条件概率$P(B|A) = P(AB)/P(A)$
$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$
全概率公式$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$
贝叶斯公式

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}$$

方差 $D(X)=E[X-E(X)]^2=E(X^2)-E^2(X)$

1.<0—1>分布(两点分布) **X～B(0,1)**
$E(X) = p \quad D(X) = pq$

2.二项分布 **X～B(n,p)**
$p_k = P\{x = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$
$E(X) = np \quad D(X) = npq$
X,Y 相互独立, $X\sim B_1(n_1,p)$,
$Y\sim B_2(n_2,p)$,则 $X+Y\sim B(n_1+n_2,p)$

3.泊松分布 **X～P(λ)** $E(X) = D(X) = \lambda$
$p_k = P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$
泊松分布具有可加性

4.均匀分布 **X～U(a,b)**
$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

5.指数分布$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$
$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$
$E(X) = 1/\lambda \quad D(X) = 1/\lambda^2$

6.正态分布 **X～N(μ,σ²)**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$E(X) = \mu \; D(X) = \sigma^2$
标准正态分布 **X～N(0,1)**

如果$Y = g(x)$处处可导，
$f_Y(y) = f_X[h(y)]|h'(y)|$
协方差$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
$= E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$
相关系数$\rho_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$
协方差矩阵$C = (c_{ij})_{n\times n}$
二维随机变量协方差矩阵
$C = \begin{pmatrix} D(X) & cov(X,Y) \\ cov(X,Y) & D(Y) \end{pmatrix}$
$E(aX+b)=aE(X)+b \quad D(aX+b)=a^2D(X)$
$cov(X_1+X_2,Y)=cov(X_1,Y)+cov(X_2,Y)$
$cov(aX+bY,cX+dY)$
$=acD(X)+bdD(Y)+(ad+bc)cov(X,Y)$
特征函数的定义$\varphi_X(u) = E[e^{iuX}]$

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux}\varphi_X(u)\,du$$

一维分布函数$F(t,x) = P\{X(t) < x\}$
$F(t,x) = \int_{-\infty}^{x} f(t,x)dx$
二维分布函数
$F(s,t;x,y) = P\{X(s) < x, X(t) < y\}$
$F(s,t;x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(s,t;u,v)\,du\,dv$
随机过程的数字特征：均值函数、方差函数、协方差函数、相关函数

均值函数
$m(t) = E[X(t)] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i(t)$
或$= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(t,x)dx$

方差函数$D(t) = D[X(t)]$
$= E[X(t) - m(t)]^2 = E[X^2(t)] - m^2(t)$

协方差函数$C(s,t) = cov(X(s),X(t))$
$= E[X(s)X(t)] - m(s)m(t)$
$= R(s,t) - m(s)m(t)$
相关函数$R(s,t) = E[X(s)X(t)]$
相关系数$\rho(s,t) = \frac{cov(X(s),X(t))}{\sqrt{D(s)}\cdot\sqrt{D(t)}}$
反应两个随机过程之间相关程度：
互协方差函数、互相关函数
互协方差函数
$C_{XY}(s,t) = R_{XY}(s,t) - m_X(s)m_Y(t)$
互相关函数
$R_{XY}(s,t) = E[X(s)X(t)]$
两个随机过程互不相关
$E[X(s)Y(t)] = E[X(s)]E[Y(t)]$

如果$\{X(t), t \ge 0\}$是平稳独立增量过程，则均值函数 $m(t) = at$ (a 是常数)
方差函数 $D(t) = \sigma^2 t$ (σ为正常数)
协方差函数 $C(s,t) = \sigma^2 \min(s,t)$
若$X(n), n = 1,2,3,\cdots$是相互独立且同分布的随机变量，且$Y(n) = \sum_{k=0}^{n} X(k)$，则$\{Y(n), n = 1,2,3,\cdots\}$是平稳独立增量过程；泊松过程是平稳独立增量过程、生灭过程
对任意$t > 0$, $N(t) \sim P(\lambda t)$,

$$P\{N(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

$P\{N(t) - N(s) = k\} = P\{N(t-s) = k\}$
$= \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)}$

$$P\{N(t) < k\} = \sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}$$

均值函数 $m(t) = E[N(t)] = \lambda t$
方差函数 $D(t) = D[N(t)] = \lambda t$
一维特征函数

$$\varphi(u) = E\left[e^{iuN(t)}\right] = e^{\lambda t(e^{iu}-1)}$$

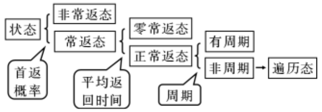
二维概率分布 (0<s<t)

$$P\{N(s) = j, N(t) = k\} = \frac{\lambda^k s^j (t-s)^{k-j}}{j!(k-j)!}e^{-\lambda t}$$

