30/3 בס״ד

⑪

נושא 2 - קשירות

א) מנתקים (Disconnectors) ובלוקים

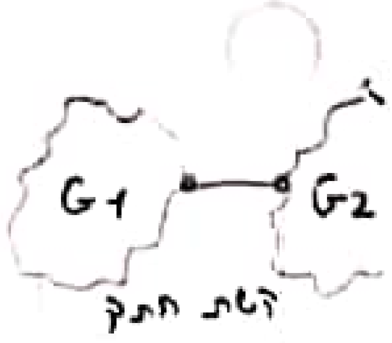
יהי גרף $G=(V,E)$ גרף. נסמן ב- $c(G)$ את מספר רכיבי הקשירות של G.

מנתק של G: יהי $X\subseteq V(G)\cup E(G)$ קבוצה של צמתים וקשתות. אם בגרף $G-X$ מספר רכיבי הקשירות גדול ממספר רכיבי הקשירות ב-G, $c(G-X)>c(G)$, אזי X נקרא המנתק (disconnector) של X, מפני שהורדתו מהגרף מנתקת רכיב קשירות למספר רכיבים.

צמתים מנתקים: אם X מכיל צמתים בלבד $X\subseteq V(G)$, הקבוצה נקראת "צמתים מנתקים".

קשתות מנתקות: אם X מכיל קשתות בלבד $X\subseteq E(G)$, הקבוצה נקראת "קשתות מנתקות".

צומת חתך



קשת חתך

צומת חתך: אם X מכיל צומת אחת בלבד היא תיקרא "צומת חתך", מפני שחותכת רכיב הקשירות ל-2.

גשר: אם X מכיל קשת אחת בלבד היא תיקרא "גשר", מפני שהיא המעבר היחיד בין רכיבי קשירות. נשים לב ששני הצמתים בכל גשר הם צמתי חתך.

בלוק: תת-גרף מקסימלי ב-G שלא מכיל צמתי חתך נקרא "בלוק של G". נשים לב שבעץ כל צומת מלבד העלים הם צמתי חתך, ולכן כל קשת היא בלוק.

משפט: $e\in E(G)$ הוא גשר אם ורק אם e לא שייך לאף מעגל ב-G.

הוכחה: כיוון 1 - נניח $e=(u,v)$ הוא גשר, ונניח בשלילה שהוא שייך למעגל c. אזי אם נוריד את e מ-G u ו-v צריכים להיות ברכיבי קשירות שונים, אך כיוון שהם חלק ממעגל בוודאי יש מסלול ביניהם. סתירה!

כיוון 2 - נניח ש-$e=(u,v)$ אינו שייך לאף מעגל, ונניח בשלילה ש-e אינו גשר. אזי אם נוריד את e מ-G רכיב הקשירות לא ינתק וצריך להיות מסלול מ-u ל-v. אך אם יש מסלול כזה יחד עם e נקבל מעגל. סתירה!

ב) משפט ויטני (Whitney)

משפט: יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר עם יותר מ-3 צמתים. ב-G אין צמתי חתך אם ורק אם כל 2 צמתים ב-G משתתפים במעגל משותף.

הוכחה: כיוון 1 - נניח שכל שתי צמתים משתתפים במעגל משותף. כתוצאה מכך עבור כל צומת שנוריד מ-G עדיין יהיה מסלול בין כל 2 צמתים שנותרו. לכן אין צמתי חתך ב-G.

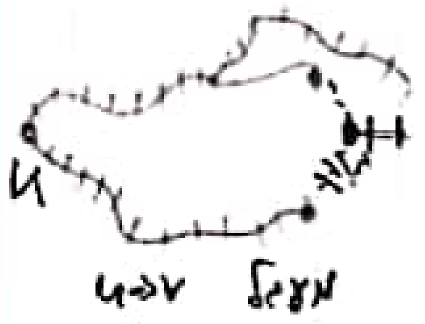
כיוון 2 - נניח שאין צמתי חתך. יהי $u,v\in V(G)$. נוכיח באינדוקציה על המרחק הקצר ביניהם $d_G(u,v)$, שהם באותו מעגל:

בסיס - עבור $d_G(u,v)=1$, אזי $(u,v)\in E(G)$. כיוון שב-G אין צמתי חתך (u,v) אינו גשר. לפי משפט קודם יוצא שהקשת (u,v) על אותו מעגל, ולכן גם u ו-v על אותו מעגל.

