Harbin Engineering University

§ 5.4 方阵的若当分解

定义1 形如

$$J_m(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda\end{bmatrix}_{m\times m}$$

的m阶方阵称为**m阶Jordan快**，其中 λ是复数。

当 λ是某一矩阵A的特征值时，称$J_m(\lambda)$为A的特征值λ 的**Jordan块**。

例1.

$$J_3(-1)=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$J_5(2+i)=\begin{bmatrix}2+i & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2+i & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2+i & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2+i & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2+i\end{bmatrix}$$

都是若当快.

定义2 由若干个若当快组成的分块对角阵

$$J=\begin{bmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{m_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_s}(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

称为**Jordan矩阵.**

$$J_1=(-1), J_2(-1)=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

称J为n阶Jordan

例2.

$$J=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

为3阶Jordan矩阵，并且

J由两个Jordan块组成，即

定理1:

设 $A \in C^{n\times n}$, $\lambda E_n - A$ 全部初等因子为:

$$(\lambda-\lambda_1)^{k_{11}},(\lambda-\lambda_1)^{k_{21}},\cdots,(\lambda-\lambda_1)^{k_{s_1 1}}$$

$$(\lambda-\lambda_2)^{k_{12}},(\lambda-\lambda_2)^{k_{22}},\cdots,(\lambda-\lambda_2)^{k_{s_2 1}}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$(\lambda-\lambda_\sigma)^{k_{1\sigma}},(\lambda-\lambda_\sigma)^{k_{2\sigma}},\cdots,(\lambda-\lambda_\sigma)^{k_{s_\sigma \sigma}}$$

则存在可逆矩阵T，使得$A = TJT^{-1}$

其中，每个初等因子$(\lambda-\lambda_i)^{k_{s_i i}}$对应一个$J$的若当块

例3. 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

的Jordan标准形。

解: 先求出 A 的初等因子。对$\lambda E-A$运用初等变换可以得到

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ -4 & \lambda-3 & 0\\ 1 & 0 & \lambda-2\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-1)^2(\lambda-2)\end{bmatrix}$$

所以 A 的初等因子为

$(\lambda-1)^2$, $\lambda-2$

故 A的标准形为

$$J=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix} \quad 或 \quad J=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

例4 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&-3&6\\2&-2&4\end{bmatrix}$ 的**Jordan**标准形。

解: 先求出A的初等因子。对 $\lambda E-A$运用初等变换可以得到:

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda-1 & 1 & 2 \\ -3 & \lambda+3 & -6 \\ -2 & 2 & \lambda-4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda(\lambda-2) \end{bmatrix}$$

所以A的初等因子为

$$\lambda, \lambda, \lambda-2$$

故 A 的Jordan标准形为

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

或

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

练习1

求矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{bmatrix}$ 的Jordan标准形。

解答: A 的标准形为:

$$J=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad J=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

哈尔滨工程大学 Harbin Engineering University

练习2

求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ 的Jordan标准形。

解:

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

如何求相似变换矩阵？

由定理6知道，方阵与标准型J是相似的，即存在可逆矩阵T，使得：$A = TJT^{-1}$，求法如下：

设 $A \in C^{n\times n}$ ，$T = [t_1, t_2, \cdots, t_n] \in C^{n\times n}$

$J = [j_1, j_2, \cdots, j_n] \in C^{n\times n}$ 由 $A = TJT^{-1}$ 得 $AT = TJ$

$$A[t_1, t_2, \cdots, t_n] = [t_1, t_2, \cdots, t_n][j_1, j_2, \cdots, j_n]$$

所以：
$$At_1 = [t_1, t_2, \cdots, t_n]j_1$$
$$At_2 = [t_1, t_2, \cdots, t_n]j_2$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$At_n = [t_1, t_2, \cdots, t_n]j_n$$

解方程并选择适当的$t_1, t_2, \cdots, t_n$即得。

称 T 为相似变换矩阵。对于相似变换矩阵的一般理论我们不作过多的讨论，只通过具体的例题说明求 T 的方法。

例4. 求方阵 $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ 的**Jordan**标准形及其相似变换矩阵。

解: 首先用初等变换法求其**Jordan**标准形:

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 & 8 \\ 3 & \lambda+1 & -6 \\ 2 & 0 & \lambda+5 \end{bmatrix}$$

$$\cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{bmatrix}$$

故 A 的初等因子为

$$\lambda+1, (\lambda+1)^2$$

从而 A 的Jordan标准形为

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

再求相似变换矩阵:

设所求矩阵为T，则 $A=TJT^{-1}$，对于T按列分块记为$T=[t_1,t_2,t_3]$，则:

$$AT = A[t_1,t_2,t_3]=[At_1,At_2,At_3]$$

$$=TJ=[t_1,t_2,t_3]\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}=[-t_1,-t_2,t_2-t_3]$$

从而: $At_1=-t_1$，$At_2=-t_2$，$At_3=t_2-t_3$

整理以后可得一个线性方程组

$$(E+A)t_1=0$$
$$(E+A)t_2=0$$
$$(E+A)t_3=t_2$$

前面的两个方程为同解方程组，
可以求出它们的一个基础解系：

$\alpha_1=(0,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$,$\alpha_2=(-2,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 可以取 $t_1=\alpha_1$

但是不能简单地取 $t_2=\alpha_2$

这是因为如果 t_2 选取不当会使得第三个非齐次线性方程组无解。令: $t_2=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$