协方差函数$C(s,t) = \lambda\min(s,t)$
相关函数$R(s,t) = \lambda\min(s,t) + \lambda^2 st$
时间间隔$T_n, n = 1,2,\cdots$相互独立同分布，都服从参数为λ的指数分布$E(T_n) = \frac{1}{\lambda}$
若$\{N(t), t \ge 0\}$是非齐次泊松过程,$\lambda(t)$是它的强度,若$\lambda(t)$是连续函数,则在时间间距$[t_0, t_0 + t]$内事件 A 出现 k 次的概率为$P\{[N(t_0 + t) - N(t_0)] = k\}$
$= \frac{[m(t_0 + t) - m(t_0)]^k}{k!}e^{-[m(t_0+t)-m(t_0)]}$
$k = 0,1,2,\cdots$,且$m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$
$\lambda(t) = \lambda$时,为齐次泊松过程

离散参数马氏链
k 步转移概率
$p_{ij}(m,k) = P\{X(m+k) = j | X(m) = i\}$
k 步转移矩阵(转移矩阵$P(m,1)$)
$P(m,k) = (p_{ij}(m,k))\;(i,j \in E)$
n 步转移矩阵$P(n) = P^n$

转移概率$p_{ij}(m,k)$与m无关，则
$p_{ij}(m,k) = p_{ij}(k)$
$p_{ij}(m,1) = p_{ij}(1) = p_{ij}$
称为齐次马氏链。
初始分布 $p_i = P\{X(0) = i\}$ $\tilde{P}_0 = (p_i, i \in E)$
绝对分布(在 n 时刻处于状态 i 的概率)
$p_i(n) = P\{X(n) = i\}$ $\tilde{P}_n = (p_i(n), i \in E)$
绝对分布由初始分布和转移概率确定
$\tilde{P}_n = \tilde{P}_0 P^n$
马氏链具有遍历性:$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_j > 0$
$\Pi = \{\pi_j, j \in E\}$齐次马氏链的**极限分布**
遍历性：若存在正整数n_0，对任意$i,j \in E$，有$p_{ij}(n_0) > 0$，则此链是遍历的
遍历的齐次马氏链的绝对分布与转移概率有相同的极限；遍历的齐次马氏链的极限分布是平稳分布
平稳性：绝对分布始终等于初始分布
对于具有遍历性和平稳性的齐次马氏链有
$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i\in E}\pi_i p_{ij}\;(\Pi = \Pi P) \\ \pi_j > 0, \sum_{j\in E}\pi_j = 1 \end{cases}$ 由此求平稳分布
T_{ij}表示 i 出发经 n 步首次到达 j 的时刻
$f_{ij}(n)$表示首次到达概率；f_{ij}表示迟早到达概率；T_{ii}表示首次返回时刻；$f_{ii}(n)$表示首次返回概率；f_{ii}表示迟早返回概率
$\mu_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}(n)$首次到达平均时间
$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}(n)$首次到达平均返回时间
$\mu_i < +\infty$则状态 i 是正常返，否则为零常返
$f_{ij} > 0 \Leftrightarrow i \to j$
若$f_{ii} = 1$则 i 为常返状态，否则为非常返
利用转移概率$p_{ij}(n)$来判别状态性质：
1.非常返$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) < +\infty$
2.零常返$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = +\infty$，
且 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}(n) = 0$
3.正常返$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = +\infty$
且$\lim_{n\to\infty} p_{ii}(n) \ne 0$
状态 i 的周期$d = G\cdot C\cdot D\{n: p_{ii}(n) > 0\}$
三个层次区分状态类型



