2.3　矩阵的Jordan 分解介绍

（Jordan 标准型J和相似变换P的确定）

一般矩阵不是都可对角化，若A是正规矩阵，则 A 酉相似于一个对角阵。

本节主要对于一般n阶矩阵，研究它们的分解形式，在什么条件下可对角化；如何得到最简单分解形式？而矩阵的 **Jordan**分解，在矩阵分解的应用其着很重要的作用。

两个重要的概念术语

定义 2.6 设$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{n}$阶方阵, $\boldsymbol{A}$的特征多项式为

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{m_s} \quad \text{(2-42)}$$

其中 m_i（$i = 1, 2, \cdots, s$）均为正整数，$\sum_{i=1}^{s} m_i = n$， $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 为$\boldsymbol{A}$的不同特征值，称 m_i 为特征值 λ_i 的代数重复度；而称与特征值 λ_i对应的线性无关的特征向量的个数，记成 α_i 为特征值 λ_i 的几何重复度；

也是子空间 $N(\lambda_i \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) = \mathbf{span}\{\boldsymbol{x} \mid (\lambda_i \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$的维数；

$N(\lambda_i \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})$ 称为 $\lambda_i \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}$ 的零空间；

$\alpha_i = n - rank(\lambda_i I_n - A)$。 显然 $m_i \geq \alpha_i$ 。

下面给出 $m_i \geq \alpha_i$ 的**2**个例子：**1)** $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，则有

$$\det(\lambda I - B) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+3 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)^2(\lambda+3)+16-4(\lambda+3)+8(\lambda-1)$$

$$= (\lambda+3)\left[(\lambda-1)^2-4\right]+8\left[(\lambda-1)+2\right]$$

$$= (\lambda+3)\left[(\lambda-1)-2\right]\left[(\lambda-1)+2\right]+8\left[\lambda+1\right]$$

$$= (\lambda+1)\left[(\lambda+3)(\lambda-3)+8\right]$$

$$= (\lambda+1)(\lambda^2-9+8) = (\lambda+1)^2(\lambda-1) = 0$$

故***B***的特征值为：$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$（二重根），从而 $m_1 = 1$, $m_2 = 2$

而

$$\det(\lambda_1 I-B)=\begin{vmatrix}1-1 & 2 & 2\\ -2 & 1+3 & 2\\ 2 & -2 & 1-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 2 & 2\\ -2 & 4 & 2\\ 2 & -2 & 0\end{vmatrix}=0\ ,\ \begin{vmatrix}0 & 2\\ -2 & 4\end{vmatrix}=4\neq 0$$

故 $\mathbf{rank}(\lambda_1 I-B)=2$，从而 $\alpha_1=3-2=1=m_1$

又

$$\det(\lambda_2 I-B)=\begin{vmatrix}-1-1 & 2 & 2\\ -2 & -1+3 & 2\\ 2 & -2 & -1-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 2 & 2\\ -2 & 2 & 2\\ 2 & -2 & -2\end{vmatrix}=0$$，任何二阶行列式值均为零，故 $\mathbf{rank}(\lambda_2 I-B)=1$，从而 $\alpha_2=3-1=2=m_2$。

2) $C=\begin{pmatrix}-3 & -3 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，则

$$\det(\lambda I-C)=\begin{vmatrix}\lambda+3 & 3 & 1\\ -1 & \lambda & 0\\ 0 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3=0$$

故**C**的特征值为：$\lambda_1=-1$，（三重根），从而 $m_1=3$

而 $\det(\lambda_1 I-C)=\begin{vmatrix}-1+3 & 3 & 1\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}=0$，有 $\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{vmatrix}=1\neq 0$

故 $\mathbf{rank}(\lambda_1 I-B)=2$，从而 $\alpha_1=3-2=1<3=m_1$。

或直接求的 $N(\lambda_i \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})$ 维数：

$$(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{C})\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

只有一个非零的解向量（只有一个线性无关的特征向量）。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

从而得 $\alpha_1 = 1$ 。

定义 2.7 设A为n阶方阵，λ_i 为其特征值，m_i 和 α_i 分别为其代数重复度和几何重复度。如果 $m_i=\alpha_i$，则称 λ_i 为半单的；如果 $m_i>\alpha_i$，则称 λ_i 为亏损的。

如果矩阵A的某一个特征值代数重复度为1，则它一定为半单的。

定理 2.9 n阶方阵A可对角化的充分必要条件是每一个特征值 λ_i 均为半单的，即 $m_i=\alpha_i$，i=1, 2, ⋯, s。A是不可对角化的矩阵的充分必要条件是它有亏损的特征值，即存在 i_0，使得 $m_{i_0}>\alpha_{i_0}$。

因此，也称一个不可对角化的矩阵为亏损矩阵.

