_l)$ , 它也称为拉姆赛数.

如果利用所谓“超图”的概念, 那么还可作推广. 这里就不深入介绍了.

**例 5** 把数 1、2、3、4、5 任意分成两组. 证明: 总可以在某一组中找到这样两个数, 它们之差与这一组中的某一个数相同.

**证明** 设把数 1、2、3、4、5 任意分成了  $A$ 、 $B$  两组. 取六个点, 并依次编号为 1、2、3、4、5、6. 其中任意两点  $i > j$ , 都有  $1 \leq i - j \leq 5$ . 两个点  $i > j$ , 如果  $i - j$  分在  $A$  组, 则把  $ij$  边染成红色; 如果  $i - j$  分在  $B$  组, 则把  $ij$  边染成蓝色. 于是, 得到一个 2 色 6 阶完全图  $K_6$ . 由本节例 1 知, 这个  $K_6$  中有一个单色三角形, 设为  $\triangle ijk$ , 并且  $i > j > k$ . 这表明  $a = i - k$ ,  $b = i - j$ ,  $c = j - k$  这三个数分在同一组中, 并且有

$$a - b = (i - k) - (i - j) = j - k = c.$$

题中结论得证.

**注:** 在此例中可能有  $b = c$ , 此时有  $a = 2b$ . 因此, 此题可改写为: 把数 1、2、3、4、5 任意分成两组, 证明: 总可以在某一组中找到这样一个数, 它是同一组中某个数的 2 倍, 或者是同一组中某两个数之和.

本节习题 8 是 1978 年 IMO 试题, 可作为本例的延伸或推广, 把习题 8 再作推广, 可得著名的许尔定理(习题 7).

单色三角形的一种变形是所谓的异色三角形, 即三边颜色互不相同的三角形. 下题是匈牙利数学奥林匹克试题.

**例 6** 某俱乐部有  $3n + 1$  人, 每两人可一起玩下面三种游戏中的某一种: 象棋、围棋、跳棋. 已知每个人都与  $n$  个人下象棋, 与  $n$  个人下围棋, 与  $n$  个人下跳棋. 证明: 这  $3n + 1$  个人中必有这样三个人, 他们之间有下象棋的, 有下围棋的, 有下跳棋的.

**证明**  $3n + 1$  个人用  $3n + 1$  个点表示, 两人之间下象棋、下围棋、下跳棋, 则对应的两点分别用红线、蓝线、黑线连接. 于是, 得一个 3 色完全图  $K_{3n+1}$ . 本题即是证明: 在这个 3 色完全图  $K_{3n+1}$  中, 必存在一个三边不同色的异色三角形.

由一顶点引出的两条边如果不同色, 则称此两条边的夹角为异色角. 一个三角形是异色三角形当且仅当它的三个内角都是异色角. 每一个顶点引出的  $3n$  条边, 其中红边、蓝边、黑边各有  $n$  条, 因此, 由任一顶点引出的异色

角有  $C_3^2 n^2 = 3n^2$  个, 从而这个 3 色完全图  $K_{3n+1}$  中共有  $3n^2(3n+1)$  个异色角.

另一方面, 完全图  $K_{3n+1}$  中共有  $C_{3n+1}^3 = \frac{1}{2}n(3n+1)(3n-1)$  个三角形. 把这些三角形看作“抽屉”, 异色角看作“球”. 因为  $3n^2(3n+1) > n(3n+1)(3n-1)$ , 于是, 3 色完全图  $K_{3n+1}$  中异色角的数目大于三角形个数的两倍, 由抽屉原理, 必有某个三角形, 它有三个异色角, 这个三角形即是异色三角形.

数学竞赛中经常出现与拉姆赛问题类同的试题, 我们再举几例作为本节的结束.

**例 7** 大厅中会聚了 100 个客人, 他们中每人至少认识 67 人, 证明: 在这些客人中一定可以找到 4 人, 他们之中任何两人都彼此相识. (1966 年波兰数学竞赛题)

**证明** 用  $A_1, A_2, \dots, A_{100}$  这 100 个顶点表示客人. 连接每两点并染以红、蓝两色, 当且仅当  $A_i$  与  $A_j$  互相认识时, 它们之间的边是红色. 本题用图论的语言就是: 红蓝 2 色完全图  $K_{100}$  中, 如果每个顶点出发的红边至少有 67 条, 则  $K_{100}$  中含有一个红色完全子图  $K_4$ .

任取一顶点  $A_1$ , 自它出发的红边至少有 67 条, 故必有一条红边  $A_1A_2$ , 因自  $A_2$  出发的红边也至少有 67 条, 故自  $A_1, A_2$  出发的蓝边至多有  $32 \times 2 = 64$  条, 它们涉及 66 个顶点, 因而必有一点, 例如  $A_3$ , 使  $A_1A_3, A_2A_3$  都是红边. 自  $A_1, A_2, A_3$  出发的蓝边至多有  $32 \times 3 = 96$  条, 涉及 99 个点, 故必还有一点, 记为  $A_4$ , 使  $A_1A_4, A_2A_4, A_3A_4$  都是红边. 于是以  $A_1, A_2, A_3, A_4$  为顶点的完全子图  $K_4$  是红色的.

**例 8** 一棱柱以五边形  $A_1A_2A_3A_4A_5$  和  $B_1B_2B_3B_4B_5$  为上、下底, 这两个多边形的每一条边及每一条线段  $A_iB_j (i, j = 1, 2, \dots, 5)$  均涂上红色或蓝色, 每一个以棱柱顶点为顶点的, 以已涂色的线段为边的三角形都不是同色三角形. 求证: 上、下底的 10 条边颜色一定相同. (第 21 届 IMO 试题)

**证明** 先证上底 5 条边同色. 若不然, 则五边形  $A_1A_2A_3A_4A_5$  至少有两边不同色, 从而总有两边相邻边, 譬如  $A_1A_2$  与  $A_1A_5$  不同色. 不妨设  $A_1A_2$  为红边,  $A_1A_5$  为蓝边. 由  $A_1$  到  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$  的 5 条边中至少有 3 条边同色, 不妨设  $A_1B_i, A_1B_j, A_1B_k (i, j, k \text{ 互不相等})$  为红边. 因为  $\triangle A_1B_iB_j$  不同色, 所以  $B_iB_j$  为蓝边, 同理  $A_2B_i$  也为蓝边, 进而推知  $A_2B_j$  为红边. 于是  $\triangle A_1A_2B_j$  为红色三角形, 这与题设矛盾.

同理可证下底五条边同色.

若上下底面的边不同色, 不妨设  $A_1A_2A_3A_4A_5$  为红色,  $B_1B_2B_3B_4B_5$  为



蓝色,并不妨设  $A_1B_1$  为蓝边,于是由每个三角形不同色的假定,可知  $A_1B_5$ 、 $A_1B_2$  均为红线段,进而推出  $A_2B_2$ 、 $A_5B_5$  为蓝线段. 同理可知  $A_5B_1$ 、 $A_5B_4$ 、 $A_2B_1$ 、 $A_2B_3$  等均为红线段, $A_3B_3$ 、 $A_4B_4$  为蓝线段. 于是  $A_4B_1$  和  $A_4B_2$  为蓝线段,这样得到蓝色三角形  $A_4B_1B_2$ ,矛盾.

所以棱柱上、下底面的 10 条边同色.

**例 9** 10 个地区之间有甲、乙两个国际航空公司服务,在任意两个地区之间都有且仅有由其中一个公司单独经营的直达航线(可往返). 证明:两公司中必有某公司,可以提供两条不经过同一地区的环游旅行线,而且每条旅行线经过奇数个地区.

**证明** 10 个地区用 10 个点  $u_1, u_2, \dots, u_{10}$  表示, $u_i$  与  $u_j$  两地区的航线若由甲公司经营,则  $u_iu_j$  边染红色(图中用实线表示);若由乙公司经营,则  $u_iu_j$  边染蓝色(图中用虚线表示). 于是得到一个 2 色 10 阶完全图  $K_{10}$ . 为证明结论,即要证明这个 2 色 10 阶完全图  $K_{10}$  中,存在两个没有公共顶点、边数都是奇数并且同色的单色三角形或单色多边形.

2 色 10 阶完全图  $K_{10}$  中必有单色三角形,设  $\triangle u_8u_9u_{10}$  为单色三角形. 由例 1 又知,以  $u_1, u_2, \dots, u_7$  为顶点的三角形中必有单色三角形,设  $\triangle u_5u_6u_7$  为单色三角形. 如果  $\triangle u_5u_6u_7$  与  $\triangle u_8u_9u_{10}$  同色,则已无需再证. 下面设  $\triangle u_5u_6u_7$  为红边三角形,而  $\triangle u_8u_9u_{10}$  为蓝边三角形.

在  $\{u_5, u_6, u_7\}$  与  $\{u_8, u_9, u_{10}\}$  两个顶点集之间共有  $3 \times 3 = 9$  条边,由抽屉原理知,其中必有 5 条同色,不妨为红色. 这 5 条边由  $\{u_8, u_9, u_{10}\}$  引出,故必有某一顶点,由该点引出 2 条红边,设为  $u_8u_6$ 、 $u_8u_7$ ,如图 8-8 所示. 于是,又有一个红边三角形  $u_6u_7u_8$ .

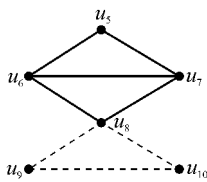


图 8-8

考虑由  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$  为顶点的 2 色 5 阶完全图  $K_5$ . 如果这个  $K_5$  中有单色三角形,则不论这个单色三角形是红色边或者是蓝色边的,再加上红边三角形  $u_6u_7u_8$  或蓝边三角形  $u_8u_9u_{10}$ ,在 2 色完全图  $K_{10}$

中都有两个没有公共顶点、同色的单色三角形. 否则,这个 2 色 5 阶完全图  $K_5$  中没有单色三角形,于是易知  $K_5$  中有两个单色五边形,一个红色边五边形,另一个蓝色边五边形. 因此结论成立.

**注:** 上题中若把 10 个地区改为 9 个地区,则结论不真. 例子如下: 把 9 个地区分为 3 组,即  $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\} = A$ ,  $\{u_6, u_7, u_8\} = B$ ,  $\{u_9\}$ ,  $A$  中的 5 个地区之间的航线由甲公司经营,  $B$  中的 3 个地区之间的航线由乙公

司经营,  $A$  与  $B$  之间、 $u_9$  与  $A$  之间的航线由乙公司经营,  $u_9$  与  $B$  之间的航线由甲公司经营.

## 习 题 8

- 1 空间中六个点两两连线, 用红、蓝两种颜色对这些边染色. 证明恒存在两个同色三角形.
- 2 空间八个点两两连线, 并二染色其边, 证明: 必存在三条无公共端点的同色线段.
- 3 平面上有六点, 任何三点都是不等边三角形的顶点. 证明: 这些三角形中有一个的最短边同时是另一个三角形的最长边.
- 4 把连接圆周上 9 个不同点的 36 条边染成红色或蓝色. 假定由 9 个点中每 3 个点所确定的三角形都含有红边, 证明有 4 个点, 其中每两点连的都是红边.
- 5 证明: 在任何 19 个人中, 总有 3 个人互相认识或者 6 个人互相不认识.
- 6 证明: 在任何 18 个人中, 总有 4 个人相互认识, 或者相互不认识.
- 7 将自然数  $1, 2, \dots, N$  分到  $n$  个类中, 则在  $N$  充分大时, 一定有一个类同时含有数  $x, y$  及这两个数的差  $|x - y|$ . (许尔(Schur)定理)
- 8 一个国际社团共有 1978 名成员, 他们来自 6 个国家, 用号码  $1, 2, \dots, 1978$  给成员编号. 证明至少有一名成员, 他的编号是他的某个同胞编号的两倍, 或者是两同胞编号的和.
- 9 证明: 在两色完全图  $K_7$  中, 必有两个无公共边的同色三角形.
- 10 空间六条直线, 其中每三条直线都不共面. 证明必存在三条直线, 满足下列条件之一: (i) 两两异面; (ii) 互相平行; (iii) 交于同一点.
- 11 求最小正整数  $n$ , 使得在任意给定的  $n$  个无理数中, 总存在这样的三个无理数, 其中任意两个数之和仍是无理数.
- 12 求最小正整数  $n$ , 使当以任意方式将  $K_n$  二染色时, 总存在具有相同颜色但没有公共边的两个单色三角形.
- 13 在一个足球联赛里有 20 支足球队. 第一轮它们分成 10 对互相比赛, 第二轮也分成 10 对互相比赛(注: 每支球队两轮比赛的对手不一定不同). 求证: 在第三轮开赛之前, 一定可以找出 10 支球队, 它们两两没有赛过.



在第一节里,我们曾说过图是描述一些对象之间的某种特定关系的工具.前面所说的图都是无向图,它所描述的关系是对称性关系.在现实生活中有许多关系不是对称性的,如认识关系,甲认识乙,并不意味着乙也认识甲,比赛的胜负关系等也是这样,由此我们可以抽象出有向图的概念.