遍历态：非周期正常返状态
连续参数马氏链
转移概率函数

$$p_{ij}(s,t) = P\{X(t+s) = j | X(s) = i\}$$

转移概率与起点 s 无关$p_{ij}(s,t) = p_{ij}(t)$
则为连续参数齐次马氏链
初始分布绝对分布与离散参数马氏链类似，n 改成 t，若转移概率的极限存在
$\lim_{t\to+\infty} p_{ij}(n) = \pi_j > 0$ 则具有遍历性
$\lim_{t\to0^+}\frac{1-p_{ii}(t)}{t} = q_{ii} \triangleq q_i$
$\lim_{t\to0^+}\frac{p_{ij}(t)}{t} = q_{ij}\;, i \ne j$
状态转移速度矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots & q_{0s} \\ q_{10} & -q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1s} \\ q_{20} & q_{21} & -q_{22} & \cdots & q_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{s0} & q_{s1} & q_{s2} & \cdots & -q_{ss} \end{pmatrix}$$

后退$P'(t) = QP(t)$ 前进$P'(t) = P(t)Q$

平稳分布$\Pi Q = 0$
生灭过程
状态转移速度矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\mu_N \end{pmatrix}$$

后退方程$P'(t) = QP(t), P(+0) = I$
前进方程$P'(t) = P(t)Q, P(+0) = I$
平稳分布$\Pi Q = 0$

$$\begin{cases} \pi_0 = \left(1 + \sum_{j=1}^{N}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1} \\ \pi_k = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\pi_0, k = 1,2,\cdots,N \end{cases}$$

无限源的简单排队系统 M/M/1/∞

在统计平衡的条件下(ρ<1)：

平均队长 $\bar N=\frac{\rho}{1-\rho}$

等待队长的分布

$$P\{N_q=j\}=\begin{cases}1-\rho^2, & j=0\\ (1-\rho)\rho^{j+1}, & j\ge 1\end{cases}$$

平均等待队长 $\bar N_q=\frac{\rho^2}{1-\rho}$

队长的方差 $D(N)=\frac{\rho}{(1-\rho)^2}$

等待队长的方差 $D(N_q)=\frac{\rho^2(1+\rho)-\rho^4}{(1-\rho)^2}$

在等待条件下的等待队长分布

$P\{N_q=j|N_q\ge 1\}=(1-\rho)\rho^{j-1}$

在等待条件下的平均等待队长

$E(N_q|N_q\ge 1)=\frac{1}{1-\rho}$

$p_0=1-\rho$ 是系统空闲的概率,ρ 是系统繁忙的概率,ρ 越大,系统越繁忙

等待时间分布函数

$W_q(t)=P\{W_q\le t\}=1-\rho e^{-\mu(1-\rho)t}$

平均等待时间 $\bar W_q=E(W_q)=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$

等待时间的方差 $D(W_q)=\frac{\lambda(2\mu-\lambda)}{\mu^2(\mu-\lambda)^2}$

逗留时间 $W(t)=1-e^{-(\mu-\lambda)t}$

平均逗留时间 $\bar W=\frac{1}{\mu-\lambda}$

逗留时间的方差 $D(W)=\frac{1}{(\mu-\lambda)^2}$

Little 公式：$\bar N=\lambda_e\bar W$，$\bar N_q=\lambda_e\bar W_q$

其中λ_e表示单位时间内实际进入系统的平均顾客数。

平均忙期长度 $\bar b=\frac{1}{\mu-\lambda}$ $(\rho<1)$

一个忙期中所服务的平均顾客数

$\mu\cdot\bar b=\frac{1}{1-\rho}$ $(\rho<1)$

具有可变输入率的 M/M/1/∞

顾客到达看到队长为 k 时，进入系统的概率为a_k，排队越长进入的可能性越小

平均队长 $\bar N=\rho$

平均等待队长 $\bar N_q=\rho+e^{-\rho}-1$

等待时间分布函数

$$W_q(t)=1-\frac{e^{-\mu t}}{e^{\rho}-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^{k+1}}{(k+1)!}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\mu t)^j}{j!}$$