注意：矩阵A属于不同特征值所对应的特征向量线性无关且矩阵A的各不同特征值的代数重数之和恰为n。

例1 研究下列矩阵是否可对角化。

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; **(2)** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 17 & 0 & -25 \\ 0 & 3 & 0 \\ 9 & 0 & -13 \end{pmatrix}$; **(3)** $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

解（1）$\boldsymbol{A}$的特征多项式为

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda-2)$$

因此，$\boldsymbol{A}$的特征值分别为

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=1+\sqrt{3},\ \ \lambda_3=1-\sqrt{3}$$

矩阵$\boldsymbol{A}$有三个不同的特征值，因此它必可对角化。

（2）**B**的特征多项式为： $\det(\lambda \boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{B}) = \lambda^2(\lambda - 2)$

因此**B**的特征值分别为： $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$， 其中 λ_2 的代数重复度为：$m_1 = 2$，λ_1 的代数重复度为1，又因

$$\det(\lambda_1 I - B) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & -6 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

其任何二阶行列式值均为零, 即 $\operatorname{rank}(\lambda \boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{B}) = 1$, 故它的几何重复度为：$\alpha_1 = 3 - 1 = 2 = m_1$，可知 λ_1 为半单的，因此矩阵**B**可对角化。

（3）$\boldsymbol{C}$的特征多项式为：

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix}\lambda-17 & 0 & 25\\ 0 & \lambda-3 & 0\\ -9 & 0 & \lambda+13\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-3)=0$$

$\boldsymbol{C}$的特征值分别为：$\lambda_1=2$(二重根)，$\lambda_2=3$。即 λ_1 的代数重复度为：$m_1=2$，λ_2 的代数重复度为1，$m_2=1$。

$$\det(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix}-15 & 0 & 25\\ 0 & -1 & 0\\ -9 & 0 & 15\end{vmatrix}=225-225=0,\ \begin{vmatrix}-15 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=15\neq 0,$$

因 $\operatorname{rank}(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C})=2$ ，故它的几何重复度为：$\alpha_1=3-2=1<2=m_1$

λ_1为亏损的，因此, 由定理2. 9, 矩阵$\boldsymbol{C}$不可对角化。

一般矩阵可分为：$\begin{cases}\text{可对角化矩阵} \\ \text{不可对角化矩阵}\end{cases}$

下面我们着重研究不可对角化矩阵的相似标准型--**Jordan**分解形式

定义2.8 称下面的$k\times k$阶方阵

$$J_k(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda\end{pmatrix}_{k\times k}$$

为**Jordan块**。

$$J_2(1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ & 1\end{pmatrix},\quad J_3(2)=\begin{pmatrix}2 & 1 & \\ & 2 & 1\\ & & 2\end{pmatrix},\quad J_4(0)=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1\\ & & & 0\end{pmatrix}$$

均为Jordan块。

定义 2.9

由若干个**Jordan**块排成的块对角矩阵称为**Jordan阵**。

$$
J = \mathrm{diag}(J_2(2), J_4(0), J_2(1)) = \begin{pmatrix}
2 & 1 & & & & & & & \\
 & 2 & 1 & & & & & & \\
 & & 2 & 0 & & & & & \\
 & & & 0 & 1 & & & & \\
 & & & & 0 & 1 & & & \\
 & & & & & 0 & 1 & & \\
 & & & & & & 0 & 0 & \\
 & & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}_{9\times 9}
$$

$J_3(2)$ $J_4(0)$ $J_2(1)$

Jordan 阵与对角阵的差别仅在于它的上(下)对角线的元素是0或1。因此，它是特殊的上三角阵。

显然，**Jordan** 块本身就是 **Jordan**阵, 对角阵也是**Jordan**阵，即它的每个**Jordan**块均为1阶的。

定理 2.10 设A为n阶方阵，则存在n阶可逆矩阵

使得

$$A = TJT^{-1} \qquad (2\text{-}43)$$

其中

$$J = \mathrm{diag}\left(J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \cdots, J_{n_k}(\lambda_k) \right),$$

