定理 4.9.1 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 一定有公共的特征向量.

证 任取 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值 λ, 考虑 λ 的特征子空间

$$V_\lambda=\{\boldsymbol{\xi}|\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}\}.$$

设 $\dim V_\lambda=k$, $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_k$ 是 V_λ 的一组基, 则 $\boldsymbol{A\varepsilon}_i=\lambda\boldsymbol{\varepsilon}_i\ (i=1,\cdots,k)$.

记

$$\boldsymbol{\eta}=c_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+c_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+c_k\boldsymbol{\varepsilon}_k, \tag{4.9.1}$$

当 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 不全为零时, $\boldsymbol{\eta}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

由于

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B\varepsilon}_i)=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A\varepsilon}_i)=\lambda(\boldsymbol{B\varepsilon}_i),$$

故 $\boldsymbol{B\varepsilon}_i\in V_\lambda\ (i=1,\cdots,k)$, 从而存在数 $l_{ij}\ (i,j=1,\cdots,k)$ 使得

$$\boldsymbol{B\varepsilon}_i=l_{1i}\boldsymbol{\varepsilon}_1+l_{2i}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+l_{ki}\boldsymbol{\varepsilon}_k\ (i=1,\cdots,k).$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B\eta}&=c_1\boldsymbol{B\varepsilon}_1+c_2\boldsymbol{B\varepsilon}_2+\cdots+c_k\boldsymbol{B\varepsilon}_k\\&=c_1(l_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1+l_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+l_{k1}\boldsymbol{\varepsilon}_k)+\cdots+c_k(l_{1k}\boldsymbol{\varepsilon}_1+l_{2k}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+l_{kk}\boldsymbol{\varepsilon}_k)\\&=(c_1l_{11}+c_2l_{12}+\cdots+c_kl_{1k})\boldsymbol{\varepsilon}_1+\cdots+(c_1l_{k1}+c_2l_{k2}+\cdots+c_kl_{kk})\boldsymbol{\varepsilon}_k.\end{aligned}$$

若 $\boldsymbol{\eta}$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量, 即有 $\boldsymbol{B\eta}=\mu\boldsymbol{\eta}$. 由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_k$ 线性无关, 得

$$\begin{cases}c_1l_{11}+c_2l_{12}+\cdots+c_kl_{1k}=\mu c_1,\\c_1l_{21}+c_2l_{22}+\cdots+c_kl_{2k}=\mu c_2,\\\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\c_1l_{k1}+c_2l_{k2}+\cdots+c_kl_{kk}=\mu c_k.\end{cases}\tag{4.9.2}$$

记 $\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}l_{11}&l_{12}&\cdots&l_{1k}\\l_{21}&l_{22}&\cdots&l_{2k}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\l_{k1}&l_{k2}&\cdots&l_{kk}\end{pmatrix}$, (4.9.2) 写为

$$(\mu\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L})\begin{pmatrix}c_1\\\vdots\\c_k\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}.\tag{4.9.3}$$

这说明 μ 是矩阵 $\boldsymbol{L}$ 的特征值, $(c_1,\cdots,c_k)^{\mathrm{T}}$ 是对应于 μ 的特征向量. 由于矩阵的特征向量一定存在, 即方程组 (4.9.3) 一定有非零解 $(c_1,\cdots,c_k)^{\mathrm{T}}\neq\mathbf{0}$, 代入 (4.9.1) 所确定的向量 $\boldsymbol{\eta}$ 就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 公共的特征向量.

根据上面的证明, 我们可立即得到

推论 1　若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 且 $\boldsymbol{A}$ 有 $r\ (r\leqslant n)$ 个互不相同的特征值, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 至少有 r 个线性无关的公共特征向量.

推论 2　若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值, 则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有完全相同的特征向量.

证　只需证明推论 2 中的充分性.

$\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值, 则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}\triangleq\boldsymbol{\Lambda}_1.$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有完全相同的特征向量, 同样有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\begin{pmatrix}\mu_1&&\\&\ddots&\\&&\mu_n\end{pmatrix}\triangleq\boldsymbol{\Lambda}_2.$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=(\boldsymbol{P\Lambda}_1\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{P\Lambda}_2\boldsymbol{P}^{-1})=\boldsymbol{P\Lambda}_1\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P\Lambda}_2\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{P}^{-1}\\&=(\boldsymbol{P\Lambda}_2\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{P\Lambda}_1\boldsymbol{P}^{-1})=\boldsymbol{BA}.\end{aligned}$$

注　推论 2 中的必要性也可以不依赖定理 4.9.1 中的证明. 现另证如下:

由于 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值, 从而对应 n 个线性无关的特征向量, 以这 n 个线性无关的特征向量为列向量构成矩阵 $\boldsymbol{P}$, 则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}\Rightarrow(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP})=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})$, 即

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11}&\cdots&c_{1n}\\\vdots&&\vdots\\c_{n1}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&\cdots&c_{1n}\\\vdots&&\vdots\\c_{n1}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix},$$

由此可得到 $c_{ij}=0\,(i\neq j)$, 所以

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix} c_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

这表明 P 的 n 个列向量也是 B 的特征向量.

