# 图论

http://www.bsuc.cn:8013/wlkc/lssx/ls/p4/14.1.htm

*熟记概念以及定理，灵活运用定理

一、图的基本概念

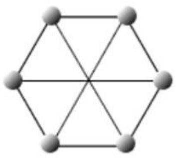
图的基本概念（握手定理）

通路与回路

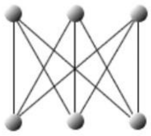
图的连通性

二部图的及其判定

证明题



(3)



(5)

同构

## 扩大路径法：

设G=<V, E>为n阶无向图，E≠∅，设$\Gamma_l$为G中一条路径，若此路径的始点或终点与通路外的顶点相邻，就将它们扩到通路中来，继续这一过程，直到最后得到的通路的两个端点不与通路外的顶点相邻为止，设最后得到的通路的两个端点不与通路外的顶点相邻为止，设最后得到的路径为$\Gamma_{l+k}$（长度为$l$的路径扩大成了长度为$l$+k的路径），称$\Gamma_{l+k}$为“极大路径”，称使用此种方法证明问题的方法为“扩大路径法”。（演示）

**例14.8** 设G为n（n≥4）阶无向简单图，δ(G)≥3.证明G中存在长度大于或等于4的圈。

**证** 不妨设G是连通图，否则，因为G的各连通分支的最小度也都大于或等于3，因而可对它的某个连通分支进行讨论。设u,v为G中任意两个顶点，由G是连通图，因而u,v之间存在通路，由定理14.5的推论可知，u,v之间存在路径，用“扩大路径法”扩大这条路径，设最后得到的“极大路径”为$\Gamma_l=v_0v_1\cdots v_l$，易知$l\geq3$.若$v_0$与$v_l$相邻，则$\Gamma_l\cup(v_0,v_l)$为长度大于或等于4的圈。否则，由于$d(v_0)\geq\delta(G)\geq3$，因而$v_0$除与$\Gamma_l$上的$v_1$相邻外，还存在$\Gamma_l$上的顶点$v_k(k\neq1)$和$v_t(k<t\leq l)$与$v_0$相邻，则$v_0v_1\cdots v_k\cdots v_tv_0$为一个圈且长度大于或等于4，见图14.12.

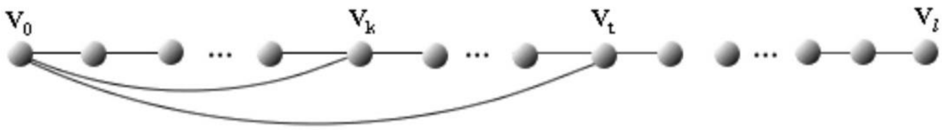



图14.12

习题：

1、 设无向图 G 中只有两个奇度顶点 u 与 v，试证明 u 与 v 比联通。

提示 证明此题的关键是握手定理的推论。

答案

用反证法。假设u与v不连通，即u与v之间无通路，则u与v处于G的不同连通分支中。不妨设u在$G_1$，v在$G_2$中。于是，$G_1$与$G_2$作为G的子图，他们中均只含有一个奇度顶点，这与握手定理的推论矛盾。

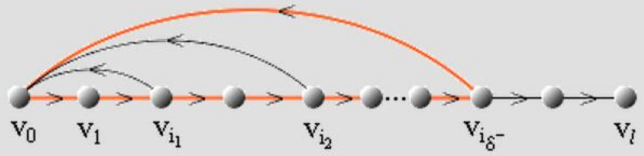
2、

设$D=\langle V,E\rangle$为有向简单图，已知$\delta(D)\geq2$，且$\delta^-(D)>0$，$\delta^+(D)>0$，证明D中存在长度大于等于$\max\{\delta^-(D),\delta^+(D)\}+1$的圈。

