组合优化理论

第6章 指派问题

主讲人：陈安龙

第6章 指派问题

§1 指派问题

§2 匈牙利算法

§3 匈牙利算法的应用

指派问题的提出【分配问题】

若干项工作或任务需要若干个人去完成。由于每人的知识、能力、经验的不同，故各人完成不同任务所需要的时间不同（或其他资源）。

问应指派哪个人完成何项工作，可使完成所有工作所消耗的总资源最少？

设某公司准备派n个工人x_1，x_2,…，x_n,去作n件工作y_1, y_2, …, y_n. 已知工人x_i完成工作y_j所需时间为c_{ij} $(i,j=1,2,\ldots,n)$.

现问：如何确定一个分派工人去工作的方案，使得工人们完成工作的总时间为最少？

n台机床加工n项任务；

n条航线有n艘船去航行等。

标准形式的分配问题

设某公司准备派n个工人x_1，$x_2,\ldots$，x_n,去作n件工作y_1, $y_2, \ldots, y_n$. 已知工人x_i完成工作y_j所需时间为c_{ij} $(i,j=1,2,\ldots,n)$.

现问：如何确定一个分派工人去工作的方案，使得工人们完成工作的**总时间为最少**？

分派方案满足下述两个条件：

1. 任一个工人都不能去做两件或两件以上的工作
2. 任一件工作都不能同时接受两个及以上的工人去做

例如： 设某公司准备派4个工人x_1，x_2，x_3，x_4,去作4件工作y_1，y_2, y_3, y_4. 已知工人x_i完成工作y_j所需时间为c_{ij} $(i,j=1,2,\ldots,n)$.

现问：如何确定一个分派工人去工作的方案，使得工人们完成工作的**总时间为最少**？

① 这个问题的求解可以采用枚举法。将所有分配方案求出，总分最小的方案就是最优解。本例的方案有**4×3×2×1＝24** 种。

② 由于方案数是工人数的阶乘，当工人数和任务数较多时，计算量非常大。

③ 而用0-1规划描述此类分配问题显得非常简单。下面建立相应的数学模型。

	任务1	任务2	任务3	任务4
工人1	58	69	180	260
工人2	75	50	150	230
工人3	65	70	170	250
工人4	82	55	200	280

数学模型

时间、原料、金钱等资源

c_{ij}：第i人做第j事的费用

n个人

n件事

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & 若指派第i人做第j事\\ 0 & 若指派第i人不做第j事\end{cases} \quad i，j=1,\dots,n$$

总费用：$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

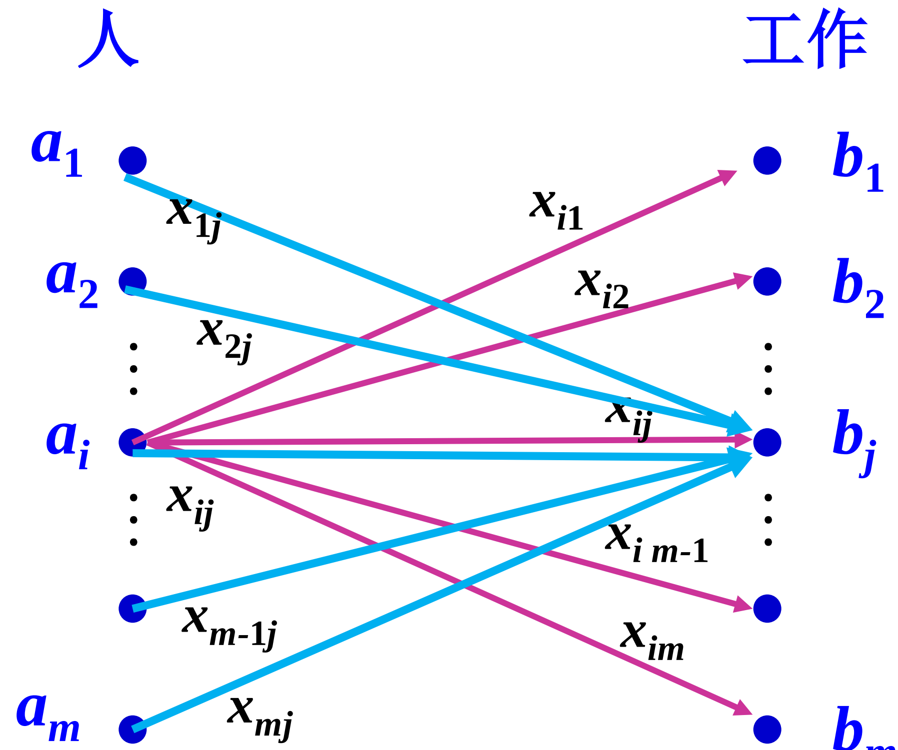
每件事必有且只有一个人去做 ⟷ $\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1 \quad j=1,\dots,n$