把一个图的每一条边都规定一个方向,称这个图为有向图.有向图的边称为弧,若顶点  $v_i$  与  $v_j$  有弧相连,弧上的箭头方向从  $v_i$  指向  $v_j$ ,记这条弧为  $(v_i, v_j)$ ,且称  $v_i$  为起点,  $v_j$  为终点.通常将有向图记为  $D = (V, U)$ ,其中  $V$  表示  $D$  的顶点集合,  $U$  表示  $D$  的弧的集合.

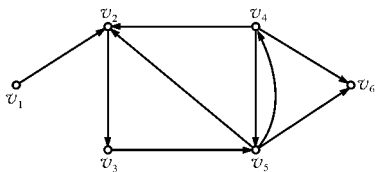


图 9-1

在图 9-1 所示的有向图中,顶点集

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\},$$

弧的集合

$$U = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_5, v_2), (v_4, v_2), (v_4, v_6), (v_5, v_6), (v_5, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_5)\}.$$

这一节所说的有向图都是简单有向图,也就是不含环(即起点和终点相同的弧),也不含多重弧(即由一点向另一点的多于一条的弧)的有向图.

如果有向图  $G$  的弧集  $U$  中有弧  $(v_i, v_j)$  或  $(v_j, v_i)$ ,就称顶点  $v_i$  和  $v_j$  相邻,否则称顶点  $v_i$  和  $v_j$  不相邻.以顶点  $v_i$  为起点的弧的条数称为  $v_i$  的出度,记为  $d^+(v_i)$ ,以  $v_i$  为终点的弧的条数称为  $v_i$  的入度,记为  $d^-(v_i)$ .

有  $n$  个顶点,且每两个顶点都恰有一条弧相连的有向图称为竞赛图,记作  $\overline{K}_n$ .

定理一 设  $n$  阶竞赛图  $\overline{K}_n$  的顶点为  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ,则

$$\begin{aligned}
 & d^+(v_1) + d^+(v_2) + \cdots + d^+(v_n) \\
 &= d^-(v_1) + d^-(v_2) + \cdots + d^-(v_n) \\
 &= \frac{1}{2}n(n-1).
 \end{aligned}$$

证明 因为  $\overline{K}_n$  中每一条弧产生一个入度和一个出度, 并且每两点之间有且仅有一条弧, 所以  $\overline{K}_n$  中所有顶点的入度之和等于出度之和, 并且等于弧数. 即

$$\begin{aligned}
 & d^+(v_1) + d^+(v_2) + \cdots + d^+(v_n) \\
 &= d^-(v_1) + d^-(v_2) + \cdots + d^-(v_n) \\
 &= \frac{1}{2}n(n-1).
 \end{aligned}$$

例 1  $n$  个参赛者  $P_1, P_2, \cdots, P_n (n > 1)$  进行循环赛, 每个参赛者同其他  $(n-1)$  个参赛者都进行一局比赛. 假设比赛结果没有平局出现,  $w_r$  和  $l_r$  分别表示参赛者  $P_r$  胜与负的局数, 求证:

$$w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_n^2 = l_1^2 + l_2^2 + \cdots + l_n^2.$$

(第 26 届美国普特南数学竞赛试题)

证明 作一竞赛图  $\overline{K}_n$ , 每个顶点  $v_r$  对应于参赛者  $P_r$ , 如果参赛者  $P_i$  胜了  $P_j$ , 则在顶点  $v_i, v_j$  之间作弧  $(v_i, v_j)$ . 于是  $w_r$  和  $l_r$  分别是顶点  $v_r$  的出度和入度. 根据定理一,

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n = l_1 + l_2 + \cdots + l_n.$$

若注意到  $w_i + l_i = n-1 (1 \leq i \leq n)$ , 可得

$$\begin{aligned}
 & w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_n^2 - (l_1^2 + l_2^2 + \cdots + l_n^2) \\
 &= (w_1^2 - l_1^2) + (w_2^2 - l_2^2) + \cdots + (w_n^2 - l_n^2) \\
 &= (w_1 + l_1)(w_1 - l_1) + (w_2 + l_2)(w_2 - l_2) \\
 &\quad + \cdots + (w_n + l_n)(w_n - l_n) \\
 &= (n-1)[(w_1 + w_2 + \cdots + w_n) - (l_1 + l_2 + \cdots + l_n)] = 0.
 \end{aligned}$$

从而有  $w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_n^2 = l_1^2 + l_2^2 + \cdots + l_n^2$ .

在有向图  $D = (v, u)$  中, 一个由不同的弧组成的序列  $u_1, u_2, \cdots, u_n$ , 若

其中  $u_i$  的起点为  $v_i$ , 终点为  $v_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 称这个序列为从  $v_1$  到  $v_{n+1}$  的有向路(简称路),  $n$  称为这个路的长.  $v_1$  为路的起点,  $v_{n+1}$  为路的终点. 如果  $v_1 = v_{n+1}$ , 则称这个路为回路.

**例 2** MO 太空城由 99 个空间站组成, 任两个空间站之间有管形通道相联. 规定其中 99 条通道为双向通行的主干道, 其余通道严格单向通行. 如果某四个空间站可以通过它们之间的通道从其中任一站到达另外任一站, 则称这四个站的集合为一个互通四站组.

试为 MO 太空城设计一个方案, 使得互通四站组的数目最大(请具体算出该最大数, 并证明你的结论). (14 届中国数学冬令营)

**证明** 将不能互通的四站组称之为坏四站组, 于是坏四站组有 3 种可能情形:

- (1) 站  $A$  引出的 3 条通道  $AB$ 、 $AC$ 、 $AD$  全都离开  $A$ ;
- (2) 站  $A$  引出的 3 条通道全都走进  $A$ ;
- (3) 站  $A$  与  $B$ 、 $C$  与  $D$  之间都是双向通道, 但通道  $AC$ 、 $AD$  都离开  $A$ ,  $BC$ 、 $BD$  都离开  $B$ .

将第(1)种的所有坏四站组的集合记为  $S$ , 其余坏四站组的集合记为  $T$ . 我们来计算  $|S|$ .

因为太空城共有  $C_{99}^2 - 99 = 99 \times 48$  条单行通道, 设第  $i$  站走出的通道数为  $S_i$ , 于是

$$\sum_{i=1}^{99} S_i = 99 \times 48.$$

这时从站  $A_i$  引出 3 条通道的(1)类坏四站组有  $C_{S_i}^3$  个. 从而

$$|S| = \sum_{i=1}^{99} C_{S_i}^3 \geqslant 99 \times C_{48}^3.$$

上面的不等号是因为  $C_x^3 = \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$  在  $x \geqslant 3$  时是凸函数, 又因为所有四站组总数为  $C_{99}^4$ , 所以互通四站组的个数不多于

$$C_{99}^4 - |S| \leqslant C_{99}^4 - 99C_{48}^3.$$

下面构造一个例子使互通四站组恰为  $C_{99}^4 - 99C_{48}^3$  个. 为此, 必须使每个站  $A_i$  走出的通道数都是 48, 从而走入的通道数也是 48, 且每站恰有两条双向通道, 同时保证只有  $S$  类坏四站组没有  $T$  类坏四站组.

将 99 个空间站写在一个圆内接正 99 边形的 99 个顶点上. 规定正 99 边

形的最长对角线为双向通道,于是每点都恰有两条双向通道.对于站  $A_i$ ,按顺时针方向接下去的 48 个站与  $A_i$  的单向通道都从  $A_i$  走出;按逆时针方向接下去的 48 个站都是走向  $A_i$  的.下面我们验证,在这个规定下只有 S 类坏四站组而没有 T 类坏四站组.

设  $\{A, B, C, D\}$  是任一四站组.

(i) 若四站之间有两双向通道,则显然是连通的;

(ii) 若 4 站之间有唯一的双向通道  $AC$ ,则  $B$  和  $D$  分别与  $A, C$  形成一个环路,从而也是互通的.

(iii) 故坏四站组之间没有双向通道,只能是(1)(2)两种情形之一.若为(2),不妨设  $A$  的 3 条通道全是走进  $A$  的,于是  $B, C, D$  都在  $A$  算起逆时针方向的 48 个站内,设其  $D$  离  $A$  最远,从而  $AD, BD, CD$  都走出  $D$ .这表明坏四站组都是 S 类的.

综上所述,互通四站组最多  $C_{99}^4 - 99C_{48}^3$  组.

**定理二** 竞赛图中总存在这样一个顶点,使得从这一顶点出发,通过长最多为 2 的路可以到达其他所有顶点.

**证明** 设竞赛图  $\overline{K}_n$  中出度最大的顶点为  $v_1$ ,以  $v_1$  为起点的弧的终点集合记为  $N^+(v_1)$ .若命题结论不真,则必存在顶点  $v_2 (v_2 \neq v_1)$ ,  $v_2 \notin N^+(v_1)$ ,且对每一点  $u \in N^+(v_1)$  都有一条从  $v_2$  到  $u$  的弧  $(v_2, u)$ ,又有弧  $(v_2, v_1)$ ,故  $d^+(v_2) \geq d^+(v_1) + 1$ ,这与  $v_1$  是出度最大的顶点矛盾.定理得证.

**例 3** 每一个参加单循环赛的人和所有其余参加比赛的人都要比赛一次,而且任何一次比赛都没有出现平局.证明:这些运动员中,可以找到这样的运动员,当他列举被他战胜的人及他的手下败将所战胜的人时,他能数出所有其他参加比赛的人.(匈牙利数学竞赛试题)

把循环赛对应于竞赛图,这便是定理二.证略.

**例 4**  $n (n \geq 3)$  个人参加单循环比赛,通过比赛确定优秀选手.选手  $A$  被确定为优秀选手的条件是:对任何其他选手  $B$ ,或  $A$  胜  $B$ ,或存在选手  $C$ ,  $C$  胜  $B$ ,  $A$  胜  $C$ .如果按上述规则确定的优秀选手只有一名,试证这名选手战胜所有其他选手.(第 2 届全国中学生数学冬令营试题)

**证明** 将  $n$  个选手对应  $n$  个点,若选手  $v_i$  胜  $v_j$ ,则作一条从  $v_i$  到  $v_j$  的弧,得到一个竞赛图  $\overline{K}_n$ .不妨设  $v_1$  是  $\overline{K}_n$  中出度最大的点,由定理二知,  $v_1$  就是优秀选手.要证明的是顶点  $v_1$  到别的顶点有长为 1 的路(即弧),也就是  $v_1$  的入度  $d^-(v_1) = 0$ .

假设命题结论不真,记以  $v_1$  为终点的弧的起点集合为  $N^-(v_1) = \{v_{i_1},$

$v_{i_2}, \dots, v_{i_r}\}$ ,  $r \geq 1$ . 考虑由顶点  $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$  组成的竞赛图  $\bar{K}_r$ , 取  $v_{i_1}$  是  $\bar{K}_r$  中的出度最大的点. 据定理二,  $v_{i_1}$  到  $v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$  各点有不大于 2 的路. 又由于  $v_1$  有到除  $v_{i_1}, \dots, v_{i_r}$  外的所有其他顶点的弧, 故  $v_{i_1}$  到除  $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\}$  外的点也有不大于 2 的路, 因而, 在竞赛图  $\bar{K}_n$  中  $v_{i_1}$  到其他各点均有不大于 2 的路, 于是  $v_{i_1}$  也是优秀选手, 这与  $v_1$  是唯一的优秀选手矛盾, 从而  $N^-(v_1) = \emptyset$ , 即  $d^-(v_1) = 0$ . 命题得证.

注: 本题说明了竞赛图  $\bar{K}_n$  的一个性质: 若  $\bar{K}_n$  中出度最大的点唯一, 则这点的出度为  $n-1$ .

若有向图  $D$  中有一条路包含图  $D$  的一切顶点, 则称这条路为哈密顿路. 对竞赛图  $\bar{K}_n$ , 有如下结论.

定理三 竞赛图  $\bar{K}_n$  中存在一条长为  $n-1$  的哈密顿路.

证明 对顶点数  $n$  用数学归纳法证明.  $n=2$  时显然.

设命题对  $\leq k$  个顶点的竞赛图成立. 当  $n=k+1$  时, 从  $k+1$  个顶点中任取一个  $v$ , 在  $\bar{K}_{k+1}$  中去掉  $v$  及其相邻的弧, 根据归纳假设,  $\bar{K}_{k+1} - v$  中存在哈密顿路, 设为  $v_1, v_2, \dots, v_k$ .

如果有弧  $(v_k, v)$ , 那么  $v_1, v_2, \dots, v_k, v$  就是一条哈密顿路. 如果有弧  $(v, v_1)$ , 那么  $v, v_1, v_2, \dots, v_k$  就是一条哈密顿路.

否则就存在弧  $(v, v_k), (v_1, v)$ , 那么一定有一个  $i$  ( $1 \leq i \leq k-1$ ), 使弧  $(v_i, v)$  与  $(v, v_{i+1})$  同时存在, 这时  $v_1, \dots, v_i, v, v_{i+1}, \dots, v_k$  就是所求的哈密顿路, 如图 9-2 所示.