例 4.9.1 求可交换矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 的所有公共特征向量. 问是否存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 同为对角矩阵?

解 容易验证 $AB=BA$. 下求 A 的特征值与特征向量:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & -1 \\ -2 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)^2,$$

特征值 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=\lambda_3=3$.

对 $\lambda_1=1$, 方程组 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的基础解系为

$$\varepsilon=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

而

$$B\varepsilon=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

ε 也是 B 的特征向量, 对应特征值 $\mu=-1$.

此时 A 与 B 的公共特征向量为 $c\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\ (c\neq 0)$.

对 $\lambda_2=\lambda_3=3$, 方程组 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的基础解系为

$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 而

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2,$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2.$$

定理 4.9.1 中的 $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

由 $|\mu \boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}| = \begin{vmatrix} \mu - 2 & -2 \\ -1 & \mu - 1 \end{vmatrix} = \mu(\mu - 3) = 0$, 得 $\mu_1 = 0, \mu_2 = 3$.

对 $\mu_1 = 0$, $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 得 $c_2 = -c_1$, 于是公共特征向量为

$$\boldsymbol{\eta} = c_1(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ c_1 \neq 0.$$

对 $\mu_2 = 3$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 得 $c_1 = 2c_2$, 于是公共特征向量为

$$\boldsymbol{\eta} = c_2(2\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2) = c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ c_2 \neq 0.$$

综上, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的所有公共特征向量为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_3 = c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ (c_1, c_2, c_3 \text{ 是不为零的任意常数}).$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 同有三个线性无关的特征向量, 所以它们能够同时相似对角

化. 取

$$P=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&-1&1\\2&1&2\end{pmatrix},$$

则有

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix},P^{-1}BP=\begin{pmatrix}-1&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}.$$

例 4.9.2 设 n 阶方阵 A, B 满足 $AB=A+B$, 证明:

(1) A, B 乘法可交换;

(2) A 与 B 有完全相同的特征向量.

证 (1) 因为 $AB=A+B\Rightarrow(A-I)(B-I)=I$, 所以 $(B-I)(A-I)=I$, 从而

$$(A-I)(B-I)=(B-I)(A-I)\Rightarrow AB-A-B+I=BA-A-B+I$$

故

$$AB=BA.$$

(2) 由 $(A-I)(B-I)=I$ 知 $|I-A|\neq 0$, $|I-B|\neq 0$, 所以 1 不是 A 和 B 的特征值.

设 β 是 B 的任一特征向量, 且有 $B\beta=\mu\beta$, 则

$$AB\beta=A\beta+B\beta\Rightarrow\mu A\beta=A\beta+\mu\beta.$$

因为 $\mu\neq 1$, 上式整理得

$$A\beta=\frac{\mu}{\mu-1}\beta,$$

这说明 β 也是 A 的特征向量.

由于 A, B 乘法可交换, 又有 $BA=A+B$, 故 A 的任一特征向量也是 B 的特征向量. 所以 A 与 B 有完全相同的特征向量.

问题 4.10　为什么实对称矩阵一定能正交对角化

实对称矩阵能正交对角化的最基本原因是其特征值均为实数. 一般工科线性代数教材均给出了这一性质, 以及实对称矩阵正交对角化的方法, 但多数却没给出后者的一般性证明, 这里介绍两种较常见的证明, 它们都是容易被学生所理解的.

方法 1 对实
角矩阵.
$n=1$ 时, 一
设 $n-1$ 阶实
对 n 阶实对
以对应的特征向
α_1 扩充为空间 R
正交矩阵 $Q_1=($
AQ
由于 A 是实对称
且 B_2 是 $n-1$ 阶
似于对角矩阵
于是正交矩阵 Q
方法 2 证明
正交对角化.
设 λ_1 是 n
4.7.1 我们知道 k
设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$
经正交化、单位化
α_n, 以它们为列