הנחה - נניח שהטענה נכונה עבור כל שני צמתים שהמרחק הקצר ביותר ביניהם קטן מ-k. $d_G(u,v)<k$.

30/3

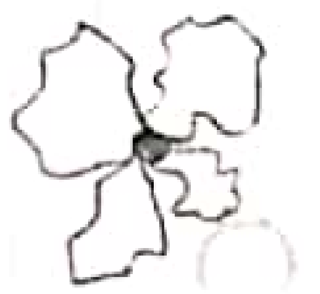
צעד-עבור $d_G(u,v)=k$. יהי P המסלול הקצר ביותר מ-u ל-v, ויהי v' הצומת שמופיעה אל v במסלול P. כיוון ש-$d_G(u,v')<k$ לפי הנחת האינדוקציה u ו-v' משתתפים באותו מעגל C. אם v נמצא ב-C, $v\in V(C)$, סיימנו. לכן נניח שאינו על C. כיוון שב-G אין צמתי חתך, אם נוריד את v' הגרף ישאר קשיר. לכן בגרף G-v' יש מסלול מ-v אל $V(C)\setminus\{v'\}$. אם נחבר את v' נגלה שבהכרח יש מעגל ב-G שמשתתפים בו u ו-v.* מ.ש.ל.



ג) מסקנות ממשפט וויטני

(1) כל שני בלוקים נפגשים לכל היותר בצומת חתך אחת.

(2) היחס על הקשתות "להיות באותו הבלוק" הוא יחס שקילות על E(G). כלומר, כל קשת שייכת לבלוק אחד בדיוק, לא פחות ולא יותר. משפט זה לא נכון לצמתים, כל צומת יכולה להשתתף בכמה בלוקים.*



(3) כל מעגל בגרף נמצא בבלוק אחד בלבד.

(כל בלוק הוא צומת)

(4) עבור גרף G, נסמן B(G) את כל הבלוקים ב-G ו-C(G) את כל צמתי החתך ב-G.

נבנה גרף עזר BC(G), שבו כל הצמתים הם כל הצמתים ב-B(G) ו-C(G), וכל הקשתות הם מ-B(G) אל C(G) או B(G).

$$BC(G)=\left\{\begin{array}{l}Vertex: B(G)\cup C(G)\\ Edges: \{(B,c): B\in B(G), c\in C(G), c\in B\}\end{array}\right\}$$

אם G קשיר אזי BC(G) הוא עץ. עץ זה נקרא "עץ בלוקים" או "עץ קשירות".

3) K-קשירות

יהי $0\leq k\in Z$, מספר טבעי גדול או שווה ל-0. ויהי גרף G עם יותר מ-k צמתים, $k<v(G)$.

אם לכל קבוצת צמתים X עם לכל היותר k-1 צמתים, לאחר מחיקתם מ-G הגרף שנותר עדיין יהיה קשיר, אזי G נקרא גרף "k-קשיר".

$$\forall X\subseteq V(G)\ s.t\ |X|\leq k-1,\ G-S \text{ connected} \Rightarrow G \text{ is } K\text{-connected}..$$

במילים אחרות, מחיקה של פחות מ-k צמתים, לא משנה אילו, לא תנתק את הגרף.

נשים לב שאם גרף k קשיר אזי הוא גם k-1 קשיר וגם k-2 קשיר, וכן הלאה.

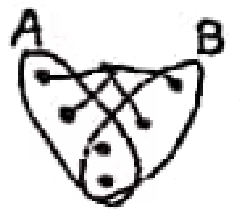
ה-k המקסימלי עבורו G הוא k קשיר, יסומן $\kappa(G)$ (האות Kappa). ז"א $\kappa(G)$ צמתים ניתן לנתק את G.*

זה מייצג כמה הגרף
ין, כלומר כמה קשה
לנתק אותו. זהו הרעיון
שוב לדוגמא בגרף
מייצג רשת מחשבים
צריכה להיות קשירה
לא להתנתק בקלות.
זה זהו מספר הצמתים
מינימלי הדרוש לנתק
את הגרף.

- בגרף לא קשיר $\kappa(G)=0$. בכל גרף קשיר $\kappa(G)\geq 1$.
- במסלול P: $\kappa(P)=1$ במעגל C: $\kappa(C)=2$.
- בגרף G שבו יש צומת חתך $\kappa(G)=1$.
- בכל בלוק B לפי משפט וויטני מתקיים: $\kappa(B)=2$.
- בכל גרף מלא (קליקה) מסדר n - K_n מתקיים: $\kappa(K_n)=n-1$

בס"ד

30/3



$\kappa(G)=3$

קשירות לוקאלית: עבור שתי קבוצות $A,B\subseteq V(G)$ יכולים להיות גם צמתים משותפים, נסמן ב- $\kappa_G(A,B)$ את מספר הצמתים המינימלי הדרוש כדי לנתק בין הקבוצות.