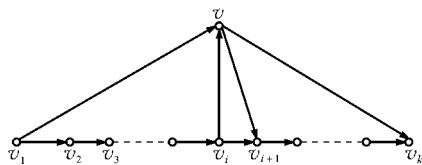


图 9-2

例 5 在象棋赛中, 每两名选手都要赛一场, 证明: 我们可以给所有参赛选手编号, 使得无论哪一个选手都没有输给紧接在他后面编号的那个选手. (第 25 届莫斯科数学竞赛试题)

证明 设有  $n$  名选手, 用  $n$  个顶点  $v_1, v_2, \dots, v_n$  表示这  $n$  名选手, 当选手  $v_i$  没有输给  $v_j$  时, 从  $v_i$  向  $v_j$  引一条弧  $(v_i, v_j)$ , 这样就得到了一个竞赛图  $\bar{K}_n$ . 由定理三,  $\bar{K}_n$  中有哈密顿路, 则按此路上选手出现的顺序为他们编号即可.

定理四 竞赛图  $\bar{K}_n$  ( $n \geq 3$ ) 中有一个回路是三角形的充分必要条件是 有两个顶点  $v$  与  $v'$ , 满足

$$d^+(v) = d^+(v').$$

证明 设顶点  $v$  与  $v'$ , 满足  $d^+(v) = d^+(v')$ , 我们证明  $\overline{K}_n$  中有一个回路为三角形.

不妨设有弧  $(v, v')$ , 并且从  $v'$  到顶点  $v_1, v_2, \dots, v_k$  各有一条弧, 其中  $k = d^+(v)$ . 则必有一顶点  $v_j (1 \leq j \leq k)$ , 从  $v_j$  到  $v$  有一条弧, 否则  $d^+(v) \geq k + 1 > d^+(v')$ , 回路  $v, v', v_j$  就是一个三角形. 于是充分性得证.

若  $\overline{K}_n$  的各顶点的出度不同, 用数学归纳法证明  $\overline{K}_n$  不含三角形回路. 当  $n = 3$  时, 易知顶点出度为  $0, 1, 2$  的三角形不成回路.

设命题在  $n = k$  时正确. 考察  $k + 1$  阶竞赛图  $\overline{K}_{k+1}$ , 若它的各个顶点出度不同, 那么它们依次为  $0, 1, 2, \dots, k$ . 设  $d^+(v') = k$ , 去掉点  $v'$  及相应的弧, 由归纳假设,  $\overline{K}_k - v'$  不含三角形回路, 显然  $\overline{K}_{k+1}$  中也没有三角形回路, 必要性得证.



## 习 题 9

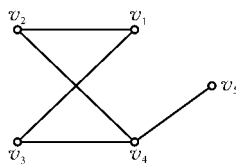
- 1  $n (> 4)$  个城市, 每两个城市之间有一条直达道路. 证明: 可将这些道路改为单行道, 使得从任意城市可能到达任一其他城市, 中间至多经过 1 个城市.
- 2 若竞赛图  $\overline{K}_n$  中有一个回路, 则  $\overline{K}_n$  中有一个三角形回路.
- 3 某国  $N$  个城市被航空线连接起来, 并且航线只向一个方向飞行. 对于此航线, 下列条件  $f$  是满足的: 从任一城市起飞, 不能沿着这些航线回到此城. 求证: 能补充这个航线系统, 使每 2 个城市被航线连接, 并且新的航线系统也满足条件  $f$ .
- 4 在排球单循环赛中, 若  $A$  队胜  $B$  队, 或  $A$  队胜  $C$  队而  $C$  队胜  $B$  队, 则称  $A$  队优于  $B$  队. 称优于所有对手的队为冠军. 试问: 按此规定, 是否会出现恰好两个冠军?
- 5  $n$  名棋手进行比赛, 每一个人与若干个人进行了比赛, 假定比赛中没有平局. 如果没有  $v_1$  胜  $v_2, v_2$  胜  $v_3, \dots, v_k$  胜  $v_1$  这样的情形出现, 证明必有一个人在所有的比赛中全胜, 也必有一个人在所有的比赛中全负.
- 6 如果  $n$  个人  $v_1, v_2, \dots, v_n$  中每两个人  $v_i$  与  $v_j$  有一个共同的祖先  $v_k$  (约定每个人可以算作他自己的祖先), 证明这  $n$  个人有一个共同的祖先.



- 7 甲、乙、丙、丁四个人比赛乒乓球,每两个人都要赛一场,结果甲胜了丁,且甲、乙、丙三人胜的场数相同,问乙胜几场?
- 8 一次有  $n(n \geq 3)$  名选手参加的单循环赛,每对选手赛一局,无平局,且无一选手全胜. 证明其中一定有三名选手甲、乙、丙,甲胜乙,乙胜丙,丙胜甲.
- 9 有一百种昆虫,每两种中必有一种能消灭另一种(但甲能消灭乙,乙能消灭丙,并不意味着甲一定能消灭丙),证明可以将这一百种昆虫依某种顺序排列起来,使得每一种能消灭紧接在它后面的那一种昆虫.

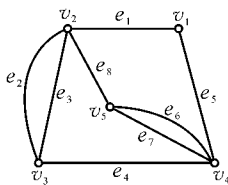
习 题 1

1.  $G$  的图形如图所示.
2. 简单图每条边与两个不同顶点关联, 且每两个顶点间至多有一条边连接, 现有  $n$  个顶点, 故边数至多为  $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ , 由于简单图不一定是完全图, 所以  $e \leq \frac{n(n-1)}{2}$ .

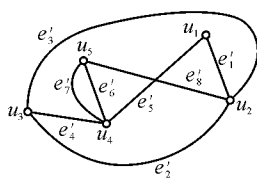


(第 1 题图)

3. 如图所示建立点的对应关系为:  $v_1 \leftrightarrow u_1, v_2 \leftrightarrow u_2, v_3 \leftrightarrow u_3, v_4 \leftrightarrow u_4, v_5 \leftrightarrow u_5$ . 边的对应关系为  $e_1 \leftrightarrow e'_1, e_2 \leftrightarrow e'_2, e_3 \leftrightarrow e'_3, \dots, e_8 \leftrightarrow e'_8$ . 这两个图的顶点数相等, 边数相等, 且顶点和边相互对应, 因此这两图是同构的.



(1)



(2)

(第 3 题图)

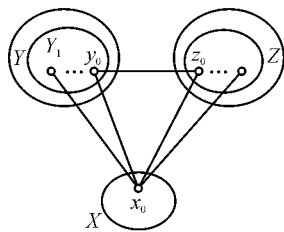
4. 按下法作一个图: 每一个顶点表示一个药箱, 每一条边  $(v_i, v_j)$  表示两个药箱  $v_i$  与  $v_j$  所共有的那一种药. 据题设, 此图是  $n$  个顶点的完全图  $K_n$ . 药的种数即  $K_n$  的边数  $\frac{1}{2}n(n-1)$ .
5. 用  $n$  个点  $v_1, v_2, \dots, v_n$  表示这  $n$  名教授, 并在相互认识的人之间连一条边, 将这  $n$  个点任意分成两组, 只有有限多种分法. 考虑在两组之间的连线条数  $S$ , 其中必存在一种分法, 使  $S$  达到最大值. 此时定有  $d_i \geq d'_i (i =$

$1, 2, \dots, n$ ). 若不然, 设对  $v_1$ , 有  $d_1 < d'_1$ , 则将  $v_1$  从这组换到另一组,  $S$  增加了  $d'_1 - d_1 > 0$ . 这与  $S$  已达到最大值矛盾.

6. 设  $A$  队经过 8 轮之后与 8 个队赛过, 而与其他 9 个队没有赛过, 若这 9 个队在前 8 轮中相互之间都赛过, 由于每队只赛了 8 场, 所以这 9 个队与其他各队都没有赛过. 但这 9 个队中第一轮比赛只能赛 4 场, 所以必有一个队要与其他队比赛, 矛盾. 所以在这 9 个队中必有两个队  $B, C$ , 它们之间没有赛过, 这样  $A, B, C$  三队之间便彼此没有赛过了.

7.  $n$  名代表用  $n$  个点表示, 如果两名代表没有握过手, 就在相应的顶点之间连一条边, 得图  $G$ . 如果  $G$  中任意 4 点  $v_1, v_2, v_3, v_4$  中, 每一点都有与之相邻的点, 分别设为  $v'_1, v'_2, v'_3, v'_4$ . 由已知条件知,  $v_1, v_2, v_3, v_4$  中有一点, 不妨设为  $v_1$ , 与其余三点  $v_2, v_3, v_4$  均不相邻. 所以  $v'_1 \neq v_2, v_3, v_4$ . 如果  $v'_2 \neq v'_1$ , 则在  $v_1, v_2, v'_1, v'_2$  这 4 个点中, 没有一个点与其余的三点均不相邻, 所以  $v'_2 = v'_1$ . 同理  $v'_3 = v'_1$ . 于是在  $v_1, v_2, v_3, v'_1$  这 4 个点中, 又没有一点与其余的三点均不相邻. 所以在任意 4 个顶点中必有一个点与其余的  $n-1$  个点均不相邻.

8. 用  $3n$  个顶点表示这些学生, 三所中学的学生组成的三个顶点集合分别记为  $X, Y$  和  $Z$ . 若  $u$  和  $v$  是不同学校的学生, 而且是互相认识的, 则在  $u$  与  $v$  之间连一条边, 这样便得图  $G$ . 设  $x \in X$ ,  $Y$  和  $Z$  中和  $x$  相邻的顶点数记作  $k$  和  $l$ , 则  $k+l = n+1$ .  $k$  与  $l$  中大的记作  $m(x)$ , 让  $x$  跑遍  $X$ ,  $m(x)$  的最大值记作  $m_X$ ,  $m_Y$  与  $m_Z$  作同样理解. 数  $m_X, m_Y, m_Z$  中的最大值记作  $m$ , 不妨设  $m = m_X$ , 并且  $x_0 \in X$ , 使得  $Y$  中和  $x_0$  相邻的顶点集合  $Y_1$  中顶点数



(第 8 题图)

$|Y_1| = m$ . 于是  $Z$  中与  $x_0$  相邻的顶点数为  $n+1-m \geq 1$ . 设  $z_0 \in Z$  与  $x_0$  相邻. 如果有  $y_0 \in Y_1$  与  $z_0$  相邻, 则  $\triangle x_0 y_0 z_0$  是  $G$  中的一个三角形. 若  $Y_1$  中每一个  $y$  与  $z_0$  都不相邻, 则  $Y$  中与  $z_0$  相邻的顶点数  $\leq n-m$ . 因此  $z_0$  与  $X$  中相邻的顶点数  $\geq n+1-(n-m) = m+1$ , 与  $m$  的最大性矛盾. 于是证得  $G$  中必有  $\triangle x_0 y_0 z_0$ .

9. 当  $n=1$  时, 有 2 个红格相邻, 显然为一个矩形. 设当  $n \leq k$  时成立, 即将  $2k$  个连通方格分成  $k$  个矩形. 当  $n=k+1$  时,

(i) 对于  $2k+2$  个方格中, 若去掉一对相邻的红格后有一个图仍为连通图, 则由归纳假设结论成立.

(ii) 若去掉一对相邻的红格被分成若干个连通图,而每个图的红格个数为偶数时,由归纳假设结论成立.

(iii) 若去掉任何一对相邻的红格被分成若干个连通图,而其中存在连通图的红格个数为奇数时:

当  $n = 2$  时,有“T”形图  $1 \times 3$  和  $1 \times 1$  的两个矩形满足要求.

当  $n \neq 2$  时,观察所有方格中左上角的“T”形图,去掉这两个方格至多形成两个连通图.

若去掉左上角的两个后所形成的两个连通图的红格的个数均为奇数,则去掉  $1 \times 3$  和  $1 \times 1$  的两个矩形后,易知仍为两个连通图,而红格的个数为偶数.

综上所述,  $n = k + 1$  也成立,故结论成立.

10. 如果 2 000 个成员都彼此认识,则认识参观团所有成员的人数为 2 000. 因此,不妨设有某两个成员  $u$  与  $v$  互不认识. 下面分三个步骤.

(i) 除  $u, v$  外的任意两个成员必彼此认识. 设  $a, b$  是另外两个成员,由题设,在  $a, b, u, v$  这 4 个成员中,必有一人认识其余三人,这个人只能是  $a$  或  $b$ ,这表明  $a, b$  互相认识.

(ii) 如果  $u, v$  两人都认识其他的 1 998 个人中的每一个,则该参观团有 1 998 个人认识所有其他成员. 设  $a$  是除  $u, v$  外的任意一个成员,由假设知  $a$  认识  $u, v$ . 设  $b$  是另一成员,由前所证  $a$  与  $b$  必彼此认识. 由  $b$  的任意性知  $a$  认识参观团的所有其他成员;又由  $a$  的任意性知该参观团除  $u, v$  外的 1 998 个人认识所有其他成员.

(iii) 如果  $u, v$  中某一个不全认识其他 1 998 个成员,则该参观团有 1 997 个人认识所有其他成员. 不妨设除  $v$  外,  $u$  不认识另一个成员  $w$ . 设  $a$  是  $u, v, w$  外的 1 997 个成员中的任意一个,由题设,在  $a, u, v, w$  中认识另外三人的人只能是  $a$ ,这表明  $u, v, w$  这三个人的每一个都认识该参观团中的其余 1 997 人.

综上,认识该参观团所有成员的人的人数最少是 1 997 个.