**提示** 参见极大路径。

**答案**证明：

（1）当 $\delta^-\geqslant\delta^+$时，证明D中存在长度大于等于 $\delta^-+1$的圈。使用扩大路径法的极大路径 $\Gamma=v_0v_1\cdots v_l$，则$l\geqslant\delta^-$。这是因为，无Γ外的顶点邻接到$v_0$，$v_0$要达到它的入度$d^-(v_0)\geqslant\delta^-$

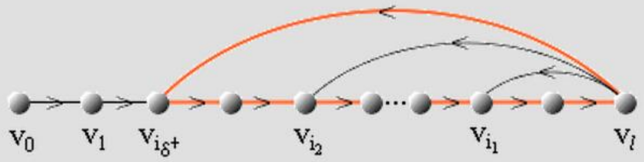



只能是Γ上的顶点邻接到它，因而在Γ上存在                    邻接到$v_0$。于是

为D中长度大于等于 $\delta^-+1$的圈（见示意图）。

（2）当 $\delta^+\geqslant\delta^-$时，证明D中存在长度至少为 $\delta^++1$的圈。依然使用扩大路径法，设 $\Gamma=v_0v_1\cdots v_l$为极大路径。由于$v_l$不邻接到Γ外的顶点，要使$d^+(v_l)\geqslant\delta^+$，$v_l$至少邻接

到Γ上的 $\delta^+$个顶点                    ，于是                    为D中长度大于等于 $\delta^++1$的圈，见示意图。




3、设 n 阶无向简单图 G 有 m 条边，已知 m>=0.5(n-1)(n-2)+1,证明 G 必连通。

**提示** 使用数学归纳法。

**答案** 证明：在证明本题中，要用到

（1）任何n阶简单图的边数m均小于等于完全图$K_n$的边数$\frac{1}{2}n(n-1)$。

（2）若G中无孤立点，则$\delta(G)\geq 1$。

用归纳法。

① n=1时，G为平凡图，显然G连通。

② n=2时，$m\geq\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1=1$，此时G为$K_2$，当然连通。

③ 设n=k(k≥2)，$m\geq\frac{1}{2}(k-1)(k-2)+1$时结论成立，要证明当n=k+1，$m\geq\frac{1}{2}k(k-1)+1$时结论也成立。

下面分三步证明：

(i) 若G为$K_{k+1}$，G当然连通。

(ii) 若G中含孤立点，一定推出矛盾。删去G中的孤立点，记作$G_1$。则$G_1$的边数$m\geq\frac{1}{2}k(k-1)+1$，这与$G_1$为阶数小于等于k的简单图矛盾，故G中不可能含孤立点。

(iii) 由(i)、(ii)可知，只需对G不为完全图、又不含孤立点的情况加以证明。

G中存在$v_0$，使$1\leq d(v_0)\leq k-1$（G中无孤立点，又不是k+1阶完全图），令$G'=G-v_0$，则G'为k阶简单图，且G'的边数

$$
\begin{aligned}
m' &\geq \frac{1}{2}k(k-1)+1-(k-1)\\
&=\left(\frac{1}{2}k(k-1)-(k-1)\right)+1\\
&=\frac{1}{2}(k-1)(k-2)+1
\end{aligned}
$$

由归纳假设可知，G'是连通图，而G'为G的子图，故G也连通。

4、

设G为n阶无向简单图，证明以下题目：

（1）当$\delta(G)\geq\frac{n}{2}$时，证明G连通。

（2）当$\delta(G)\geq\frac{1}{2}(n+k-1)$时，证明G是k-连通图。

使用反证法。

**答案**

（1）要用到n阶简单图的最大度$\leqslant n-1$。

用反证法。假设G至少有两个连通分支，设$G_1, G_2$为其中的两个，并设$G_1, G_2$的阶数分别为$n_1$和$n_2$，则$n_1+n_2\leqslant n$，且$\min\{n_1, n_2\}\leqslant\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$。于是，对任意的 $v\in V(G_1)$，

$$d_{G1}(V)=d_G(V)\leqslant\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1<\frac{n}{2},$$

