第一章 概率论

条件概率：$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$

全概率公式: $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$

贝叶斯: $P(B_j|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}$

分布函数定义：$F(x)=P\{X<x\}$

离散型分布律(概率密度)：$P\{X=x_k\}=p_k$

离散型分布函数: $F(x)=P\{X<x\}=\sum_{x_k<x}p_k$

连续型分布函数: $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)du$

连续型概率密度：f(x)

0-1 分布: $\varphi_X=q+pe^{iu}$ (特征 $\varphi_X(u)$)

P(A)=p,P(A')=1-p E(x)=p,D(x)=pq

二项分布 B(n,p)：E=np,D=npq

$p_k=P\{X=k\}=C_n^kp^kq^{n-k}$

$\varphi_X=(q+pe^{iu})^n$

泊松分布：E=D=λ。$\varphi_X=e^{\lambda(e^{iu}-1)}$

$p_k=P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\lambda>0$

均匀分布 U(a,b):

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0□□ & \end{cases}$

$F(x)=\begin{cases}\frac{x-a}{b-a} & a<x<b\\ 1 & x\ge b\end{cases}$

$E(x)=\frac{a+b}{2}$ $D(x)=\frac{(b-a)^2}{12}$

$\varphi_X=\frac{e^{ibu}-e^{iau}}{i(b-a)u}$

□ $a=-b$ $\varphi_X=\frac{\sin bu}{bu}$

指数分布:

$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

$E(x)=\frac{1}{\lambda}$ $D(x)=\frac{1}{\lambda^2}$

$\varphi_X=(1-i\frac{u}{\lambda})^{-1}$

正态分布：X~N(μ,σ²)

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$E(x)=\mu,D(x)=\sigma^2$

$\varphi_X=e^{i\mu u-\frac{1}{2}\sigma^2u^2}$

离散联合分布律：$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}$

离散联合分布函数: $F(x,y)=\sum_{x_i<x}\sum_{y_j<y}p_{ij}$

离散 X 边缘分布律: $p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}$

离散 X 条件分布律: $p_{i|j}=p_{ij}/p_{\cdot j}$

连续联合分布函数: $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$

连续 X 边缘分布函数：$F_X(x)=F(x,+\infty)$

连续 X 边缘概率密度: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

Y 条件概率密度：$f_{Y|X}(y|x)=f(x,y)/f_X(x)$

X 和 Y 独立：$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

离散数学期望: $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k$

连续数学期望: $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$

注：x 为 g(x)或 g(x,y)，则取代 x 的位置。

方差：$D(X)=E[X-E(X)]^2=E(X^2)-E^2(X)=c_{ii}$

标准差: $\sigma_X=\sqrt{D(X)}$

协方差：$cov(X_i,X_j)=E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)=c_{ij}$

相关系数: $\rho_{XY}=\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

$E(aX+b)=aE(X)+b$, $D(aX+b)=a^2D(X)$

a_k 为任意常数:

$E(\sum_{k=1}^{n}a_kX_k)=\sum_{k=1}^{n}a_kE(X_k)$

$D(\sum_{k=1}^{n}a_kX_k)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ia_j\text{cov}(X_i,X_j)$

cov(aX+bY,cX+dY)=acD(X)+bdD(Y)+(ad+bc)cov(X,Y)

离散 X 的条件期望: $E(X|Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_{i|j}$

连续: $E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{X|Y}(x|y)dx$

第二章 随机过程基本概念

随机过程{X(t),t∈T}的一维分布函数:

F(t,x)＝P{X(t)<x}，t∈T，x∈R=(-∞,+∞)

连续一维分布函数: $F(t,x)=\int_{-\infty}^{x}f(t,y)dy$

二维：F(s,t;x,y)＝P{X(s)<x,X(t)<y}

连续: $F(s,t;x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(s,t;x,y)dxdy$

连续二维概率密度: $f(s,t;x,y)=\frac{\partial^2F(s,t;x,y)}{\partial x\partial y}$

均值函数：m(t)＝E[X(t)]

