1. 填空（18 分）

(1) 设随机过程 $X(t)=A+Vt$，$0\leqslant t<+\infty$，其中 A 和 V 是相互独立的随机变量，并且 A 和 V 都服从标准正态分布 N(0, 1)，则 $X(t)$的均值函数 m(t)为__0__，方差函数 D(t)为__$1+t^2$__，协方差函数 C(s, t)为__1+st__。

(2) 参数为 λ 的泊松过程的点间间距是相互独立的随机变量，且服从均值为__1/λ__的__指数__分布。

(3) 病人以每小时 3 人的泊松流到达医院，假设该医院只有一个医生服务且容量为无穷，医生的服务时间服从指数分布，并且平均服务一个病人为 30 分钟。则当 t→∞时，医生空闲时间的比例为__0__，平均有__∞__个病人在等待看医生，病人的平均等待时间为__∞__，一个病人等待超过一个小时的概率为__1__，在医生服务一个病人的时间内平均有__1.5__个病人到达医院。

2. (15 分) 设某保险公司收到的索赔遵循一个参数为 λ 的泊松过程 $\{N(t), t\geqslant 0\}$，假设一个索赔是车险的概率为 p，以 $X(t)$表示时间$(0, t]$（$t\geqslant 0$）内保险公司收到的车险索赔的次数。证明 $\{X(t), t\geqslant 0\}$ 是一个参数为 $p\lambda$ 的泊松过程。

证明：（1）显然 $X(0)=0$。

（2）任取 $0<t_1<t_2<\ldots<t_n$，因为 $X(t_i)-X(t_{i-1})$只是在$(t_{i-1}, t_i]$内收到的部分部分索赔，而 $N(t_1)-N(t_0)$，$N(t_2)-N(t_1)$，…，$N(t_n)-N(t_{n-1})$相互独立，所以 $X(t_1)-X(t_0)$，$X(t_2)-X(t_1)$，…，$X(t_n)-X(t_{n-1})$相互独立，即 $\{X(t), t\geqslant 0\}$ 是独立增量过程。

（3）对任意 $t\geqslant 0$，$s\geqslant 0$，因为

$$P\{X(t+s)-X(s)=k \mid N(t+s)-N(s)=n\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\qquad k=0,1,2\ldots,n$$

所以 $P\{X(t+s)-X(s)=k\}$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}P\{X(t+s)-X(s)=k, N(t+s)-N(s)=n\}$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}P\{X(t+s)-X(s)=k \mid N(t+s)-N(s)=n\}\cdot P\{N(t+s)-N(s)=n\}$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

$$=\frac{(p\lambda t)^k}{k!}e^{-p\lambda t},\qquad k=0,1,2,\ldots$$

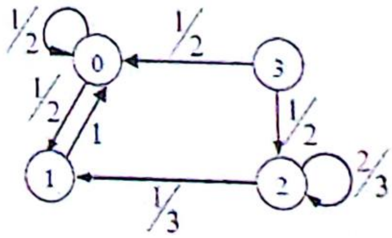
故 $\{X(t), t\geqslant 0\}$ 是一个参数为 $p\lambda$ 的泊松过程。

3. （15 分）设齐次马氏链$\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$的状态空间$E=\{0,1,2,3\}$，一步状态转移矩阵

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

（1）画出状态转移图；（2）讨论各状态性质；（3）分解状态空间。

解（1）状态转移图：



（2）因为对一切 n≥1，均有$f_{33}^{(n)}=0$，所以$f_{33}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{33}^{(n)}=0<1$，所以状态 3 是非常返的。

因为$f_{22}^{(1)}=\frac{2}{3}$，对一切 n≥2，均有$f_{22}^{(n)}=0$，所以$f_{22}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{22}^{(n)}=\frac{2}{3}<1$，所以状态 2 是非常返的。

因为对一切 n≥3，均有$f_{00}^{(n)}=0$，所以$f_{00}=f_{00}^{(1)}+f_{00}^{(2)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$，所以状态 0 是常返的。

又因为$\mu_0=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{00}^{(n)}=f_{00}^{(1)}+2f_{00}^{(2)}=\frac{3}{2}<\infty$，所以状态 0 是正常返的。

