# פרק ב - תחשיב הפסוקים

## א) הגדרה

תחשיב הפסוקים זה סוג של שפה שבאמצעותה ניתן לנסח משפטים (פסוקים) המורכבים ממשפטים שיכולים להיות אמת או שקר, כך שלבסוף המשפט כולו יהיה אמת או שקר. באמצעות תחשיב הפסוקים ניתן לבדוק האם טענה מסוימת היא הגיונית (לוגית).

מושגים:

פסוק אטומי- היא אות לועזית ($\alpha,\beta,\gamma,\delta,...$), שיכולה להיות או אמת או שקר.

פסוק- הוא מונח המקביל למשפט, כלומר שהוא משלב בתוכו מספר פסוקים אטומיים עם קשרים שונים ביניהם, שבסוף הפסוק כולו יהיה אמת או שקר, אמנם גם פסוק עם פסוק אטומי אחד הוא פסוק שערכו הוא כערך הפסוק האטומי. אנו מבדילים בין חמישה קשרים בין פסוקים אטומיים שיכולים להיכלל בפסוק.

(1) $\neg\alpha$ - לא $\alpha$.

(2) $\alpha\wedge\beta$ - $\alpha$ וגם $\beta$.

(3) $\alpha\vee\beta$ - $\alpha$ או $\beta$.

(4) $\alpha\rightarrow\beta$ - אם $\alpha$ אז $\beta$.

(5) $\alpha\leftrightarrow\beta$ - אם ורק אם.

## ב) לוח האמת

לוח האמת היא טבלה שבה נשתמש כדי לדעת את כל הערכים האפשריים של פסוק מסוים. השורה הראשונה של הטבלה נרשום את הפסוק עצמו ואת כל הפסוקים האטומיים המופיעים בו. בתוך הטבלה נרשום את כל הצירופים האפשריים של הפסוקים האטומיים ומה יהיה ערכו של הפסוק בכל המקרים. נרשום את חמשת לוחות האמת של חמשת הקשרים שיכולים להיכלל בפסוק.

(1) לוח האמת של השלילה

| $\alpha$ | $\neg\alpha$ |
|---|---|
| T | F |
| F | T |

(2) לוח האמת של הגימום

צריך שכולם יהיו אמת

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha\wedge\beta$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

(3) לוח האמת של האו'

לפחות אחד יהיה אמת

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha\vee\beta$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

(4) לוח האמת של האימוץ- נמשיל את היחס לאם עבדת אשלם לך.
עבדת ושילמתי-V. עבדת ולא שילמתי-X. לא עבדת ושילמתי-V (נדבות). לא עבדת ולא שילמתי-V. אם בצד שמאל יש F אז יצא תמיד T, כי אני עומד בהבטחה.

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha\rightarrow\beta$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

(5) לוח האמת של האימום- פירושו שיש תיאום בין $\alpha$ ל-$\beta$, אם יש תיאום אז יצא T, אך אם שונים יצא F.

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha\leftrightarrow\beta$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

22/10 בס"ד

כדי למצוא את ערכו של פסוק מסו"מ נת"חס קודם לפסוקים האטומיים, בשלב השני לשלילה, בשלב השלישי לסוגריים ובשלב הרביעי נמצא את הפתרון הסופי.

דוגמא: חשב את לוח האמת של הפסוק $\alpha\to(\neg\beta\to\gamma)$.

| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\alpha\to(\neg\beta\to\gamma)$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T T F T T T |
| T | T | F | T T F T T F |
| T | F | T | T T T F T T |
| T | F | F | T F T F F F |
| F | T | T | F T F T T T |
| F | T | F | F T F T T F |
| F | F | T | F T T F T T |
| F | F | F | F T T F F F |

## ג) שקילויות

הגדרה- הפסוקים $\alpha,\beta$ שקולים נסמן $\alpha\equiv\beta$. המשמעות היא שלפסוקים תמיד יהיה את אותו ערך ללא תלות בערכים של הפסוקים האטומיים הנמצאים בהם

דוגמא: הפסוקים $\alpha\to\beta\equiv\neg\alpha\vee\beta$ הם שקולים.

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha\to\beta$ | $\neg\alpha\vee\beta$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | F T T T |
| T | F | F | F T F F |
| F | T | T | T F T T |
| F | F | T | T F T F |

ניתן לראות כי ערכי הפסוקים שווים ללא תלות בערכים של הפסוקים האטומיים.

### רשימת שקילויות:

(1) שקילויות בסיסיות

$$\neg(\neg\alpha)\equiv\alpha$$
$$\alpha\wedge\alpha\equiv\alpha$$
$$\alpha\vee\alpha\equiv\alpha$$

(2) חוקי דה-מורגן

$$\neg(\alpha\wedge\beta)\equiv\neg\alpha\vee\neg\beta$$
$$\neg(\alpha\vee\beta)\equiv\neg\alpha\wedge\neg\beta$$

(3) חוקי הקיבוץ

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\equiv\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$$
$$(\alpha\vee\beta)\vee\gamma\equiv\alpha\vee(\beta\vee\gamma)$$

(4) חוקי החילוף

$$\alpha\wedge\beta\equiv\beta\wedge\alpha$$
$$\alpha\vee\beta\equiv\beta\vee\alpha$$

5) חוקי הפילוג

$$\alpha\wedge(\beta\vee\gamma)\equiv(\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)$$
$$\alpha\vee(\beta\wedge\gamma)\equiv(\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\gamma)$$
$$\alpha\vee(\beta\wedge\gamma\wedge\delta)\equiv(\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\gamma)\wedge(\alpha\vee\delta)$$