11. 根据条件,每个人都有朋友.

如果  $k$  ( $k \leq m$ ) 个人彼此是朋友,由于他们有一个公共的朋友,所以  $k + 1$  个人彼此是朋友. 依此类推,导出有  $m + 1$  个人  $A_1, A_2, \dots, A_{m+1}$  彼此是朋友.

下面证车厢中除  $A_1, A_2, \dots, A_{m+1}$  外,别无他人.

若  $B$  是这  $m + 1$  个人以外的人,并且  $B$  至少与  $A_1, A_2, \dots, A_{m+1}$  中两个

人是朋友. 设  $B$  与  $A_1, A_2$  是朋友, 则  $B, A_3, A_4, \dots, A_{m+1}$  这  $m$  个人有两个公共的朋友  $A_1, A_2$ , 与已知矛盾.

因此  $A_1, A_2, \dots, A_{m+1}$  之外的人  $B$  至多与  $A_1, A_2, \dots, A_{m+1}$  中一个人是朋友. 故不妨设除  $A_1$  外,  $A_2, A_3, \dots, A_{m+1}$  都不是  $B$  的朋友. 于是  $m$  个旅客  $B, A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$  的公共朋友  $C$ , 当然不是  $A_2, A_3, \dots, A_{m+1}$ , 也不是  $A_1$ . 由于  $m \geq 3$ ,  $C$  与  $A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$  中  $m-1 \geq 2$  个人是朋友. 这与上面已证  $C$  至多与  $A_1, \dots, A_{m+1}$  中一个人是朋友矛盾.

于是车厢中只有  $A_1, A_2, \dots, A_{m+1}$  这  $m+1$  个人, 每个人的朋友恰好是  $m$  个.

12.  $K_5$  有  $C_5^2 = 10$  条边,  $C_5^3 = 10$  个三角形, 与每条边有关的三角形恰有 3 个. 若图中有不少于 7 条边, 则即从  $K_5$  中至多去掉 3 边, 于是至多去掉  $3 \times 3 = 9$  个三角形, 所以仍有 1 个三角形, 与题设矛盾. 所以此图不可能有 7 条或更多的边.

## 习 题 2

1. 因为  $\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2e$ ,  $n\delta \leq 2e \leq n\Delta$ , 所以  $\delta \leq \frac{2e}{n} \leq \Delta$ .

2.  $\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2(n+1)$ , 每个顶点的度的平均值为  $\frac{2(n+1)}{n} > 2$ , 故至少有一个顶点的度  $\geq 3$ .

3. 把多面体的面用顶点表示, 当且仅当两个面有公共棱时, 在相应的顶点之间连一条边, 得图  $G$ . 按题意,  $G$  有奇数个奇顶点, 故这样的多面体不存在.

4. 不能. 由定理二即得.

5. 作一个图  $G$ : 123 个顶点  $v_1, v_2, \dots, v_{123}$  代表 123 个人, 如果两人讨论过问题, 则相应的顶点相邻. 于是图  $G$  中的每一个顶点的度  $\geq 5$ .

如果  $G$  中没有一个顶点的度大于 5, 那么  $G$  中的每个顶点的度就都等于 5, 这就得出  $G$  中的奇顶点个数是奇数, 这是不可能的. 从而图  $G$  中至少有一个顶点的度大于 5.

6. 作图  $G$ :  $n$  个点表示  $n$  名议员, 若两人不认识, 则连一条边在图  $G$  中, 于是对任意的点  $v_i$ , 均有  $d(v_i) \leq 3$ . 现把图  $G$  任意分成两部分  $G_1$  和  $G_2$ . 在同一部分中的两点, 若原来有边相连, 则这条边仍留在这部分中. 在不同部分中的两点, 若原来有边相连, 则这条边就不再存在了. 把这些去掉的边放

在一起构成集  $E$ . 在两部分中, 如果有一点的度大于 1, 不妨设在  $G_1$  中有点  $v_1$ ,  $d(v_1) \geq 2$ , 把这个点移到  $G_2$  中去. 此时  $G_1$  中至少要消失两条边; 由于  $d(v_1) \leq 3$ , 因而  $G_2$  中至多增加一条边, 于是  $E$  中至少增加一条边. 反复进行这一步骤. 这样  $E$  中的边不断增加, 但总边数是有限的, 所以到某一步, 这两部分中再也没有度大于 1 的点. 于是命题得证.

7. 问题可转化为: 在一个  $2n$  阶图  $G$  中, 每个顶点的度  $\geq n$ , 证明  $G$  中有一个四边形. 若  $G = K_{2n}$ , 结论显然. 当  $G \neq K_{2n}$  时, 则存在点  $v_1, v_2$  不相邻, 由于  $d(v_1) + d(v_2) \geq 2n$ , 根据抽屉原则, 其余的  $2n - 2$  个点中必有两个点, 设为  $v_3, v_4$ , 与  $v_1, v_2$  都相邻, 于是这 4 点就构成一个四边形.

8. 作图  $G$ : 用 9 个点表示 9 个人, 两顶点相邻当且仅当这两人握过手. 因为  $d(v_9) = 6$ , 所以存在  $v_k \neq v_1, v_2, v_3$  与  $v_9$  相邻. 显然  $d(v_k) \geq 5$ . 在与  $v_9$  相邻的其余五个点中一定有一个点  $v_h$  与  $v_k$  相邻 (否则  $d(v_k) \leq 9 - 5 - 1 = 3$ ), 于是  $v_9, v_k, v_h$  即为所求.

9. 用 14 个点  $v_1, v_2, \dots, v_{14}$  表示 14 个人, 两顶点  $v_i$  与  $v_j$  相邻当且仅当这两人未合作过, 得图  $G$ . 在  $G$  中每个顶点的度都是 8. 打三局要去掉 6 条边, 因此至少有 2 个顶点的度数保持为 8, 设其中之一为  $v_1$ . 在与  $v_1$  相邻的 8 个顶点中至少有一个  $v_2$  的度数不小于 7, 可以知道  $v_2$  与和  $v_1$  相邻的其余 7 个点之一设为  $v_3$  相邻. 这样,  $v_1, v_2, v_3$  与新来的  $v$  组成  $K_4$ .

10. 先约定, 确定距离的两点用边相连.

我们用数学归纳法来证明本题.

当  $n = 4$  时,  $\frac{1}{2}n(n-3) + 4 = 6$ , 四点之间只有  $(C_4^2 = 6)$  个距离, 它们均已确定, 故命题成立.

设  $n = k$  ( $k \geq 4$ ) 时命题成立. 当  $n = k + 1$  时, 点集共连了

$$\frac{1}{2}(k+1)(k-2) + 4$$

条边. 设  $A_{k+1}$  是这个点集中“度”(即自该点出发的边数)最小的点, 则其度

$$\begin{aligned} d(A_{k+1}) &\leq \frac{2\left[\frac{1}{2}(k+1)(k-2) + 4\right]}{k+1} \\ &= k-2 + \frac{8}{k+1} \end{aligned}$$

$$\leq k - 2 + \frac{8}{5} < k,$$

所以  $d(A_{k+1}) \leq k - 1$ .

于是,剩下  $k$  个点  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$  之间至少连了

$$\frac{1}{2}(k+1)(k-2) + 4 - (k-1) = \frac{1}{2}k(k-3) + 4$$

条边. 按归纳假设这  $k$  个点的集合是稳定的.

又  $d(A_{k+1}) \geq \frac{1}{2}(k+1)(k-2) + 4 - C_k^2 = 3$ , 故  $A_{k+1}$  至少与  $A_1, A_2, \dots$ ,

$A_k$  中的 3 点相连. 不妨设  $A_{k+1}$  与  $A_1, A_2, A_3$  相连, 且  $A_{k+1}A_1 = x, A_{k+1}A_2 = y, A_{k+1}A_3 = z$ . 易证  $A_{k+1}$  是惟一确定的. 若不然, 设  $A'_{k+1}$  是另外一点, 也有  $A'_{k+1}A_1 = x, A'_{k+1}A_2 = y, A'_{k+1}A_3 = z$ , 则  $A_1, A_2, A_3$  将都在  $A_{k+1}A'_{k+1}$  的垂直平分线上, 这与无三点共线的假定矛盾. 于是  $A_{k+1}A_4, \dots, A_{k+1}A_k$  都可确定, 点集  $\{A_1, A_2, \dots, A_{k+1}\}$  是稳定的, 即当  $n - k + 1$  时命题也成立.

综上所述, 命题得证.

11. 以单位立方体为顶点, 当且仅当二单位立方体有公共侧面时, 在此二顶点间加一边, 构成一个图  $G$ ,  $G$  的补图  $\bar{G}$  的边数即为所求. 易知  $G$  的边数为  $3n^2(n-1)$ ,  $K_{n^3}$  的边数为  $\frac{1}{2}n^3(n^3-1)$ , 故  $\bar{G}$  的边数为  $\frac{1}{2}n^3(n^3-1) - 3n^2(n-1) = \frac{1}{2}n^6 - \frac{7}{2}n^3 + 3n^2$ . 即公共顶点不多于 2 的单位立方体共有  $\frac{1}{2}n^6 - \frac{7}{2}n^3 + 3n^2$  对.

12. 我们来观察包括首都在内的航线图中的连通成分, 构成一个连通图, 只要证明在这个连通图中也包括  $A$  市. 假设不真. 于是由这个图的一个顶点(首都)连出了 21 条边, 而从其他每个顶点都连出 20 条边. 这意味着这个图中恰有一个度数为奇数的顶点, 此为不可能!

### 习 题 3

1. 由  $\delta |X| = \delta |Y| =$  总边数, 得  $|X| = |Y|$ .

2. 分别就  $n$  是奇数或偶数进行证明. 这里只给出后者. 设对所有偶数  $n \leq 2k$  时定理成立, 令  $G$  是一个有  $2k+2$  个顶点而没有三角形的图, 去掉  $G$  中两个相邻顶点  $v$  与  $v'$  及它们之间的边, 得图  $G'$ . 根据归纳假设,  $G'$  至多有

$\left\lceil \frac{4k^2}{4} \right\rceil = k^2$  条边. 因  $G$  中没有三角形, 任一顶点  $v''$  不能同时与  $v$  及  $v'$  相邻, 所以  $G$  至多有  $k^2 + l + (2k - l) + 1 = k^2 + 2k + 1 = \left\lceil \frac{(2k+2)^2}{4} \right\rceil$  条边 (其中  $l$  是  $G'$  中与  $v$  相邻点的个数).

3. 作完全偶图  $K_{10, 10}$ .

4. 用定理一.

5. (1) 令  $n = mk + r$  ( $0 \leq r < m$ ), 则由  $T_{m, n}$  定义有  $e_m(n) = C_n^2 - rC_{k+1}^2 - (m-r)C_k^2$ , 用  $r = n - mk$  代入化简整理即得. (2) 设完全  $m$  部图  $G$  的  $m$  个部分的顶点数分别为  $n_1, n_2, \dots, n_m$ , 若  $G$  与  $T_m(n)$  不同构, 则存在  $n_i - n_j > 1$ . 考虑完全  $m$  部图  $G'$ , 它的  $m$  部分顶点数分别为  $n_1, n_2, \dots, n_i - 1, \dots,$

$n_j + 1, \dots, n_m$ . 由于  $e(G) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (n - n_k)n_k$ ,  $e(G') = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^m (n - n_k)n_k + \frac{1}{2}(n - n_i + 1)(n_i - 1) + \frac{1}{2}(n - n_j - 1)(n_j + 1) = e(G) + (n_i - n_j) - 1 > e(G)$ . 若  $G'$  与  $T_m(n)$  同构, 结论成立, 否则重复上述过程直至所得的图与  $T_m(n)$  同构为止.

6. 作偶图  $G = (X, Y; E)$ ,  $X$  的每个顶点表示一个  $X$  国学生,  $Y$  的每一个顶点表示一个  $Y$  国学生. 如果一个  $X$  国学生与一个  $Y$  国学生跳过舞, 就在相应的两个点之间连一条边. 设  $x$  是集  $X$  中度最大的点, 因  $d(x) < n$ . 在  $Y$  中存在一点  $y'$  与  $x$  不相邻. 又设  $X$  中的  $x'$  与  $y'$  相邻, 因除  $y'$  外与  $x'$  相邻的点为  $d(x') - 1$ , 且  $d(x') - 1 \leq d(x) - 1 < d(x)$ , 所以在与  $x$  相邻的点中一定有一个点  $y$  与  $x'$  不相邻. 这样得出的 4 个点  $x, x', y, y'$  就代表了 4 个符合要求的人.

7. 作图  $G$ : 用 14 个点表示 14 个人, 两个顶点相邻当且仅当这两人未合作过. 由题意知, 14 个人有  $C_{14}^2 = 91$  个对子, 每人曾与其他 5 人配对, 共有  $\frac{14 \times 5}{2} = 35$  个对子, 今又进行三局共 6 个对子, 故  $G$  的边数  $= 91 - 35 - 6 = 50$ , 而  $e_2(14) = 49$ , 由托兰定理知, 在  $G$  中含有  $K_3$ , 这三个顶点对应的 3 名旅游者与新来的人一起可以打一局牌.