每个人必做且只做一件事 ⟷ $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1 \quad i=1,\dots,n$

指派问题的数学模型

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}=1(i=1,\cdots,m) & \text{第}i\text{人完成一项任务}\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=1(j=1,\cdots,m) & \text{第}j\text{项任务由一人完成}\\ x_{ij}=0\text{或}1(i,j=1,\cdots,m)\end{cases}$$



$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{分配第}i\text{个人去完成第}j\text{项任务}\\ 0, & \text{不分配第}i\text{个人去完成第}j\text{项任务}\end{cases}$$

$$(i,j=1,\cdots,\ m)$$

- 这是一个标准型的指派问题
- 类似有：有n项加工任务，怎样指派到n台机床上分别完成；有n条航线，怎样指定n艘船分别去航行..... 等。
- 对应每个指派问题，需有类似上表那样的数表，表中数据称为效率矩阵或系数矩阵，
- 其元素$c_{ij}>0(i,j=1,2,\ldots n)$，
- 表示指派第i人去完成第j 项任务时的效率（或时间、成本等）

$$C=(c_{ij})_{n\times n}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

效率矩阵

或

系数矩阵

如果一个指派模型满足以下三个条件：

1)目标要求为**min**

2)效率矩阵(c_{ij})为**m**阶方阵

3)效率矩阵中所有元素$c_{ij} \geq 0$,且为常数

则称上面的数学模型为**指派问题的标准形**.

指派模型的标准形的特点:

含有m×m个决策变量,均为0-1变量

m+m＝2m个约束方程

给定一个指派问题时，必须给出效率矩阵（系数矩阵）

$C=(c_{ij})_{mxm}$,且$c_{ij}\geq 0$，因此必有最优解 。

$$MinZ=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}\geq 0$$

指派问题有2m个约束条件,

但可行解（即解矩阵）中有且只有m个是非零值,

即m个值取为 1 ，其余取为 0 , 是自然高度退化的。

指派问题的示例

例： 有一份中文说明书，

要分别译成英、日、德、俄四种文字，

分别记作E 、 J 、 G 、 R ,交与甲、乙、丙、丁 四个人去完成.

因个人专长不同，

他们完成翻译不同语种的说明书所需的时间(h)如表所示.

应如何指派，使四个人分别完成这四项任务总时间为最小？

任务 / 人员	E	J	G	R
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
丁	7	8	11	9

工作 \ 人	甲	乙	丙	丁	人数
译成英文	2	10	9	7	1
译成日文	15	4	14	8	1
译成德文	13	14	16	11	1
译成俄文	4	15	13	9	1
任务	1	1	1	1	

可以看到指派问题既是0-1 规划问题，也是运输问题，所以也可用整数规划，0-1 规划，或运输问题的解法去求解。

$$C=(c_{ij})_{4\times4}=\begin{bmatrix} 2 & 15 & 13 & 4 \\ 10 & 4 & 14 & 15 \\ 9 & 14 & 16 & 13 \\ 7 & 8 & 11 & 9 \end{bmatrix}$$

如本例的一个可行解矩阵（但不一定是最优解）

$$x_{ij}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

指派问题的解矩阵应具有如下特点：

（1）解矩阵(x_{ij})中各行各列的元素之和都是1；

（2）可行解（最优解）中恰含有 4 个非零元，即4个1；

（3）可行解（最优解）矩阵中的1恰取于不同行不同列。

匈牙利法

1955年由美国数学家W.W.kuhn(库恩)提出，利用了匈牙利数学家D.Konig(康尼格)证明的2个定理。

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

系数矩阵
(效率矩阵)

n个人
n件事

解矩阵
(决策变量矩阵)

思路：

匈牙利法基于这样一个明显的事实：

如果在m阶效率矩阵中，所有元素$c_{ij}\geq 0$，

而其中有m个位于不同行不同列的一组0元素，

则在解矩阵中，只要令对应于这些0元素位置的

$x_{ij}=1$，其余的$x_{ij}=0$，就得到最优解。

此时的最优解为 0

定义：在系数矩阵C中，处在不同行不同列的一组零元素，称为独立零元素组，其中每个元素称为独立零元素。

$$C=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\{c_{12}, c_{24}, c_{31}, c_{43}\}$ ✓

$\{c_{12}, c_{23}, c_{31}, c_{44}\}$ ✓

$\{c_{14}, c_{23}, c_{31}, c_{44}\}$ ✗

$$X=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

最优解

$$\min z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

- 如效率矩阵为
- 恰有4个不同行不同列的0系数

$$\begin{bmatrix} \boxed{0} & 14 & 9 & 3 \\ 9 & 20 & \boxed{0} & 23 \\ 23 & \boxed{0} & 3 & 8 \\ 0 & 12 & 14 & \boxed{0} \end{bmatrix}$$