这与$\delta(G)\geqslant\frac{n}{2}$矛盾，所以G连通。

（2）利用（1）的结果。要证明G是k-连通图，只需证明从G中删除任意（k-1）个顶点后，所得图依然连通。设V'为V(G)的任意子集，且$|V'|=k-1$。令 $G'=G-V'$，则G'为$n-(k-1)=n-k+1=n'$阶无向简单图，而

$$\begin{aligned}\delta(G')&\geqslant\delta(G)-(k-1)\\&\geqslant\frac{1}{2}(n+k-1)-(k-1)\\&=\frac{1}{2}(n+k-1-2k+2)\\&=\frac{1}{2}(n-k+1)\\&=\frac{1}{2}n'\end{aligned}$$

由（1）可知，G'连通，故G'为k-连通图。

二、欧拉图与哈密尔顿图

欧拉图：判别&定理

1、 设 G 为 n(n>=2)借无向欧拉图，证明 G 中无桥。

提示 参见欧拉图。
利用简单回路的性质直接证明，或采用反证法，利用握手定理的推论证明。

答案

方法一 利用简单回路的一个性质，设C为任意的简单回路，e为C上任意的边，则c-e仍连通。记这个性质为*

因为G为欧拉图，所以存在欧拉回路，设C为其中的一条欧拉回路，则G中任何边均在C上。于是，$\forall e\in E(G)$，$G'=G-e=C-e$。由*可知，G'仍连通，故由桥的定义可知，e不是G中的桥。由e的任意性得证，G中无桥。

方法二 采用反证法。

假设G中存在桥e=(u,v)，由于G为欧拉图，所以e的两个端点在G中的度数$d_G(u)$，$d_G(v)$均为偶数。

因为e为G中桥， 所以$G'=G-e$， 由两个连通分支$G_1'$和$G_2'$组成。 不妨设$u\in V(G_1)$，$v\in V(G_2)$。由于删除了e，因而在$G_1$和$G_2$中，$d_{G1}(u)$与$d_{G2}(v)$为奇度顶点，而对于任意的$w\in V(G_1)$，$w\neq u$，$d_{G1}(w)$为偶数，即$G_1$中只有一个奇度顶点u；类似地，$G_2$中也只有一个奇度顶点v. 这与握手定理的推论矛盾。 故G中不可能含桥。

2、

设G是恰有2k(k≥1)个奇度顶点的无向连通图，证明G中存在k条边不重的简单通路，$P_1,P_2,\ldots,P_k$，使得 $E(G)=\bigcup_{i=1}^{k}E(P_i)$。

**提示** 参看欧拉图。
采用加新边法或归纳法证明。

**答案**

方法一 加新边法。

设2k个奇度顶点分别为$v_1, v_2, \cdots, v_k$，$v_1', v_2', \cdots, v_k'$。构造新图

$G'=G\bigcup_{i=1}^{k}(v_i,v_i')=G\bigcup_{i=1}^{k}e_i$，其中$e_i=(v_i, v_i')$，$i=1, 2, \cdots, k$

显然G'连通且无奇度顶点，因而G'为欧拉图。故存在欧拉回路，设

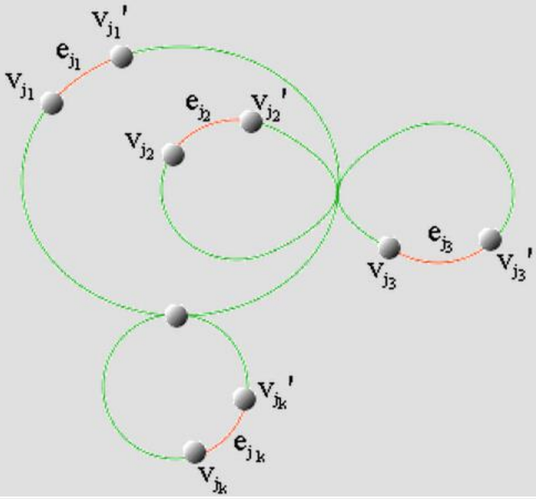
$$C=v_{j1}e_{j1}v_{j1}'\cdots v_{j2}e_{j2}v_{j2}'\cdots v_{jk}e_{jk}v_{jk}'\cdots v_{j1}$$