$m(t)=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(t,x)dx$

$E[X+Y]^2=E[X^2]+E[Y^2]+2E[XY]$

XY 相互独立：E[XY]=E[X]E[Y]

方差：$D(t)=E[X(t)-m(t)]^2=E[X^2(t)]-m^2(t)$。

协方差：C(s,t)＝E[X(s)X(t)]－m(s)m(t)

相关函数：R(s,t)＝E[X(s)X(t)]

C(s,t)＝R(s,t)－m(s)m(t)。C(t,t)＝D(t)。

相关系数: $\rho(s,t)=\frac{C(s,t)}{\sigma(s)\sigma(t)}=\frac{\text{cov}(X(s),X(t))}{\sqrt{D(s)}\sqrt{D(t)}}$

$\alpha^2\int_0^{2\pi}\cos(\beta s+\theta)\cos(\beta t+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta$

$=\frac{\alpha^2}{2\pi}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\cos\beta(t-s)+\cos(\beta(t+s)+2\theta)]d\theta$

$=\frac{\alpha^2}{2}\cos\beta(t-s)$

第三章 重要的随机过程

{X(t),t∈T}为平稳独立增量过程：X(t+h)-X(s+h)与 X(t)-X(s)有相同且独立的概率分布。

增量 X(t+τ)-X(t) 仅依赖于时间区间长度而与起始时间无关，具有平稳性。

如果{X(t),t>=0}是平稳独立增量过程，X(0)=0,有 m(t)=mt，D(t)=σ²t,

C(s,t)=σ²min(s,t)（m 和 σ 均为常数）

二项计数过程:

$Y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}X(k)\sim B(n,p)$

$E[Y(n)]=np$ $D[Y(n)]=npq$

$C_Y(m,n)=pq\min(m,n)$

泊松过程定义:

N(0)=0;具有平稳独立增量;N(t)-N(s)服从参数为 λ(t-s)的泊松分布（或者 P{N(h)=1}=h+o(h)；P{N(h)=2}＝o(h)），即

$P(N(t)-N(s)=k)=\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)}$

一维概率分布:

$P(N(t)=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$

$m(t)=E[N(t)]=\lambda t=D(t)$

□□□□□□□ $\varphi(u)=e^{\lambda t(e^{iu}-1)}$

$C(s,t)=\lambda\min(s,t)$

$R(s,t)=\lambda\min(s,t)+\lambda^2st$

二维概率分布:

$P\{N(s)=j,N(t)=k\}=\frac{\lambda^ks^j(t-s)^{k-j}}{j!(k-j)!}e^{-\lambda t},\quad 0<s<t$

泊松过程的充要条件:

设{N(t),t³ 0}是参数为 λ 的泊松过程，{T_n,n=1,2,...}为点间间距序列，表示事件第 n-1 次出现到第 n 次出现之间的时间，则 T_n,n=1,2,...是相互独立同分布的随机变量，且都服从参数为 λ 的(负)指数分布，即:

$F_T(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$

$f_{T_1}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$

{τ_n,n=1,2,...}为事件第 n 次出现的等待时间序列，则 τ_n~Γ(n,λ)，概率密度为:

$f(t)=\begin{cases}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t}, t\ge 0\\ 0,t<0\end{cases}$

$F(t)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda t^k}{k!}e^{-\lambda t},t\ge 0$

非齐次泊松过程:

$P\{N(t_0+t)-N(t_0)=k\}$

$=\frac{[m(t_0+t)-m(t_0)]^k}{k!}e^{-[m(t_0+t)-m(t_0)]}$

其中，$m(t)=\int_0^t\lambda(s)ds$

复合泊松过程:

$X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}Y_n$

特征函数：$\Phi_X(t,u)=e^{\lambda t[\varphi_Y(u)-1]}$

均值函数：mX(t)＝λtE[Y]