令$x_{11}=1$，$x_{23}=1$，$x_{32}=1$，$x_{44}=1$，即可得最优解，

其解矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

min Z=Z*＝0

问题是如何找到位于不同行、不同列的m个0元素？

匈牙利算法基本思想：

对同一工作*i*来说，

所有人的效率都提高或降低同一常数，

不会影响最优分配；

同样，对同一人*j*来说，

做所有工作的效率都提高或降低同一常数，

也不会影响最优分配。

算法的基本原理

匈牙利数学家狄·康尼格(D·Konig)证明的两个定理

定理1 ： 如果从指派问题效率矩阵$[c_{ij}]$的每一行元素中分别减去(或加上)一个常数u_i(被称为该行的位势)，从每一列分别减去(或加上)一个常数v_j(称为该列的位势)，得到一个新的效率矩阵$[b_{ij}]$，若其中$b_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$，则$[b_{ij}]$的最优解的结构等价于$[c_{ij}]$的最优解的结构.

证明：将从$[b_{ij}]$中得到的解代入分配问题模型的目标函数式，有

$$z' = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} b_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(c_{ij} - u_i - v_j)x_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{j=1}^{m} v_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} u_i - \sum_{j=1}^{m} v_j$$

指派问题最优解的性质：

使每行每列
都出现零元素

若将分配问题系数矩阵的每一行及每一列分别减去各行及各列的最小元素，则新分配问题与原分配问题有相同的最优解，只有最优值差一常数。

时间 工作 人员	A	B	C	A	B	C
甲	7✓	8	9	0✓	0	2
乙	9	12	4✓	5	7	0✓
丙	8	5✓	4	4	0✓	0

匈牙利算法基本思想1

- 利用这个性质，可使原系数矩阵变换为含有很多0元素的新系数矩阵，而最优解保持不变，
- 在系数矩阵(b_{ij})中，把位于不同行不同列的0元素，简称为独立的0元素。
- 问题是：

能否找到位于不同行、不同列的m个0元素？

若能在系数矩阵(b_{ij})中找出m个独立的0元素；

则令 解矩阵(x_{ij})中对应这m个独立的0元素的x_{ij}取值为1， 其他元素取值为0。

将其代入目标函数中得到$z_b=0$，它一定是最小值。

- 这就是以(b_{ij})为系数矩阵的指派问题的最优解。

从而也就得到了原问题的最优解。

库恩（W.W.Kuhn）于1955年给出了指派 问题的解法，

他引用匈牙利数学家狄·康尼格（d.konig)关于矩阵中
独立零元素的定理(即定理2):

系数矩阵中独立的“0”元素的最多个数等于覆盖所有“0”元素的最少直线数

---匈牙利算法基本思想2

库恩给出的指派问题的解法称为匈牙利算法

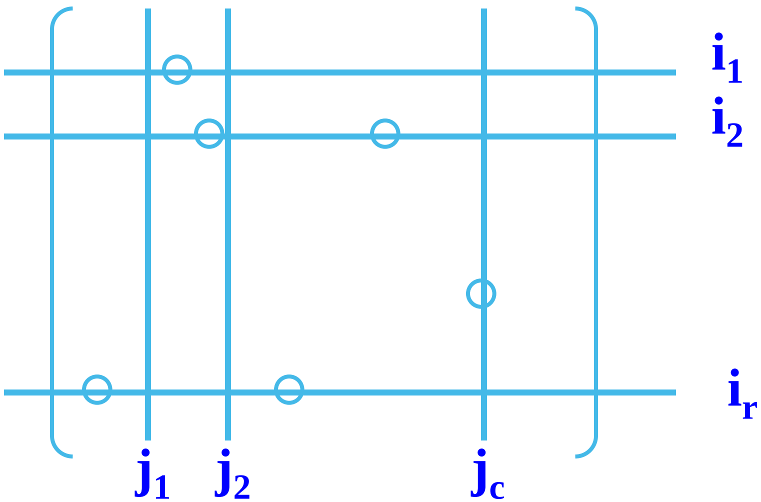
定理2 若效率矩阵C的元素可分成“0”与非“0”两部分，则覆盖所有“0”元素的最少直线数=独立的“0”元素的最多个数

证明： 已知矩阵中有若干0元素，设覆盖全部0元素最少需m条直线，又设位于不同行不同列的0最多有M个.

① 因覆盖M中的每个0至少用一条直线，故有m≥M

② 下面要证明M ≥m.

如图假定覆盖所有0元素的m条直线有r行、c列，m=r+c.



所有r行上不在j_1，…，j_c列上的0元素个数≥ r，这些0元素至少有r个位于不同列,同理:

所有c列上不在i_1，…，i_r行上的0元素个数≥c，且这些0元素至少有c个位于不同行

上述两部分0个数总和为S，则S≥m；其中有m个，又它们必无重复元素，彼此独立，则S≤M,故有m≤M， 故可得M=m.