8. 设  $G = (V, E)$ , 有  $d(x)\{n - 1 - d(x)\}$  个三点组  $\{x, y, z\}$ , 它们在  $G$  或  $\bar{G}$  中都不构成三角形, 且在  $G$  中有唯一的一条边以  $x \in V$  为端点. 在  $G$  或  $\bar{G}$  中不构成三角形的每一个三点组  $\{x, y, z\}$  含有  $G$  的一条边或两条边. 设  $(x, y)$  是  $G$  的一条边,  $(x, z), (y, z)$  是  $\bar{G}$  的两条边, 在总和  $\sum_{x \in V} d(x)\{n -$



$1-d(x)\}$  中, 三点组  $\{x, y, z\}$  被计算两次: 一次关于  $x$ , 一次关于  $y$ . 而如果  $(x, y)$ 、 $(y, z)$  是  $G$  的边,  $(x, z)$  是  $\bar{G}$  的边, 则上述和数中三点组  $\{x, y, z\}$  也是被计算两次: 一次关于  $x$ , 另一次关于  $z$ . 因此在  $G$  和  $\bar{G}$  中三角形的总数为  $C_n^3 - \frac{1}{2} \sum_{x \in V} d(x) \{n-1-d(x)\} \geq C_n^3 - \frac{n}{2} \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{24} n(n-1)(n-5)$ .

9. 证明: 假设没有所求的  $k+1$  元集, 我们证明此时  $m \leq \frac{(k-1)(n-k)+k}{k^2} \cdot C_n^{k-1}$ . 记所有红  $k$  子集构成子集族  $S$ , 所有  $k-1$  元子集构成的子集族为  $\beta$ . 对于任一个  $k-1$  元子集  $B$ , 记  $\alpha(B)$  为包含  $B$  的红  $k$  子集个数.

对于任一个  $A \in S$ ,  $A$  包含有  $k$  个  $k-1$  元子集. 对于  $X \setminus A$  的任一元素  $x$ ,  $x$  与  $A$  中  $k$  个  $k-1$  元集的至多  $k-1$  个构成红  $k$  子集 (不然存在  $k+1$  元集, 其所有  $k$  元子集都是红  $k$  子集). 因此  $\sum_{\substack{B \subset A \\ |B|=k-1}} \alpha(B) \leq (n-k)(k-1) + k$ .

$$\text{故 } m[(n-k)(k-1) + k] \geq \sum_{A \in S} \sum_{\substack{B \subset A \\ |B|=k-1}} \alpha(B) = \sum_{B \in \beta} (\alpha(B))^2 \geq \frac{1}{|\beta|} \left( \sum_{B \in \beta} \alpha(B) \right)^2 \geq \frac{1}{C_n^{k-1}} (km)^2.$$

$$\text{故 } m \leq \frac{[(n-k)(k-1) + k] \cdot C_n^{k-1}}{k^2}.$$

因此当  $m > \frac{(n-k)(k-1) + k}{k^2} \cdot C_n^{k-1}$  时, 必存在一个  $X$  的  $k+1$  元子集, 它的所有  $k$  元子集都是红  $k$  子集.

10. 证明:  $\because C_{10}^2 = 45$ ,  $\therefore$  一个 10 阶完全图中含边 45 条.

$\therefore$  题中图为 10 阶完全图中去掉 5 边后所得, 把这 5 边称为“去掉边”, 记 10 个顶点为  $A_1 A_2, \dots, A_{10}$ .

不妨设  $A_1 A_2$  为“去掉边”, 则把点  $A_1$  及其连边去掉, 于是余下的 9 点图中至多有 4 条“去掉边”.

不妨设  $A_2 A_3$  为一条“去掉边”, 把  $A_2$  及其连边去掉 (如果已不含“去掉边”, 则任去一点, 下同), 于是余下的 8 阶图中至多有 3 条“去掉边”.

不妨设  $A_3 A_4$  为一条“去掉边”, 把  $A_3$  及其连边去掉, 于是余下的 7 阶图中至多有 2 条“去掉边”.

不妨设  $A_4 A_5$  为一条“去掉边”, 把  $A_4$  及其连边去掉, 于是余下的 6 阶图中至多有 1 条“去掉边”.

即此图为 6 阶完全图或从 6 阶完全图中去掉一边后所得的图, 不论如何

必含有二部完全图  $K_{3,3}$ .

本题的推广: 若  $n$  个顶点,  $m$  边图不含  $K_{r,r}$ , 求证:  $m < C \cdot n^{\frac{2}{1+r}}$ , 这里  $C$  仅依赖于  $r$ .

11. 用 18 个点  $x_1, x_2, \dots, x_{18}$  表示 18 辆警车所在的位置, 令

$$E = \left\{ (x_i, x_j) \mid \frac{d(x_i, x_j)}{12} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{9}{12} \right\},$$

根据定理三, 有  $|E| \geq C_{18}^2 - \left\lceil \frac{18^2}{3} \right\rceil = 45$ . 即最少有 45 对车可以互相通讯. 若

题目所述情况不成立, 就是不存在两个 5 度以上的点, 则  $|E| \leq \frac{1}{2}(1 \times 17 + 4 \times 17) < 43$ , 矛盾.

12. 当  $n = 2$  时,  $n^2 + 1 = 5$ , 4 点间连有 5 条线段, 恰构成两个三角形, 即命题成立.

设命题于  $n = k$  时成立, 当  $n = k + 1$  时, 我们先来证明这时至少存在一个三角形.

设  $AB$  是一条已知线段并记由  $A, B$  向其余  $2k$  个点所引出的线段条数分别为  $a$  和  $b$ .

(1) 若  $a + b \geq 2k + 1$ , 则存在点  $C$  异于  $A$  和  $B$ , 使线段  $AC, BC$  都存在, 从而存在  $\triangle ABC$ .

(2) 若  $a + b \leq 2k$ , 则当把  $A, B$  两点除去后, 余下的  $2k$  个点间至少连有  $k^2 + 1$  条线段, 于是由归纳假设知至少存在一个三角形.

设  $\triangle ABC$  是这些线段所构成的三角形之一, 由  $A, B, C$  三点向其余  $2k - 1$  点引出的线段数分别为  $\alpha, \beta, \gamma$ .

(3) 若  $\alpha + \beta + \gamma \geq 3k - 1$ , 则恰以  $AB, BC, CA$  三者之一为一边的三角形的总数至少有  $k$  个, 再加上原来的  $\triangle ABC$  即至少有  $k + 1$  个三角形.

(4) 若  $\alpha + \beta + \gamma \leq 3k - 2$ , 则  $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$  三个数中至少有 1 个不大于  $2k - 2$ . 不妨设  $\alpha + \beta \leq 2k - 2$ . 于是当把  $A, B$  两点除去后, 余下的  $2k$  点间至少还连有  $k^2 + 1$  条线段. 于是由归纳假设和它们至少构成  $k$  个三角形. 再加上  $\triangle ABC$  即至少有  $k + 1$  个三角形, 命题于  $n = k + 1$  时成立, 这就完成了归纳证明.

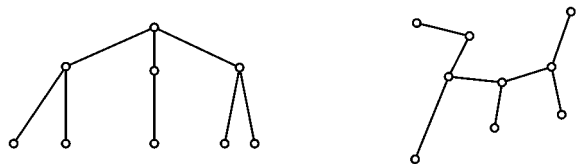
#### 习 题 4

1.  $G$  的生成树有两个悬挂点, 去掉这两点后, 图仍然连通.

2. 其中有  $9 \times 9 = 81$  个度为 4 的顶点, 故至少要去掉  $\left\lceil \frac{81}{2} \right\rceil + 1 = 41$  条边, 才能使每点的度  $< 4$ . 至多可以去掉  $2 \times 11 \times 10 - 120 = 100$  条边, 还可以使图保持连通.

3. 命题不正确, 取  $K_3$  与一个孤立点(和图中其他点都不相邻的点)组成图  $G$ . 则  $G$  有 4 个顶点 3 条边, 它不连通, 显然不是树.

4. (1) 设  $T$  中有  $x$  个悬挂点, 则  $T$  的顶点数  $n = 3 + 1 + x$ , 边数  $e = n - 1 = x + 3$ .  $\sum_{i=1}^n d(v_i) = 3 \times 3 + 2 \times 1 + 1 \times x = 11 + x$ , 故  $11 + x = 2(x + 3)$ ,  $x = 5$ . (2) 如图所示的两棵树均满足要求, 但它们不同构.



(第 4 题图)

5. 设  $T$  有  $n$  个顶点,  $e$  条边, 则  $n = \sum_{i=1}^k n_i$ ,  $e = n - 1$ ,  $\sum_{i=1}^n d(v_i) = \sum_{i=1}^k i n_i = 2e = 2n - 2 = 2 \sum_{i=1}^k n_i - 2$ , 所以,  $n_1 = \sum_{i=2}^k (i - 2)n_i + 2$ .

对于  $r \geq 3$ , 由上面的式子可知  $n_r = \frac{1}{r-2} \left[ \sum_{i \neq r}^k (2-i)n_i - 2 \right]$ .

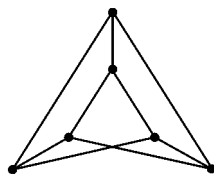
6.  $d_1, d_2, \dots, d_n$  中至少有两个为 1 (否则,  $\sum_{i=1}^n d_i \geq 2n - 1$ ). 对顶点数  $n$  用数学归纳法.  $n = 2$  时显然成立. 设结论在  $n = k$  时成立. 当  $n = k + 1$  时在  $d_1, d_2, \dots, d_k, d_{k+1}$  中存在为 1 的数, 不妨设  $d_{k+1} = 1$ . 易知这  $k + 1$  个数中存在大于等于 2 的数, 设为  $d_k$ . 考虑  $d_1, d_2, \dots, d_{k-1}, (d_k - 1)$  这  $k$  个数,  $d_1 + \dots + d_{k-1} + (d_k - 1) = 2(k + 1) - 2 - 1 - 1 = 2k - 2$ , 由归纳假设知, 存在树  $T'$ , 其顶点为  $v_1, \dots, v_k$ ,  $\sum_{i=1}^k d(v_i) = d_1 + \dots + d_{k-1} + (d_k - 1) = 2k - 2$ . 从  $T'$  中顶点  $v_k$  引出一条边与  $v_{k+1}$  相邻, 得树  $T$ , 则  $\sum_{i=1}^{k+1} d(v_i) = 2k - 2 + 1 + 1 = 2(k + 1) - 2$ . 所以  $T$  即为所求.

7. 作图  $G$ ,  $n$  条线段的端点为  $G$  的顶点, 线段为  $G$  的边, 依题意,  $G$  连通

无圈,故  $G$  是树,且最长的链长度为 2,故  $G$  只有一个顶点不是悬挂点,这点即为  $n$  条线段的公共端点.

8. 参见本节例 6.

9. 假设命题不成立,则必然存在着反例. 我们考察其中  $|E|+|V|$  最小的一个反例. 在这个反例中,一定有  $|E|=|V|+4$  (不然可以把多的边去掉,这时所得的图仍是一个反例,而  $|E|+|V|$  变小,矛盾!),则  $|E|>|V|$ . 图中必存在在一个圈,则最短圈长至少为 5. (不然最短圈长不大于 4,则把这个圈去掉之后,仍将有  $|E|\geq|V|$ ,从而图中仍存在圈. 而这个圈与前一个圈无公共边,矛盾!)另外,图中每一个顶点的度数至少为 3 (不然,若某点度数为 2,则把该点去掉,它连出的两条边连成一条边,仍有  $|E|=|V|+4$ ,而  $|E|+|V|$  变小,矛盾!若某点度数为 1,则把该点及其连出的边去掉,仍有  $|E|=|V|+4$ ,而  $|E|+|V|$  变小,矛盾!若存在孤立点,则把孤立点去掉,  $|E|>|V|+4$ ,而  $|E|+|V|$  变小,矛盾!)



(第 9 题)

取一个最短圈  $C_0$ ,其长度至少为 5,则圈上至少有 5 个点. 对于  $C_0$  上各点,每一点至少与圈外连出一点,且各连出的点互不相同 (否则将出现长度小于 5 的圈),这样易知  $|V|\geq 2\times 5=10$ . 另一方面,  $2|E|=\sum_{v\in V}d(v)\geq\sum_{v\in V}3=3|V|$ ,而  $|E|=|V|+4$ ,故  $2|V|+8\geq 3|V|$ ,  $|V|\leq 8$ ,矛盾!

因此反例不存在,原命题得证.

注: 此题的解法就是所谓的“极端原理”. 要证明某个命题成立,用反证法,反设其不成立,考察其中某个变量  $V\in N$ ,从  $V$  的最小反例中推出矛盾,多了  $V$  最小这个条件使证明难度降低了. 题目的结论是最佳的,当  $|E|=|V|+3$  时,可举出反例如图所示.

10. 用 21 个点表示 21 个人,两点之间有 1 条连线当且仅当这两个点代表的人通了电话. 由已知,存在 1 个长度为  $m$  的奇圈 (长度为奇数的圈称为奇圈).

设图中长度最短的奇圈为  $C$ ,长度为  $2k+1$ .

若  $k=1$ ,则  $C$  为三角形,其代表的 3 人两两通了电话.