6) חוקי הספיגה ("הרוב קובע")

$$\alpha\wedge(\alpha\vee\beta)\equiv\alpha$$
$$\alpha\vee(\alpha\wedge\beta)\equiv\alpha$$

7) שקילויות הקשורות לחיצים

$$\alpha\to\beta\equiv\neg\alpha\vee\beta$$
$$\neg(\alpha\to\beta)\equiv\alpha\wedge\neg\beta$$
$$(\alpha\wedge\beta)\vee(\neg\alpha\wedge\neg\beta)\equiv\alpha\leftrightarrow\beta$$
$$(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha)\equiv\alpha\leftrightarrow\beta$$

(8) חוקי האמת

$$\alpha\wedge T\equiv\alpha \qquad \alpha\wedge F\equiv F$$
$$\alpha\vee T\equiv T \qquad \alpha\vee F\equiv\alpha$$

סתירה - פסוק שהערך שלו תמיד שקר, ללא תלות בערכים של הפסוקים האטומיים. נסמנו ב-F. לדוגמא: $\alpha\wedge\neg\alpha=F$.

טאוטולוגיה - פסוק שהערך שלו תמיד אמת. נסמנו ב-T. לדוגמא: $\alpha\vee\neg\alpha=T$.

## 3) הצגות של פסוקים - DF ו-CF

באמצעות רשימת השקילויות שלמדנו בפרק הקודם, נשים לב כי כעת אנו יכולים להציג פסוקים שונים בצורות שונות שהמשמעות של כולם היא זהה. בפרק זה נציג שתי שיטות להצגה של פסוקים שבהם משתמשים רק בקשרים הלוגיים הבסיסיים (שלילה, גימום, ואיווי), לעתים נרצה להעביר פסוקים לשיטות הצגה אלו כדי שבפסוק יהיו כמה שפחות קשרים לוגיים, ואז הפסוק יהיה פשוט וקל להבנה.

### הצגה בצורת DF

פסוק בצורת DF (Disjunctive Form) היא פסוק שמקיים את הדרישות הבאות:

(1) מופיעים בו הקשרים: שלילה($\neg$) גימום ($\wedge$) ואיווי ($\vee$) בלבד, אך לא אימום ($\leftrightarrow$) ואימוץ ($\rightarrow$).

(2) אפשר לחשב את ערך האמת שלו לפי הסדר הבא: שלילה, גימום, ולבסוף איווי.

### הצגה בצורת CF.

פסוק בצורת CF (Conjunctive Form) היא פסוק שמקיים את הדרישות הבאות:

(1) גם כן מופיעים בו הקשרים: שלילה גימום ואיווי בלבד, אך לא אימום ואימוץ.

(2) אפשר לחשב את ערך האמת שלו לפי הסדר הבא: שלילה, איווי (בניגוד ל-DF), ולבסוף גימום.

דוגמאות:

(1) $A \leftrightarrow B$ - לא DF ולא CF.

(2) $A \wedge B$ - גם DF וגם CF.

(3) $A \wedge (B \vee C)$ - כן CF אך לא DF.

(4) $(A \wedge B) \vee C$ - כן DF אך לא CF.

(5) $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$ - כן DF אך לא CF

(6) $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (B \wedge C)$ - כן CF אך לא DF

(7) $(A \wedge B) \vee (A \vee C)$ - כן DF אך לא CF. ניתן להרחיב טווח לפי חוקי הפילוג

(8) $A \wedge (A \vee (A \wedge B))$ - לא DF ולא CF. יש גימום איווי ושוב גימום.

**משפט:** כל פסוק ניתן להציג בצורת DF או בצורת CF. יש שתי שיטות לכך, או בעזרת לוח האמת (לא נציג), או בעזרת רשימת השקילויות מפרק קודם.

### שלבים לשיטת השקילויות

(1) בשלב ראשון נחליף את הסימנים שיש בהם תיוגים (אימום או אימוץ).

(2) ניפטר מהשלילה לפני סוגריים, באמצעות חוקי דה-מורגן.

(3) נסדר גימום ואיווי כדי לקבל DF או CF, בעיקר באמצעות חוקי הפילוג.

דוגמאות:

(1) $A \rightarrow (\neg A \wedge B) \equiv \neg A \vee (\neg A \wedge B) \equiv \neg A \Rightarrow$ גם CF וגם DF

(2) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \Rightarrow$ CF-מ DF-ל

(3) $\neg[(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow C)] \equiv \neg[(\neg A \vee B) \wedge (A \vee C)] \equiv [(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg C)] \Rightarrow$ DF

## ה) הצגה של פסוקים באמצעות שלילה וגימום/איווי

כמו שראינו ניתן להציג כל פסוק בצורת DF או CF. אמנם אפשר לפשט את הפסוק עוד יותר כך שיהיה בו או שלילה וגימום בלבד או שלילה ואיווי בלבד. השיטה היא כזאת: לאחר שפישטנו פסוק להצגה בצורת DF או CF, נוסיף שלילה כפולה על הביטוי של גימום או איווי, תלוי מה אנו רוצים להשאיר, ונשתמש בחוקי דה-מורגן להחלפת הסימן.

דוגמא: (1) $A \vee B \equiv \neg\left[\neg(A \vee B)\right] \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$

(2) $A \wedge B \equiv \neg\left[\neg(A \wedge B)\right] \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$