覆盖所有“0”元素的最少直线数 =

独立的“0”元素 的最多个数

推论1：覆盖所有“0”元素的直线数 ≥

不同行不同列的“0”元素的最多个数（m）

推论2：覆盖所有“0”元素的最少直线数 ≥

不同行不同列的“0”元素的个数

定理2说明：

1. 只要表中含有不同行或不同列的“0”元素，

都可以通过直线覆盖的方式来找到它们

2. 当覆盖直线的最少条数达到m条时，

必恰有m个独立“0”元素存在于表中

匈牙利算法示例

例1: 某公司拟将四种新产品配置到四个工厂生产，四个工厂的单位产品成本（元/件）如下表所示。求最优生产配置方案使得单位产品成本总和为最小。

效率矩阵

	产品1	产品2	产品3	产品4
工厂1	58	69	180	260
工厂2	75	50	150	230
工厂3	65	70	170	250
工厂4	82	55	200	280

一. 匈牙利算法的基本思想：

在效率矩阵中找出4个不同行不同列的数使得它们的总和最小。

找出4个不同行不同列的零元使得它们的和为最小0，令这些零元对应的 $x_{ij}=1,$ 其余变量=0，得到最优解。

效率矩阵的变形

	产品1	产品2	产品3	产品4
工厂1	*	0	*	*
工厂2	0	*	*	*
工厂3	*	*	*	0
工厂4	*	*	0	*

定理1

效率矩阵

	产品1	产品2	产品3	产品4
工厂1	58	69	180	260
工厂2	75	50	150	230
工厂3	65	70	170	250
工厂4	82	55	200	280

二. 算法的迭代步骤：

效率矩阵

	产品1	产品2	产品3	产品4
工厂1	58	69	180	260
工厂2	75	50	150	230
工厂3	65	70	170	250
工厂4	82	55	200	280

定理1 $b_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$, (b_{ij}) 的最优解等价于 (C_{ij}) 的最优解

第一步：找出效率矩阵每行的最小元素，并分别从每行中减去最小元素，有：

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 58 & 69 & 180 & 260 \\ 75 & 50 & 150 & 230 \\ 65 & 70 & 170 & 250 \\ 82 & 55 & 200 & 280 \end{bmatrix}\begin{matrix} 58 \\ 50 \\ 65 \\ 55 \end{matrix} \\ (C_{ij}) \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 11 & 122 & 202 \\ 25 & 0 & 100 & 180 \\ 0 & 5 & 105 & 185 \\ 27 & 0 & 145 & 225 \end{bmatrix}$$

第二步：找出效率矩阵每列的最小元素，再分别从每列中减去，有：

$$
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} 0 & 11 & 122 & 202 \\ 25 & 0 & 100 & 180 \\ 0 & 5 & 105 & 185 \\ 27 & 0 & 145 & 225 \end{bmatrix} \\
\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 100 & 180 \end{array} \; v_j
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} 0 & 11 & 22 & 22 \\ 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 27 & 0 & 45 & 45 \end{bmatrix} \\
(b_{ij})
\end{array}
$$

第三步：用最少的直线覆盖所有0：

$$\begin{bmatrix} (0) & 11 & 22 & 22 \\ 25 & 0 & (0) & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 27 & (0) & 45 & 45 \end{bmatrix}$$

(b_{ij})

定理2 覆盖零元的最少直线数等于不同行不同列的零元（称为独立零元）的最大个数。当找到m=4个独立零元时，得到最优解。

第四步：这里的直线数 = 3，进行下一轮计算（直线数=4时停止进算）。

(1) 从矩阵未被直线覆盖的数字中找出一个最小数$k = 5$，并且减去5；

(2) 直线相交处的元素加上$k = 5$，被直线覆盖而没有相交的元素不变。

$$\underset{(1)}{\begin{bmatrix} 0 & 11 & 22 & 22 \\ 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 27 & 0 & 45 & 45 \end{bmatrix}} \overset{-5}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 17 & 17 \\ 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 0 & 45 & 45 \end{bmatrix} \overset{+5}{\Rightarrow} \underset{(2)}{\begin{bmatrix} 0 & 6 & 17 & 17 \\ 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 32 & 0 & 45 & 45 \end{bmatrix}}$$

矩阵**(2)**是将矩阵**(1)**第一三行同时减5,第一列加5得到的。

回到第三步：重复用最少的直线覆盖所有0：

$$
\begin{bmatrix} 0 & 11 & 22 & 22 \\ 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 27 & 0 & 45 & 45 \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} 0 & 6 & 17 & 17 \\ 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 0 & 45 & 45 \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} 0 & 6 & 17 & 17 \\ 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 32 & 0 & 45 & 45 \end{bmatrix}
$$