因为$p_{00}(1)=\frac{1}{2}>0$，所以状态 0 是非周期的。

因为状态 0 与 1 互通，所以状态 1 也是非周期、正常返的。

（3）状态空间分解为 E＝N＋C＝{2, 3}＋{1, 0}。

4. （16 分）设齐次马氏链$\{X(n), n=0,1,2,\ldots\}$的状态空间$E=\{1,2,3\}$，一步状态转移矩阵

4. （16 分）设齐次马氏链 $\{X(n), n=0,1,2,\ldots\}$ 的状态空间 $E=\{1,2,3\}$，一步状态转移矩阵

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(1) 论其遍历性；

(2) 求平稳分布；

(3) 求概率 $P\{X(4)=1 \mid X(1)=2, X(2)=3\}$；

(4) 已知 $X(0)$ 的分布律如右表所示：

$X(0)$	1	2	3
P	0.2	0.3	0.5

求 $P\{X(1)=1, X(2)=2, X(3)=3\}$ 和 $X(2)$ 的分布律。

解 （1）因为 $P^2=\begin{pmatrix} 12 & 12 & 6 \\ \frac{5}{18} & \frac{8}{9} & \frac{5}{18} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$ 中所有元素均大于 0，所以该齐次马氏链是遍历的。

（2）遍历的齐次马氏链一定存在极限分布，其极限分布就是平稳分布

$$\begin{cases} \Pi=\Pi P \\ \sum_{i=1}^{3}\pi_i=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1=\frac{1}{2}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_2 \\ \pi_2=\frac{1}{2}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_2+\frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_3=\frac{1}{3}\pi_2+\frac{1}{2}\pi_3 \\ \sum_{i=1}^{3}\pi_i=1 \end{cases} \Rightarrow \Pi=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{2}{7}\right)$$

（3）$P\{X(4)=1 \mid X(1)=2, X(2)=3\}=P\{X(4)=1 \mid X(2)=3\}=p_{31}(2)=\frac{1}{6}$

（4）$X(1)$ 的分布律 $\tilde{P}_1=\tilde{P}_0 P=(0.2 \quad 0.3 \quad 0.5)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=(0.2 \quad 0.45 \quad 0.35)$

$P\{X(1)=1, X(2)=2, X(3)=3\}$

钟。接待室共有 3 个座位供来访者（包括正被接待的人）坐。若来访者看到没有空位立即离去。求

（1）2 个校长都空闲的概率；

（2）来访者未被接待即离去的概率；

（3）平均每每小时进入接待室的来访者人数；

（4）平均忙的校长数。

由题意，按M/M/c/k混合制系统处理，其中 $c=2$，$k=3$，$\lambda=4$（人/小时），$\mu=$ 3(人/小时)，$\rho = \lambda/\mu = 4/3$，因此

$$p_0 = \left[\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!} + \sum_{j=c}^{K}\frac{\rho^j}{c!c^{j-c}}\right]^{-1} \qquad p_j = \begin{cases} \dfrac{\rho^j}{j!}p_0, & 1 \le j \le c-1 \\ \dfrac{\rho^j}{c^{j-c}\cdot c!}p_0, & c \le j \le K \end{cases}$$

（1）2 个校长都空闲的概率 =

$$p_0 = \left[\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!} + \sum_{j=c}^{K}\frac{\rho^j}{c!c^{j-c}}\right]^{-1} = \left[1+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^2+\frac{1}{2\times 2}\left(\frac{4}{3}\right)^3\right]^{-1} = \frac{27}{103}$$

（2）来访者未被接待即离去的概率 $= p_K = \dfrac{\rho^K}{c^{K-c}\cdot c!}p_0 = \dfrac{1}{2\times 2}\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^3\times\dfrac{27}{103} = \dfrac{16}{103}$

（3）平均每每小时进入接待室的来访者人数 $= \lambda(1-p_K) = 4\times\left(1-\dfrac{16}{103}\right) = \dfrac{348}{103}$

（4）平均忙的校长数 $= \overline{N_c} = \rho(1-p_K) = \dfrac{4}{3}\times\left(1-\dfrac{16}{103}\right) = \dfrac{348}{309}$

6. （12 分）2 个工人共同看管 4 台机器，每台机器平均运转半小时时就会发生故障，每次修理平均需要 10 分钟。设机器连续运转时间和修理时间相互独立，均服从指数分布。求：机器发生故障马上就能修理的概率、平均故障的机器数、平均等待修理的机器数和每台机器平均等待修理的时间。