为G'中一条欧拉回路，其中，

$$\{e_{j1}, e_{j2}, \cdots e_{jk}\}=\{e_1, e_2, \cdots, e_k\},$$

$$\{v_{j1}, v_{j2}, \cdots v_{jk}, v_{j1}', v_{j2}', \cdots v_{jk}'\}=\{v_1, v_2, v_k, v_1', v_2', \cdots, v_k'\}。$$

易知，若$e_{js}=e_i$，则$v_{js}=v_i$或$v_i'$，$v_{js}'=v_i'$或$v_i$。如下图所示：




取 $P_1=v_{j1}'\cdots v_{j2}$

$P_2=v_{j2}'\cdots v_{j3}$

$\cdots$

$P_k=v_{jk}'\cdots v_{j1}$

则$P_1, P_2, \cdots, P_k$边不重，且 $\bigcup_{i=1}^{k}E(P_i) = E(G') - \{e_1, e_2, \ldots, e_k\} = E(G)$

方法二 对k做归纳法

（1）k=1时，G为半欧拉图，因而存在欧拉通路P，则P为所求，所以结论为真。

（2）设k=r时，结论为真。要证：k=r+1时结论为真。

设G的2k=2r+2个奇度顶点分别为

$V_1, V_2, \cdots, V_r, V_{r+1}$

$V_1', V_2', \cdots, V_r', V_{r+1}'$

在$V_{r+1}$与$V_{r+1}'$之间加一条新边$e_{r+1}=(V_{r+1}, V_{r+1}')$，得图G'，则G'连通且有2r个奇度顶点。由归纳假设，G'中存在r条边不重的简单通路$P_1, P_2, \cdots, P_r$，使得

$$E(G')=\bigcup_{i=1}^{r}E(P_i)$$

显然存在某条$P_s(1\leq s\leq r)$含边$e_{r+1}=(V_{r+1}, V_{r+1}')$，则$P_s-e_{r+1}$为两条简单通路。设它们为$P_s'$和$P_s''$，则$P_1, P_2, \cdots, P_{s-1}, P_s', P_s'', \cdots, P_r$为所求的r+1条简单通路，即它们的边不重，并且含G的全部边。

3、 设 G 为 n(n>=2)阶无向连通图，证明：G 为欧拉图当且仅当 G 可表示为若干个边不重的圈之并。

**提示** 参见欧拉图和圈。
采用数学归纳法。

**答案** 这里只证必要性。充分性的证明也非常类似，故不证了。

在证明中用到的基本事实为：在图G中删除任意圈上的所有边之后，所得图G'各顶点度数的奇偶性不变。说得更详细一点即为：设C为图G中任意一个圈，G'=G-E(C)，则∀ v∈V(G)=V(G')，$d_G'(v)$与$d_G(V)$同为奇数或同为偶数。记这个事实为*。

下面证必要性，采用归纳法。

（1）m=1时，因为G为欧拉图，因而G必为环，此时结论为真。
（2）设m≤k（k≥1）时结论为真，下面证明m=k+1时结论也为真。

因为G为欧拉图，所以G连通且所有顶点的度数均为偶数，因而δ(G)≥2。于是，G中必含圈。否则G为树，树的最小度=1，这与δ(G)≥2矛盾。

设C为G中一个圈，令G'=G-E(C)。设G'有S(S≥1)个连通分支（有的连通分支可能为平凡图），则$G_i$(i=1,2,…,S)的边数$m_i$≤k。由*可知，$G_i$的度数均为偶数。由归纳假设可知：