נשים לב שאם $K\subseteq V(G)$ היא קבוצת צמתים מנתקת את A מ-B, אזי כל מסלול מצומת ב-a לצומת ב-b וההיפך, חייבת לעבור בצומת מ-K.

מסלולים זרים לוקאליים: עבור שתי קבוצות $A,B\subseteq V(G)$, נסמן $p_G(A,B)$ את מספר המסלולים הזרים המקסימלי בין A ל-B. מסלולים זרים הכוונה למסלולים שאין להם צומת משותפת מלבד התחלה וסוף.

ה) משפט מנג'ר (Menger)

משפט: יהי G גרף ויהי $A,B\subseteq V(G)$. אזי המספר המינימלי של צמתים מנתקים בין A ל-B, שווה למספר המקסימלי של מסלולים זרים בין הקבוצות. $\kappa_G(A,B)=p_G(A,B)$.

הוכחה: כיוון 1 - $\kappa_G(A,B)\geq p_G(A,B)$, שהרי מכל מסלול חייב להוריד לפחות צומת אחת כדי לנתק את הקבוצות

כיוון 2 - נוכיח $\kappa_G(A,B)\leq p_G(A,B)$ באינדוקציה על $e(G)$ מספר הצמתים ב-G.

בסיס - עבור $e(G)=0$, מספר המסלולים הזרים שווה למספר הצמתים המשותפים ל-A ול-B, שזהו גם מספר הצמתים המנתקים בין הקבוצות: $p_G(A,B)=|A\cap B|=\kappa_G(A,B)$.

הנחה - נניח שהטענה נכונה עבור $e(G)<K$.

צעד - נוכיח עבור $e(G)=k$. יהי $e\in E(G)$, ויהי G/e הגרף G לאחר כיווץ* קשת e.

נסמן ב-A_e ו-B_e את A ו-B לאחר כיווץ e. לפי הנחת האינדוקציה $\kappa_{G/e}(A_e,B_e)\leq p_{G/e}(A_e,B_e)$.

(1) אם $p_{G/e}(A_e,B_e)=\kappa_G(A,B)$, כל שנותר להוכיח שאותם מסלולים זרים ב-G/e קיימים ב-G.

נשים לב שאם כל המסלולים הזרים ב-G/e לא עוברים ב-V_e סיימנו כי הם גם ב-G.

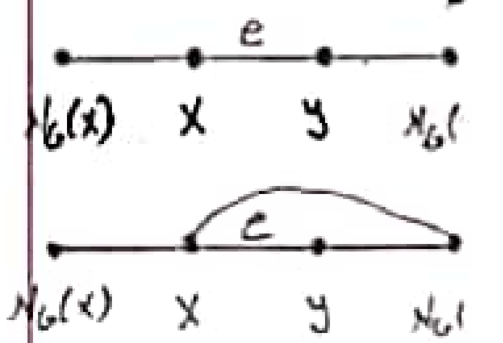
לכן נניח שעוברים ב-V_e. יש שתי אפשרויות: $N_G(x)\to V_e\to N_G(y)$ אזי גם ב-G יש מסלול זר מקביל כמו שניתן לראות בציור*. אפשרות שניה: $N_G(x)\to V_e\to N_G(x)$ (או ל-y בהתאמה). אזי יש ב-G מסלול מקביל שמגיע ל-X מדלג על y וממשיך ל-$N_G(x)$ השני.

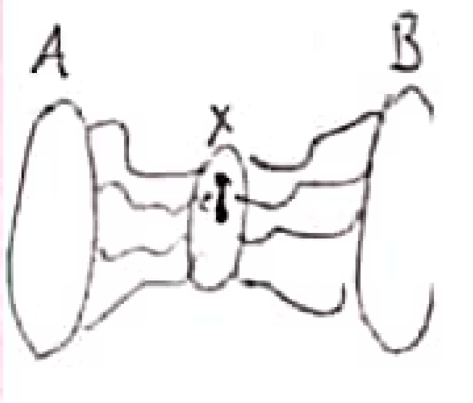
(2) אם $p_{G/e}(A_e,B_e)\neq\kappa_G(A,B)$, אזי לפי הנחת האינדוקציה $\kappa(A_e,B_e)<\kappa(A,B)$. הצמתים המנתקים את (A_e,B_e) חייבים לעבור ב-V_e כי אחרת נוכל לקחת אותם צמתים מנתקים ב-G.