解 由题意，按M/M/c/m/m系统处理，其中c=2，m=4，λ=2（台/小时），μ=6（台/小时），$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{1}{3}$，因此

$$p_0=\left[\sum_{i=0}^{c-1}C_m^i\rho^i+\sum_{i=c}^{m}C_m^i\frac{i!}{c!c^{i-c}}\rho^i\right]^{-1}\quad p_j=\begin{cases}C_m^j\rho^j p_0, & j=0,1,2,\cdots,c-1\\ C_m^j\dfrac{j!}{c!c^{j-c}}\rho^j p_0, & j=c,c+1,\cdots,m\end{cases}$$

$$p_0=\left[1+4\times\frac{1}{3}+6\times\frac{2}{2}\times(\frac{1}{3})^2+4\times\frac{6}{2\times2}\times(\frac{1}{3})^3+\frac{24}{2\times4}\times(\frac{1}{3})^4\right]^{-1}=\frac{27}{88}$$

$$p_1=4\times\frac{1}{3}\times\frac{27}{88}=\frac{36}{88}\qquad p_2=6\times\frac{2}{2}\times(\frac{1}{3})^2\times\frac{27}{88}=\frac{18}{88}$$

$$p_3=4\times\frac{6}{2\times2}\times(\frac{1}{3})^3\times\frac{27}{88}=\frac{6}{88}\qquad p_4=1\times\frac{24}{2\times4}\times(\frac{1}{3})^4\times\frac{27}{88}=\frac{1}{88}$$

机器发生故障马上就能修理的概率 $=p_0+p_1=\frac{63}{88}$

平均故障的机器数 $\overline{N}=\sum_{j=0}^{m}jp_j=\frac{47}{44}$

平均故障的机器数 $\overline{N}=\sum_{j=0}^{m}jp_j=\frac{47}{44}$

平均等待修理的机器数 $\overline{N}_q=\sum_{j=c}^{m}(j-c)p_j=\frac{1}{11}$

每台机器平均等待修理的时间 $\overline{W}_q=\frac{\overline{N}_q}{\lambda(m-\overline{N})}=\frac{2}{129}$（小时）

7. （5分）有一排队系统，顾客到达为参数 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松过程，顾客到达看到队长为 k 时，进入系统的概率为 $1/(k+1)$；顾客所需的服务时间服从指数分布，具有两个服务率 μ_1、μ_2 $(0<\mu_1<\mu_2)$，当对长 $<m$（m 是一个固定的正整数）时，服务员用速率 μ_1 工作，当对长 $\geq m$ 时，服务员用速率 μ_2 工作；系统中只有一个服务台；容量为无穷大，而且到达过程与服务过程彼

此独立，试分析该系统什么情况下存在平稳分布，并计算其平稳分布

$p_{ij}(\Delta t)=P\{N(t+\Delta t)=j \mid N(t)=i\}$，$i,j=0,1,2,\ldots$

则

1）$p_{i,i+1}(\Delta t)$＝P{在 Δt 内到达且进入 1 个而服务未完成}＋$\sum_{j=2}^{\infty}$P{在 Δt 内到达且进入 j 个而服务完 j-1 个}

$$=\frac{1}{i+1}(\lambda\Delta t+o(\Delta t))(1-\mu\Delta t+o(\Delta t))+o(\Delta t)=\frac{\lambda}{i+1}\Delta t+o(\Delta t) \qquad i=0,1,2,\ldots$$

2）$p_{i,i-1}(\Delta t)$＝P{在 Δt 内到达且进入 0 个而服务完成 1 个}＋$\sum_{j=2}^{\infty}$P{在 Δt 内到达且进入 j-1 个而服务完 j 个}

$$=\begin{cases}(1-\lambda\Delta t+o(\Delta t))(\mu_1\Delta t+o(\Delta t))+o(\Delta t)=\mu_1\Delta t+o(\Delta t) & i<m\\ (1-\lambda\Delta t+o(\Delta t))(\mu_2\Delta t+o(\Delta t))+o(\Delta t)=\mu_2\Delta t+o(\Delta t) & i\geq m\end{cases} \qquad i=1,2,\ldots$$

于是，$\{N(t), t\geq0\}$ 是 $E=\{0,1,2,\ldots\}$ 上的生灭过程，其参数为

$$\begin{cases}\lambda_i \triangleq \dfrac{\lambda}{i+1}, & i\geq 0\\ \mu_i=\mu_1, & i=1,2,\cdots,m-1\\ \mu_i=\mu_2, & i\geq m\end{cases}$$

令 $\rho_1=\dfrac{\lambda}{\mu_1}, \rho_2=\dfrac{\lambda}{\mu_2}$