平均等待时间 $\bar W_q=\frac{\rho e^{\rho}}{\mu(e^{\rho}-1)}-\frac{1}{\mu}$

逗留时间的分布函数

$$W(t)=1-\frac{e^{-\mu t}}{e^{\rho}-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\rho^{j+1}}{(j+1)!}\sum_{k=0}^{j}\frac{(\mu t)^k}{k!}$$

平均逗留时间 $\bar W=\frac{\rho e^{\rho}}{\mu(e^{\rho}-1)}$

Little 公式成立：

$\bar N=\lambda_e\bar W$，$\bar N_q=\lambda_e\bar W_q$

具有可变服务率的 M/M/1/∞

$\rho_1=\frac{\lambda}{\mu_1}$, $\rho_2=\frac{\lambda}{\mu_2}$

当$\rho_2\ge 1$时$p_j=0, j=0,1,2,\cdots$

当$\rho_2<1$时

$$p_0=\left(\frac{1-\rho_1^{m}}{1-\rho_1}+\frac{\rho_2\rho_1^{m-1}}{1-\rho_2}\right)^{-1}$$

$$p_j=\begin{cases}\rho_1^{j}p_0 & j=1,2,\cdots,m-1\\ \rho_1^{m-1}\rho_2^{j-m+1}p_0 & j=m,m+1,\cdots\end{cases}$$

平均队长为

$$\bar N=p_0\left\{\frac{\rho_1[1+(m-1)\rho_1^{m}-m\rho_1^{m-1}]}{(1-\rho_1)^2}+\frac{\rho_2\rho_1^{m-1}[m-(m-1)\rho_2]}{(1-\rho_2)^2}\right\}$$

平均等待队长为$\bar N_q=\bar N-(1-\rho_0)$

平均逗留时间$\bar W=\frac{1}{\lambda}\bar N$

平均等待时间

$$\bar W_q=\frac{\bar N}{\lambda}=\frac{N}{\lambda}-\frac{1-p_0}{\lambda}=\bar W-\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{\infty}p_j$$

平均服务时间

$$\frac{1-p_0}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{\infty}p_j=\frac{p_0}{\lambda}\left(\frac{1-\rho_1^{m}}{1-\rho_1}+\frac{\rho_1^{m-1}\rho_2}{1-\rho_2}\right)$$

M/M/∞排队系统

$p_j(t)=P\{N(t)=j\}, p_j=\lim_{t\to\infty}p_j(t)$

平均队长$\bar N=\rho$，平均等待队长$\bar N_q=0$

平均等待时间$\bar W_q=0$

逗留时间＝服务时间

M/M/c/∞排队系统

$\rho_c=\frac{\lambda}{c\mu}$

$$p_0=\left[\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}+\frac{c\rho^c}{c!\,(c-\rho)}\right]^{-1}$$

$$p_j=\begin{cases}\frac{\rho^j}{j!}p_0 & 1\le j\le c-1\\ \frac{\rho^j}{c^{j-c}\cdot c!}p_0 & j\ge c\end{cases}$$

顾客到达时需要等待的概率为

$p=\frac{1}{1-\rho_c}p_c$ $p_c=\frac{\rho^c}{c!}p_0$

等待队长 N_q 有分布

$P\{N_q=0\}=\sum_{j=0}^{c}p_j$ $P\{N_q=k\}=p_{c+k}$

$\bar N_q=\frac{\rho_c}{(1-\rho_c)^2}p_c$

正在被服务的顾客数

$P\{N_c=k\}=p_k$ $0\le k\le c-1$

$P\{N_c=c\}=\frac{1}{1-\rho_c}p_c$

$\bar N_c=\rho$

平均队长$\bar N=\bar N_q+\bar N_c$

等待时间分布函数

$W_q(t)=P\{W_q\le t\}=1-\frac{p_c}{1-\rho_c}e^{-\mu(c-\rho)t}$

$\bar W_q=\frac{\rho_c}{\lambda(1-\rho_c)^2}p_c$

逗留时间

平均逗留时间

$\bar W=\frac{\rho_c}{\lambda(1-\rho_c)^2}p_c+\frac{1}{\mu}$

Little 公式成立

M/M/c/K 混合制排队系统

$$p_0=\left(\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}+\sum_{j=c}^{k}\frac{\rho^j}{c!\,c^{j-c}}\right)^{-1}$$

$$p_j=\begin{cases}\frac{\rho^j}{j!}p_0 & 1\le j\le c-1\\ \frac{\rho^j}{c^{j-c}\cdot c!}p_0 & j\ge c\end{cases}$$