$$G_r=\bigcup_{i=1}^{d_r} C_{ri}$$ ,r=1,2,…,S

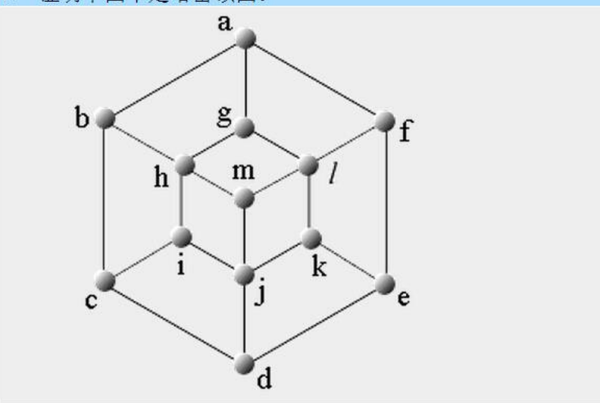
且$C_{11},C_{12},\cdots,C_{1d1},C_{21},C_{22},\cdots,C_{2d2},\cdots C_{s1},C_{s2},\cdots,C_{sds}$彼此边不重。将这些圈重新编号，得$C_1,C_2,\cdots,C_d$，其中$d=d_1+d_2+\cdots+d_s$，则

$$G=C\cup(\bigcup_{i=1}^{d} C_i)$$

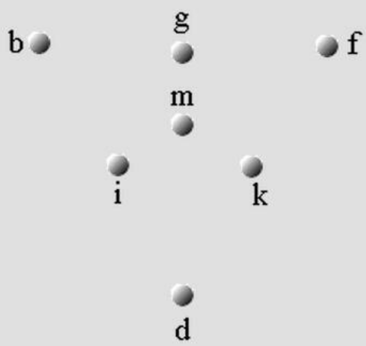
则G表成了d+1个边不重的圈之并。

哈密顿通路，哈密顿回路，哈密顿图，半哈密顿图：（判定&定理）

1. 证明下图不是哈密顿图。



方法一、直接利用定理15.6证明，令$V_1=\{a,h,l,c,j,e\}$，$p(G-V_1)=7$（见下图），由定理15.6可知，该图不是哈密顿图。（即它破坏了哈密顿图应具备的必要条件，所以不是哈密顿图）




**定理15.6** 设无向图$G=\langle V,E\rangle$是哈密顿图，对于任意$V_1\subset V$，且$V_1\neq\varnothing$，均有

$p(G-V_1)\leq|V_1|$

其中，$p(G-V_1)$为$G-V_1$的连通分支数。

方法二、本题给出的图中无奇数长度的回路，因而它是二部图，可记为$G=\langle V_1,V_2,E\rangle$，其中$V_1=\{a,h,l,c,j,e\}$，$V_2=\{b,g,f,i,m,k,d\}$。二部图是哈密顿图的必要条件是$|V_1|=|V_2|$。而此图中，$|V_1|=6$，$|V_2|=7$，所以它不是哈密顿图。

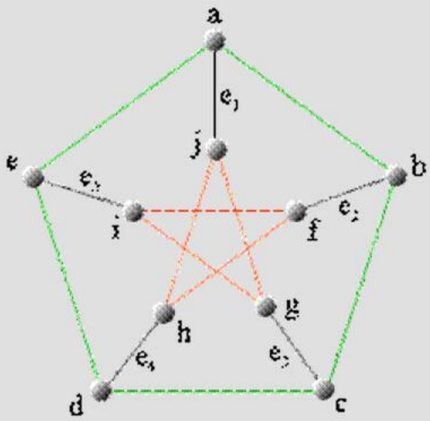
方法三、n阶无向图G是哈密顿图，还有一个明显的必要条件，即可能出现在哈密顿回路上的边至少有n条。记这个必要条件为（*）。