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

称（2-43）为矩阵A的**Jordan分解**， **Jordan**阵J称为A的**Jordan标准型**，T称为**变换矩阵**。

矩阵A的Jordan标准型如不计Jordan块的排列次序，则是唯一确定的。

注：因为相似矩阵具有相同的特征值。所以Jordan 标准型的对角元素 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 就是*A*的特征值。

需要注意的是,在Jordan标准型*J*中，不同的Jordan块的对角元素 λ_i 可能相同，因此，λ_i 不一定是*A*的 n_i重特征值。一般的，特征值 λ_i 的重数大于或等于 n_i。

如，在有8个Jordan块的11阶Jordan标准型中：

$$J_{n_1}(0) \quad J_{n_2}(0) \quad J_{n_3}(0) \quad J_{n_4}(0)$$

$$J_{n_5}(-3) \quad J_{n_6}(2) \quad J_{n_7}(2) \quad J_{n_8}(2)$$

$\lambda = 0$ 的重数= $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 4$

$\lambda = -3$ 的重数= $n_5 = 1$

$\lambda = 2$ 的重数= $n_6 + n_7 + n_8 = 6$

$$\begin{pmatrix}
0 & & & & & & & & & & \\
 & 0 & & & & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & & & & & & & \\
 & & & & -3 & & & & & & \\
 & & & & & 2 & 0 & & & & \\
 & & & & & & 2 & 1 & & & \\
 & & & & & & & 2 & 0 & & \\
 & & & & & & & & 2 & 1 & \\
 & & & & & & & & & 2 & 1 \\
 & & & & & & & & & & 2
\end{pmatrix}$$

（一）关于Jordan标准型J

Jordan标准型是一个块对角矩阵，其对角元便为矩阵 J 的特征值。

对于特征值 λ_i，它的代数重复度就是Jordan标准型中以 λ_i 为特征值的Jordan块阶数的和，而其几何重复度（即与相对应的线性无关的特征向量的个数）恰为以 λ_i 为特征值的Jordan块的个数。

例如，上例中特征值 $\lambda=2$ 的Jordan块阶数的和为6，即其代数重复度就是**6**；而 $\lambda=2$ 的Jordan块的个数为3，即其几何重复度**3**。

例2 求矩阵$\boldsymbol{A}$的**Jordan**标准型$\boldsymbol{J}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

解

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & -8 \\ -3 & \lambda+1 & -6 \\ 2 & 0 & \lambda+5 \end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+1)(\lambda+5)+16(\lambda+1)$$

$$=(\lambda+1)\left(\lambda^2+2\lambda+1\right)=(\lambda+1)^3$$

于是，$\boldsymbol{A}$的特征值为 $\lambda_1=-1$，代数重复度为3， 故以 $\lambda_1=-1$ 为特征值的Jordan块阶数的和为3。 而

$$\det(\lambda_1 \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} -1-3 & 0 & -8 \\ -3 & -1+1 & -6 \\ 2 & 0 & -1+5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -4 & 0 & -8 \\ -3 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}=0$$

任何二阶行列式值均为零，即 $\mathbf{rank}(\lambda_1 I - A) = 1$。

故 $\lambda_1 = -1$ 的几何重复度为 $3 - \mathrm{rank}(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 2$。 故以

$\lambda_1 = -1$ 为特征值的**Jordan**块的个数为2个，因此，***A***的**Jordan**

标准型为：

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & 1 \\ & & -1 \end{pmatrix}_{3\times 3}。$$

例3 求矩阵***A***的**Jordan**标准型***J***，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

解

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \lambda-2 & 0\\ -1 & -1 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -1 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & \lambda-1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)^2\left[(\lambda-1)(\lambda-3)+(\lambda-2)\right]=(\lambda-2)^4$$

于是，$\boldsymbol{A}$的特征值为 $\lambda_1=2$，代数重复度为4，故以 $\lambda_1=2$ 为特征值的**Jordan**块阶数之和为4。而

$$\det(\lambda_1 \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}2-2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2-2 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 2-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -1 & -1\end{vmatrix}=0$$

显然有 $\mathbf{rank}(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 2$。 即 λ_1的几何重复度为：

$$4 - \text{rank}\,(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 2$$

故以 $\lambda_1 = 2$ 为特征值的**Jordan**块的个数为2个。此时，***J***的**Jordan**标准型必为下面的两种形式之一

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

究竟是(1，3)结构，还是(2，2)结构?

