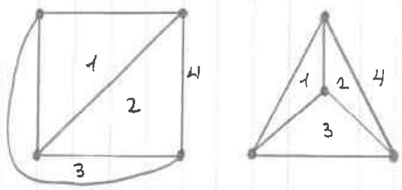
גרפים מישוריים

א) הגדרות

גרף מישורי - גרף לא מכוון G נקרא "גרף מישורי" אם ורק אם ניתן לצייר אותו במישור מבלי ששתי צלעות תחתכנה.



דוגמה: הגרף השלם על 4 קודקודים הוא מישורי.

פאה - בהינתן "ציור מישורי" של גרף מישורי, כל האזור שהינו חסום ע"י צלעות נקרא "פאה". האזור שאינו חסום נקרא הפאה החיצונית".

ב) נוסחת אוילר

משפט: יהי G גרף מישורי קשיר. נסמן ב-n את מספר הקודקודים, m מספר הצלעות ו-f מספר הפאות. אזי נוסחת אוילר אומרת שמתקיים: $\boxed{n+f-m=2}$

הוכחה: באינדוקציה על m.

בסיס - כאשר $m=n-1$ (אחרת הגרף לא קשיר) אזי גרף קשיר עם n-1 צלעות הוא בוודאי עץ. מכיוון שאין בו מעגלים יש לו רק פאה אחת (החיצונית). לכן אכן מתקיים: $n+f-m=n+1-(n-1)=2$ ✓

הנחה: נניח שהטענה נכונה עבור m-1 כאשר $m-1\ge n-1$.

צעד: נוכיח עבור m. יהי G גרף קשיר ומישורי עם n קודקודים ו-m צלעות. מכיוון ש-$m\ge n$ (נובע מההנחה) אזי ב-G יש בוודאי לפחות מעגל אחד. נייצר גרף חדש G' שבו מחקנו צלע אחת על מעגל ב-G. מכיוון שהצלע על המעגל, G' הוא קשיר וגם מישורי, מפני שמחיקת צלעות לא פוגעת במישוריות. נסמן ב-f',m',n' את מספר הקודקודים, הצלעות והפאות ב-G'. מתקיים $n=n'$, $m'=m-1$, ובנוסף גם מתקיים $f'=f-1$, משום שהפאה בתוך המעגל שממנו הורדנו צלע הצטרפה לפאה אחרת. מכיוון שב-G' יש m-1 צלעות מתקיים הנחת האינדוקציה $n'+f'-m'=2$. כעת, נוכל להסיק אם גם G מקיים את הטענה: $n+f-m=n'+f'+1-(m'+1)=n'+f'-m'=2$. לכן הטענה מתקיימת. מ.ש.ל.

ג) משפטים

1) יהי G גרף מישורי קשיר עם $n\ge 3$ קודקודים, אזי מספר הצלעות שבו חסום מלמעלה $m\le 3(n-2)$.

הוכחה: כאשר $n=3$ מספר הצלעות המקסימלי הוא במשולש ולכן הטענה מתקיימת $m=3\le 3(3-2)=3$. נוכיח עבור $n>3$. נסתכל על פאה F כלשהי בגרף, נסמן ב-t_F את מספר הצלעות בפאה זו, $t_F\ge 3$. מכיוון שכל צלע בגרף גובלת לכל היותר ב-2 פאות, מתקיים $\sum_F t_F\le 2m$. בנוסף מתקיים $3f\le\sum_F t_F$. ומכאן $\le\frac{2}{3}m$

נציב זאת בנוסחת אוילר ולכן נקבל: $=n+f-m\le n+\frac{2}{3}m-m=n-\frac{1}{3}m \Rightarrow 6\le 3n-m \Rightarrow m\le 3(n-2)$

אמנם המשפט ההפוך לא מתקיים כלומר אם $m\le 3(n-2)$ אזי G לא בהכרח מישורי. אולם אם משפט זה לא מתקיים אז בהכרח G לא מישורי!

2) יהי G גרף מישורי קשיר חסר משולשים עם $n\ge 3$ קודקודים, אזי מספר הצלעות חסום מלמעלה $m\le 2(n-2)$

הוכחה: כאשר $n=3$, מכיוון שלא יכול להיות משולש, אזי נקבל גרף בצורת שרוך המחבר את שלושת הקודקודים. במצב זה הטענה מתקיימת: $m=2\le 2(3-2)=2$ ✓. אם $n>3$, אזי מכיוון ש-G חסר משולשים מספר הצלעות בכל פאה הוא $\ell_F\ge 4$, ומכאן $4f\le\sum_F \ell_F$. בדומה להוכחה הקודמת, כיוון שכל צלע גובלת במקסימום 2 פאות, מתקיים $\sum_F \ell_F\le 2m$. בשילוב שתי השוויונים נקבל $4f\le 2m$, ומכאן $f\le\frac{m}{2}$.
נציב באוילר ואכן נקבל: $2=n+f-m\le n+\frac{m}{2}-m=n-\frac{m}{2}\Rightarrow 4\le 2n-m\Rightarrow m\le 2(n-2)$ ✓

3) גרף ה-n קוביה הוא מישורי רק כאשר $n\le 3$. אך עבור $n\ge 4$ הוא אינו מישורי.

הוכחה: עבור $n=1$ נקבל קו, עבור $n=2$ נקבל ריבוע, ועבור $n=3$ נקבל קוביה. כולם מישוריים. נוכיח אי מישוריות עבור $n\ge 4$. בגרף n קוביה כבר למדנו (סע' ג' פרק קודם) שמספר הקודקודים הוא 2^n ומספר הצלעות $\frac{n\cdot 2^n}{2}=m$. לפי משפט קודם, מכיוון שאין בגרף n קוביה משולשים, צריך להתקיים: $n\cdot 2^{n-1}\le 2(2^n-2)$. ע"י הצבה ניתן לראות שעבור $n\ge 4$ אי השוויון לא מתקיים.

