电子科技大学研究生试卷

（考试时间：____至_____，共__2_小时）

课程名称__图论及其应用_ 教师_______ 学时_60_ 学分____

教学方式__讲授_ 考核日期_2012__年___月____日 成绩______

考核方式：__________（学生填写）

一、填空题（填表题每空 1 分，其余**每题 2 分，共 30 分)**

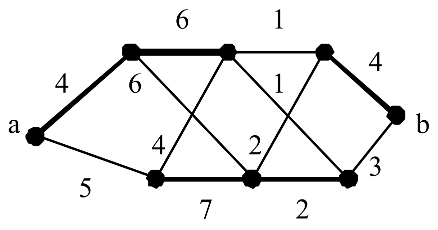
1．n 阶 k 正则图 G 的边数 $m(G)$=___ $\frac{nk}{2}$ ___；

2．3 个顶点的不同构的简单图共有___4___个；

3．边数为 m 的简单图 G 的不同生成子图的个数有__ 2^m ___个；

4. 图 $G_1=(n_1,m_1)$ 与图 $G_2=(n_2,m_2)$ 的积图 $G_1\times G_2$ 的边数为 _ $n_1m_2+n_2m_1$ ___；

5. 在下图 G_1 中，点 a 到点 b 的最短路长度为__13__；



G_1

6. 设简单图 G 的邻接矩阵为 A，且 $A^2=\begin{pmatrix}3&1&1&2&0\\1&2&1&1&1\\1&1&3&0&2\\2&1&0&2&0\\0&1&2&0&2\end{pmatrix}$，则图 G 的边数为

__6__；

学院________ 姓名________ 学号________

密……封……线……以……内……答……题……无……效

7. 设G是n阶简单图，且不含完全子图K_3，则其边数一定不会超过 __$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$_；

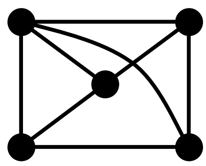
8. K_3的生成树的棵数为 __3__；

9. 任意图G的点连通度$k(G)$、边连通度$\lambda(G)$、最小度$\delta(G)$之间的关系为

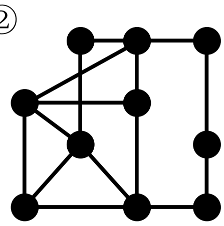
__$k(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$____；

10. 对下列图，试填下表（是××类图的打〝√〞，否则打〝×〞）。

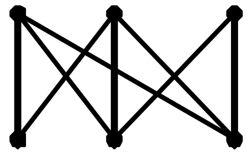
①



②



③



	能一笔画的图	Hamilton 图	偶图	可平面图
①	×	√	×	√
②	×	×	×	√
③	×	√	√	√

二、单项选择(每题 2 分，共 10 分)

1．下面命题正确的是（B）

对于序列$(7,5,4,3,3,2)$，下列说法正确的是：

(A) 是简单图的度序列;
(B) 是非简单图的度序列;
(C) 不是任意图的度序列;
(D) 是图的唯一度序列.

2．对于有向图，下列说法**不正确**的是（D）
(A) 有向图D中任意一顶点v只能处于D的某一个强连通分支中;
(B) 有向图D中顶点v可能处于D的不同的单向分支中;
(C) 强连通图中的所有顶点必然处于强连通图的某一有向回路中;
(D) 有向连通图中顶点间的单向连通关系是等价关系。

3.下列无向图可能不是偶图的是（D）
(A) 非平凡的树;
(B) 无奇圈的非平凡图;

(C) n $(n\geq 1)$ 方体；

(D) 平面图。

4.下列说法中正确的是（C）

(A) 连通 3 正则图必存在完美匹配；
(B) 有割边的连通 3 正则图一定不存在完美匹配；
(C) 存在哈密尔顿圈的 3 正则图必能 1 因子分解；
(D) 所有完全图都能作 2 因子分解。

5. 关于平面图，下列说法错误的是(B)

(A) 简单连通平面图中至少有一个度数不超过 5 的顶点；
(B) 极大外平面图的内部面是三角形，外部面也是三角形；
(C) 存在一种方法，总可以把平面图的任意一个内部面转化为外部面；
(D) 平面图的对偶图也是平面图。