方差函数：E[N(t)]= λt

$D[X(t)]=E[X^2(t)]-E^2[X(t)]=\lambda tE[Y^2]$

更新计数过程：$F_{N(t)}(k)=1-F_{\tau_k}(t)$

$m(t)=\sum_{k=1}^{\infty}F_{\tau_k}(t)$

第四章 马尔可夫过程

马氏过程定义（仅依赖于 $X(t_{n-1})$已知值）：$P\{X(t_n)<x_n|X(t_1)=x_1,X(t_2)=x_2,...,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}=P\{X(t_n)<x_n|X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$

转移概率：p(s,t;x,y)＝P{X(t)<y|X(s)=x}。

状态空间：E ＝{x：X(t)=x,t∈T}

离散参数马尔可夫链（马氏链）：$P\{X(m+k)=i_{m+k}|X(n_1)=i_{n1},X(n_2)=i_{n2},...,X(n_j)=i_{nj},X(m)=i_m\}=P\{X(m+k)=i_{m+k}|X(m)=i_m\}$

马氏链{X(n),n=0,1,...}在 m 时刻的 k 步转移概率：$p_{ij}(m,k)=P\{X(m+k)=j|X(m)=i\}$

一步转移概率，简称转移概率。

k 步转移矩阵，一步转移矩阵 P(m,1)简称转移矩阵:

$P(m,k)=(p_{ij}(m,k))$ $p_{ij}(m,k)\ge 0,\ \sum_{j\in E}p_{ij}(m,k)=1$

齐次马尔可夫链（与 m 无关）:

$p_{ij}(m,k)=P\{X(m+k)=j|X(m)=i\}=p_{ij}(k)$;

$p_{ij}(m,1)=p_{ij}(1)=p_{ij}$;

K 步转移矩阵：$P(m,k)=P(k)=(p_{ij}(k))_{i,j\in E}$

转移矩阵：$P(m,1)=P(1)=P=(p_{ij})_{i,j\in E}$

C-K 方程: $p_{ij}(k+s)=\sum_{r\in E}p_{ir}(k)p_{rj}(s)$

n 步转移矩阵：$P(n)=P^n$

初始分布：$p_i=P\{X(0)=i\}$ i∈E，即 X(0)概率分布。记 $\tilde{P}_0=(p_i,i\in E)$。

绝对分布：$p_j(n)=P\{X(n)=j\}$，记 $\tilde{P}_n$

$p_j(n)=\sum_{i\in E}p_ip_{ij}(n)\quad(j\in E)$

有限维分布:

P{X(n1)=i1,X(n2)=i1,…,X(nk)=ik}

$=\sum_{i\in E}p_i\cdot p_{ii_1}(n_1)\cdot p_{i_1i_2}(n_2-n_1)\cdots p_{i_{k-1}i_k}(n_k-n_{k-1})$

极限分布（最终分布）：Π＝(π_j,j∈E)

设齐次马氏链{X(n),n=0,1,2,...}的状态空间有限 E={1,2,...,s}，若存在正整数 n_0,对任意 i,j∈E，n_0 步转移概率 $p_{ij}(n_0)>0$，则此链是**遍历的**，且极限分布等于平稳分布

$\begin{cases}\pi_j=\sum_{i\in E}\pi_ip_{ij}\text{; 或记 } \Pi=\Pi P\\ \pi_j>0,\sum_{j\in E}\pi_j=1\end{cases}$

互通：如果存在某一个 n≥1，使得 $p_{ij}(n)>0$，i,j∈E，则称从状态 i 可到达状态 j，记为 i->j；互通记 i<->j，状态性质相同。

$f_{ij}(n)$：表示从状态 i 出发经过 n 步首次返回 i 的概率；

f_{ii}：表示从状态 i 出发迟早返回 i 的概率。$f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}(n)$

如果 $f_{ii}=1$，则称状态 i 是常返状态；

正常返状态：则 $\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ii}(n)<+\infty$

零常返状态：则 $\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ii}(n)=+\infty$

如果 $f_{ii}<1$，则称状态 i 是非常返状态。

状态空间分解:

$p_{ii}=1$ 的状态 i 称为吸收状态。任何一个吸收状态构成最小的**单点闭集**。

$E=N+C_1+C_2+...+C_k+...$

其中 N 为非常返状态集合，$C_1,C_2,...,C_k,...$是互不相交的常返闭集。

马氏链为不可约马氏链的充分必要条件是任何两个状态都相通。

$p_{ii}(n)>0$,且 n>1,则状态是周期的，反之。

生灭过程（针对连续参数齐次马氏链）:

状态转移速度矩阵 Q=

$$\begin{pmatrix}-\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_{N-1} & -(\lambda_{N-1}+\mu_{N-1}) & \lambda_{N-1}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_N & -\mu_N\end{pmatrix}$$

平稳分布：ΠQ＝0（π_j 竖乘之和）

E={0,1,2,...,N}的平稳分布 Π＝{π_j,j∈E}为：

$\pi_0=\left(1+\sum_{j=1}^{N}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1}$

$\pi_k=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\pi_0=\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\pi_{k-1},k=1,2,\cdots,N$

生灭过程在排队论中的应用:

M/M/1 损失制（λ□μ）

一个服务员，发现服务台被占用，离开。

M/M/n 损失制（λ□nμ）

$\begin{cases}\pi_0=\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right]^{-1}\\ \pi_k=\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\pi_0\end{cases}$

损失概率 $\pi_n=\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\pi_0$, π_0□□□□□

M/M/1 等待制（λ□μ）

$\begin{cases}\pi_0=1-\rho\\ \pi_k=\rho^k(1-\rho)\end{cases}$

逗留平均数 $L_s=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$

等待平均数 $L_q=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$

平均逗留时间 $W_s=\frac{1}{\lambda}L_s=\frac{1}{\mu-\lambda}$

平均等待时间 $W_q=\frac{1}{\lambda}L_q=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$

M/M/n 等待制（λ□nμ）

$\begin{cases}\pi_k=\frac{1}{k!}(\frac{\lambda}{\mu})^k\pi_0\ 0<k\le n\\ \pi_k=\frac{1}{n^{k-n}n!}(\frac{\lambda}{\mu})^k\pi_0\\ \pi_0=[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}(\frac{\lambda}{\mu})^k+\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!(1-\frac{\lambda}{n\mu})}]^{-1}\ (\lambda<n\mu)\end{cases}$

$L_q=\frac{\rho^{n+1}}{n*n!(1-\frac{\rho}{n})^2}\pi_0$

$L_s=L_q+\rho$ $W_s=\frac{L_s}{\lambda}W_q=\frac{L_q}{\lambda}$

M/M/1 有限资源等待制（m λ□μ□□□□m）

$\begin{cases}\pi_0=[\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{(m-k)!}(\frac{\lambda}{\mu})^k]^{-1}\\ \pi_k=\frac{m!}{(m-k)!}(\frac{\lambda}{\mu})^k\pi_0\quad 0<k\le m\end{cases}$

$L_s=m-\frac{\mu}{\lambda}(1-\pi_0)$ $L_q=L_s-(1-\pi_0)$

平均到达率 $\lambda_e=\mu(1-\pi_0)$

$W_s=\frac{L_s}{\lambda_e}.W_q=\frac{L_q}{\lambda_e}$

设备正常运行台数：K=m-λ_e

设备利用率：$\tau=\frac{m-Ls}{m}$

M/M/n 有限资源等待制（m λ□nμ□□□□m,□□□□n）

$\pi_k=\begin{cases}\frac{m!}{k!(m-k)!}(\frac{\lambda}{\mu})^k\pi_0, 0\le k\le n\\ \frac{1}{n!n^{k-n}}\frac{m!}{(m-k)!}(\frac{\lambda}{\mu})^k\pi_0,n<k<m\\ \frac{1}{n!}\frac{m}{n^{m-n}}(\frac{\lambda}{\mu})^m\pi_0,k=m\end{cases}$