若  $k>1$ . 设  $C$  为  $v_1v_2\cdots v_{2k+1}v_1$ ,则  $v_i, v_j$  之间没有连线 ( $1\leq i, j\leq 2k+1, i-j\neq\pm 1(\bmod 2k+1)$ ). 否则,设  $v_i, v_j$  相连,则圈  $v_1v_2\cdots v_iv_j\cdots v_{2k+1}v_1$  与圈  $v_iv_{i+1}\cdots v_jv_i$  长度之和为  $2k+3$ ,故其中必有一个长度小于  $2k+1$  的奇圈,这与  $C$  最短矛盾.

若除  $v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}$  之外的  $21 - (2k + 1) = 20 - 2k$  个点无三角形, 由托兰定理, 它们至多连了  $(10 - k)^2$  条边. 又其中任一点不与  $C$  的相邻两点连 (否则便有三角形), 所以它至多与  $C$  中  $k$  个点相连, 故总的边数

$$\begin{aligned} & 2k + 1 + k(20 - 2k) + (10 - k)^2 \\ &= 100 + 2k + 1 - k^2 \\ &= 102 - (k - 1)^2 \\ &\leq 102 - (2 - 1)^2 = 101, \end{aligned}$$

矛盾!

故图中必有三角形存在, 即存在 3 个人, 他们两两通了电话.

11. 假定存在这样的图, 它的每个顶点的度数都大于 2, 但该图中的任何一个圈的长度都可被 3 整除. 我们来考察具有这种性质的顶点数目最小的图  $G$ . 显然, 该图中存在着长度最小的圈  $Z$ , 该圈上的任意两个不相邻的顶点之间没有边相连, 又因每一顶点的度数都大于 2, 所以圈  $Z$  上的每个顶点都有一边与圈外顶点相连, 设圈  $Z$  依次经过顶点  $A_1, A_2, \dots, A_{3k}$ . 假定存在连接顶点  $A_m$  和  $A_n$  的不包含圈  $Z$  上的边的路径  $S$ . 我们来分别考察由路径  $S$  和  $Z$  的“两半”所组成的圈  $Z_1$  和  $Z_2$ . 由于这两个圈的长度都可被 3 整除, 不难推知路径  $S$  的长度可被 3 整除. 特别地, 对题目中所给出的图, 可知它的任何一个不在  $Z$  上的顶点  $X$ , 都不可能边与  $Z$  的两个不同顶点分别相连. 即, 由圈  $Z$  上的顶点所连出的不在圈上的边, 应分别连向各不相同的顶点.

我们来作另外一个图  $G_1$ , 把图  $G$  中圈  $Z$  上的所有顶点  $A_1, A_2, \dots, A_{3k}$  合并为一个顶点  $A$ , 保留所有不在圈  $Z$  上的顶点及它们之间所连的边, 且分别用边将  $A$  同原来与  $Z$  上的顶点有边相连的顶点逐一相连, 易知  $A$  的度数  $\geq 3k$ . 于是, 图  $G_1$  中的顶点数目少于图  $G$ , 而每个顶点的度数仍都大于 2. 于是, 按照前面所证的结论, 图  $G_1$  中的任何一个圈的长度都可被 3 整除. 这样一来, 我们便得出了矛盾: 因为如前所言, 图  $G$  是具有这种性质的顶点数目最小的图.

这样一来, 在任何所有顶点的度数都大于 2 的图中, 必定存在长度不能被 3 整除的圈. 接下来只需把这一断言应用于我们的题目, 并以城市作为顶点, 以道路作为边即可.

## 习 题 5

1.  $n (n \geq 2)$  为奇数时,  $K_n$  是圈;  $n = 2$  时,  $K_2$  是链. 当  $m, n$  均为偶数时,

$K_{m,n}$  是圈.

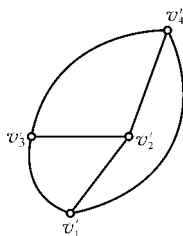
2. 设  $G$  至少有  $2k$  个奇顶点, 删去一边得  $G'$ , 有三种情况: (1)  $G'$  的奇顶点数少 2 个, 则  $G'$  至少需  $k-1$  笔画成; (2)  $G'$  的奇顶点数多 2 个,  $G'$  至少需  $k+1$  笔画成; (3)  $G'$  的奇顶点数不变,  $G'$  至少需  $k$  笔画成.

3. 这两个图都能一笔画.

4. 当  $n$  是奇数时可以画成; 当  $n$  是偶数时不能画成.

5. 作图  $G$ : 顶点表示人, 两人交换过意见就在相应的顶点之间连一条边. 在  $G$  中取一条最长的链  $\mu$ , 设  $\mu$  的一个端点为  $v_1$ , 则与  $v_1$  相邻的  $\delta$  个点  $v_2, \dots, v_{\delta+1}$  均在链  $\mu$  上, 否则  $\mu$  还可延长. 沿着链  $\mu$  走过  $v_2, v_3, \dots, v_{\delta+1}$ , 然后再回到  $v_1$ , 这就是一个长度大于  $\delta$  的圈.

6. 在每个面中取一点  $v'_j (j=1, 2, 3, 4)$ , 如果两个面有公共边, 则在所取的两个点之间连一条边, 这样得到的图  $G^*$  称为  $G$  的对偶图. 在  $G$  中, 从一个面穿过某条边  $e_i$  到另一个面, 就相当于在  $G^*$  中从一个顶点沿一条边到另一个顶点. 因此, 若  $G$  中有满足条件(1)、(2)的折线  $\mu$  存在, 那么  $G^*$  就是一条链 ( $Q_1, Q_2$  不在同一面内) 或一个圈 ( $Q_1, Q_2$  在同一面内), 即  $G^*$  可以一笔画成. 但  $G^*$  的 4 个顶点全是奇顶点, 至少需两笔才能画成.



(第 6 题图)

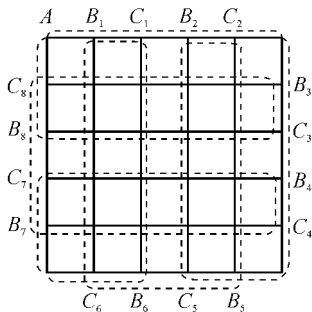
7. 设有  $k$  个标准线段, 将点  $v_i$  与数  $a_i$  相对应: 若  $v_i$  为红色点, 则  $a_i = 1$ ; 若  $v_i$  是蓝色点, 则  $a_i = -1, i=1, 2, \dots, n$ , 于是

$$-1 = a_1 a_n = (a_1 a_2)(a_2 a_3) \cdots (a_{n-1} a_n) = (-1)^k,$$

故  $k$  为奇数.

8. 利用第 7 题的结论, 并参见例 5.

9. 所给的图有 16 个奇顶点  $B_i, C_i (i=1, 2, \dots, 8)$ . 如果要使它是一个圈, 至少要加 8 条边. 如图所添加的 8 条边  $B_i C_i (i=1, 2, \dots, 8)$  后, 能使得该图是一个圈, 图中所示的圈使得路径最短.



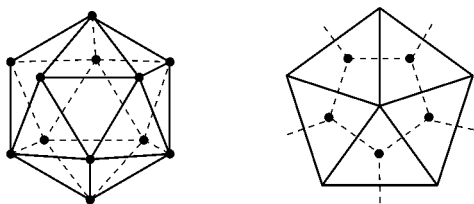
(第 9 题图)

## 习 题 6

1. 当  $n \geq 3$  时,  $K_n$  为哈密顿图. 当  $m = n \geq 2$  时, 完全偶图  $K_{m, n}$  是哈密顿图.

2. 请读者自己在图上找.

3. 正二十面体是由 20 个全等正三角形围成的. 在每个正三角形的中心设一个顶点, 仅当两个正三角形有公共边时, 在相应的两顶点间连一边, 则构成由 12 个正五边形围成的正十二面体. 从哈密顿周游世界的游戏中已知可从正十二面体上找到一个哈密顿圈, 用剪刀沿此哈密顿圈剪开, 即可把正二十面体剪成两块, 且把每个正三角形也剪成两块, 截痕不过二十面体顶点.



(第 3 题图)

4. 作图  $G$ : 顶点表示  $1 \times 1 \times 1$  的立方体, 当且仅当两小立方体有公共面时, 对应的两顶点以边相连. 易知  $G$  是偶图, 设  $G = (X, Y; E)$ , 若角上一小立方体对应点属于  $X$ , 则中心的小立方体对应的点属于  $Y$ , 又因为  $|X| = 14$ ,  $|Y| = 13$ . 故  $G$  无哈密顿链.

5. (1) 用 6 个点  $v_1, v_2, \dots, v_6$  代表六个人, 若  $v_i, v_j$  能相互合作, 则  $v_i$  与  $v_j$  相邻. 由已知条件知,  $d(v_i) \geq 3, i = 1, 2, \dots, 6$ . 根据定理四,  $G$  中有一个哈密顿圈  $C = v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_3} v_{i_1}$ , 在圈中, 相邻的两点代表的两人是能相互合作的.

(2) 将  $v_{i_1}, v_{i_2}$  分在一组,  $v_{i_3}, v_{i_4}$  分在一组,  $v_{i_5}, v_{i_6}$  分在一组, 也可将  $v_{i_6}, v_{i_1}$  分在一组,  $v_{i_2}, v_{i_3}$  分在一组,  $v_{i_4}, v_{i_5}$  分在一组, 这是两种不同的分组方案.

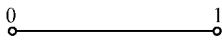
6. 用  $2n$  个顶点表示  $2n$  个大臣, 若两人不是仇人, 则相应的顶点相邻, 得图  $G$ . 在  $G$  中, 每个顶点  $v$  的度  $d(v) \geq (2n-1) - (n-1) = n$ , 根据定理四,  $G$  中有哈密顿圈, 按圈上顶点的顺序安排位置即可.

7. 作图  $G$ : 9 个顶点表示 9 名小孩, 两小孩认识, 则相应的顶点相邻. 在  $G$  中, 任意两个顶点  $v$  与  $v'$ , 有  $d(v) + d(v') \geq 8$ , 根据定理二,  $G$  有哈密顿

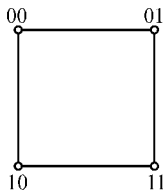
链. 按链上顶点顺序把 9 名小孩排成一行即可.

8. 作图  $G$ : 顶点代表原料, 每种菜对应于一条边. 在  $G$  中, 每个顶点的度  $\geq 4$ , 根据定理四,  $G$  中有一个哈密顿圈.

9. 设集合  $A$  有  $n$  个元素, 把每个元素编号, 设  $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , 我们用一个长度为  $n$  的由 0 与 1 构成的序列来表达每个子集, 规则是  $A$  的元素  $i$  在该子集中, 则在序列的第  $i$  位上写 1, 否则写 0. 例如空集  $\emptyset = 0, 0, 0, \dots, 0$ .  $\{1\} = 1, 0, 0, \dots, 0$ ,  $\{n\} = 0, 0, \dots, 1$ ,  $\{2, 3\} = 0, 1, 1, 0, \dots, 0$ , 则  $A$  的全部子集共有  $2^n$  个. 以这  $2^n$  个子集对应的序列为顶点, 仅当两序列只有一个同位数码相异时, 在此二顶点间连一边, 得一个图  $G$ , 例如  $n = 1$  时为图 1 所示的单位线段,  $n = 2$  时,  $G$  为图 2 所示的正方形, 图 2 是两个图 1 如下作成的:

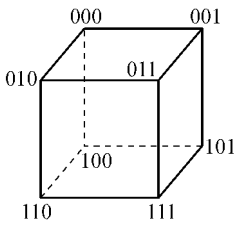


(第 9 题图 1)



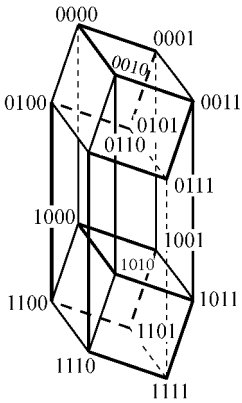
(第 9 题图 2)

在一个的 0, 1 码前方都加上 0, 变成 00, 01, 在另一个的 0, 1 码前都加上 1, 变成 10, 11, 再把一个放在另一个上方, 连上两个“竖边”作成的一个正方形. 复制两个图 2, 把一个放在另一个的上方, 把上方的各顶点标志码前方都加一个 0, 把下方各顶点标志码前方都加一个 1, 再用 4 条竖线连接上下相对的顶点构成  $n = 3$  时的图  $G$ ,  $G$  是一个立方体.



(第 9 题图 3)

如果  $n = k$  的图  $G$  已作好, 则把  $n = k$  的图及其复制品分别放在上方和下方各一个, 再把上方的图的各顶点标码前方都加上一个 0, 把下方的图的各顶点标码前方都加上一个 1, 把上、下两方对应的顶点连一条竖直的边, 则得  $n = k + 1$  的图  $G$ . 图 3 是  $n = 3$  的情形, 图 4 是  $n = 4$  的情形,  $n = k$  的图  $G$  称为  $n$  维立方体图. 用数学归纳法容易证明  $n$  维立方体图有哈密顿圈 ( $n \geq 2$ ). 对于  $n = 1$ , 显然成立, 因为这时 1 维立方体图是  $K_2$ , 是一条哈密顿链. 对于  $n = 2$ , 是四边形, 显然是哈密顿圈. 对于  $n = k$ , 若是哈密顿图, 考虑  $n = k + 1$ , 把  $G$  中上方和下方的  $n = k$  时的哈密顿圈上各删去一条对应边, 再把这两条对应边的对应端点间的两条边选来与上下方的哈密顿链并成一个  $n = k + 1$  时的哈密顿圈, 如图 4 中的粗



(第 9 题图 4)



线所示.