此时最少直线数=4，表明矩阵中存在4个不同行不同列的零元素，于是得到最优解。

第五步：找出4个独立的0元：令对应的变量等于1，其余变量等于0，得到两个最优解。

	产品1	产品2	产品3	产品4
工厂1	58	69	180	260
工厂2	75	50	150	230
工厂3	65	70	170	250
工厂4	82	55	200	280

$$\begin{bmatrix} (0) & 6 & 17 & 17 \\ 30 & 0 & (0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (0) \\ 32 & (0) & 45 & 45 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} (0) & 6 & 17 & 17 \\ 30 & 0 & 0 & (0) \\ 0 & 0 & (0) & 0 \\ 32 & (0) & 45 & 45 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

第1个工厂加工产品1
第2个工厂加工产品3
第3个工厂加工产品4
第4个工厂加工产品2
单位产品成本和513

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

第1个工厂加工产品1
第2个工厂加工产品4
第3个工厂加工产品3
第4个工厂加工产品2
单位产品成本和513

注意：当行数与列数较多时，用直观的方法进行划线及找独立零元比较困难，这时可按以下方法进行：

1. 找出效率矩阵每行的最小元素，并分别从每行中减去最小元素，有：

2. 找出效率矩阵每列的最小元素，再分别从每列中减去，有：

$$
\begin{array}{c c}
\begin{bmatrix} 58 & 69 & 180 & 260 \\ 75 & 50 & 150 & 230 \\ 65 & 70 & 170 & 250 \\ 82 & 55 & 200 & 280 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 58 \\ 50 \\ 65 \\ 55 \end{array}
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} 0 & 11 & 122 & 202 \\ 25 & 0 & 100 & 180 \\ 0 & 5 & 105 & 185 \\ 27 & 0 & 145 & 225 \end{bmatrix} \\
\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 100 & 180 \end{array}
\end{array}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} 0 & 11 & 22 & 22 \\ 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 27 & 0 & 45 & 45 \end{bmatrix}
$$

3. 用最少的直线覆盖所有0，最少直线数= 3。

(1) 检查效率矩阵的每行每列，在零元素最少的行(列)中任选一个零元素，对这个零元素打上( )，将该(0)所在的行、列其他零元素全打上记号×。同时对打( )及×的零元素所在的行或列画一条直线。

(2) 重复第(1)步。在剩下的没有被直线画去的行、列中再找最少的零元素，打上( )，打上×及画线。直到所有零元素都被直线画去。

$$
\begin{bmatrix} (0) & 11 & 22 & 22 \\ 25 & \cancel{0} & (0) & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 5 & 5 & 5 \\ 27 & (0) & 45 & 45 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 11 & 22 & 22 \\ 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 27 & 0 & 45 & 45 \end{bmatrix}
$$

由于最少直线数 $=3<m=4$，因此修改矩阵：

(1) 从矩阵未被直线覆盖的数字中找出一个最小数5，并且减去5；

(2) 直线相交处的元素加上5，被直线覆盖而没有相交的元素不变。

$$\begin{bmatrix} 0 & 11 & 22 & 22 \\ 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 27 & 0 & 45 & 45 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 11 & 17 & 17 \\ 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 0 & 40 & 40 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 11 & 17 & 17 \\ 30 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 0 & 40 & 40 \end{bmatrix}$$

重复步骤3，直到最少直线数=4。

重复第3步. 用最少的直线覆盖所有0，最少直线数= 4。

(1) 在零元素最少的行(列)中任选一个零元素，对这个零元素打上( )，将该(0)所在的行、列其他零元素全打上记号×。同时对打( )及×的零元素所在的行或列画一条直线。

(2) 重复第(1)步。在剩下的没有被直线画去的行、列中再找最少的零元素，打上( )，打上×及画线。直到所有零元素都被直线画去。

$$\begin{bmatrix} (0) & 11 & 17 & 17 \\ 30 & 5 & (0) & \times \\ \times & \times & \times & (0) \\ 27 & (0) & 40 & 40 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} (0) & 11 & 17 & 17 \\ 30 & 5 & (0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (0) \\ 27 & (0) & 40 & 40 \end{bmatrix}$$

4. 覆盖所有0最少直线数= 4，表明矩阵中存在4个不同行不同列的零元素($m = 4$)。

或者

$$
\begin{bmatrix} 0 & 11 & 17 & 17 \\ 30 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{0} & 0 & 0 \\ 27 & (0) & 40 & 40 \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} (0) & 11 & 17 & 17 \\ 30 & 5 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & 0 & 0 \\ 27 & (0) & 40 & 40 \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} (0) & 11 & 17 & 17 \\ 30 & 5 & \cancel{0} & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & (0) & \cancel{0} \\ 27 & (0) & 40 & 40 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} (0) & 11 & 17 & 17 \\ 30 & 5 & \cancel{0} & (0) \\ \cancel{0} & \cancel{0} & (0) & \cancel{0} \\ 27 & (0) & 40 & 40 \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} (0) & 11 & 17 & 17 \\ 30 & 5 & 0 & (0) \\ 0 & 0 & (0) & 0 \\ 27 & (0) & 40 & 40 \end{bmatrix}
$$