显然t_2是前两个方程的解，将t_2代入第三个方程

$(E+A)t_3=t_2$ 中，为的是选取适当的 k_1,k_2，使：

$$(E+A)t_3=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2 \quad \text{有解}$$

即其系数矩阵与增广矩阵有相同地秩，容易计算出其系数矩阵的秩为1，从而应该使得增广矩阵的秩为1

$$\left(E+A\vdots\, k_1\alpha_1+k_2\alpha_2\right)=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 & -2k_2 \\ 3 & 0 & 6 & k_1 \\ -2 & 0 & -4 & k_2 \end{bmatrix}$$

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$

只需令 $k_1=3,k_2=-2$

就会使得上述矩阵的秩为1，

于是：$t_2 = 3\alpha_1 - \alpha_2 = (4,\ 3,\ -2)^T$

再由第三个方程解出一个特解为 $t_3 = (1,\ 0,\ 0)^T$

那么所求相似变换矩阵为

$$T = [t_1, t_2, t_3] = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

由 $A = TJT^{-1}$，知：$T^{-1}AT = J$

即A通过相似变换T变成若当标准型J

练习3 求方阵$A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}$的Jordan标准形及其相似变换矩阵 。

解: 首先用初等变换法求其Jordan标准形:

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda+1 & 2 & -6\\ 1 & \lambda & -3\\ 1 & 1 & \lambda-4\end{bmatrix}$$

$$\cong\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2\end{bmatrix}$$

故 A 的初等因子为

$$\lambda-1,(\lambda-1)^2$$

从而 A的Jordan标准形为

$$J=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

再求相似变换矩阵:

设所求矩阵为 T，则 $A=TJT^{-1}$，对于T按列分块记为 $T=[t_1,t_2,t_3]$

$$AT=A[t_1,t_2,t_3]=[At_1,At_2,At_3]$$

$$=TJ=[t_1,t_2,t_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=[t_1,t_2,t_2+t_3]$$

从而: $At_1 = t_1\,, At_2 = t_2\,, At_3 = t_2 + t_3$

整理后的三个方程为:
$$(E-A)t_1 = 0$$
$$(E-A)t_2 = 0$$
$$(E-A)t_3 = -t_2$$

前面的两个方程为同解方程组,

可以求出它们的一个基础解系:

$$\alpha_1 = [-1, \quad 1, \quad 0]^T, \alpha_2 = [3, \quad 0, \quad 1]^T$$

可以取 $t_1 = \alpha_1$ 但是不能简单地取 $t_2 = \alpha_2$

这是因为如果 t_2 选取不当会使得第三个非齐次线性方程组无解。令: $t_2 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$

显然t_2是前两个方程的解，将t_2代入第三个方程

$(E-A)t_3 = -t_2$中，为的是选取适当的 k_1, k_2，使:

$$(E+A)t_3 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \quad \text{有解}$$

$$\left(E-A \vdots\ -k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2\right) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 & k_1 - 3k_2 \\ 1 & 1 & -3 & -k_1 \\ 1 & 1 & -3 & -k_2 \end{bmatrix}$$

$k_1 = k_2 = 1 \qquad t_2 = (2,\ 1,\ 1)^T \ , t_3 = (2,\ 0,\ 1)^T$

那么所求相似变换矩阵为

$$\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_3]=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

利用矩阵的特征向量确定矩阵的Jordan标准形

思考:

若对应二重特征值$\lambda_1=\lambda_2=1$ 有2个线性无关的特征向量结果如何?

形

对应二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$

只有1个线性无关的特征向量 $t_1=(1,-1,2)^T$,

因此A的标准Jordan形有两个Jordan块组成

其标准Jordan形为 $J=\begin{bmatrix}1&1&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}$

特例2

设A的特征多项式为$f(\lambda)=\lambda^2(\lambda+2)(\lambda-1)^3$

试列出A的可能的Jordan标准形。

解 A的不同特征值为{-2，0，1}，代数重复度分别为1，2，3，则A的Jordan子块如下:

$$J_1=[-2],\quad J_2=\begin{bmatrix}0 & \\ & 0\end{bmatrix} 或 \begin{bmatrix}0 & 1\\ & 0\end{bmatrix},$$

$$J_3=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix} 或 \begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & 1\end{bmatrix} 或 \begin{bmatrix}1 & 1 & \\ & 1 & 1\end{bmatrix}$$

此例说明仅由A的特征多项式不能确定与A相似的Jordan标准形

Jordan标准形的某些应用

例 5. 对于方阵

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}\text{求}A^{10}$$

解: 首先用初等变换法

求其Jordan标准形:

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda+1 & 2 & -6\\ 1 & \lambda & -3\\ 1 & 1 & \lambda-4\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2\end{bmatrix}$$

初等因子为

$$\lambda-1,(\lambda-1)^2$$

从而 A 的Jordan标准形为

$$J=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

再求相似变换矩阵 P 且 $P^{-1}AP=J$，那么

$$A^{10}=PJ^{10}P^{-1}$$

按照前面例题的方式，容易计算出

$$P=\begin{bmatrix}-1&2&2\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

从而

$$A^{10}=PJ^{10}P^{-1}=\begin{bmatrix}-1&2&2\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&10\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1&0&2\\1&1&-2\\-1&-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-19&-20&60\\-10&-9&30\\-10&-10&31\end{bmatrix}$$