1. 将问题改写为线性规划问题的标准形式.

$\max\left\{\min\left\{\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i, \cdots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i\right\}\right\}$

令 $V=\min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i, \cdots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i\right)$

则原问题可化为：

$$\max z = V$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geqslant V \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ x_i \geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,m)\end{cases}$$

2. 证明题.

$\because X_1$ 是 $\max S = C_1X$ 的最优解 $\therefore C_1X_1 \geqslant C_1X_2$ 即 $C_1X_1 - C_1X_2 \geqslant 0$

X_2 是 $\max S=C_2X$ 的最优解 $\therefore C_2X_2 \geqslant C_2X_1$ 即 $C_2X_2 - C_2X_1 \geqslant 0$

$$\begin{aligned}\therefore (C_2-C_1)(X_2-X_1) &= C_2X_2 - C_2X_1 - C_1X_2 + C_1X_1 \\ &= (C_2X_2 - C_2X_1) + (C_1X_1 - C_1X_2) \\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

得证.

3. 标准型：

(1). $\max z' = -2x_1 - 2x_2 - 4x_3$

$$\begin{cases}2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 + x_5 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_6 = 5 \\ x_i \geqslant 0,\ i=1.2.3.4.5.6\end{cases}$$

(2). $\max z' = x_1 + 2x_2 - 3x_3' + 4(x_4' - x_4'')$

$$\begin{cases}-x_1 + x_2 + x_3' - 3(x_4' - x_4'') = 5 \\ 6x_1 + 7x_2 - 3x_3' - 5(x_4' - x_4'') - x_5 = 8 \\ 12x_1 - 9x_2 + 9x_3' + 9(x_4' - x_4'') + x_6 = 20 \\ x_3' \geqslant 0,\ x_4' \geqslant 0,\ x_4'' \geqslant 0,\ x_i \geqslant 0,\ i=1.2.5.6\end{cases}$$

(3). $\max S = 5(x_1' - x_1'') + 6x_2$

$$\begin{cases}(x_1' - x_1'') + 2x_2 = 5 \\ (x_1'' - x_1') + 5x_2 - x_3 = 3 \\ x_1' \geqslant 0,\ x_1'' \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0\end{cases}$$

(4). $\max S = (x_1' - x_1'') + (x_2' - x_2'')$

$$\begin{cases}2(x_1' - x_1'') + (x_2' - x_2'') = 5 \\ 3(x_1' - x_1'') - (x_2' - x_2'') = 6 \\ x_1' \geqslant 0,\ x_1'' \geqslant 0,\ x_2' \geqslant 0,\ x_2'' \geqslant 0\end{cases}$$

对偶问题：

(1). $\min W = 2y_1 + 3y_2 + 5y_3$

$$\begin{cases}2y_1 + 3y_2 + y_3 \geqslant 2 \\ 3y_1 + y_2 + 4y_3 \geqslant 2 \\ 5y_1 + 7y_2 + 6y_3 \geqslant 4 \\ y_1 \leqslant 0,\ y_2 \geqslant 0,\ y_3 \geqslant 0\end{cases}$$

(2). $\min W = 5y_1 + 8y_2 + 20y_3$

$$\begin{cases}-y_1 + 6y_2 + 12y_3 \geqslant 1 \\ y_1 + 7y_2 - 9y_3 \geqslant 2 \\ -y_1 + 3y_2 - 9y_3 \leqslant 3 \\ -3y_1 - 5y_2 + 9y_3 = 4 \\ y_1 \text{ 无限制},\ y_2 \leqslant 0,\ y_3 \geqslant 0\end{cases}$$

(3). $\min W = 5y_1 + 3y_2$

$$\begin{cases}y_1 - y_2 = 5 \\ 2y_1 + 5y_2 \geqslant 6 \\ y_1 \text{ 无限制}.\ y_2 \leqslant 0\end{cases}$$

(4). $\min W = 5y_1 + 6y_2$

$$\begin{cases}2y_1 + 3y_2 = 1 \\ y_1 - y_2 = 1 \\ y_1、y_2 \text{ 无限制}\end{cases}$$