下面我们给出确定**Jordan**块的的结构的定理。

定理 2.11 设$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{n}$阶方阵，λ_i为其特征值，则$\boldsymbol{A}$的Jordan标准型$\boldsymbol{J}$ 中以 λ_i为特征值、阶数为$\boldsymbol{l}$ 的Jordan块的个数为：

$$r_{l+1} + r_{l-1} - 2r_l$$

其中 $r_l = \operatorname{rank}(\lambda_i I - \boldsymbol{A})^l$,

$$r_0 = \operatorname{rank}(\lambda_i I - \boldsymbol{A})^0 = \operatorname{rank}(I) = n。$$

证明参见文献[1]

利用定理2.11可以判断$\boldsymbol{A}$的Jordan标准型的形式。

先看l=1情形。通过计算可知

$$r_1 = r(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = r(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 2$$ ，而

$$\left(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{O}_{4\times 4}$$ ，则

$$r_2 = r(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^2 = r(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^2 = 0$$

故以 λ_1=2为特征值的阶数为 l=1的Jordan块的个数为：

$$r_2 + r_0 - 2r_1 = 0 + 4 - 2 \times 2 = 0$$

再看l=2情形。此时 $r_3 = r(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^3 = 0$，故以 $\lambda_1 = 2$ 为特征值的阶数为2的Jordan块的个数为

$$r_3 + r_1 - 2r_2 = 0 + 2 - 0 = 2$$

因此矩阵$\boldsymbol{A}$的结构只能为第二种形式：

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

现在利用Jordan标准型证明定理2.8

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\bar{A} = \frac{1}{\varepsilon} A$, 则由定理2.10知，存在非奇异矩阵$T$,

使得 $\bar{J} = T\bar{A}T^{-1}$, 其中J为**Jordan**形式, 即

$$T\bar{A}T^{-1} = \bar{J} = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{pmatrix}$$

其中 J_i $i = 1, 2, \cdots, m$ 为**Jordan**块

$$J_i = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_i & 1 & & \\ & \bar{\lambda}_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \bar{\lambda}_i \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

其中 $\bar{\lambda}_i$ 为 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 的特征值。注意到 $\bar{\lambda}_i = \dfrac{1}{\varepsilon}\lambda_i$，$\lambda_i$ 为$\boldsymbol{A}$的特征值。

从而

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1} = \varepsilon\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{T}^{-1} = \varepsilon\bar{\boldsymbol{J}} = \begin{pmatrix} \varepsilon\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \varepsilon\boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon\boldsymbol{J}_m \end{pmatrix}$$

其中

$$\varepsilon\,\boldsymbol{J}_i = \begin{pmatrix} \varepsilon\bar{\lambda}_i & \varepsilon & & \\ & \varepsilon\bar{\lambda}_i & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon \\ & & & \varepsilon\bar{\lambda}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

因此

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\boldsymbol{T}} = \left\|\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1}\right\|_1 = \max_{1\le j\le n}\left(|\lambda_i| + \varepsilon\right) \le \rho(\boldsymbol{A}) + \varepsilon$$

或

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\boldsymbol{T}} = \left\|\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1}\right\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\left(|\lambda_i| + \varepsilon\right) \le \rho(\boldsymbol{A}) + \varepsilon$$