本图中，n=13，边数m=21，但这21条中不能提供13条出现在长度为13的圈上。事实上，虽然关联顶点h,l的边均由4条，但能出现在同一个圈上的边各只能用2条，因而共有6条不能用，就称“浪费了6条边”；同样地，在顶点a,c,e处又各“浪费了1条边”，共“浪费了3条边”。这样一来，能出现在同一个生成圈上的边至多有21-9=12条，由（*）可知，G中不存在哈密顿回路。故它不是哈密顿图。

## 2、 证明彼得森图不是哈密顿图

答案 证明：

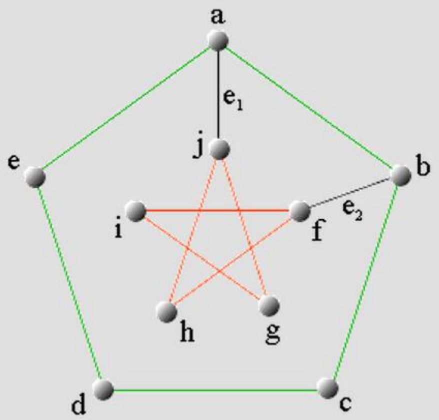
（1）分析彼得松图的特征。它有两个5阶图，不妨设为$C_1$（绿色）和$C_2$（红色），并有5条边$e_1,e_2,e_3,e_4,e_5$将$C_1$和$C_2$连接。



（2）用反证法证明之。若此图为哈密顿图，必存在哈密顿回路。若从某顶点行遍哈密顿回路C，比如从$C_1$上的a点开始，最后回到a. 因而不可能经过$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$ 中的1条、3条或5条边，而只能经过其中的2条或4条。下面分情况讨论，证明这是不可能的。

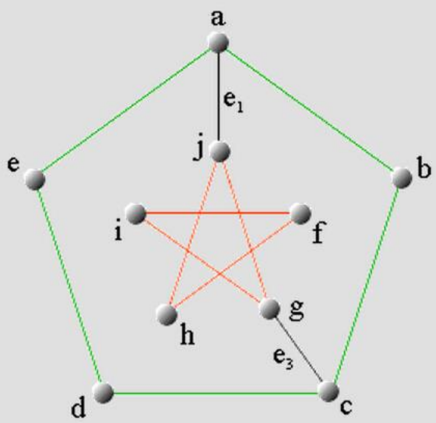
若经过2条边，由对称性只有下面两种情况：

①C过$e_1$与$e_2$，即$e_3, e_4, e_5$不在哈密顿回路C上，见下图。



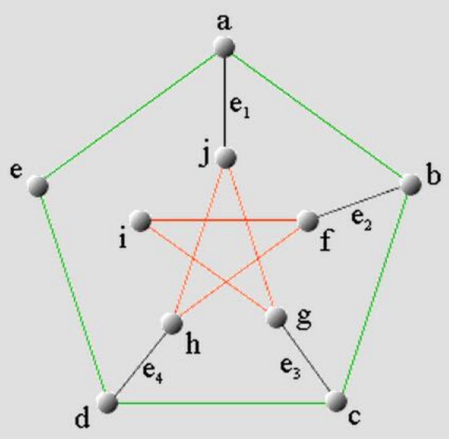

图中，g, h, i均为2度顶点，因而它们关联的边均在C上。这样一来，关联顶点f和j的6条均得在C上，这显然是不可能的。

②$e_1$与$e_3$在C上，而$e_2, e_4, e_5$不在C上，见下图

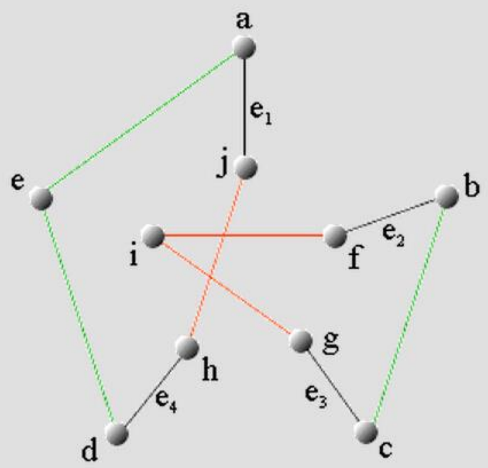



在$C_1$上，b, d, e均为2度顶点，它们关联的边均得在C上。这样一来，a, c关联的6条边均在C上，这显然也是不可能的。

若C经过$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$中的4条，不妨设只不经过$e_5$，见下图。