4. $\max z = 6x_1 + 2x_2 + 12x_3$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 24 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_5 = 30 \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1.2.3.4.5 \end{cases}$$

C_j			6	2	12	0	0	
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
0	x_4	24	4	1	(3)	1	0	8
0	x_5	30	2	6	3	0	1	10
σ_j			6	2	12	0	0	

$\Rightarrow$

C_j			6	2	12	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-6	2	-5	0	1	-1
12	x_3	10	2/3	2	1	0	1/3
σ_j			-2	-22	0	0	-4

$\Rightarrow$

C_j			6	2	12	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
12	x_3	8	4/3	1/3	1	1/3	0
0	x_5	6	-2	5	0	-1	1
σ_j			-10	-2	0	-4	0

此时，$\sigma_j \leq 0$ 成立，且 $b \geqslant 0$。得最优解 $X = (0, 0, 8, 0, 6)^T$

最优值 $z = 6\times 0 + 2\times 0 + 12\times 8 = 96$

5. 原问题的对偶问题为：

$\min z = 10y_1 + 10y_2$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geqslant 4 \\ 2y_1 + 3y_2 \geqslant 7 \\ y_1 + 3y_2 \geqslant 2 \\ y_1, y_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

显然，$y_1 = 1/2$，$y_2 = 2$ 是其一个可行解，对应目标函数值 $z = 25$

根据对偶理论，最小值问题的任一可行解都是其对偶问题最优值的一个上界，则 $\max w \leq 25$

6. 化为标准型：

$\max z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 = 4 \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1.2.3.4.5 \end{cases}$$

等式约束两边同时乘以 -1

$\max z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4 \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1.2.3.4.5 \end{cases}$$

C_j			-2	-3	-4	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0
0	x_5	-4	(-2)	1	-3	0	1
σ_j			-2	-3	-4	0	0

$\min\{b_i\} = -4$，换出 x_5

$\theta = \min\{\frac{-2}{-2}, -, \frac{-4}{-3}\} = 1$，换入 x_1

$\Longrightarrow$

C_j			-2	-3	-4	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-1	0	(-5/2)	1/2	1	-1/2
-2	x_1	2	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	-1/2
σ_j			0	-4	-1	0	-1

$\min\{b_i\} = -1$，换出 x_4

$\theta = \min\{\frac{-4}{-5/2}, --, \frac{-1}{-1/2}\} = \frac{8}{5}$，换入 x_2

C_j			-2	-3	-4	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	x_2	2/5	0	1	-1/5	-2/5	1/5
-2	x_1	11/5	1	0	7/5	-1/5	-2/5
σ_j			0	0	-9/5	-8/5	1/5

此时，b 全部大于0，得到最优解 $X^* = (11/5, 2/5, 0, 0, 0)^T$

最优值 $\min w = -\max z^* = -[-2\times(11/5) - 3\times(2/5)] = 28/5$

7. $\max z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{对偶问题}}$

$\min w = 20y_1 + 20y_2$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geqslant 1 \\ 2y_1 + y_2 \geqslant 2 \\ 2y_1 + 3y_2 \geqslant 3 \\ 3y_1 + 2y_2 \geqslant 4 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{标准化}}$

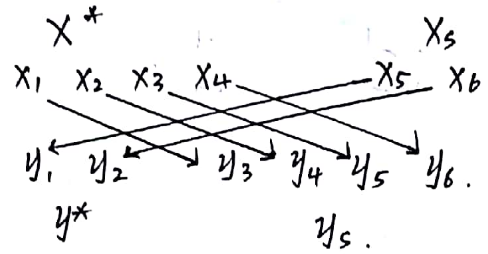
$\min w = 20y_1 + 20y_2$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 = 1 \\ 2y_1 + y_2 - y_4 = 2 \\ 2y_1 + 3y_2 - y_5 = 3 \\ 3y_1 + 2y_2 - y_6 = 4 \\ y_1, y_2, y_3, \dots, y_6 \geqslant 0 \end{cases}$$

7.(续).

∵ $y_1=1.2$, $y_2=0.2$ 是对偶问题最优解.