推论 若 $\rho(A)<1$，则存在范数 $\|\cdot\|$，使得$\|A\|<1$。

证明： 令 $\varepsilon=\frac{1}{2}\left(1-\rho(A)\right)$，并取非奇异矩阵$\boldsymbol{T}$，使

$$\|\boldsymbol{A}\|_T\le\rho(\boldsymbol{A})+\varepsilon=\rho(\boldsymbol{A})+\frac{1}{2}\left(1-\rho(\boldsymbol{A})\right)$$

$$=\rho(\boldsymbol{A})+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rho(\boldsymbol{A})$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\rho(\boldsymbol{A})\right)$$

$$<\frac{1}{2}\times 2=1$$

（二）关于变换矩阵T

在求出A的Jordan标准型后，相应的相似变换矩阵就可以求得了。由 $A=TJT^{-1}$ 或 $AT=TJ$。将T按J的对角线上的Jordan块相应地分块为

$$T=\left(T_1,T_2,\cdots,T_k\right)$$

其中T_i为$n\times n_i$型矩阵。则

$$A\left(T_1,T_2,\cdots,T_k\right)=\left(T_1,T_2,\cdots,T_k\right)\begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

显然，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 中可能有相同者。注意到，

$$AT_i=T_iJ_{n_i}(\lambda_i) \qquad \text{（2-44）}$$

如果记 $T_i=\left(t_1^i,t_2^i,\cdots,t_{n_i}^i\right)$，于是得到

$$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{t}_1^i,\boldsymbol{t}_2^i,\cdots,\boldsymbol{t}_{n_i}^i\right)=\left(\boldsymbol{t}_1^i,\boldsymbol{t}_2^i,\cdots,\boldsymbol{t}_{n_i}^i\right)\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{pmatrix},$$ 即

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{t}_1^i=\lambda_i\boldsymbol{t}_1^i \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{t}_2^i=\lambda_i\boldsymbol{t}_2^i+\boldsymbol{t}_1^i, \\ \quad\vdots \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{t}_{n_i}^i=\lambda_i\boldsymbol{t}_{n_i}^i+\boldsymbol{t}_{n_i-1}^i\end{cases}\quad \boldsymbol{t}_j^i\in\boldsymbol{C}^n,\quad \begin{matrix}i=1,2,\cdots,k, \\ j=1,2,\cdots,n_i。\end{matrix}$$

我们称向量组 $\boldsymbol{t}_1^i,\boldsymbol{t}_2^i,\cdots,\boldsymbol{t}_{n_i}^i$ 为关于特征值 λ_i 的长度为 $\boldsymbol{n}_i$ 的 **Jordan** 链。

显然，该Jordan链的第一个向量就是矩阵**A**的关于特征值 λ_i 的特征向量，称其为链首。而链中的第*j*个向量则可由等价的方程

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_i \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{t}_j^i=\boldsymbol{t}_{j-1}^i, \quad j=2,3,\cdots,n_i \qquad \text{(2-45)}$$

但是应当注意：

1）Jordan链的链首 $\boldsymbol{t}_1^i$ 不仅要求是一个特征向量，而且还要求利用（2-45）可以求出Jordan链中的其它向量 $\boldsymbol{t}_2^i,\cdots,\boldsymbol{t}_{n_i}^i$（即不是任何一个特征向量都可作为Jordan链的链首）。

2）对应于某个特征值 λ_i 的Jordan链虽然一定存在，但当与 λ_i 相对应的线性无关的特征向量的个数大于或等于2时，关于特征 λ_i 值的那些特征向量中的任何一个有可能都不能作为链首。

因此我们必须从 λ_i的特征子空间中选取适当的向量作为**Jordan**链的链首。

例4 求出本节例2中将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ 化成Jordan标准型的变换矩阵$\boldsymbol{T}$。

解 由于已经得到

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} J_1(\lambda_1)_{1\times1} & \\ & J_2(\lambda_2)_{2\times2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J_1(-1)_{1\times1} & \\ & J_2(-1)_{2\times2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & 1 \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{AT}=\boldsymbol{TJ},\quad \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{T}_1\ \boldsymbol{T}_2\right)=\left(\boldsymbol{T}_1\ \boldsymbol{T}_2\right)\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & 1 \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{T}_1=\boldsymbol{t}^1\in\boldsymbol{R}^3$，$\boldsymbol{T}_2=\left(\boldsymbol{t}_1^2,\boldsymbol{t}_2^2\right)\in\boldsymbol{R}^{3\times 2}$。首先求出 $\lambda_1=-1$ 所对应的线性无关的特征向量，其**Jordan**链的长度为**1**。即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{t}^1=-\boldsymbol{t}^1$，