נסמן את קבוצת הצמתים המנתקים את (A,B) ב-G - X. כיוון ש-X היא הקבוצה המינימלית המנתקת בין הקבוצות מתקיים: $\kappa_{G-e}(A,X)\geq\kappa_G(A,B)$, $\kappa_{G-e}(B,X)\geq\kappa_G(A,B)$. מפני שאחרת יכולנו לקחת קבוצת מנתקים לצאת במקום X. לפי הנחת האינדוקציה יש לפחות $\kappa_G(A,B)$ מסלולים זרים מ-A ל-X ומ-B ל-X. לכן נוכל לחבר ביניהם ולקבל שב-G יש יותר מסלולים זרים מ-A ל-B מ-$\kappa_G(A,B)$.

מ.ש.ל

*כיווץ קשת $e=(x,y)$
מאחד את x ו-y
לצומת אחת V_e. וכל
קשת שכן של y,x
יחובר ל-V_e. נסיר
את כפולות ב-G/e.





1) השלכות משפט מנגר

עבור זוג צמתים $u,v\in V(G)$ נסמן ב-$P_G(u,v)$ את מספר המסלולים הזרים ב-G בין u ל-v.

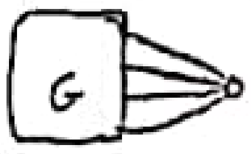
(1) לכל גרף G רמת הקשירות שלו היא לפחות k ($\kappa_G(G)\ge k$) אם ורק אם לכל $u,v\in V(G)$ מתקיים: $P_G(u,v)\ge k$

הוכחה: כיוון 1 - אם $\kappa_G(G)<k$ אזי נוכל לנתק את הגרף לשתי קבוצות: A ו-B עם פחות מ-k צמתים. ניקח $u\in A$ ו-$v\in B$. מספר המסלולים הזרים בין u ל-v קטן מ-k $P_G(u,v)<k$, אחרת לא היו מתנתקים.

כיוון 2 - אם $\kappa_G(G)\ge k$. ניקח את קבוצת כל השכנים של u-$N_G(u)$, וקבוצת כל השכנים של v-$N_G(v)$. שתי קבוצות אלו מכילות לפחות k צמתים והקשירות הלוקאלית ביניהם לפחות $\kappa_G(N_G(u),N_G(v))\ge k$, כי אחרת היה ניתן לנתק את G בפחות מ-k צמתים. לפי משפט מנגר גם מתקיים: $P_G(N_G(u),N_G(v))\ge k$, יש לפחות k מסלולים זרים ביניהם. לכל המסלולים ביניהם נוסיף u בהתחלה ו-v בסוף ונקבל שיש לפחות k מסלולים זרים בין u ל-v, $P_G(u,v)\ge k$. אם באחד המסלולים כבר מופיעים u ו-v, נמחק ממסלולים אלו כל הצמתים עד ל-u וכל הצמתים מ-v.

שאם זה ימין
מתקיים אז גם
שמאל לא מתקיים.
ימין מתקיים גם
אל מתקיים.

(2) למת ההרחבה: אם G k-קשיר ונוסיף לו צומת ו-k שכנים אז הוא ישאר k-קשיר.



הוכחה: אם נוריד $k-1$ צמתים G ישאר קשיר וגם הקודקוד החדש. לכן הגרף יהיה k-קשיר.

(3) גרף G הוא k-קשיר אם ורק אם לכל שתי קבוצות בגודל k, $X,Y\subseteq V(G)$ s.t $|X|=|Y|=k$, מספר המסלולים הזרים ביניהם שווה ל-k. $P_G(X,Y)=k$.

הוכחה: כיוון 1- אם G לא k קשיר, יש קבוצת צמתים T בגודל $k-1$ שמנתקת את הגרף ל-A ו-B. ניקח $a\in A$ ו-$b\in B$. נגדיר שתי קבוצות $T_a=T\cup\{a\}$ ו-$T_b=T\cup\{b\}$. נשים לב שניתן לנתק את T_a מ-T_b עם $k-1$ צמתים (ע"י הורדת T), לכן $\kappa_G(T_a,T_b)<k$. ולפי משפט מנגר גם $P_G(T_a,T_b)<k$.

