图论第二次作业

吴东元 201721220101

习题4： 4、证明：若G不是H圈，由定理1知，G一定度弱于某个$C_{m,n}$图。于是有
$|E(G)|=m\leq|E(C_{m,n})|=\frac{1}{2}[m^2+(n-2m)(n-m-1)+m(n-1)]$
$=\binom{n-1}{2}+1-\frac{1}{2}(m-1)(m-2)-(m-1)(n-2m-1)\leq\binom{n-1}{2}+1$，
这与$m=|E(G)|\geq\binom{n-1}{2}+2$矛盾，∴$G$一定是H图。

10、证明(1) G不是二连通图，则G不连通或存在割点v，有$w(G-v)\geq2$
若G是H图，对于$V(G)$的任意非空顶点集S，有：
$w(G-S)\leq S$，则该定理逆否命题也成立。
(2) G是具有二分类(X,Y)的偶图，$|X|\neq|Y|$，不防设$|X|\leq|Y|$
则有$w(G-X)=Y>X$，即：对于$V(G)$的非空顶点集S，有
$w(G-S)>S$成立，即G是非H图。

习题5： 8、证明：$K_{6n-2}=K_{2(3n-1)}$，∴K_{6n-2}可以分解成$6n-3$个边不重的1-因子之和，
而任意3个1-因子可以并成一个3因子，∴可以~~选择~~成$(2n-1)$个3因子从而
形成1个3-因子分解

10、证明：若$\delta(G)\geq\frac{n}{2}+1$，根据Dirac定理知：$\delta(G)\geq\frac{n}{2}+1>\frac{n}{2}$，则$G$一定是H图，
存在H圈M，∵n为偶数，则M为偶圈。即M可拆成两个1-因子的和，分
解成G_1+G_2，对于$G-G_1$来说，$\delta(G-G_1)\geq\delta(G)-1\geq\frac{n}{2}$，根据Dirac定理知：
$G-G_1$也一定是H图，存在H圈N，不防设$S=N\cup G_1$，S即为G的一个3因子。

5、答：(1)在u_1和u_2间求出一条最短路P(最短路算法)
(2).在最短路P上，每条边添加一条平行边得G的欧拉母图G^*
(3).在G的欧拉母图G^*中用Fleury算法算出一条欧拉环游
理由：设u_1,u_2是G的两个奇度顶点，G^*是G的任意一个欧拉母图，考虑到$G^*[E^*-E]$，显然
它只有两个奇数顶点u与v_2，当然它们必须在$G^*[E^*-E]$的同一个分支中，因此，存在(u_1,u_2)
路P^*，∴$\sum_{e\in E^*-E}w(e)\geq w(P^*)\geq w(P)$

理由：设u_1，u_2是G的两个奇度顶点，G^*是G的任意一个欧拉母图，考虑图$G^*[E^*-E]$，显然它只有两个奇数顶点u与v_2，所以它们必须在$G^*[E^*-E]$的同一个分支中，因此，存在(u_1, u_2)路P^*，$\therefore \sum_{e \in E^*-E} w(e) \geq w(P^*) \geq w(P)$

6、~~证明~~ 设l是赋权完全偶图$G=(X,Y)$的可行顶点标号，若相等子图G_l有完美匹配M^*，则M^*是G的最优匹配。

证明：设M^*是G_l的完美匹配，则：$w(M^*) = \sum_{e \in M^*} w(e) = \sum_{v \in V(G)} l(v)$

又设M是G的任一完美匹配，则：$w(M) = \sum_{e \in M} w(e) \leq \sum_{v \in V(G)} l(v)$

$\therefore w(M^*) \geq w(M)$

即M^*是G的最优匹配。