第三次

吴东元 2017212201?1

习题6:

3、∵ G至少有3个点又连通且为简单图，故对于G相应的平面图中每个面的次数至少是3。由定理3，取 $l=3$，得 $m \le 3n-6$

又∵ $n-m+\phi=2$，∴ $n+\phi-2 \le 3n-6 \Rightarrow \phi \le 2n-4$

4、<1>、∵ $n-m+\phi=2$，对于简单极大平面图，$3\phi=2m$

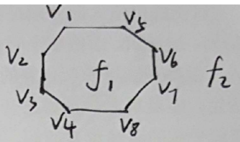
∴ 代入得 $m=3n-6$

<2>、由<1>知，$\phi=\frac{2m}{3}=2n-4$

<3>、对于 $n\ge3$ 的极大可平面图的每个顶点v，有 $d(v)\ge3$，即对于任一点至少有3个点与之相连，要使G不连通，必须把与之相连的点去掉，所以至少去掉3个点，即 $K(G)\ge3$

3) G_2、解:

<1>. 取G的一个圈H_1，并作平面嵌入:



<2>. $B_1=G[\{v_1,v_3\}]$ $F(B_1,\tilde{H}_1)=\{f_1,f_2\}$

$B_2=G[\{v_1,v_4\}]$ $F(B_2,\tilde{H}_1)=\{f_1,f_2\}$

$B_3=G[\{v_2,v_7\}]$ $F(B_3,\tilde{H}_1)=\{f_1,f_2\}$

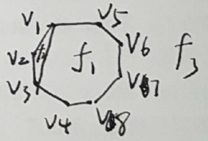
$B_4=G[\{v_2v_6\}]$ $F(B_4,\tilde{H}_1)=\{f_1,f_2\}$

$B_5=G[\{v_3v_7\}]$ $F(B_5,\tilde{H}_1)=\{f_1,f_2\}$

$B_6=G[\{v_3v_6\}]$ $F(B_6,\tilde{H}_1)=\{f_1,f_2\}$

$B_7=G[\{v_5v_8\}]$ $F(B_7,\tilde{H}_1)=\{f_1,f_2\}$

$B_8=G[\{v_6v_8\}]$ $F(B_8,\tilde{H}_1)=\{f_1,f_2\}$



<3>. 取B_1和f_1; <4>. 取$P_1=v_1v_3$

$B_1=G[\{v_1v_4\}]$ $F(B_1,\tilde{H}_2)=\{f_1,f_3\}$

$B_2=G[\{v_2v_7\}]$ $F(B_2,\tilde{H}_2)=\{f_3\}$

$B_3=G[\{v_2v_6\}]$ $F(B_3,\tilde{H}_2)=\{f_3\}$

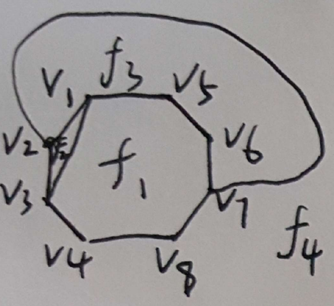
$B_4=G[\{v_3v_7\}]$ $F(B_4,\tilde{H}_2)=\{f_1,f_3\}$

$B_5=G[\{v_3v_6\}]$ $F(B_5,\tilde{H}_2)=\{f_1,f_3\}$

$B_6=G[\{v_5v_8\}]$ $F(B_6,\tilde{H}_2)=\{f_1,f_3\}$

$B_7=G[\{v_6v_8\}]$ $F(B_7,\tilde{H}_2)=\{f_1,f_3\}$

<5>. 取B_2和f_3; <6>. 取$P_2=v_2v_7$



<6>、

$B_1 = G[\{v_1, v_4\}]$ $F(B_1, \tilde{H_3}) = \{f_1\}$

$B_2 = G[\{v_2 v_6\}]$ $F(B_2, \tilde{H_3}) = \{f_3\}$

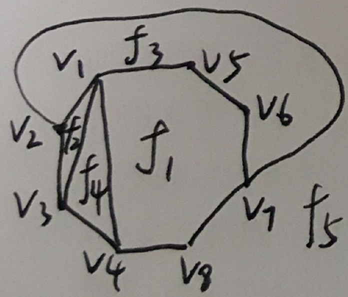
$B_3 = G[\{v_3 v_7\}]$ $F(B_3, \tilde{H_3}) = \{f_1, f_4\}$