代入得：$y_3=0.6$, $y_4=0.6$, $y_5=0$, $y_6=0$



∴ 由互补松弛条件有：

$x_5=x_6=0$, $x_1=x_2=0$, 代入约束条件. $x_3=4$. $x_4=4$.

∴ 原问题最优解：$X=(0,0,4,4)^T$. 最优 $\max z=3\times4+4\times4=28$

8. 若 $X=(0,2,0,0,2)^T$ 为最优解. 基变量为 x_2, x_5, 对应 $\sigma_2=\sigma_5=0$.

根据 $\sigma_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}$ 来计算 σ_1、σ_3、σ_4. 若其全部小于0. 则 $X=(0,2,0,0,2)$ 为最优解.

列单纯形表：

		C_j	1	4	3	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
4	x_2	2	1	1	1/2	1/2	0
0	x_5	2	-1	0	1	-1	1
	σ_j		-3	0	1	-2	0

∵ $\sigma_3=1>0$.

∴ 此时 $x_2=2$, $x_5=2$, 不是原问题最优解.

9. 对偶问题为：
$$\min W=4y_1+3y_2$$
$$\begin{cases} y_1+y_2\geq1 \\ -y_2\geq-1 \\ -y_1+2y_2\geq1 \\ y_1,y_2\leq0 \end{cases}$$

若原问题有最优解. 则对偶问题也有最优解.
观察可知. 对偶问题无可行解. 更没最优解.
故原问题无最优解.

10. 每个公司最多建2个厂房，可将公司复制2份，补充第6个厂房 B_6.

$$\begin{array}{c|cccccc} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \\ \hline A_{11} & 4 & 8 & 7 & 15 & 12 & 0 \\ A_{12} & 4 & 8 & 7 & 15 & 12 & 0 \\ A_{21} & 7 & 9 & 17 & 14 & 10 & 0 \\ A_{22} & 7 & 9 & 17 & 14 & 10 & 0 \\ A_{31} & 6 & 9 & 12 & 8 & 7 & 0 \\ A_{32} & 6 & 9 & 12 & 8 & 7 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} (0) & 0 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & (0) & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 10 & 6 & 3 & (0) \\ 3 & 1 & 10 & 6 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & (0) & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & (0) & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (0) & \cancel{0} & \cancel{0} & 7 & 5 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & (0) & 7 & 5 & 1 \\ 2 & (0) & 9 & 5 & 2 & \cancel{0} \\ 2 & \cancel{0} & 9 & 5 & 2 & (0) \\ 2 & 1 & 5 & (0) & \cancel{0} & 1 \\ 2 & 1 & 5 & \cancel{0} & (0) & 1 \end{pmatrix}$$

∴ A_1：B_1, B_3 A_2：B_2 A_3：B_4, B_5 共用时：$4+7+9+8+7=35$

11 (1) 将工作按 d_i 升序得调度队列：$(A_5, A_4, A_8, A_3, A_2, A_6, A_7, A_1)$

(2)

A_i	A_5	A_4	A_8	A_3	A_2	A_6	A_7	A_1
t_i	4	2	3	2	10	6	7	5
C_{ri}	4	6	9	11	21	27	34	39
d_i	6	8	9	10	18	22	28	34
	✓	✓	✓	×				

前3个中. A_5 耗时最长. 移出.

→

A_i	A_4	A_8	A_3	A_2	A_6	A_7	A_1	A_5
t_i	2	3	2	10	6	7	5	4
C_{ri}	2	5	7	17	23	30	35	39
d_i	8	9	10	18	22	28	34	6
	✓	✓	✓	✓	×			

移出 A_2

→

A_i	A_4	A_8	A_3	A_6	A_7	A_1	A_5	A_2
t_i	2	3	2	6	7	5	4	10
C_i	2	5	7	13	20	25	29	39
d_i	8	9	10	22	28	34	6	18
	✓	✓	✓	✓	✓	✓		

延误工件最少为2个. 是 A_5、A_2

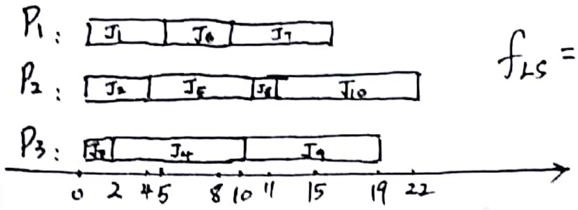
12.