由于顶点e与i均为2度顶点，所以，它们关联的边均得在C上；又因为$e_1, e_2, e_3, e_4$在C中，所以边（a,b），（d,c），（f,h），（g,j）不可能在C中。去掉不可能利用的边后该图变成如下形式，这是两个分离的5阶圈，当然不可能有哈密顿回路。




综上所述，彼得松图不是哈密顿图。

3. 今有n个人，已知他们中的任何二人合起来认识其余的n-2个人。证明下列各题：

（1）当n≥3时，这n个人能排成一列，使得中间的任何人都认识两旁的人，而两端的人认识左边（或右边）的人。

（2）当n≥4时，这n个人能排成一个圈，使得每个人都认识两旁的人。

答案 证明：

作无向图$G=\langle V,E\rangle$，其中

$V=\{v \mid v$为此人群的成员$\}$，则$|V|=n$，并可将V表成$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$。

$E=\{(u,v) \mid u,v\in V$，$u\neq v$，且u与v认识$\}$

则G为n阶无向简单图。由题中给的条件可知，

$\forall u,v\in V$，若$u\neq v$，则

$d(u)+d(v)\geq n-2$。　　　记为（*）

要证明G中存在哈密顿通路或回路

对于$\forall v_i,v_j\in V$，$i\neq j$，分$v_i$与$v_j$是否认识两种情况讨论：

①$v_i$与$v_j$认识，则 $d(v_i)+d(v_j)\geq 2+(n-2)=n$

②$v_i$与$v_j$不认识，则 $\forall v_k\in V$，且$k\neq i\wedge k\neq j$，$v_i$与$v_j$都认识$v_k$。

否则$v_i$或$v_j$不认识$v_k$，比如说$v_i$不认识$v_k$。此时，$v_j$与$v_k$都不认识$v_i$（认识是彼此的），则$v_j$与$v_k$合起来至多认识其余的n-3个人，即

$d(v_j)+d(v_k)\leq n-3$

这与（*）矛盾。于是，$v_i$与$v_j$都认识$v_k$，因而由$v_k$的任意性可知

$d(v_i)+d(v_j)\geq 2(n-2)$

（1）当$n\geq 3$时，$2(n-2)\geq n-1$，即

$d(v_i)+d(v_j)\geq n-1$

于是，无论$v_i$与$v_j$是否认识，都有

$d(v_i)+d(v_j)\geq n-1$

由$v_i$，$v_j$的任意性和定理15.7可知，G中存在哈密顿通路Γ，只需按Γ上顶点的顺序排列就可以达到要求。

（2）当$n\geq 4$时，$2(n-2)\geq n$，即

$d(v_i)+d(v_j)\geq n$

因而，无论$v_i$与$v_j$是否认识，都有

$d(v_i)+d(v_j)\geq n$

由定理15.7的推论可知，G中存在哈密顿回路C，按C中顺序排圈即可达到目的。

**定理15.7** 设G是n阶无向简单图，若对于G中任意不相邻的顶点$v_i,v_j$，均有

$$d(v_i)+d(v_j)\geq n-1 \quad (15.1)$$

则G中存在哈密顿通路。

**推论** 设G为$n(n\geq 3)$阶无向简单图，若对于G中任意两个不相邻的顶点$v_i,v_j$，均有

$$d(v_i)+d(v_j)\geq n \quad (15.2)$$

则G中存在哈密顿回路，从而G为哈密顿图。