亦即

$$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{t}^1=\boldsymbol{0}\iff\begin{pmatrix}4&0&8\\3&0&6\\-2&0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}\iff\begin{cases}x_1+2x_3=0\\x_1+2x_3=0\\x_1+2x_3=0\end{cases}$$

解之，线性无关的向量为：

$$\boldsymbol{t}_1^1=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\quad 和\quad \boldsymbol{t}_2^1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

这样以 $\lambda_1=-1$长度为1的**Jordan**链的链首和链尾就可二者中任取其一。即 $\boldsymbol{T}_1=\boldsymbol{t}_1^1$ 或 $\boldsymbol{T}_1=\boldsymbol{t}_2^1$。

其次确定 $\lambda_2=-1$ 长度为2的**Jordan**链的链首。 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_2=\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{J}$

$$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{t}_1^2\ \boldsymbol{t}_2^2\right)=\left(\boldsymbol{t}_1^2\ \boldsymbol{t}_2^2\right)\begin{pmatrix}-1 & 1\\ & -1\end{pmatrix}=\left(-\boldsymbol{t}_1^2,\boldsymbol{t}_1^2-\boldsymbol{t}_2^2\right)$$

首先求出 $\lambda_1=-1$所对应的线性无关的特征向量， 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{t}_1^2=-\boldsymbol{t}_1^2$，

亦即

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{t}_1^2=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4 & 0 & 8\\ 3 & 0 & 6\\ -2 & 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+2x_3=0\\ x_1+2x_3=0\\ x_1+2x_3=0\end{cases}$$

解之，线性无关的向量为:

$$\boldsymbol{t}_{11}^2=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\quad 和\quad \boldsymbol{t}_{12}^2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

不难验证，若以 $\boldsymbol{t}_{11}^{2}$ 或 $\boldsymbol{t}_{12}^{2}$ 为链首时都无法求出另外一个向量来构成Jordan链。即

$$(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{t}_{11}^{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_3=0 \\ x_1+2x_3=1 \\ x_1+2x_3=0 \end{cases}，无解；$$

$$(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{t}_{12}^{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_3=2 \\ x_1+2x_3=0 \\ x_1+2x_3=-1 \end{cases}，无解。$$

为此，必须找出 $\boldsymbol{y}\in \mathrm{span}\{\boldsymbol{t}_{11}^{2},\boldsymbol{t}_{12}^{2}\}$ 使得 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{z}=\boldsymbol{y}$ 有解。

为此，令 $\boldsymbol{y}=k_1\boldsymbol{t}_{11}^2+k_2\boldsymbol{t}_{12}^2=\left(2k_2,k_2,-k_1\right)^T$，由

$$\left(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I}\mid\boldsymbol{y}\right)=\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}\mid\boldsymbol{y}\right)=\begin{pmatrix}4&0&8&2k_1\\3&0&6&k_2\\-2&0&-4&-k_1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&\dfrac{k_1}{2}\\1&0&2&\dfrac{k_2}{3}\\1&0&2&\dfrac{k_1}{2}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&\dfrac{k_1}{2}\\0&0&0&\dfrac{k_1}{2}-\dfrac{k_2}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

为使 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{z}=\boldsymbol{y}$ 有非零解， 只须k_1 、k_2满足$2k_2-3k_1=0$即可。

从而可取 $k_1=2$, $k_2=3$, 此时 $y=(4,3,-2)^T$为链首，由如下方程组：

$$(A+I\mid y)\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

解出 $z=(1,0,0)^T$作为链尾。

链首

链首

则变换矩阵T 为:

$$T=(T_1,T_2),\ T_1=t_1^1=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},\ T_2=(y,z)=\begin{pmatrix}4&1\\3&0\\-2&0\end{pmatrix}$$

链尾

链尾

或

$$T=(T_1,T_2),\ T_1=t_2^1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ T_2=(y,z)=\begin{pmatrix}4&1\\3&0\\-2&0\end{pmatrix}$$

即有，变换矩阵：

$$T=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix} \quad T^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{2}{3} & -1\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

或

$$T=\begin{pmatrix}0 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix} \quad T^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

THE END

如果 $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0,\ k=1,2,\cdots,n-1$ ，则 $\boldsymbol{A}$ 一定可作 $\boldsymbol{LU}$ 分解。

如何能判断出 $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0,\ k=1,2,\cdots,n-1$ 呢？