5. 令对应的变量等于1，其余变量等于0，得到两个最优解。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

第1个工厂加工产品1
第2个工厂加工产品3
第3个工厂加工产品4
第4个工厂加工产品2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

第1个工厂加工产品1
第2个工厂加工产品4
第3个工厂加工产品3
第4个工厂加工产品2

单件产品总成本为：**58+150+250+55=513**

58+230+170+55=513

	产品1	产品2	产品3	产品4
工厂1	58	69	180	260
工厂2	75	50	150	230
工厂3	65	70	170	250
工厂4	82	55	200	280

一. 求最大值问题：

例2 人事部门欲安排四人到四个不同的岗位工作，每个岗位一个人。经考核四人在不同岗位的成绩(百分制)如下表所示，问如何安排他们的工作使总成绩最好。

效率矩阵

	A	B	C	D
甲	85	92	73	90
乙	95	87	78	95
丙	82	83	79	90
丁	86	90	80	88

例2

如果指派问题求最大值，用一个较大的数*M*去减效率矩阵$C=(c_{ij})$中所有元素得到效率矩阵$B=(b_{ij}),b_{ij}=M-c_{ij}$，求矩阵*B*的最小值，矩阵*B*与矩阵*C*的最优解相同。通常令这个较大的数等于效率矩阵中的最大元素。

解： 令 $M=\max(c_{ij})=95, b_{ij}=95-c_{ij}\geq 0,$

$$B=\begin{bmatrix} 10 & 3 & 22 & 5 \\ 0 & 8 & 17 & 0 \\ 13 & 12 & 16 & 5 \\ 9 & 5 & 15 & 7 \end{bmatrix}$$

效率矩阵

	A	B	C	D
甲	85	92	73	90
乙	95	87	78	95
丙	82	83	79	90
丁	86	90	80	88

解：

$$B=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 10 & 3 & 22 & 5 \\ 0 & 8 & 17 & 0 \\ 13 & 12 & 16 & 5 \\ 9 & 5 & 15 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{matrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 7 & 0 & 19 & 2 \\ 0 & 8 & 17 & 0 \\ 8 & 7 & 11 & 0 \\ 4 & 0 & 10 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 0 & \;\;0 & \;\;10 & \;\;0 \end{matrix} \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 8 & 7 & 0 \\ 8 & 7 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1.找出每行的最小元素，并从每行中减去；

2.找出每列的最小元素，并从每列中减去；

3.用最少的直线覆盖所有0；

3.用最少的直线覆盖所有0， 最少直线数= 4。

$$\begin{bmatrix} 7 & (0) & 9 & 2 \\ (0) & 8 & 7 & \times \\ 8 & 7 & 1 & (0) \\ 4 & \times & (0) & 2 \end{bmatrix}$$

(1)在零元素最少的行(列)中任选一个零元素，对这个零元素打上( ), 将该(0)所在的行、列其他零元素全打上记号×。同时对打( )及×的零元素所在的行或列画一条直线。

(2)重复第(1)步。在剩下的没有被直线画去的行、列中再找最少的零元素，打上( ), 打上×及画线。直到所有零元素都被直线画去。

3.用最少的直线覆盖所有0， 最少直线数= 4。

$$\begin{bmatrix} 7 & (0) & 9 & 2 \\ (0) & 8 & 7 & \cancel{0} \\ 8 & 7 & 1 & (0) \\ 4 & \cancel{0} & (0) & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & (0) & 9 & 2 \\ (0) & 8 & 7 & 0 \\ 8 & 7 & 1 & (0) \\ 4 & 0 & (0) & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. 最少直线数= 4 ，表明矩阵中存在4个不同行不同列的零元素($m = 4$)。

5.令对应的变量等于1，其余变量等于0，得到最优解。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

最优分配方案:

甲分配到岗位B,

乙分配到岗位A,

丙分配到岗位D,

丁分配到岗位C,

总成绩=**92+95+90+80=357**

	A	B	C	D
甲	85	92	73	90
乙	95	87	78	95
丙	82	83	79	90
丁	86	90	80	88

二.行数与列数不等

例3 某商业集团计划在市内四个点投资四个专业超市，考虑的商品有电器、服装、食品、家具及计算机5个类别。通过评估，家具超市不能放在第3个点，计算机超市不能放在第4个点，不同类别的商品投资到各点的年利润（万元）预测值见下表。该商业集团如何做出投资决策使年利润最大。