三、 (10 分) 设 G 与其补图 $\overline{G}$ 的边数分别为 m_1, m_2，求 G 的阶数。

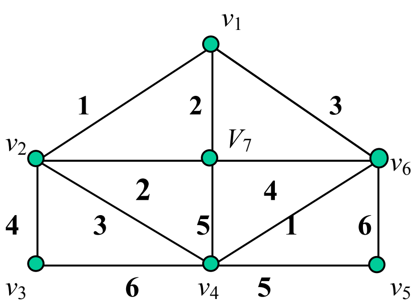
解：设 G 的阶数为 n 。

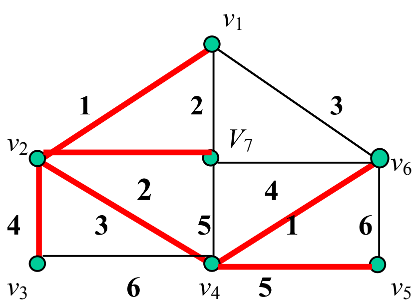
因 $m_1+m_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ ……………………………………4 分

所以： $n^2-n-2m_1-2m_2=0$ **……………………..2 分**

得： $n=\dfrac{1+\sqrt{1+8(m_1+m_2)}}{2}$ **………………………..4 分**

四、(10 分) 求下图的最小生成树（不要求中间过程，只要求画出最小生成树，并给出 T 的权和）。

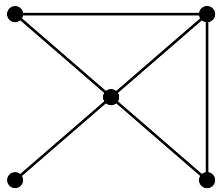




$w(T)=16$

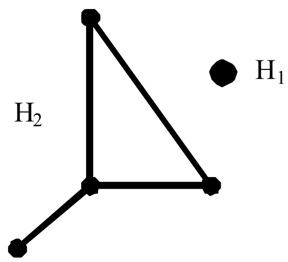
五、(10 分)　(1). 求下图 G 的 k 色多项式；　　　(2). 求出 G 的点色数 χ；

(3). 给出一种使用 χ 种颜色的着色方法。



G

解：(1)、图 G 的补图为：(2 分)



$h(H_1,x)=x$ ……………………………………………………..1 分

对于 H_2：$r_1=0, r_2=2, r_3=4, r_4=1$，所以，其伴随多项式为：

$h(H_2,x)=2x^2+4x^3+x^4$ ……………………………………………..1 分

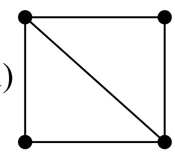
所以：$h(\bar{G},x)=2x^3+4x^4+x^5$ ……………………………………1 分

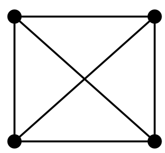
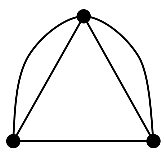
于是色多项式 $P_G(x)=2[k]_3+4[k]_4+[k]_5$

$$=2k(k-1)(k-2)+4k(k-1)(k-2)(k-3)+k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)$$

$$=k(k-1)(k-2)[2+4(k-3)+(k-3)(k-4)]=k(k-1)^2(k-2)^2$$

2 分

解法 2　$P_k(G)=(k-1)$ 　　2 分

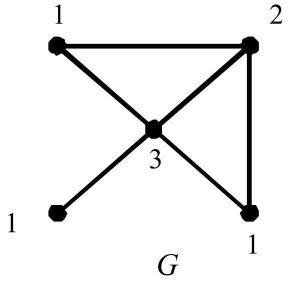
$=(k-1)$  　　3 分

$= (k\text{-}1)[\ k(k\text{-}1)\ (k\text{-}2)^2]$

$= k(k\text{-}1)^2\ (k\text{-}2)^2$ 2 分

(2)、由于 $P_1(G)=P_2(G)=0, P_3(G)=12$，所以，点色数 χ=3；……..**2 分**

(3)、χ 点着色：(**1 分**)

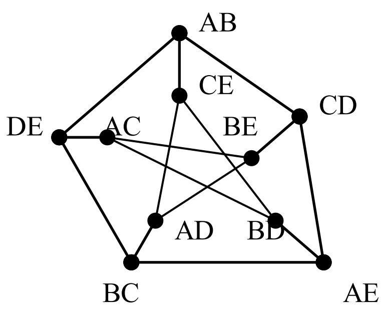


G

六、(10 分) 5 个人 A,B,C,D,E 被邀请参加桥牌比赛。桥牌比赛规则是每一**场**比赛由两个 2 人**组**进行对决。要求每个 2 人组 $\{X,Y\}$ 都要与其它 2 人组 $\{W,Z\}$（$W,Z \notin \{X,Y\}$）进行对决。若每个人都要与其他任意一个人组成一个 2 人组，且每个**组**在同一天不能有多余一次的比赛，则最少安排多少**天**比赛（每一天可以有多场比赛）？请给出相应的一个时间安排表。(用图论方法求解)