损失的概率$p=p_k=\frac{\rho^k}{c!\,c^{k-c}}p_0$

单位时间内平均损失的顾客数$\bar\lambda_e=\lambda p_k$

单位时间内平均进入系统的顾客数

$\lambda_e=\lambda(1-p_k)$

平均等待队长

$\bar N_q=\frac{c^c}{2c!}(K-c)(K-c+1)p_0$ $(\rho_c=1)$

$\bar N_q=\frac{\rho^c\rho_c p_0}{(1-\rho_c)^2c!}\cdot$

$[1-\rho_c^{K-c+1}-\rho_c^{K-c}(1-\rho_c)(K-c+1)]$

N_c表示平衡时正在被服务的顾客数

$P\{N_c=j\}=p_j, j=0,1,2,\cdots,c-1$

$P\{N_c=c\}=\sum_{j=c}^{k}p_j$

正在被服务的平均顾客数

$\bar N_c=\rho(1-p_k)$

平均队长$\bar N=\bar N_q+\bar N_c$

$$W_q(t)=\begin{cases}\sum_{j=0}^{c-1}q_j & (t=0)\\ \sum_{j=0}^{c-1}q_j+\sum_{j=c}^{k-1}q_j\cdot\int_{0^+}^{t}\frac{c\mu(c\mu x)^{j-c}}{(j-c)!}e^{-c\mu x}dx\end{cases}$$

平均等待时间$\bar W_q=\sum_{j=c}^{k-1}\frac{j-c+1}{c\mu}q_j$

平均逗留时间$\bar W=\bar W_q+\frac{1}{\mu}$

$q_j=\frac{p_j}{1-p_k}$

M/M/1/K

$$p_j=\begin{cases}\frac{(1-\rho)\rho^j}{1-\rho^{k+1}} & \rho\ne 1\\ \frac{1}{k+1} & \rho=1\end{cases}\quad 1\le j\le k$$

$$\bar N=\begin{cases}\frac{\rho}{1-\rho}-\frac{(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}} & \rho\ne 1\\ \frac{k}{2} & \rho=1\end{cases}$$

$$\bar N_q=\begin{cases}\frac{\rho^2}{1-\rho}-\frac{(k+\rho)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}} & \rho\ne 1\\ \frac{k(k-1)}{2(k+1)} & \rho=1\end{cases}$$

$$W_q(t)=\begin{cases}q_0 & t=0\\ 1-\sum_{j=1}^{k-1}q_j\cdot\left[\sum_{i=0}^{j}\frac{(\mu t)^i}{i!}e^{-\mu t}\right] & t>0\end{cases}$$

$$W(t)=q_0\sum_{j=0}^{k-1}\rho^j\left[1-e^{-\mu t}\sum_{i=0}^{j}\frac{(\mu t)^i}{i!}\right]$$

M/M/c/c

爱尔朗公式$p_j=\frac{\rho^j}{j!}/\sum_{i=0}^{c}\frac{\rho^i}{i!}$

顾客损失的概率$p_c=\frac{\rho^c}{c!}/\sum_{i=0}^{c}\frac{\rho^i}{i!}$

由于不允许排队$\bar N_q=0$; $\bar W_q=0$

$\bar N=\bar N_c=\rho(1-\rho_c)$; $\bar W=\frac{1}{\mu}$

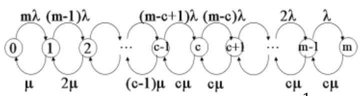
有限源的简单排队系统

顾客总体是有限的：输入过程是简单流

服务时间服从指数分布

典型例子：机器维修模型

M/M/c/m/m 系统（机器故障修理）



$$p_0=\left(\sum_{i=0}^{c-1}C_m^i\rho^i+\sum_{i=c}^{m}C_m^i\frac{i!}{c!\,c^{i-c}}\rho^i\right)^{-1}$$

$$p_j=\begin{cases}C_m^j\rho^j p_0 & 1\le j\le c-1\\ C_m^j\frac{j!}{c!\,c^{j-c}}\rho^j p_0 & j\ge c\end{cases}$$

