

## 图论作业 3

## 一、填空题

1. 完全图  $K_{2n}$  共有\_\_\_\_\_个不同的完美匹配。
2. 图  $K_{60,62}$  的最小覆盖包含的点数为\_\_\_\_\_。
3. 完全图  $K_{60}$  能分解为\_\_\_\_\_个边不重的一因子之并。
4. 完全图  $K_{2n+1}$  能分解为\_\_\_\_\_个边不重的二因子之并。
5. 图  $G$  是由 3 个连通分支  $K_1, K_2, K_4$  组成的平面图, 则其共有\_\_\_\_\_个面。
6. 设图  $G$  与  $K_5$  同胚, 则至少从  $G$  中删掉\_\_\_\_\_条边才可能使其成为可平面图。
7. 设连通平面图  $G$  具有 5 个顶点, 9 条边, 则其面数为\_\_\_\_\_。
8. 若图  $G$  是 10 阶极大平面图, 则其面数等于\_\_\_\_\_。
9. 若图  $G$  是 10 阶极大外平面图, 其内部面共有\_\_\_\_\_个。

## 二、不定项选择题

1. 关于非平凡树  $T$ , 下面说法错误的是( )  
(A)  $T$  至少包含一个完美匹配;  
(B)  $T$  的荫度大于 1;  
(C)  $T$  是只有一个面的平面图;  
(D)  $T$  的对偶图是简单图。
2. 下列说法正确的是( )  
(A) 三正则的偶图存在完美匹配;  
(B) 无割边的三正则图一定存在完美匹配;  
(C) 有完美匹配的三正则图一定没有割边;  
(D) 三正则哈密尔顿图存在完美匹配。
3. 下列说法错误的是( )  
(A) 在偶图中, 最大匹配包含的边数等于最小覆盖包含的点;  
(B) 任一非平凡正则偶图可以 1-因子分解;  
(C) 奇数阶的哈密尔顿图可能是偶图;  
(D) 非平凡偶图的最大匹配是唯一的。
4. 下列说法中正确的是( )  
(A) 完全图  $K_{101}$  包含 1-因子;  
(B) 完全图  $K_{102}$  包含 2-因子;  
(C) 图  $G$  的一个完美匹配实际上就是它的一个 1 因子;  
(D) 图  $G$  的一个 2-因子实际上就是它的一个哈密尔顿圈。
5. 下列说法正确的是( )  
(A)  $n$  方体可以 1-因子分解;  
(B) 非平凡树可以 1-因子分解;  
(C) 无割边的 3 正则图可以 1-因子分解;  
(D) 有割边的 3 正则图一定不可以 1-因子分解;  
(E) 可 1-因子分解的 3 正则图一定是哈密尔顿图。
6. 下列说法正确的是( )  
(A) 完全图  $K_{2n}$  是  $2n-1$  个完美匹配的并;  
(B) 完全图  $K_{2n}$  是  $n$  个哈密尔顿圈的并;  
(C) 完全图  $K_{2n}$  是 1 个完美匹配与  $n-1$  个哈密尔顿圈的并;

- (D) 若图  $G$  是  $2k$  正则连通图, 则  $G$  可以分解为  $k$  个二因子的并;  
(E) 具有  $m$  条边的  $n$  阶无环图可以分解为  $m$  个生成森林的并。
7. 下列说法错误的是( )
- (A) 任何平面图都只有一个外部面;  
(B) 简单平面图中一定有度数不超过 5 的顶点;  
(C) 平面图的各个面的次数之和可能为奇数;  
(D) 存在一种方法, 总可以把平面图的任意一个内部面转化为外部面。
8. 下列说法正确的是( )
- (A) 若无环图  $G$  是 2 连通的平面图, 则其一定不包含割点;  
(B) 若无环图  $G$  是 2 连通的平面图, 则其一定不包含割边;  
(C) 若无环图  $G$  是 2 连通的平面图, 则其一定不包含只属于一个面的边;  
(D) 若无环图  $G$  是 2 连通的平面图, 则其每个面的边界均为圈。
9. 下列说法错误的是( )
- (A) 若  $(n, m)$  图  $G$  是极大平面图且  $n \geq 3$ , 则  $m = 3n - 6$ ;  
(B) 阶数至少为 3 的极大平面图的每个面均是三角形;  
(C) 阶数至少为 3 的极大外平面图的每个面均是三角形;  
(D) 阶数至少为 3 的极大外平面图一定是哈密尔顿图。
10. 关于平面图  $G$  和其对偶图  $G^*$  的关系, 下列说法中错误的是( )
- (A)  $G^*$  是连通平面图;  
(B)  $G$  的面数等于  $G^*$  的顶点数;  
(C)  $G$  的边数等于  $G^*$  的边数;  
(D)  $G$  的点数等于  $G^*$  的面数;  
(E)  $G \cong (G^*)^*$ 。

### 三、解答题

1. 共有  $n$  位男士和  $n$  位女士参加一次舞会, 已知每位男士至少认识两位女士, 而每位女士至多认识两位男士。能否将男士和女士分配为  $n$  对, 使得每对中的男士和女士彼此相识?

2. 由于在考试中获得好成绩, 6 名学生将获得下列书籍的奖励, 分别是: 代数学(a)、微积分(c)、微分方程(d)、几何学(g)、数学史(h)、规划学(p)、拓扑学(t)。每门科目只有 1 本书, 而每名学生对书的喜好是:

A: d, h, t; B: h, t; C: c, d, g, p; D: d, h; E: d, t; F: a, c, d。

每名学生是否都可以得到他喜欢的书? 为什么? (用图论方法求解)

3. 设图  $G$  是  $n(n \geq 4)$  阶简单图,  $n$  为偶数, 且最小度  $\delta \geq n/2 + 3$ , 则  $G$  中存在 5 因子。

4. 设图  $G$  是具有  $n$  个点、 $m$  条边、 $\omega$  个连通分支的平面图。若  $G$  的每个面均至少由  $k$  ( $k \geq 3$ ) 条边围成, 则

$$m \leq \frac{k(n - \omega - 1)}{k - 2}.$$

5. 设简单图  $G$  有 10 个 4 度顶点和 8 个 5 度顶点, 其余顶点度数均为 7。求 7 度顶点的最大数目, 使得  $G$  保持其可平面性。