$B_4 = G[\{v_3 v_6\}]$ $F(B_4, \tilde{H_3}) = \{f_1\}$

$B_5 = G[\{v_5 v_8\}]$ $F(B_5, \tilde{H_3}) = \{f_1\}$

$B_6 = G[\{v_6 v_8\}]$ $F(B_6, \tilde{H_3}) = \{f_1\}$

<7>、取 B_1 和 f_1；<4> 取 $P_3 = v_1 v_4$



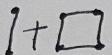
$B_1 = G[\{v_2 v_6\}]$, $F(B_1, \tilde{H_4}) = \{f_3\}$

$B_2 = G[\{v_3 v_7\}]$, $F(B_2, \tilde{H_4}) = \{f_5\}$

$B_3 = G[\{v_3, v_6\}]$, $F(B_3, \tilde{H_4}) = \emptyset$

∴ G 不可平面

习题7:

28、(a) ∵ $\overline{G}$ =  ，即有2个分支

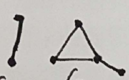
G_1　　G_2

又∵ $h(G_1,x)=x+x^2$，$h(G_2,x)=2x^2+4x^3+x^4$

∴ $h(\overline{G},x)=(x+x^2)(2x^2+4x^3+x^4)$

∴ G的色多项式 $P_k(G)=[k]_6+5[k]_5+6[k]_4+2[k]_3$

$=x(x-1)(x-2)(x^3-7x^2+18x-16)$

(b) G的补图如右图所示：

G_1　G_2

∵ $h(G_1,x)=x+x^2$，$h(G_2,x)=x+2x^2+4x^3+x^4$

∴ $h(\overline{G},x)=(x+x^2)(x^4+2x^2+4x^3+x)=5x^5+6x^4+2x^3+x^2+x^6$

∴ G的色多项式 $P_k(G)=5[k]_5+6[k]_4+2[k]_3+[k]_2+[k]_6$

∴ $P_k(G)=[k]_6+5[k]_5+6[k]_4+2[k]_3+[k]_2=\cancel{x(x-1)[1+4(x-2)+4(x-2)(x-3)+(x-2)(x-3)(x-4)]}$

$=\cancel{x(x-1)(x^3-5x^2+10x-7)}$

$=k(k-1)[2(k-2)+1+6(k-2)(k-3)+5(k-2)(k-3)(k-4)+(k-2)(k-3)(k-4)(k-5)]$

$=k(k-1)(k^4-9k^3+32k^2-52k+33)$

31、证明(1)、

当 $m=1$ 时，$P_k(G)=P_k(G-e)-P_k(G\cdot e)=k^n-k^{n-1}$，显然，结论成立；且分支数为1

设命题对少于 m 条边的 n 阶单图成立。

考虑单图 $G=(n,m)$，由递推关系：$P_k(G)=P_k(G-e)-P_k(G\cdot e)$

由假设可令：$P_k(G-e)=k^n+a_1k^{n-1}+\cdots+a_{n-1}k^{n-1}$，且 $a_1=-m+1$

从而推出 $P_k(G)=k^n+(a_1-1)k^{n-1}+\cdots+b_{n-2}k$ $\therefore a_1-1=-m$

当分支数为1时，显然成立

考虑单图 $G=(n,m)$，假设对边数小于 m 成立

令 $P_k(G-e)=k^n-a_1k^{n-1}+\cdots+(-1)^{i+l}a_{i+l}k^{n-i-l}$，$a_1=m-1$

$P_k(G\cdot e)=k^{n-1}-b_1k^{n-1}+\cdots+(-1)^{i+l}b_{i+l}k^{n-2-l}$，$b_1=m-1$

$\therefore P_k(G)=k^n-(a_1+1)k^{n-1}+\cdots+(-1)^{i+l}b_{i+l}k^{n-2-l}$

即 $P_k(G)$ 中具有最小次数的 $n-2-l$ 即为 G 的分支数

(2)、由多项式知色数为1，又 $\because m(G)=3$，$\therefore \chi(G)\geq 2$，

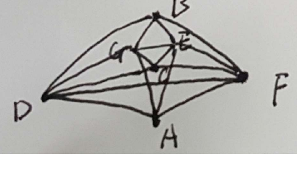
因此矛盾，所以 P_k 不可能是任何单图的多项式

6、应用题：

用点表示参赛人，两点连线当且仅当两人有比赛。

问题对应于状态图的一种最优边着色

状态图：



$\because n=2\times 3+1$ $\therefore k=3$ 而 $\Delta=5$，

$m=16>3\times 5=k\Delta$

$\therefore \chi'(G)=6$

即分6天进行，着同种颜色的比赛于同一天进行：