$\pi_0=[\sum_{k=0}^{n-1}C_m^k(\frac{\lambda}{\mu})^k+\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{n!}\frac{1}{n^{k-n}}\frac{m!}{(m-k)!}(\frac{\lambda}{\mu})^k$

$L_q=\sum_{k=n}^{m}(k-n)\pi_k,L_s=\sum_{k=1}^{m}k\pi_k$

$\lambda_e=\lambda(m-L_s).W_s=\frac{L_s}{\lambda_e}$

M/M/1 有限等待空间（顾客排队数最大 N，否则离去。λ□μ）

$\begin{cases}\pi_0=\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+2}}\\ \pi_k=(\frac{\lambda}{\mu})^k\pi_0\ 1\le k\le N+1\end{cases}$

$\pi_□=\pi_{N+1}=\rho^{N+1}\pi_0$

$L_s=\frac{\rho}{1-\rho}-\frac{(N+2)\rho^{N+2}}{1-\rho^{N+2}}$

$L_q=L_s-(1-\pi_0)$

$W_s=\frac{L_s}{\lambda(1-\rho^{N+1})\pi_0}$□$W_q=W_s-\frac{1}{\mu}=\frac{}{\lambda(1-}$

M/M/n 有限等待空间（顾客排队数最大 N，否则离去。λ□nμ）

$$\begin{cases}\pi_k = \frac{1}{k!}\rho^k\pi_0, k = 1,2\ldots n\\ \pi_{n+k} = \frac{1}{n!n^k}\rho^{n+k}\pi_0, k = 1,2\ldots N\end{cases}$$

$$\pi_0 = \left\{1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^n[\frac{\rho}{n}-(\frac{\rho}{n})^{N+1}]}{n!(1-\frac{\rho}{n})}\right\}^{-1}$$

$$L_q = \frac{\rho^{N+1}[1-(N+1)\left(\frac{\rho}{n}\right)^N + N\left(\frac{\rho}{n}\right)^{N+1}]\pi_0}{n*n!(1-\frac{\rho}{n})^2}$$

$$L_s = L_q + \rho(1-\frac{\rho^{N+n}}{n^N*n!}\pi_0)$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

排队论 第二章 无限源简单排队系统

M/M/1/∞（一个服务台，不空闲则等待，均服从负指数分布） $\rho = \lambda/\mu$

统计平衡条件：

□□□□$N = \frac{\rho}{1-\rho}$

□□□□□$N_q = \sum_{j=0}^{\infty} jP_{j+1} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$

等待队长分布：

$D(N) = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$ □

$D(N_q) = \frac{\rho^2(1+\rho)-\rho^4}{(1-\rho)^2}$

□□□□□□$P_0 = 1-\rho$

□□□□□□□□□

$W_q(t) = 1-\rho e^{-\mu(1-\rho)t}$

平均等待时间：

$\bar{W}_q = E(W_q) = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$

等待时间方差：$D[W_q] = \frac{\lambda(2\mu-\lambda)}{\mu^2(\mu-\lambda)^2}$

□□□□□□□□□

$W(t) = P\{W \le t\} = 1-e^{-(\mu-\lambda)t}$

□□□□□$\bar{W} = \frac{1}{\mu-\lambda}$ □

$D[W] = \frac{1}{(\mu-\lambda)^2}$

$\bar{N} = \lambda_e\bar{W}$□$\bar{N}_q = \lambda_e\bar{W}_q$

□□□□□$b = \begin{cases}\frac{1}{\mu-\lambda} & \rho<1\\ \infty\end{cases}$

□□□□□□□□□□□□ $\mu\bar{b} = \frac{1}{1-\rho}$

最佳服务率：P53

可变输入率 M/M/1/∞

（看到队长为 k,进入系统的概率 a_k）

$$\begin{cases}P_0 = e^{-\rho}\\ P_j = \frac{\rho^j}{j!}e^{-\rho}\end{cases}$$

$\bar{N} = \rho$. $\bar{N}_q = \rho + e^{-\rho}-1$

$$W_q(t) = 1-\frac{e^{-\mu t}}{e^{\rho}-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^{k+1}}{(k+1)!}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\mu t)^j}{j!}$$