解：(1)、建模：5 个人能够组成 10 个 2 人组：AB, AC, AD, AE, BD, BC, BE, CD , CE, DE。

以每个 2 人组作为顶点，因要求每个 2 人组 $\{X,Y\}$ 都与其它 2 人组 $\{W,Z\}$ 比赛，所以，得到比赛状态图如下：



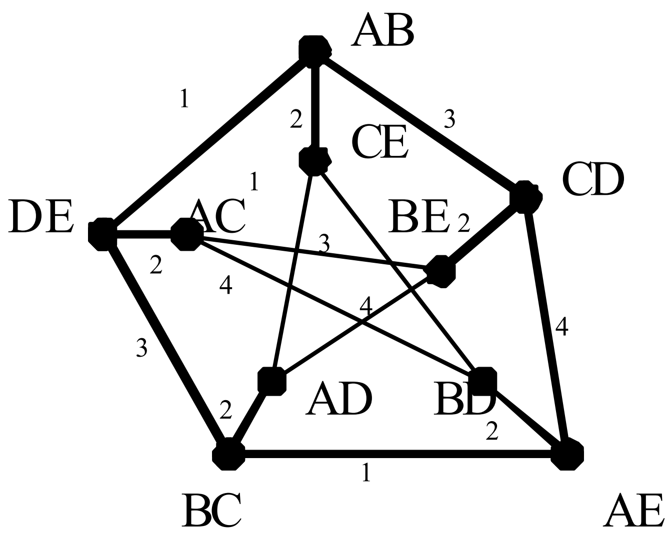
4 分

(2)、最少安排多少天比赛转化为求状态图的边色数 χ'。

因为彼得森图不可 1 因子分解，于是可推出 $\chi' \geq 4$，又可用 4 种色对其正常边着色(见

下图)，所以：$\chi' \le 4$。

所以：$\chi' = 4$。 **2 分**



(3)、**安排时间表：**

第一天：AB---DE, AE---BC, AC---BE, AD---CE;

第二天：AB---CE, AC---DE, AE---BD, AD---BC, BE---CD ;

第三天：AB---CD, BC---DE, BD---CE;

第四天：AC---BD, AD---BE, AE---CD。

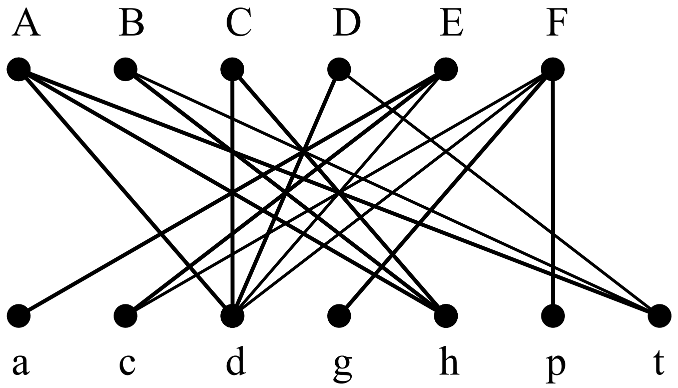
4 分

七、(10 分) 由于在考试中获得好成绩，6 名学生 A,B,C,D,E,F 将获得下列书籍的奖励，分别是：代数学(a)，微积分(c)，微分方程(d)，几何学(g)，数学史(h)，规划学(p)，拓扑学(t)。每门科目只有 1 本书，而每名学生对书的喜好是：

A：d, h, t ；B： h, t ；C：d, h ；D：d, t ；E：a, c, d ； F:：c, d, p, g 。

每名学生是否都可以得到他喜欢的书？为什么？(用图论方法求解)

解：由题意,得模型图：(**4 分**)



问题转化为是否存在饱和 A,B,C,D,E,F 的匹配存在。 2 分

取顶点子集合 $S=\{A,B,C,D\}$，因 $N(S)=\{d,h,t\}$，所以 $|N(S)|<|S|$

由霍尔定理知：不存在饱和 A,B,C,D,E,F 的匹配。
故每名学生不能都得到他喜欢的书。 4 分

八、(10 分) 若 n 为偶数，且单图 G 满足：$\delta(G)\geq\frac{n}{2}+1$，求证：$G$ 中有 3 因子。

证明：因单图 G 满足：$\delta(G)\geq\frac{n}{2}+1$，所以 G 中存在哈密尔顿圈 C_n。 **2 分**

又因 n 为偶数，所以，C_n 可分解为两个 1 因子 H_1,H_2，它们显然也是图 G 的两个 1 因子。 **3 分**

考虑 $G_1=G-H_1$，则 $\delta(G_1)\geq\frac{n}{2}$，于是，$G_1$ 中存在哈密尔顿圈 C_n'。 2 分

作 $H=H_1\quad C_n'$，则 H 为 G 的一个 3 因子。 **3 分**