表1	地点1	地点2	地点3	地点4
电器	120	300	360	400
服装	80	350	420	260
食品	150	160	380	300
家具	90	200	——	180
计算机	220	260	270	——

解： 这是求最大值、行数与列数不等的综合指派问题。

对**表1**进行以下转换得到效率矩阵：

(1) 令$C_{43}= C_{54} =0$；

(2) 转换成求最小值问题，令M=420, 得到效率矩阵；

(3) 虚拟一个地点5。

$$\begin{bmatrix} 300 & 120 & 60 & 20 & 0 \\ 340 & 70 & 0 & 160 & 0 \\ 270 & 260 & 40 & 120 & 0 \\ 330 & 220 & 420 & 240 & 0 \\ 200 & 160 & 150 & 420 & 0 \end{bmatrix} \Leftarrow$$

表1	地点1	地点2	地点3	地点4
电器	120	300	360	400
服装	80	350	420	260
食品	150	160	380	300
家具	90	200	——	180
计算机	220	260	270	——

解：

$$\begin{bmatrix} 300 & 120 & 60 & 20 & 0 \\ 340 & 70 & 0 & 160 & 0 \\ 270 & 260 & 40 & 120 & 0 \\ 330 & 220 & 420 & 240 & 0 \\ 200 & 160 & 150 & 420 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 300 & 120 & 60 & 20 & 0 \\ 340 & 70 & 0 & 160 & 0 \\ 270 & 260 & 40 & 120 & 0 \\ 330 & 220 & 420 & 240 & 0 \\ 200 & 160 & 150 & 420 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} 200 & 70 & 0 & 20 & 0 \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 100 & 50 & 60 & 0 & 0 \\ 140 & 0 & 0 & 140 & 0 \\ 70 & 190 & 40 & 100 & 0 \\ 130 & 150 & 420 & 220 & 0 \\ 0 & 90 & 150 & 400 & 0 \end{bmatrix}$$

1.找出每行的最小元素，并从每行中减去；

2.找出每列的最小元素，并从每列中减去；

$$\begin{bmatrix} 100 & 50 & 60 & (0) & \cancel{0} \\ 140 & (0) & \cancel{0} & 140 & \cancel{0} \\ 70 & 190 & 40 & 100 & (0) \\ 130 & 150 & 420 & 220 & \cancel{0} \\ (0) & 90 & 150 & 400 & \cancel{0} \end{bmatrix}$$

3.用最少的直线覆盖所有0；最少直线数= 4 $< m = 5$

(1)在零元素最少的行(列)中任选一个零元素，对这个零元素打上( ), 将该(0)所在的行、列其他零元素全打上记号×。同时对打( )及×的零元素所在的行或列画一条直线。

(2)重复第(1)步。在剩下的没有被直线画去的行、列中再找最少的零元素，打上( ), 打上×及画线。直到所有零元素都被直线画去。

$$\begin{bmatrix} 100 & 50 & 60 & (0) & \cancel{0} \\ 140 & (0) & \cancel{0} & 140 & \cancel{0} \\ 70 & 190 & 40 & 100 & (0) \\ 130 & 150 & 420 & 220 & \cancel{0} \\ (0) & 90 & 150 & 400 & \cancel{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 100 & 50 & 60 & (0) & 40 \\ 140 & (0) & 0 & 140 & 40 \\ 30 & 150 & 0 & 60 & (0) \\ 90 & 110 & 380 & 180 & 0 \\ (0) & 90 & 150 & 400 & 40 \end{bmatrix}$$

3.用最少的直线覆盖所有0；最少直线数= 4 $< m = 5$

修改矩阵：

(1)从矩阵未被直线覆盖的数字中找出一个最小数40，并且减去40；

(2)直线相交处的元素加上40，被直线覆盖而没有相交的元素不变。

重复步骤3，直到最少直线数=5。

$$\begin{bmatrix} 100 & 50 & 60 & (0) & 40 \\ 140 & (0) & \cancel{0} & 140 & 40 \\ 30 & 150 & (0) & 60 & \cancel{0} \\ 90 & 110 & 380 & 180 & (0) \\ (0) & 90 & 150 & 400 & 40 \end{bmatrix}$$

3.用最少的直线覆盖所有0；最少直线数= 5 $= m = 5$

(1)在零元素最少的行(列)中任选一个零元素，对这个零元素打上( ), 将该(0)所在的行、列其他零元素全打上记号×。同时对打( )及×的零元素所在的行或列画一条直线。

