

图论作业 1

一、填空题

- 非同构的 4 阶和 5 阶树的个数分别为____和____。
- n 阶 k 正则图 G 的补图的边数为_____。
- 设图 $G=(n, m)$ 中各顶点度数均为 3, 且 $2n=m+3$, 则 $n=_____$, $m=_____$ 。
- 设简单图 G 的邻接矩阵为 A , 且

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

则图 G 的边数为_____。

- 设 G 是一个完全 l 部图, n_i 是第 i 部分的顶点数, 则它的边数为_____。
- 设 G 是 n 阶简单图, 且不含完全子图 K_3 , 则其边数一定不会超过_____。
- 设 n 阶图 G 是具有 k 个分支的森林, 则其边数为_____。
- 一棵树有 n_i 个度数为 i 的结点, $i=2,3,\dots,k$, 则它有_____个度数为 1 的顶点。
- 完全图 K_5 的生成树的个数为_____。

二、不定项选择题

- 关于图的度序列, 下列命题正确的是()
 - 同构的两个图的度序列相同;
 - 非负整数序列 (d_1, d_2, \dots, d_n) 是图的度序列当且仅当 $d_1+d_2+\dots+d_n$ 是偶数;
 - 如果正整数序列 (d_1, d_2, \dots, d_n) 是一棵树的度序列且 $n \geq 2$, 那么序列中至少有两个 1;
 - 正整数序列 (d_1, d_2, \dots, d_n) 是非平凡树的度序列当且仅当 $d_1+d_2+\dots+d_n=2(n-1)$;
 - 若图 G 的顶点度数之和大于等于图 H 的顶点度数之和, 则图 G 度优于图 H ;
 - 如果非负整数序列 (d_1, d_2, \dots, d_n) 是简单图的度序列, 那么在同构意义下只能确定一个图。
- 对于序列 $(7, 5, 4, 3, 3, 2)$, 下列说法正确的是()
 - 可能是简单图的度序列;
 - 可能是非简单图的度序列;
 - 只能是简单图的度序列;
 - 只能是非简单图的度序列;
 - 不是任意图的度序列。
- 下列说法错误的是()
 - 若一个图中存在闭途径, 则一定存在圈;
 - 偶图中不存在奇圈;
 - 若图 G 不含三角形, 则 G 为偶图;
 - 图的顶点之间的连通关系一定是等价关系;
 - 存在每个顶点的度数互不相同的非平凡简单图。
- 关于简单图 G 的邻接矩阵 A , 下列说法错误的是()
 - 矩阵 A 的行和等于该行对应顶点的度数;
 - 矩阵 A 的所有元素之和等于该图边数的 2 倍;
 - 矩阵 A 的所有特征值之和等于该图边数的 2 倍;
 - 矩阵 A 的所有特征值的平方和等于该图边数的 2 倍;

(E) 矩阵 A^2 的主对角线上的元素之和等于该图边数的 2 倍;

(F) 若 G 是非连通图, 则 A 相似于某个准对角矩阵。

5. 图 $G=(n, m)$ 一定是树的是()

(A) 连通图;

(B) 无回路但添加一条边后有回路的图;

(C) 每对顶点间都有路的图;

(D) 连通且 $m=n-1$;

(E) 无圈且 $m=n-1$ 。

三、解答题

1. 设无向图 G 有 10 条边, 3 度与 4 度顶点各 2 个, 其余顶点度数均小于 3, 问 G 中至少有几个顶点? 在顶点数最少的情况下, 写出 G 的度序列, 该度序列是一个图序列吗?

2. 证明整数序列 $(6, 3, 4, 2, 2, 5, 2)$ 是简单图的度序列, 并构造一个对应的简单图。

3. 设 G 与其补图的边数分别为 m_1 和 m_2 , 求 G 的阶数。

4. 设 G 为 n 阶简单图, $n > 2$ 且 n 为奇数, G 与其补图中度数为奇数的顶点个数是否相等? 并给出理由。

5. 证明: 任何一个人群中至少有两个人认识的朋友数相同。

6. 证明: 若 k 正则二部图具有二分类 $V=V_1 \cup V_2$, 则 $|V_1|=|V_2|$ 。

7. 证明: 若图 G 的直径大于 3, 则图 G 的补图的直径小于 3。