כיוון 2 - אם קיימים X,Y עם k צמתים, אך עם פחות מ-k מסלולים זרים ביניהם, אזי לפי משפט מנגר מתקיים גם $\kappa_G(X,Y)<k$. לכן יש מנתק עם פחות מ-k צמתים והגרף לא k-קשיר.

שאם זה ימין לא
גם זה שמאל לא
שמאל לא מתקיים גם
לה.

(4) עבור צומת $u\in V(G)$ וקבוצת קודקודים שאינה מכילה את u, $U\subseteq V(G)\setminus\{u\}$. נגדיר "מניפה" (u,U) להיות אוסף המסלולים הזרים מ-u אל U. אם הגרף k-קשיר ו-$|U|\ge k$ קיימת מניפה (u,U) בגודל k.

הוכחה: נוסיף ל-G צומת חדשה x ונגדיר את U להיות כל השכנים של x. לפי משפט (2) G עדיין k-קשיר. כעת לפי משפט (1) קיימים k מסלולים זרים מ-u ל-x. ניקח כל מסלולים אלו ונסיר מהם את x, קיבלנו מניפה (u,U) בגודל k.

2/4 ⑮

בס"ד

(5) אם G גרף k קשיר עבור $2\leq k$, כלומר G לפחות 2-קשיר, ויהי $S\subseteq V(G)$ קבוצה עם לפחות 2 צמתים אך לא יותר מ-k, $k\geq|S|\geq 2$, אזי יש ב-G מעגל שמכיל כל צומת ב-S.

הוכחה: באינדוקציה על k:

בסיס- עבור k=2 זהו משפט וויטני ולכן מתקיים.

הנחה- נניח שהטענה נכונה עבור k-1.

צעד- נוכיח עבור k. יהי $x\in S$: הגרף $G\setminus\{x\}$ הוא k-1-קשיר, לכן לפי הנחת האינדוקציה הקבוצה $S\setminus\{x\}$ שהיא בגודל k-1 חלק ממעגל כלשהו, נסמן אותו ב-C. נחזור לגרף G. לפי משפט (4) יש מניפה (x,C) כלומר k מסלולים זרים מ-x ל-C. $S\setminus\{x\}$ מחלק את C ל- k-1 חלקים. לכן לפי שובך היונים יש לפחות 2 מסלולים מ-x ל-C שנחתכים לראשונה עם C באותה קשת, לכן נוכל לחבר את x למעגל C באמצעות שני מסלולים אלו. ונקבל מעגל שמכיל את כל S. מ.ש.ל.

להרחיב יותר מזה.

ל) <u>אלגוריתם למציאת צמתי חתך</u>

בהינתן גרף G לא מכוון נרצה למצוא את כל צמתי החתך שלו. המוטיבציה למציאת צמתי החתך היא שהם מהווים צומת קריטית לקשירות של הגרף. לכן בגרפים המייצגים למשל רשת תקשורת, יש להם חשיבות רבה.

האלגוריתם שמוצא צמתי חתך נקרא אלגוריתם Tarjan-Hopcroft (מכונה גם low-link), שלמעשה מפעיל על הגרף DFS רקורסיבי בתוספת של חישובים עבור כל צומת. בהרצה של DFS על גרף מכוון יכולים להיות 2 סוגי קשתות: קשת קדימה או קשת אחורה.

צומת חתך תזוהה לפי הקריטריונים הבאים:

(א) עבור צומת שהיא שורש העץ DFS, אם יש לה יותר משני ילדים (קשתות קדימה) אזי היא צומת חתך זאת מפני שלא יכולה להיות קשת שעוברת בין שני תתי העצים של השורש בעץ DFS.*

*גרף לא מכוון אין cross edges.

(ב) עלה בעץ DFS לעולם לא יהיה צומת חתך.

(ג) לכל צומת אחרת בגרף שאנו סורקים $v\in V(G)$, עבור <u>כל תת-עץ שיוצא מ-v</u>* (ב-DFS) נסמן ב-low(v) את זמן הגילוי של האב הכי קדמון של v שניתן להגיע אליו מהתת עץ של v.

*כל בן של v הוא תת-עץ נפרד.

אם $low(v)\geq discovery(v)$, כלומר לא ניתן להגיע מהתת עץ של v אל אב קדמון של v, אזי v היא צומת חתך. מפני שבהסרת v תת עץ זה יתנתק משאר העץ, שהרי בגרף לא מכוון אין cross edges, ולכן לא ניתן להגיע מתת-עץ זה לתת-עץ אחר.