把  $G$  中的顶点按哈密顿圈上的顺序放在一个圆周上,从任一顶点出发,沿逆时针(或顺时针)为序,则把全部子集排了序,使得相邻子集恰相差一个元素.

10. 首先,每个点的度至少为 3,不然存在一点  $A$  仅连出至多两边,则把其中一边去掉后,剩下的  $A$  点必不在某个圈上,这与条件不符. 因此  $n \geq 3$ .

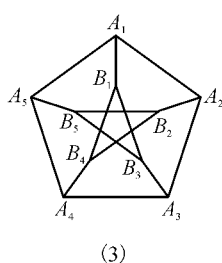
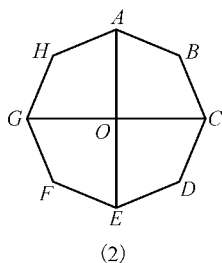
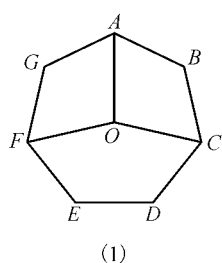
不难证得  $n \neq 4, 5, 6$ .

若  $n = 7$ ,则去掉其中度数最大的点(显然该点度数至少为 3),得到一个长度为 6 的圈. 由于与该点相邻的点在圈上必不相邻(否则将出现长度为 7 的圈),于是被去掉的点至多能与圈上三个互不相邻的点相连,因此该点度数至多为 3,从而可知图中各点度数均恰为 3,而  $3 \times 7 = 21$  是奇数,而实际上各点度数之和应为偶数,矛盾!

若  $n = 8$ ,则去掉度数最大的点后,得到一个长度为 7 的圈. 被去掉的点至多能与圈上三个互不相邻的点相连,因此它的度数至多为 3. 由此可知各点度数均为 3. 如图(1),  $A, C, F, O$  的度数已经为 3,不能再连出任何边. 而  $B, D, E, G$  每点还要各连出一条边. 若  $B$  与  $G$  相连,则  $D$  与  $E$  相连(连有两条边),不可能. 若  $B$  与  $D$  相连,则  $E$  与  $G$  相连,而此时图中存在长度为 8 的圈,矛盾! 若  $B$  与  $E$  相连,则  $D$  与  $G$  相连,而此时图中也存在长度为 8 的圈,矛盾!

若  $n = 9$ ,由于  $3 \times 9 = 27$  不是偶数,因此不可能每点都是 3 度,故至少有一点,度数至少为 4. 我们把度数最大的点去掉,得到一个长度为 8 的圈,因此被去掉的点至多能与圈上 4 个互不相邻的点相连,因此图中的点度数最大为 4,最小为 3. 如图(2),则点  $B$  至少要再连出一条边. 显然  $B$  不能与  $A, C$  再连边. 若  $B$  与  $D$  连边,则图中存在长度为 9 的圈,同理  $B$  不能与  $H$  相连. 若  $B$  与  $F$  相连,则图中也将存在长度为 9 的圈,矛盾! 故  $B$  只可能与  $E$  或  $G$  连边. 由对称性可设  $B$  与  $E$  相连. 仿上讨论可知  $H$  与  $C$  相连(若  $H$  与  $E$  相连,则  $E$  的度数已达到 5,矛盾!),  $F$  与  $A$  相连,  $D$  与  $G$  相连. 此时图中任何两点不可能再连边,则去掉点  $A$  后,图中应存在长度为 8 的圈. 而事实上,若图中存在长度为 8 的圈,则  $BE, BC, HG, HC, FE, FG$  必在圈上,而该 6 边已构成一个长度为 6 的圈,矛盾!

由以上讨论可知,满足要求的  $n$  值至少为 10.



(第 10 题图)

$n = 10$  的例子如图(3), 称 Peterson 图.

11. 若恰为五人, 设原来的座次是  $ABCDEA$ , 调整成  $ADBCEA$  即可. 若超过五人, 以人为顶点, 仅当两人原来不是邻座时, 在此二顶点间连一边, 得图  $G$ . 由于每个顶点的度数都是  $|V(G)| - 3$ , 于是任意两个顶点度数之和为  $2n - 6$ ,  $n$  是顶点数. 又  $n > 5$ , 故  $2n - 6 \geq n$ , 由定理三,  $G$  中有哈密顿圈, 按圈上的次序请各人入席即可.

### 习 题 7

1. 设  $G$  是连通的, 否则考虑它的每一个连通分支. 若每个顶点的度  $\geq 6$ , 则  $6v \leq 2e$ , 即  $v \leq \frac{e}{3}$ . 又因为  $f \leq \frac{2e}{3}$ , 故  $2 = v - e + f \leq \frac{e}{3} - e + \frac{2e}{3} = 0$ , 矛盾.

2. 设每个点的度数  $> 4$ , 则  $2e = \sum_{i=1}^v d(v_i) \geq 5v$ , 即  $v \leq \frac{2}{5}e$ . 由于  $e \leq 3v - 6$ , 代入得  $e \leq \frac{6}{5}e - 6$ , 即有  $e \geq 30$ , 矛盾.

3. 由欧拉公式,  $f = 2 + e - v = 8$ . 因为平均每个面有边  $\frac{2e}{f} = 3$  条, 由于每个面至少有三条边, 所以每个面恰有三条边.

4. 设  $G$  和  $\bar{G}$  都是平面图, 图  $G$  和  $\bar{G}$  的顶点数是  $v$ , 边数分别为  $e$  和  $e'$ , 则  $e + e' = \frac{1}{2}v(v-1)$ . 由不等式  $e \leq 3v - 6$ ,  $e' \leq 3v - 6$ , 相加得  $\frac{1}{2}v(v-1) = e + e' \leq 6v - 12$ ,  $v^2 - 13v + 24 \leq 0$ ,  $v \leq 11$ , 与题设矛盾.

5. 考虑对偶图(参见习题 5 第 6 题), 由于  $K_5$  不是平面图, 所以  $f \leq 4$ .

6.  $n$  个顶点的凸多面体有  $C_n^2$  条棱, 每个面至少有 3 条棱, 故多面体的面数不大于  $\frac{2}{3}C_n^2$ , 由欧拉公式得:  $n + \frac{2}{3}C_n^2 \geq C_n^2 + 2$ , 化简得  $n^2 - 7n + 12 \leq$

0,  $n$  只能取 3 或 4, 命题得证.

7. 参见第 1 题.

8. 以多面体的顶点为图的顶点, 以多面体的棱为边, 构成一个连通平面图. 则  $v \geq 4$ ,  $f \geq 4$ . 由欧拉公式  $e = v + f - 2 \geq 6$ , 即没有棱数少于 6 的多面体.

若有  $e = 7$  的图, 则  $3f \leq 2 \times 7$ , 即  $f = 4$ , 但四个面的多面体只有 6 条棱, 故无 7 条棱的多面体.

考虑  $k \geq 4$ , 以  $k$  边形为底的棱锥为  $2k$  条棱的多面体, 而把  $k-1$  边形为底的棱锥底角处的一个三面角“锯掉一个小尖儿”, 得  $2k+1$  条棱的多面体. 综上,  $n \geq 6$ ,  $n \neq 7$  时, 有  $n$  条棱的多面体.

9. 设这个凸多面体有  $x$  个顶点, 且设  $10n$  个面上分别有  $C_1, C_2, \dots, C_{10n}$  个顶点和  $a_1, a_2, \dots, a_{10n}$  条边, 故凸多面体棱的数目为  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10n} a_i$ . 由欧拉定理得  $10n + x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10n} a_i + 2$ . 又  $x \leq \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{10n} a_i$ , 所以  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10n} a_i + 2 - 10n \leq \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{10n} a_i$ , 即  $\sum_{i=1}^{10n} a_i \leq 60n - 12$ .

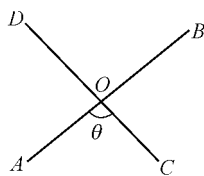
若  $10n$  个面中不存在  $n$  个面边数相同, 则  $\sum_{i=1}^{10n} a_i \geq (3+4+\dots+12)(n-1) + 13 \times 10 = 75n + 55 > 60n - 12$ , 矛盾, 所以至少有  $n$  个面边数相同.

10. 图中的面只有 2 边形及 6 边形两种, 分别有 3 个. 若此图有哈密顿圈, 根据定理四,  $4(f'_6 - f''_6) = 0$ , 即  $f'_6 = f''_6$ , 但  $f'_6 + f''_6 = 3$ , 这不可能.

11. 由定理四,  $2(f'_4 - f''_4) + 3(f'_5 - f''_5) = 0$ . 所以  $f'_4 - f''_4$  是 3 的倍数, 即 5 个四边形中有 4 个在圈外, 一个在圈内或 4 个在圈内, 一个在圈外. 如果这个哈密顿圈既过  $e$ , 又过  $e'$ , 则  $e$  的两侧的两个四边形分别在哈密顿圈的内部与外部,  $e'$  的两侧的两个四边形也分别在圈的内部与外部, 从而圈内、圈外至少各有两个四边形, 矛盾.

12. 作图  $G = (V, E)$ , 其中  $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $G$  中两顶点  $x_i, x_j$  相邻的充要条件是  $d(x_i, x_j) = 1$ . 设  $G$  中存在不相同的两边  $AB, CD$  交于  $O$  点, 如图所示. 因为  $d(A, B) = 1, d(C, D) = 1$ , 不失一般性, 设  $d(O, A) \leq \frac{1}{2}, d(O, C) \leq \frac{1}{2}$ ,  $AB$  与  $CD$  间夹角为  $\theta$ , 则  $d(A, C) = \{d^2(O, A) + d^2(O, C) - 2d(O, A) \times d(O, C) \cos \theta\}^{\frac{1}{2}}$ , 按上述条件仅当  $\theta = \pi$  且  $d(O, A) = \frac{1}{2}$ ,

$d(O, C) = \frac{1}{2}$  时,  $d(A, C) = 1$ . 但这时  $A$  和  $D$  重合,  $B$  和  $C$  重合. 即  $AB$  与  $DC$  为同一边, 这与假设是两条不相同的边矛盾. 除此情况外, 还有  $d(A, C) < 1$ , 这与  $S$  中任意两点距离不小于 1 的假设条件矛盾. 综上所述,  $G$  为平面图, 于是  $G$  的边数  $e \leq 3n - 6$ . (请读者比较第二节例 7 的结论)

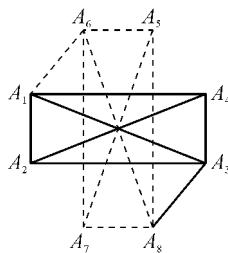


(第 12 题图)

### 习 题 8

1. 由例 1 知, 必存在同色三角形, 不妨设  $\triangle A_1 A_2 A_3$  为红色. 对  $\triangle A_4 A_5 A_6$  的三边, 分两种情况: (1)  $\triangle A_4 A_5 A_6$  三边均为红色, 命题得证. (2)  $\triangle A_4 A_5 A_6$  有一边为蓝色, 设为  $A_4 A_5$ . 对于  $A_1 A_4, A_2 A_4, A_3 A_4$ , 若其中有两边为红边, 则又出现一红色三角形, 若其中有两边为蓝边, 设  $A_1 A_4, A_2 A_4$  为蓝色, 这时  $A_1 A_5, A_2 A_5$  中若有一边为蓝, 则存在蓝色三角形, 若  $A_1 A_5, A_2 A_5$  都为红边, 则  $\triangle A_1 A_2 A_5$  为红色三角形, 命题得证.

2. 若不存在三条无公共端点的同色线段, 如图, 不妨设  $A_1 A_2$  为红色. 由假设  $A_3 A_4, A_5 A_8, A_6 A_7$  三线段不可能都是蓝色, 不妨设  $A_3 A_4$  为红色. 由于  $A_1 A_2, A_3 A_4$  为红色, 得  $A_5, A_6, A_7, A_8$  四点两两连线皆蓝色, 同样可得  $A_1, A_2, A_3, A_4$  四点两两连线皆红色. 不妨设  $A_1 A_6$  为蓝色, 则  $A_3 A_8$  必为红色, 此时不论对  $A_4 A_5$  染什么颜色, 均与假设矛盾.



(第 2 题图)

3. 把每个三角形的最短边染成红色, 剩下的边染成蓝色. 由于  $r_2 = 6$ , 必出现同色三角形, 而这个同色三角形必定是红色的, 所以它的最长边也是另一个三角形的最短边.