J_i	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}
t_i	5	4	2	8	6	3	7	1	9	11

$\xrightarrow{\text{重新排列}}$

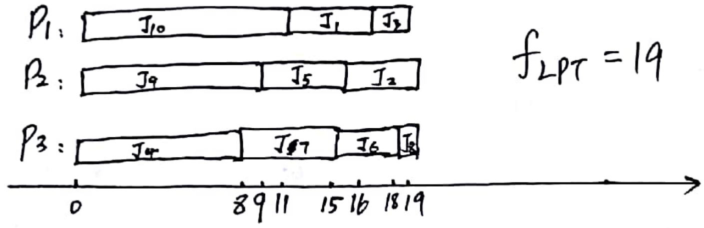
J_i	J_{10}	J_9	J_4	J_7	J_5	J_1	J_2	J_6	J_3	J_8
t_i	11	9	8	7	6	5	4	3	2	1

对于LS算法：



$f_{LS}=22$

对于LPT算法：



$f_{LPT}=19$

13.

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8
12	14	8	4	16	6	10	2

$\xrightarrow{\text{降序}}$

	I_5	I_2	I_1	I_7	I_3	I_6	I_4	I_8
w_j	16	14	12	10	8	6	4	2

NF: [12 |] [14 |] [8 | 4] [16 |] [10 | 2]　Pack : 5

BF: [12 | 8] [14 | 4 | 2] [16 |] [6 | 10]　Pack : 4

FF: [12 | 8] [14 | 4 | 2] [16 |] [6 | 10]　Pack : 4

BFD: [16 | 4] [14 | 6] [12 | 8] [10 | 2]　Pack : 4

FFD: [16 | 4] [14 | 6] [12 | 8] [10 | 2]　Pack : 4.

14. $a=10$，问题是求 $f_3(10)$

$$f_3(10)=\max_{0\le x_3\le\frac{10}{3},\ x_3\text{为整数}}\{2x_3^2+f_2(10-3x_3)\}=\max_{x_3=0,1,2,3}\{2x_3^2+f_2(10-3x_3)\}=\max\{f_2(10),2+f_2(7),8+f_2(4),18+f_2(1)\}$$

$$f_2(10)=\max_{0\le x_2\le\frac{10}{4},\ x_2\text{为整数}}\{9x_2+f_1(10-4x_2)\}=\max_{x_2=0,1,2}\{9x_2+f_1(10-4x_2)\}=\max\{f_1(10),9+f_1(6),18+f_1(2)\}$$

$$f_2(7)=\max_{0\le x_2\le\frac{7}{4},\ x_2\text{为整数}}\{9x_2+f_1(7-4x_2)\}=\max_{x_2=0,1}\{9x_2+f_1(7-4x_2)\}=\max\{f_1(7),9+f_1(3)\}$$

$$f_2(4)=\max_{0\le x_2\le 1,\ x_2\text{为整数}}\{9x_2+f_1(4-4x_2)\}=\max_{x_2=0,1}\{9x_2+f_1(4-4x_2)\}=\max\{f_1(4),9+f_1(0)\}$$

$$f_2(1)=\max_{0\le x_2\le\frac{1}{4}}\{9x_2+f_1(1-4x_2)\}=\max_{x_2=0}\{9x_2+f_1(1-4x_2)\}=f_1(1)$$

易知，$f_1(0)=4\times\lfloor\frac{0}{2}\rfloor=0$，$f_1(1)=4\times\lfloor\frac{1}{2}\rfloor=0$，$f_1(2)=4\times\lfloor\frac{2}{2}\rfloor=4\ (x_1=1)$，$f_1(3)=4\times\lfloor\frac{3}{2}\rfloor=4\ (x_1=1)$