$$\bar{W}_q = \frac{\rho e^{\rho}}{\mu(e^{\rho}-1)}-\frac{1}{\mu}$$

$$W(t) = 1-\frac{e^{-\mu t}}{e^{\rho}-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\rho^{j+1}}{(j+1)!}\sum_{k=0}^{j}\frac{(\mu t)^k}{k!}$$

$$\bar{W} = \frac{\rho e^{\rho}}{\mu(e^{\rho}-1)}$$

单位时间内进入系统的平均顾客数：

$\lambda_e = \mu(1-e^{-\rho})$

$\bar{N} = \lambda_e\bar{W}$ □$\bar{N}_q = \lambda_e\bar{W}_q$

可变服务率 M/M/1/∞

（队长小于 m，服务率 **μ1**，反之 **μ2**）

$\rho_1 = \lambda/\mu_1$, $\rho_2 = \lambda/\mu_2$

$$P_j = \begin{cases}(\frac{1-\rho_1^m}{1-\rho_1}+\frac{\rho_2\rho_1^{m-1}}{1-\rho_2})^{-1}, j = 0\\ \rho_1^j P_0, j = 1,2,\ldots,m-1\\ \rho_1^{m-1}\rho_2^{j-m+1}P_0, j = m,m+1,\ldots\end{cases}$$

$$\bar{N} = P_0\{\frac{\rho_1[1+(m-1)\rho_1^m - m\rho_1^{m-1}]}{(1-\rho_1)^2} + \frac{\rho_2\rho_1^{m-1}[m-(m-1)\rho_2]}{(1-\rho_2)^2}\}$$

$\bar{N}_q = \bar{N}-(1-P_0)$

$\bar{W} = \frac{\bar{N}}{\lambda}$

$\bar{W}_q = \bar{N}_q/\lambda$

平均服务时间

$\frac{1-P_0}{\lambda}$

M/M/∞排队系统

（系统服务台无数，无需等待）

P63:

$P_j = \frac{\rho^j}{j!}e^{-\rho}$

$\bar{N} = \rho$ $\bar{N}_q = 0$ $\bar{W}_q = 0$

逗留时间=服务时间

M/M/c/∞排队系统

(c 个服务台，不空则等待)

$\rho_c = \frac{\lambda}{c\mu}$

$$P_0 = \left[\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}+\frac{c\rho^c}{c!(c-\rho)}\right]^{-1}$$

$$P_j = \begin{cases}\frac{\rho^j}{j!}P_0, 1\le j\le c-1\\ \frac{\rho^j}{c^{j-c}.c!}P_0, j\ge c\end{cases}$$

需要等待概率

$P = \sum_{j=c}^{\infty}P_j = \frac{1}{1-\rho_c}P_c P_c = \frac{\rho^c}{c!}P_0$

□□□□□$N_q = \frac{\rho_c}{(1-\rho_c)^2}P_c$

$P\{N_c = k\} = p_k, 0\le k\le c-1; P\{N_c = c\} = \sum_{j=c}^{\infty}p_j = \frac{1}{1-\rho_c}p_c$

$\bar{N}_c = \rho$ □□□□□□□

$\bar{N} = \frac{\rho_c}{(1-\rho_c)^2}+\rho$

$W_q(t) = 1-\frac{P_c}{1-\rho_c}e^{-\mu(c-\rho)t}$

$\bar{W}_q = \frac{\rho_c}{\lambda(1-\rho_c)}P_c$

$\bar{W} = \frac{\rho_c}{\lambda(1-\rho_c)}P_c+\frac{1}{\mu}$

M/M/C/K 混合制

（C 个服务台，K 个位置，损失制）

$$P_0 = [\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}+\sum_{j=c}^{K}\frac{\rho^j}{c!c^{j-c}}]^{-1}$$

$$P_j = \begin{cases}\frac{\rho^j}{j!}P_0, 1\le j\le c-1\\ \frac{\rho^j}{c^{j-c}c!}P_0, c\le j\le K\end{cases}$$