(2)重复第(1)步。在剩下的没有被直线画去的行、列中再找最少的零元素，打上( ), 打上×及画线。直到所有零元素都被直线画去。

$$\begin{bmatrix} 100 & 50 & 60 & (0) & 40 \\ 140 & (0) & \cancel{0} & 140 & 40 \\ 30 & 150 & (0) & 60 & \cancel{0} \\ 90 & 110 & 380 & 180 & (0) \\ (0) & 90 & 150 & 400 & 40 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 100 & 50 & 60 & (0) & 40 \\ 140 & (0) & 0 & 140 & 40 \\ 30 & 150 & (0) & 60 & 0 \\ 90 & 110 & 380 & 180 & (0) \\ (0) & 90 & 150 & 400 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.用最少的直线覆盖所有0；最少直线数= 5 $= m = 5$

4. 最少直线数= 5 ， 表明矩阵中存在5个不同行不同列的零元素(m = 5)。

5.令对应的变量等于1，其余变量等于0，得到最优解。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

最优投资方案：
地点1投资计算机超市；
地点2投资服装超市；
地点3投资食品超市；
地点4投资电器超市；
年利润总额预测值：

220+350+380+400=1350元。

表1	地点1	地点2	地点3	地点4
电器	120	300	360	400
服装	80	350	420	260
食品	150	160	380	300
家具	90	200	——	180
计算机	220	260	270	——

例4 求解下面最小值的指派问题，其中有一人要做两项工作，其余3人每人做一项工作。

$$\begin{array}{c} \\ 甲 \\ 乙 \\ 丙 \\ 丁 \end{array}\begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ 26 & 38 & 41 & 52 & 27 \\ 25 & 33 & 44 & 59 & 21 \\ 20 & 30 & 47 & 56 & 25 \\ 22 & 31 & 45 & 53 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 甲 \\ 乙 \\ 丙 \\ 丁 \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ 26 & 38 & 41 & 52 & 27 \\ 25 & 33 & 44 & 59 & 21 \\ 20 & 30 & 47 & 56 & 25 \\ 22 & 31 & 45 & 53 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 26 & 38 & 41 & 52 & 27 \\ 25 & 33 & 44 & 59 & 21 \\ 20 & 30 & 47 & 56 & 25 \\ 22 & 31 & 45 & 53 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 26&38&41&52&27\\ 25&33&44&59&21\\ 20&30&47&56&25\\ 22&31&45&53&20\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}\begin{array}{c} 26\\ 21\\ 20\\ 20\\ 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} (0)&12&15&26&1\\ 4&12&23&38&(0)\\ \cancel{0}&\boxed{10}&27&36&5\\ 2&11&25&33&\cancel{0}\\ \cancel{0}&(0)&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0} \end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccccc} 0&0&0&0&0 \end{array} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} (0)&2&5&16&1\\ 4&2&13&28&(0)\\ 0&0&17&26&5\\ 2&1&15&23&0\\ 10&(0)&0&0&10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (0)&2&\boxed{5}&16&1\\ 4&2&13&28&(0)\\ \cancel{0}&(0)&17&26&5\\ 2&1&15&23&\cancel{0}\\ 10&\cancel{0}&(0)&\cancel{0}&10 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0&2&0&11&1\\ (4)&2&8&23&(0)\\ 0&(0)&12&21&5\\ 2&1&10&18&0\\ 15&5&(0)&0&15 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (0)&2&\cancel{0}&11&1\\ 4&2&8&23&(0)\\ \cancel{0}&(0)&12&21&5\\ 2&1&10&18&\cancel{0}\\ 15&5&(0)&\cancel{0}&15 \end{pmatrix}$$

56

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (0) & 2 & 0 & 11 & 1 \\ 4 & 2 & 8 & 23 & (0) \\ 0 & (0) & 12 & 21 & 5 \\ 2 & 1 & 10 & 18 & 0 \\ 15 & 5 & (0) & 0 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (0) & 2 & 0 & 11 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & 22 & (0) \\ 0 & (0) & 12 & 21 & 6 \\ 1 & 0 & 9 & 17 & 0 \\ 15 & 5 & (0) & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cancel{0} & 2 & (0) & 11 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & 22 & (0) \\ (0) & \cancel{0} & 12 & 21 & 6 \\ 1 & (0) & 9 & 17 & \cancel{0} \\ 15 & 5 & \cancel{0} & (0) & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 2 & (0) & 11 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & 22 & (0) \\ (0) & 0 & 12 & 21 & 6 \\ 1 & (0) & 9 & 17 & 0 \\ 15 & 5 & 0 & (0) & 16 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 甲 \\ 乙 \\ 丙 \\ 丁 \\ \end{array} \\ \mathbf{A} \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{C} \quad \mathbf{D} \quad \mathbf{E} \end{array}$$

$\Rightarrow$

甲： *C D*
乙： *E*
丙： *A*
丁： *B*

所用时间最短：

20+31+41+52+21=165

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
甲	26	38	41	52	27
乙	25	33	44	59	21
丙	20	30	47	56	25
丁	22	31	45	53	20

本章结束