4. 取两色完全图  $K_9$  的顶点  $A$ , 若  $A$  连有 4 条蓝边  $AA_1, AA_2, AA_3, AA_4$ , 则  $K_9$  中以  $A_1, A_2, A_3, A_4$  为顶点的完全子图  $K_4$  不含蓝边. 如果  $A$  连有 6 条红边  $AA_1, AA_2, \dots, AA_6$ , 则  $K_9$  中以  $A_1, \dots, A_6$  为顶点的完全子图含有同色三角形  $\triangle A_i A_j A_k (1 \leq i, j, k \leq 6)$ . 由于  $K_9$  不含蓝色三角形, 故  $\triangle A_i A_j A_k$  是红色三角形. 则  $A, A_i, A_j, A_k$  为顶点的完全子图  $K_4$  是红色的. 如果  $K_9$  中每一顶点都恰好连有 5 条红边, 则  $K_9$  中红边数为  $\frac{5 \times 9}{2}$ , 不可能.

5. 由定理三,  $r(3, 6) \leq r(3, 5) + r(2, 6) - 1 = 14 + 6 - 1 = 19$ .

6. 由定理三,  $r(4, 4) \leq r(4, 3) + r(3, 4) = 9 + 9 = 18$ .

7. 考虑  $n$  色完全图  $K_{r_n}$ , 染色方法是当且仅当  $|x - y|$  在第  $i$  类时, 将  $(x, y)$  染上第  $i$  种颜色. 由定理二,  $K_{r_n}$  中一定有一个同色的三角形. 设这个三角形的三边均为第  $j$  种颜色, 则在  $1, 2, \dots, r_n$  中有三个自然数  $a > b > c$ , 使  $x = a - c, y = a - b, z = b - c = x - y$  均在第  $j$  类中.

8. 由定理二,  $r_6 \leq [6 \lg] + 1 = 1958 < 1978$ , 再由上题许尔定理, 命题成立.

9. 在  $A_1, A_2, \dots, A_7$  中, 前 6 个点构成的三角形必有两个是同色的. 它们如果没有公共边, 则命题已成立. 如果有公共边, 不妨设为  $\triangle A_1 A_2 A_3$ 、 $\triangle A_1 A_2 A_4$ , 现除去  $A_1$  点, 加进  $A_7$  点, 则又存在两个同色三角形, 在这两个同色三角形中必有一个不同于  $\triangle A_2 A_3 A_4$ , 这个三角形与  $\triangle A_1 A_2 A_3$  或  $\triangle A_1 A_2 A_4$  中的一个无公共边.

10. 用六个点表示六条直线, 若两直线异面, 则对应两点连线染红色; 若两直线共面, 则对应两点连线染蓝色. 得两色完全图  $K_6$ . 故其中必有同色三角形. 若是红色三角形, 则三顶点对应的三直线两两异面, 若为蓝色三角形, 则三顶点对应的三直线两两共面, 由于题设三直线不共于一面, 故这三直线所在的三个平面两两相交于这三条直线, 由此得这三直线互相平行或交于一点.

11. 取由四个无理数组成的集合  $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ . 从这个集合中任意取出三个数, 必然是: 或者  $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$  都被取出, 此时  $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$  是有理数; 或者  $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$  都被取出, 此时  $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$  是有理数. 可见当  $n = 4$  时题中结论不成立. 因此, 满足题中要求的  $n$ , 必有  $n \geq 5$ . 下面证明: 任意给定五个无理数, 总可以从中找到这样的三个, 其中任意两个无理数之和仍是无理数.

设  $\{x, y, z, u, v\}$  是任意给定的由五个无理数组成的集合. 把这五个数当成五个点, 如果两个数之和为无理数, 则对应的两点之间联结一条红色边; 如果两个数之和为有理数, 则对应的两点之间联结一条蓝色边. 于是得一个 2 色 5 阶完全图  $K_5$ . 先证明这个 2 色 5 阶完全图  $K_5$  中不含蓝边三角形. 否则, 设有蓝边三角形  $xyz$ , 即  $x + y, y + z, z + x$  都是有理数, 则

$$x = \frac{1}{2}[(x + y) + (z + x) - (y + z)]$$

也应有理数,与  $x$  是无理数矛盾. 再证明这个 2 色完全图  $K_5$  中不含蓝边五边形. 否则,设有蓝边五边形  $xyzuv$ , 即  $x+y, y+z, z+u, u+v, v+x$  都是有理数, 则

$$x = \frac{1}{2}[(x+y) + (z+u) + (v+x) - (y+z) - (u+v)]$$

也应有理数,与  $x$  是无理数矛盾. 这个  $K_5$  中既不含蓝边五边形,也不含蓝边三角形,故由图 8-3 后的 \* 得知,必含红边三角形. 设  $\triangle xyz$  是红边三角形, 则有  $x+y, y+z, z+x$  都是无理数.

12. 如图 1 对  $K_7$  二染色,红色边以实线、蓝色边以虚线表示. 有 4 个红色三角形:  $\triangle A_1A_4A_6, \triangle A_2A_4A_6, \triangle A_3A_4A_6, \triangle A_7A_4A_6$ , 有 4 个蓝色三角形:  $\triangle A_1A_2A_3, \triangle A_2A_3A_7, \triangle A_1A_3A_7, \triangle A_1A_2A_7$ , 易见任何两个相同颜色的单色三角形都有一条公共边, 所以  $n \geq 8$ .

下面证明  $n=8$  时命题一定成立. 用反证法证之.

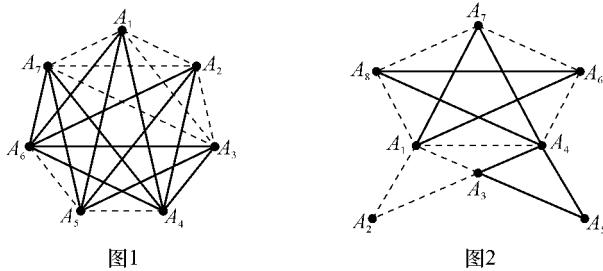
先证明一个引理: 倘若命题不成立, 则必存在一个红色三角形和一个蓝色三角形, 二者恰有一个公共点.

首先, 二染色  $K_8$  必存在一个单色三角形. 不妨设其为蓝色  $\triangle A_1A_2A_3$ . 这时  $A_3A_4A_5A_6A_7A_8$  中必存在一个单色三角形, 显然不能是蓝色三角形. 若这个红色三角形含顶点  $A_3$ , 则引理成立. 不然设  $\triangle A_4A_5A_6$  为红色三角形, 则  $\triangle A_1A_2A_3$  与  $\triangle A_4A_5A_6$  间有 9 条连线, 至少有 5 条是同色的. 不妨设为红色, 则  $A_1, A_2, A_3$  发出至少 5 条红边, 其中有一点至少发出 2 条红边, 由该点形成一个红色三角形且与  $\triangle A_1A_2A_3$  有一个公共点. 故引理必成立. 下面证本命题: 倘若命题不成立, 由引理可设  $\triangle A_1A_2A_3$  为蓝色三角形,  $\triangle A_3A_4A_5$  为红色三角形. 考虑  $A_1A_4A_6A_7A_8$  间的连线, 显然其内不能再有单色三角形, 故该  $K_5$  由一个蓝五圈和一个红五圈组成(由图 8-3 后的 \* 知). 见图 2. 红色边用实线, 蓝色边用虚线, 不妨设  $A_1A_4A_6A_7A_8$  为蓝五圈,  $A_1A_7A_4A_8A_6$  为红五圈, 下面讨论  $A_3A_7$  的颜色. 若  $A_3A_7$  为蓝色, 则  $A_3A_8, A_3A_6$  必为红色(不然  $\triangle A_3A_7A_8$  或  $\triangle A_3A_6A_7$  为蓝色, 与  $\triangle A_1A_2A_3$  发生矛盾). 而此时  $\triangle A_3A_6A_8$  为红色, 又与  $\triangle A_3A_4A_5$  发生矛盾!

若  $A_3A_7$  为红色. 再讨论  $A_3A_8$  的颜色. 若  $A_3A_8$  为蓝色, 则  $A_2A_4$  必须为红色,  $A_2A_8$  必须为蓝色,  $A_2A_7$  必须为红色. 故  $\triangle A_2A_4A_7$  为红色三角形, 与  $\triangle A_3A_4A_5$  发生矛盾!

若  $A_3A_8$  也是红色, 则  $A_5A_7$  必须是蓝色,  $A_5A_8$  必须是蓝色. 故  $\triangle A_5A_7A_8$  是蓝色, 与  $\triangle A_1A_2A_3$  发生矛盾!

综上所述,  $n = 8$  时命题必成立, 故所求最小自然数是 8.



(第 12 题图)

13. 用 20 个点代表 20 支球队. 在第一轮互相比赛过的球队之间连红线, 在第二轮互相比赛过的球队之间连蓝线, 则每一个点都连出一红一蓝两条边, 从而整个图必然由若干个偶圈组成. 在每个偶圈中可以选出半数顶点, 任两个顶点不相邻, 则共选出了 10 支球队, 两两未赛过. 原命题得证.

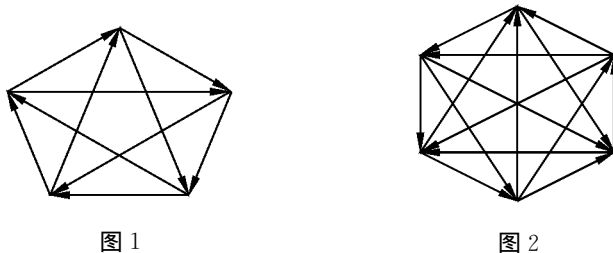
### 习 题 9

1. (1) 当  $n = 5$  时, 图 1 为所求. 当  $n = 6$  时, 图 2 为所求.

(2) 假设  $n = k$  时, 存在满足要求的有向图.

当  $n = k + 2$  时, 先在顶点  $V_1, V_2, \dots, V_k$  间作出满足要求的  $k$  阶有向图. 对于另两个顶点  $V_{k+1}, V_{k+2}$ , 令  $V_1, V_2, \dots, V_k$  均指向  $V_{k+1}$ ;  $V_{k+2}$  指向  $V_1, V_2, \dots, V_k$ , 再令  $V_{k+1}$  指向  $V_{k+2}$ , 则  $V_{k+1}$  通过  $V_{k+2}$  到达  $V_1, V_2, \dots$  (显然  $V_{k+2}$  可以直达  $V_1, V_2, \dots, V_k$ ),  $V_1, V_2, \dots, V_k$  可通过  $V_{k+1}$  到达  $V_{k+2}$  (显然  $V_1, V_2, \dots, V_k$  可以直达  $V_{k+1}$ ). 故该  $k + 2$  阶图仍满足要求.

由(1)、(2)知对任意  $4 < n \in \mathbb{N}$ , 都存在满足要求的  $n$  个城市间的改道方案. 原命题得证.



(第 1 题图)

2. 设  $G$  有回路  $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ , 在  $v_2, v_3, \dots, v_{k-1}$  中, 取第一个使弧  $(v_{i+1}, v_1)$  存在的  $v_i$ , 则有弧  $(v_1, v_i)$ , 因而  $(v_1, v_i, v_{i+1})$  就是一个三角形的回路.

3. 我们来证明, 如果现有的航线系统满足条件  $f$ , 并且 2 个城市  $A$  与  $B$  没有航线联系, 那么这时可用航线  $A \rightarrow B$  或  $B \rightarrow A$  联系, 使所得航线系统仍旧满足条件. 假设相反: 在新的航线系统中条件  $f$  未被满足. 那么在实现航线  $A \rightarrow B$  后出现闭合路线  $B \rightarrow C_1 \rightarrow \dots \rightarrow C_n \rightarrow A \rightarrow B$ . 类似地, 在实现航线  $B \rightarrow A$  后出现闭合路线  $A \rightarrow D_1 \rightarrow \dots \rightarrow D_m \rightarrow B \rightarrow A$ . 但是在实现  $A$  与  $B$  之间航线前已经有闭合航线  $A \rightarrow D_1 \rightarrow \dots \rightarrow D_m \rightarrow B \rightarrow C_1 \rightarrow \dots \rightarrow C_n \rightarrow A$  (可能有某些顶点  $C_i$  与  $D_j$  重合, 即以前的航线系统不满足条件  $f$ , 因为可从  $A$  地起飞然后返回. 矛盾.)

4. 参见例 4.

5. 用  $n$  个点表示  $n$  名棋手, 如果  $v_i$  胜  $v_j$ , 我们就作一条从  $v_i$  到  $v_j$  的弧, 得有向图  $D$ . 如果  $D$  中没有回路, 那么必有一点  $v$  的入度是 0, 这点就表示在比赛中全胜的人. 同样可证有一个人所有比赛中全负.

6. 设  $v_1, v_2, \dots, v_n$  中,  $v_p$  的子孙后代最多, 那么  $v_p$  就是这  $n$  个人的共同祖先, 否则设  $v_p$  不是  $v_q$  的祖先, 那么  $v_p$  与  $v_q$  的共同祖先  $v_r \neq v_p$ , 而  $v_r$  的子孙后代至少比  $v_p$  多 1, 矛盾.

7. 乙胜了两场.

8. 把循环赛对应于一个竞赛图, 由题设, 无一顶点的出度为  $n-1$ . 由抽屉原理, 至少有两个顶点的出度相同. 由定理四, 命题得证.

9. 用定理三.