$f_1(4)=4\times\lfloor\frac{4}{2}\rfloor=8$，$f_1(6)=4\times\lfloor\frac{6}{2}\rfloor=12$，$f_1(7)=4\times\lfloor\frac{7}{2}\rfloor=12\ (x_1=3)$，$f_1(10)=4\times\lfloor\frac{10}{2}\rfloor=20\ (x_1=5)$

$\therefore f_2(10)=\max\{20,9+12,\underset{(x_2=2)}{18+4}\}=22$　；$f_2(7)=\max\{12,9+4\}=13$

$f_2(4)=\max\{8,9+0\}=9$　；$f_2(1)=f_1(1)=0$

$\therefore f_3(10)=\max\{\underset{(x_3=0)}{22},2+13,8+9,18+0\}=22$　$(x_1=1,x_2=2,x_3=0)$

$\therefore$ 最优解为 $X=(1,2,0)$，最优值 $Z=22$

15.

	A	B	C	D	E
甲	26	38	41	52	27
乙	25	33	44	59	21
丙	20	30	47	56	25
丁	22	31	45	53	20

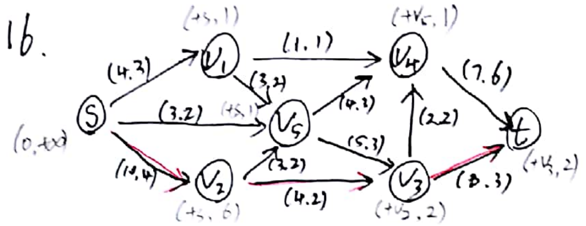
$$\Rightarrow\begin{pmatrix}(0) & 12 & 15 & 26 & 1\\ 4 & 12 & 23 & 38 & (0)\\ 0 & 10 & 27 & 36 & 5\\ 2 & 11 & 25 & 33 & 0\\ 0 & (0) & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}(0) & 2 & 5 & 16 & 1\\ 4 & 2 & 13 & 28 & (0)\\ 0 & (0) & 17 & 26 & 5\\ 2 & 1 & 15 & 23 & 0\\ 10 & 0 & (0) & 0 & 10\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}(0) & 2 & 0 & 11 & 1\\ 4 & 2 & 8 & 23 & (0)\\ 0 & (0) & 12 & 21 & 5\\ 2 & 1 & 10 & 18 & 0\\ 15 & 5 & (0) & 0 & 15\end{pmatrix}$$

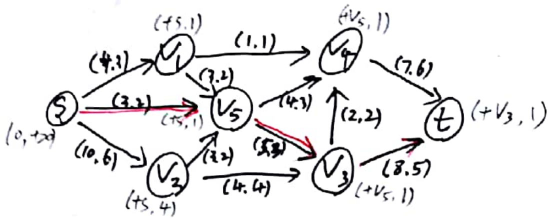
$$\Rightarrow\begin{pmatrix}\cancel{0} & 2 & (0) & 11 & 2\\ 3 & 1 & 7 & 22 & (0)\\ (0) & \cancel{0} & 12 & 21 & 6\\ 1 & (0) & 9 & 17 & \cancel{0}\\ 15 & 5 & \cancel{0} & (0) & 16\end{pmatrix}$$

