דף נוסחאות חשבון דיפרנציאלי ואינטגראלי 1

אלגברה

נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

ממעלה שנייה $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

ממעלה שלישית $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

ממעלה n $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+....+b^{n-1})$

פתרונות המשוואה הריבועית: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

חזקות ושורשים:

חזקות עם מעריך טבעי: $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$, $\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$, $(a^n)^m=a^{n\cdot m}$

$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

לוגריתמים:

הגדרת הלוגריתם: $a^b=x\Leftrightarrow \log_a x=b$

חוקי הלוגריתם: $a^{\log_a x}=x$, $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$

$\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$, $\log_a x^n=n\cdot\log_a x$

מעבר מבסיס לבסיס: $\log_m x=\dfrac{\log_a x}{\log_a m}$

טריגונומטריה

זהויות: זהויות יסודיות

$\cot\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}$, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2 a}$, $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin(90-\alpha)=\cos\alpha$ $\cos(90-\alpha)=\sin\alpha$ $\tan(90-\alpha)=\cot\alpha$ $\cot(90-\alpha)=\tan\alpha$

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\sin(180-\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(180-\alpha)=-\cos\alpha$

סכום והפרש זוויות:

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$

$\cot(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta\mp 1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$ $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

זווית כפולה וחצי זווית:

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ $\cot 2\alpha=\dfrac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2} \qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad 1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2} \qquad \tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

<u>סכום והפרש פונקציות:</u>

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

<u>מכפלת פונקציות:</u>

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)] \qquad \cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)] \qquad \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

<u>ישר:</u>

המשוואה המפורשת של ישר $(m=\tan\alpha)$: $y=mx+n$

משוואת ישר ששיפועו m העובר דרך הנקודה (x_1,y_1) : $y-y_1=m(x-x_1)$

שיפוע ישר העובר דרך הנקודות (x_1,y_1) , (x_2,y_2) : $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

התנאי להקבלה של שני ישרים ששיפועיהם m_1 ו- m_2 : $m_1=m_2$

התנאי לניצבות של שני ישרים ששיפועיהם m_1 ו- m_2 : $m_1\cdot m_2=-1$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגראלי

<u>גבול של סדרה</u>:

כלל המנה: תהי a_n סדרה חיובית, ונניח ש- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\begin{cases}\infty & q>1\\ 0 & q<1\end{cases}$.

כלל השורש: עבור סדרה חיובית a_n מתקיים: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

כלל הסנדוויץ': אם $a_n\le b_n\le c_n$ לכל n ו- $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=l$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=l$.

<u>גבול של פונקציה</u>:

- $\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$, $\lim\limits_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$
- $\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1$, $\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}=1$
- אם $f(x)$ היא פונקציה חסומה ו- $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$, אז $\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty}a^x=\begin{cases}\infty & a>1\\ 0 & 0<a<1\end{cases}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=\begin{cases}0 & a>1\\ \infty & 0<a<1\end{cases}$
-

<u>נגזרות</u>:

כללי גזירה:

הנגזרת	הפונקציה
$F'(x)=a\cdot f'(x)$	$F(x)=a\cdot f(x)$
$F'(x)=f'(x)\pm g'(x)$	$F(x)=f(x)\pm g(x)$
$F'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$	$F(x)=f(x)\cdot g(x)$
$F'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$	$F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$
$F'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$	$F(x)=g(f(x))$

נגזרות של פונקציות:

הנגזרת	הפונקציה
$y'=nx^{n-1}$	$y=x^n$
$y'=0$	$y=a$
$y'=\cos x$	$y=\sin x$
$y'=-\sin x$	$y=\cos x$
$y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y=\tan x$
$y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$y=\cot x$
$y'=\dfrac{1}{x}\log_a e$	$y=\log_a x$
$y'=\dfrac{1}{x}$	$y=\ln x$
$y'=a^x\ln a$	$y=a^x$
$y'=e^x$	$y=e^x$
$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$y=\arctan x$
$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y=\arcsin x$

משוואת משיק: $y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

נוסחת קירוב לינארי: $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

<u>כלל לופיטל</u>: $$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\left\{\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

במקרה של $0\cdot\infty$: $\lim f(x)\cdot g(x)=\lim\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$. במקרה של ∞^0, 1^∞, 0^0:

$$\lim f(x)^{g(x)}=\lim e^{g(x)\ln(f(x))}$$

במקרה של $\infty-\infty$: אם אפשרי, מחפשים מכנה משותף, אחרת $\lim f(x)-g(x)=\lim\ln\left(\dfrac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}}\right)$

אינטגרלים מיידיים:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1 \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c \qquad \int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{xdx}{x^2 + a} = \frac{1}{2} \ln\left|x^2 + a\right| + c \qquad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$$

אינטגרציה בחלקים: $\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$.

אסימפטוטה משופעת: $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $n = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx$.