如果将等式（**2-6**）两端在第k行第k列处分块，则有

$$\mathbf{A}=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_k & * \\ * & * \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{L}_1 & 0 \\ * & \boldsymbol{L}_2^* \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_1 & * \\ 0 & \boldsymbol{U}_2 \end{pmatrix} \end{array} = \boldsymbol{LU}$$

$$=$$

其中 $\boldsymbol{L}_1$ 为$\boldsymbol{L}$的第k阶顺序主子矩阵，它是单位下三角矩阵， $\boldsymbol{U}_1$为$\boldsymbol{U}$的第k阶顺序主子矩阵，它是一上三角矩阵，其对角元为

$$a_{11}^{(0)}, a_{22}^{(1)}, \cdots, a_{kk}^{(k-1)}$$

因此 $\boldsymbol{A}$的第 k阶顺序主子式满足：

$$\mathrm{D}_k = \det(A_k) = \det(L_1 U_1) = \det(L_1) \cdot \det(U_1)$$

$$= a_{11}^{(0)} \cdot a_{22}^{(1)} \cdots\cdots a_{kk}^{(k-1)}$$

$$\mathrm{D}_{k-1} = a_{11}^{(0)}\ a_{22}^{(1)} \cdots a_{k-1k-1}^{(k-2)}$$

由此可得，如果规定 $\mathrm{D}_0=1$，则有

$$a_{kk}^{(k-1)} = \frac{\mathrm{D}_k}{\mathrm{D}_{k-1}} \quad ，k=1，2，...，n-1 \qquad \textbf{(2-7)}$$

综合上述结果得到如下定理

考察如下矩阵是否存在LU分解，　如果存在是否唯一？

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&1\\4&6&7\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&1\\3&3&1\end{pmatrix}$$

（1）解：矩阵A的行列式的性质为：

$$\det(A_1)=1\neq 0,\ \det(A_2)=\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=0,\ \det(A_3)=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&4&1\\4&6&7\end{vmatrix}=10\neq 0$$

若A存在LU分解, 则应有：

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&1\\4&6&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\4&l_{32}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\0&u_{22}&u_{23}\\0&0&u_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 2u_{11} & 2u_{12}+u_{22} & 2u_{13}+u_{23} \\ 4u_{11} & 4u_{12}+l_{32}u_{22} & 4u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33} \end{pmatrix}$$

进一步有 $u_{11}=1,\ u_{13}=3,\ u_{12}=2,$ ，那么就有

$$2u_{12}+u_{22}=a_{22}=4 \Rightarrow u_{22}=4-2\times 2=0$$

$$a_{32}=4u_{12}+l_{32}u_{22}=2\times 4+l_{32}\times 0=8$$

这与 $a_{32}=6$ 矛盾。 故 $\boldsymbol{A}$ 不存在$\boldsymbol{LU}$分解。

（2）解：矩阵B的行列式的性质为：

$$\det\left(\boldsymbol{B}_1\right)=1\neq 0，\ \det\left(\boldsymbol{B}_2\right)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=0，\ \det\left(\boldsymbol{B}_3\right)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 1\end{vmatrix}=0$$

若$\boldsymbol{B}$存在$\boldsymbol{LU}$分解,则应由：

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & l_{32} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{11} & u_{12} & u_{13}\\ 0 & u_{22} & u_{23}\\ 0 & 0 & u_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}u_{11} & u_{12} & u_{13}\\ 2u_{11} & 2u_{12}+u_{22} & 2u_{13}+u_{23}\\ 3u_{11} & 3u_{12}+l_{32}u_{22} & 3u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33}\end{pmatrix}$$

从而， $u_{11}=1$，$u_{12}=1$，$u_{13}=1$，进一步有：

$$2u_{12}+u_{22}=a_{22}=2 \Longrightarrow u_{22}=0$$

$$2u_{13}+u_{23}=a_{23}=1 \Longrightarrow u_{23}=-1$$

$$3u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33}=a_{33}=1 \Longrightarrow u_{33}=l_{32}-2$$

即

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & l_{32} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & l_{32}-2 \end{pmatrix}$$

其中$\boldsymbol{l}_{32}$可以任取，故$\boldsymbol{B}$存在$\boldsymbol{LU}$分解**,**但是不唯一。