平均发生故障的机器数$\bar N=$

$$\sum_{j=0}^{c-1}\frac{m!\rho^j}{(j-1)!(m-j)!}p_0+\frac{m!}{c!}\sum_{j=c}^{m}\frac{j\rho^j}{(m-j)!\,c^{j-c}}p_0$$

平均等待修复的机器数

$=\sum_{j=c}^{m}(j-c)p_j$

平均忙的维修工人数

$\bar N_c=\sum_{j=1}^{c-1}jp_j+c\sum_{j=c}^{m}p_j$

故障机器的等待修理时间分布函数

$W_q(t)=$ $(t\ge 0)$

$$1-\sum_{j=c}^{m}p_je^{-c\mu t}\left\{1+c\mu t+\cdots+\frac{(c\mu t)^{j-c}}{(j-c)!}\right\}$$

等待修理的平均时间

$\bar W_q=\sum_{j=c}^{m-1}\frac{j-c+1}{c\mu}p_j=\frac{\bar N_q}{\lambda(m-\bar N)}$

统计平衡下：

单位时间内发生故障的平均机器数

$\lambda_e=\lambda(m-\bar N)$

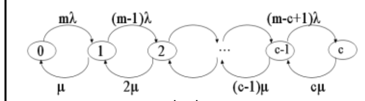
单位时间内平均修复的机器数

$\lambda_\mu=\mu\cdot\bar N_c$

单位时间内平均修复的机器数等于发生故障的平均数，即$\lambda_e=\lambda_\mu$

M/M/c/m/m 损失制系统

当c个维修工人都忙于维修故障的机器时，发生故障的机器不是等待维修，而是立刻送到其它地方去修理，或者停产大修；



$p_j=C_m^j\rho^jp_0=\frac{C_m^j\rho^j}{\sum_{k=0}^{c}C_m^k\rho^k}$ $j=0,1,2,\cdots,c$

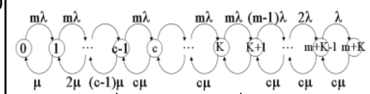
平均发生故障的机器数$\bar N=\frac{m\rho}{1+\rho}$

有备用品的 M/M/c/m+K/m 系统

m 台机器正常工作，另有 K 台机器备用

处于正常运转的机器不足 m 台时，只好缺额生产

c≤K 时的状态转移速度图

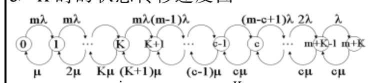


$$p_0=\left[\sum_{i=0}^{c-1}\frac{m^i}{i!}\rho^i+\frac{1}{c!}\sum_{i=c}^{K-1}\frac{m^i}{c^{i-c}}\rho^i+\frac{m^K\cdot m!}{c!}\sum_{i=K}^{K+m}\frac{1}{c^{i-c}(m-i+K)!}\rho^i\right]^{-1}$$

$p_j=$

$$\begin{cases}\frac{m^j}{j!}\rho^jp_0 & j=1,2,\cdots,c-1\\ \frac{m^j}{c^{j-c}c!}\rho^jp_0 & j=c,c+1,\cdots,K-1\\ \frac{m^K\cdot m!}{c^{j-c}(m-j+K)!\cdot c!}\rho^jp_0 & j=K,K+1,\cdots,m+K\end{cases}$$

c＞K 时的状态转移速度图



$$p_0=\left[\sum_{i=0}^{K-1}\frac{m^i}{i!}\rho^i+\sum_{i=K}^{c-1}\frac{m^K\cdot m!}{i!(m-i+K)!}\rho^i+\frac{m^K\cdot m!}{c!}\sum_{i=c}^{K+m}\frac{1}{c^{i-c}(m-i+K)!}\rho^i\right]^{-1}$$

$$p_j=\begin{cases}\frac{m^j}{j!}\rho^jp_0 & j=1,2,\cdots,K-1\\ \frac{m^K\cdot m!}{j!(m-j+K)!}\rho^jp_0 & j=K,K+1,\cdots,c-1\\ \frac{m^K\cdot m!}{c^{j-c}(m-j+K)!\cdot c!}\rho^jp_0, & j=c,c+1,\cdots,m+K\end{cases}$$