损失率 $P = P_K = \frac{\rho^K}{c!c^{K-c}}P_0$

□□□□□□□□$\lambda_e = \lambda(1-P_k)$

□□□□□□$\lambda_e = \lambda P_K$

$$\bar{N}_q = \begin{cases}\frac{c^c}{2c!}(K-c)(K-c+1)P_0, \rho_c = 1\\ \frac{\rho_c\rho^cP_0}{(1-\rho_c)^2c!}[1-\rho_c^{K-c+1}-(1-\rho_c)(K-c+1)], \rho_c ! = 1\end{cases}$$

$\bar{N} = \bar{N}_q+\bar{N}_c = \bar{N}_q+\rho(1-P_k)$

$q_j = \frac{P_j}{1-P_k}$

$\bar{W}_q = \sum_{j=c}^{K-1}\frac{j-c+1}{c\mu}q_j$

$\bar{W} = \bar{W}_q+\frac{1}{\mu}$

特殊情况：M/M/1/K

$$P_j = \begin{cases}\frac{(1-\rho)\rho^j}{1-\rho^{k+1}}, \rho\ne 1\\ \frac{1}{K+1}, \rho = 1\end{cases}$$

$$\bar{N} = \begin{cases}\frac{\rho}{1-\rho}-\frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{k+1}}\\ \frac{K}{2}\end{cases}$$

$$\bar{N}_q = \begin{cases}\frac{\rho^2}{1-\rho}-\frac{(K+\rho)\rho^{K+1}}{1-\rho^{k+1}}\\ \frac{K(K-1)}{2(K+1)}\end{cases}$$

M/M/c/c

$P_j = \frac{\rho^j}{j!}/\sum_{i=0}^{c}\frac{\rho^i}{i!}$

$\bar{N}_q = 0, \bar{N} = \bar{N}_c = \rho(1-P_c)$

$\bar{W}_q = 0, \bar{W} = \frac{1}{\mu}$

第三章 有限源简单排队系统

M/M/c/m/m 机器修理

（c 个工人，没空闲故障机器等待）

$$P_j = \begin{cases}C_m^j\rho^jP_0, j = 0,1,\ldots c-1\\ C_m^j\frac{j!}{c!c^{j-c}}\rho^jP_0, j = c,c+1\ldots,m\end{cases}$$

$$P_0 = [\sum_{i=0}^{c-1}C_m^i\rho^i+\sum_{i=c}^{m}C_m^i\frac{i!}{c!c^{i-c}}\rho^i]^{-1}$$

当 c=1 时

$P_j = \frac{m!}{(m-j)!}\rho^jP_0, 1\le j\le m$

$P_0 = [\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{(m-i)!}\rho^i]^{-1}$

$$\bar{N} = \sum_{j=0}^{c-1}\frac{m!\rho^j}{(j-1)!(m-j)!}P_0+\frac{m!}{c!}\sum_{j=c}^{m}\frac{j\rho^j}{(m-j)!c^{j-c}}P_0$$

$\bar{N}_q = \sum_{j=c}^{m}(j-c)P_j$

平均忙的维修工人数:

$\bar{N}_c = \sum_{j=1}^{c-1}jP_j+c\sum_{j=c}^{m}P_j$

$\bar{W}_q = \frac{\bar{N}_q}{\lambda(m-\bar{N})}$

□□□□□□$N_m = m-\bar{N}$

单位时间故障机器数

$\lambda_e = \lambda(m-\bar{N})$

单位时间内修复机器数

$\lambda_\mu = \mu\bar{N}_c$

P85：