4) הגרף המלא בעל 5 קודקודים K_5 אינו מישורי.

הוכחה: מספר הצלעות בגרף מלא בעל $n=5$ קודקודים הוא: $\frac{n(n-1)}{2}=\frac{5(5-1)}{2}=10=m$. נבדוק אם מתקיים משפט (1). $10\le 3(5-2)=9$ ✗. לכן K_5 אינו מישורי.

5) הגרף הדו-צדדי המלא על שתי קבוצות של 3 קודקודים $K_{3,3}$ אינו מישורי.

הוכחה: נניח בשלילה שהוא מישורי. מספר הקודקודים בו 6, ומכיוון שמכל קודקוד יוצאים 3 צלעות, מספר הצלעות בסה"כ הוא 9. לפי נוסחת אוילר נחשב את f: $n+f-m=2\Rightarrow 6+f-9=2\Rightarrow f=5$.
נסמן סכום הצלעות בכל פאה ℓ_F. מכיוון שכל צלע יכולה לגבול במקסימום 2 פאות מתקיים: $\sum_F \ell_F\le 2m=18$
מכיוון שיש 5 פאות סכום הצלעות הממוצע הוא $\frac{18}{5}=3.6$. לכן בהכרח יש פאה שסכום צלעותיה לא גדול מהממוצע כלומר יש בה 3 צלעות. סתירה! הגרף $K_{3,3}$ הוא דו-צדדי ולכן כל המעגלים בו הם זוגיים (מ"ש

6) בכל גרף מישורי יש לפחות קודקוד אחד בעל דרגה 5 לכל היותר.

הוכחה: מספר הדרגות הממוצע בכל קודקוד $v\in V$ הוא: $\frac{\sum_{v\in V} degree(v)}{n}$. וכן למדנו (סע' ג) כי מתקיים $\sum_{v\in V} degree(v)=2\cdot|E|=2\cdot m$, ומכאן שמספר הדרגות הממוצע שווה $\frac{2m}{n}$. לפי משפט (1) בסע' זה האו
שמתקיים $m\le 3(n-2)$ נוכל לחשב את מספר הדרגות הממוצע. $\frac{2m}{n}\le\frac{2\cdot 3(n-2)}{n}=\frac{6n-12}{n}=6-\frac{12}{n}<6$
מכיוון שהדרגה הממוצעת קטנה מ-6, ח"ב להיות קודקוד שדרגתו אינה גדולה מהממוצע, כלומר: $degree(v)\le 5$

3) עדנה של גרף

עידון של צלע $\{u,v\}$ הוא החלפת הצלע במסלול u,x,v באורך 2, כאשר x צומת חדשה שהוספנו לגרף.

נאמר כי G' הוא "העדנה של G" אם ניתן לעדן צלעות ב-G, כך שעל ידי העידון נגיע ל-G'. מותר לעדן גם צלעות חדשות שעשינו עליהם עידון.

<u>טענה 1</u> - גרף הוא מישורי אם ורק אם העדנה שלו היא גרף מישורי. כלומר אם בגרף G ניתן לעדן צלעות ולהגיע לגרף G' שהוא מישורי אזי גם G מישורי, וכן ההיפך.

טענות אלו לא למדנו הוכחה.

<u>טענה 2 (משפט קורטובסקי)</u> - גרף הוא מישורי אם ורק אם הוא לא מכיל כתת-גרף את העדנה של K_5 או של $K_{3,3}$. כלומר כל גרף שאם נוריד בו קודקודים וצלעות כלשהן ונעדן אותו נוכל להגיע ל-K_5 או $K_{3,3}$, אזי הוא בוודאי לא מישורי, וכן ההיפך.

ה) צביעת גרפים

יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. צביעת G ב-k צבעים כאשר $1\le k\le |V|$ היא פונקציה $f:V\rightarrow\{1,\dots,k\}$ כך שלכל צלע $\{u,v\}\in E$ מתקיים $f(u)\neq f(v)$. במילים אחרות, כל שני קודקודים המחוברים בצלע הם בצבע שונה. גרף שיש לו צביעה ב-k צבעים נקרא "גרף k צביע".

* במבחן יכולים לשאול האם ניתן לצבוע את G ב-k צבעים? או מהו ה-k המינימלי לצביעת הגרף (מספר כרומטי)?

<u>משפט:</u> כל גרף מישורי הוא 6 צביע.

הוכחה: באינדוקציה על n.

בסיס - כאשר $n\le 6$ הגרף צביע כי נוכל לצבוע כל קודקוד בצבע אחר.

צעד - נניח כי הטענה נכונה עבור n.

שלב - כפי שלמדנו (סעיף ג' משפט 5) לכל גרף מישורי יש קודקוד x עם דרגה לכל היותר 5. נסתכל על הגרף $G\setminus\{x\}$. עדיין נקבל גרף מישורי כי הורדת קודקוד אינה פוגעת במישוריות. מכיוון שלגרף זה יש n קודקודים, לפי הנחת האינדוקציה הוא 6 צביע, לכן נצבע אותו ב-6 צבעים. כעת נחזיר את x ונצבע אותו בצבע שונה משכניו, יש כזה כי יש לו מקסימום 5 שכנים ויש 6 צבעים. נקבל ש-G 6 צביע. מ.ש.ל.

<u>משפט:</u> גרף הוא 2 צביע אם ורק אם הוא דו-צדדי.

הוכחה: נצבע קבוצה אחת בצבע אחד וקבוצה שניה בצבע אחר, נקבל גרף דו-צדדי 2 צביע.