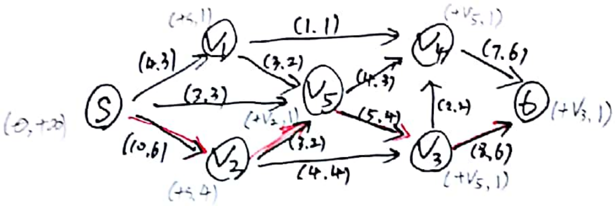
∴分配方案为：甲：C、D
乙：E
丙：A
丁：B

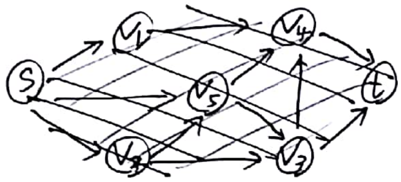
∴用时：$41+52+21+20+31=165$

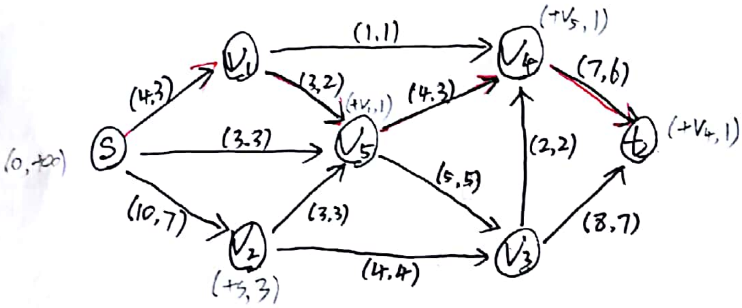
16.

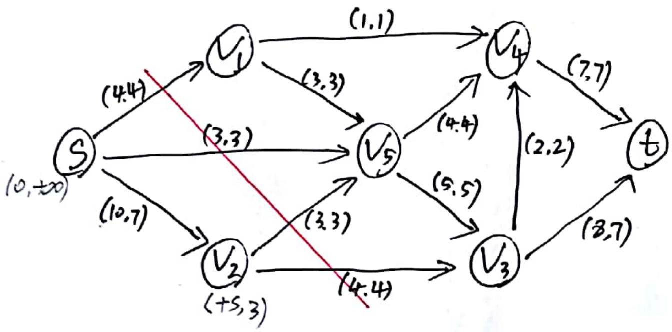












∴最小割：$(V,\bar{V})=\{(s,v_1),(s,v_5),(v_2,v_5),(v_2,v_3)\}$

割集容量，即最大流 $C=C_{s1}+C_{s5}+C_{25}+C_{23}=4+3+3+4=14$

17.

LP
$(x_1=25/7,\ x_2=50/7)$
$z^{(0)}=250/7\approx35.7$

$x_1\le3$ → LP1
$(x_1=3,\ x_2=38/5)$
$z^{(1)}=22.8$

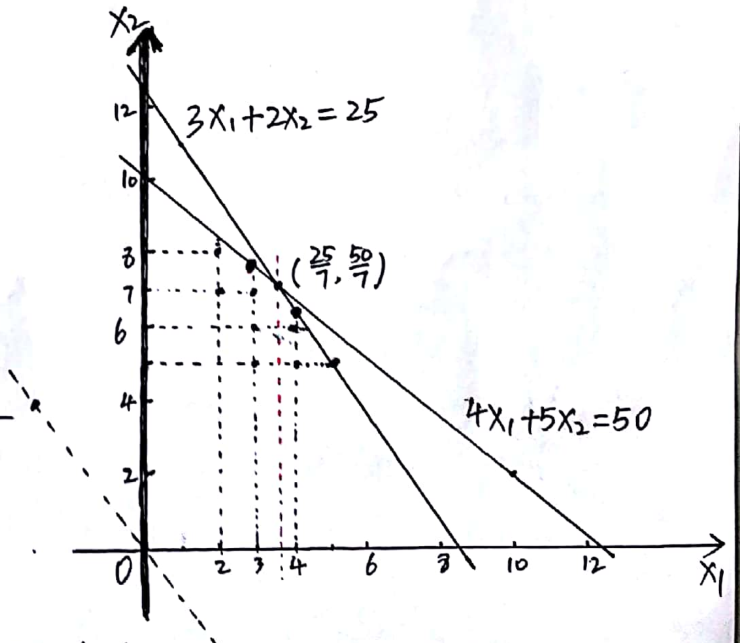
$x_1\ge4$ → LP2
$(x_1=4,\ x_2=13/2)$
$z^{(2)}=35.5$

$x_2\le6$ → LP21
$(x_1=13/3,\ x_2=6)$
$z^{(21)}\approx35.3$

$x_2\ge7$ → LP22
无解

$x_1\le4$ → LP211
$(x_1=4,\ x_2=6)$
$z^{(211)}=34$

$x_1\ge5$ → LP212
$(x_1=5,\ x_2=5)$
$z^{(212)}=35$



∴最优解为 $x_1=5$，$x_2=5$，最优值为35