14/1/20

נושא 11 - כפל פולינומים (FFT)

א) הגדרת הבעיה

בהינתן שני פולינומים מאותה דרגה $n-1$, כך שבכל פולינום יש n איברים, נרצה למצוא את פולינום המכפלה ביניהם שהוא מדרגה $2n-2$ ומכיל $2n-1$ איברים. לשם כך נצטרך להכפיל כל איבר בפולינום הראשון בכל איבר בפולינום השני, ולסכום איברים מאותה מעלה.

$$A(x)= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$$

$$B(x)= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n-1}x^{n-1}$$

$$C(x)= A(x)\cdot B(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{2n-2}x^{2n-2}$$

כל מקדם c_j הוא סכום כפל המקדמים שכפל המעלות שלהם שווה ל-j: $c_j=\sum_{k=0}^{j} a_k \cdot b_{j-k}$

נשים לב כי סיבוכיות כפל בשיטה זו היא $O(n^2)$. נרצה לייעל זאת באמצעות שיטת "התמרת פורייה מהירה" (FFT). אך לפני נגדיר מושגים ואת עקרונות השיטה.

ב) כלל הורנר

בהינתן הפולינום $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{n-1}x^{n-1}$, כדי לחשב את ערך הפולינום בנקודה x_0 ($P(x_0)$), אזי בגישה הנאיבית נציב בכל איבר בפולינום את x_0 ונסכום את כל התוצאות. נשים לב כי בכל איבר a_ix^i נצטרך לבצע i הכפלות ובסך הכל $\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$ הכפלות בסיבוכיות $O(n^2)$.

כלל הורנר עוזר לנו לייעל זאת באמצעות הנוסחה:

$$P(x_0)= \left(\left(\left((a_{n-1}\cdot x_0 + a_{n-2})x_0 + a_{n-3}\right)x_0 + \dots\right)x_0 + a_0\right)$$

לדוגמא עבור $P(x)=2x^2+3x+4$, נחשב: $P(7)=((2\cdot 7+3)7+4)=123$

בשיטה זו מתחילים מכל האיברים ואז, נכנסים פנימה ושוב מוציאים גורם משותף, וכן הלאה. מספר ההכפלות בשיטה זו לפי המעלה הגבוהה, ולכן הסיבוכיות היא $O(n)$.

ג) אינטרפולציה פולינומית

זו שיטה שאומרת אם נתונים n נקודות (x,y) במרחב, כך שכל ה-x-ים בנקודות שונים זה מזה, אזי ישנו בדיוק פולינום אחד מדרגה $n-1$ שעובר בין כולם.

14/1/20 בס"ד

נוכל להשתמש באינטרפולציה פולינומית כדי למצוא מכפלה בין שני פולינומים בדרך הבאה:

- נמצא $2n-1$ נקודות בפולינום A: $\{(x_0, A(x_0)), (x_1, A(x_1)), \dots, (x_{2n-2}, A(x_{2n-2}))\}$
- נמצא $2n-1$ נק' באותם ערכי X ב- B: $\{(x_0, B(x_0)), (x_1, B(x_1)), \dots, (x_{2n-2}, B(x_{2n-2}))\}$
- נמצא $2n-1$ נק' בפולינום המכפלה C בדרך הבאה:

$$\{(x_0, A(x_0)\cdot B(x_0)), (x_1, A(x_1)\cdot B(x_2)), \dots, (x_{2n-2}, A(x_{2n-2})\cdot B(x_{2n-2}))\}$$

- נמיר את $2n-1$ הנקודות לפולינום כמו שנלמד בסעיף הבא, וסיימנו.

בשיטה זו אנו נצטרך למצוא $2n-1$ נקודות בסיבוכיות של $O(n)$, לפי כלל הורנר, ולכן הסיבוכיות הכללית עדיין תישאר $O(n^2)$. אמנם בהמשך נלמד כיצד לייעל זאת ע"י בחירה מיטבית של $2n-1$ הנקודות.

3) הערכה פולינומית

זוהי השיטה שבהינתן n נקודות (x_i, y_i) כאשר $0 \le i \le n-1$ ו- $x_i \ne x_j$ לכל $i \ne j$, נמצא את הפולינום מדרגה $n-1$ שעובר בין כל n הנקודות. אנו מחפשים את וקטור המקדמים $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ של פולינום C.
נגדיר מטריצה X בגודל $n \times n$, שבה כל שורה i מייצגת ערך x_i כלשהו, וכל עמודה j מבטאת חזקה j. אם נכפיל מטריצה זו בוקטור המקדמים שאנו מחפשים $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ נקבל את וקטור ערכי ה-y $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$. מכיוון שאנו כבר יודעים את מטריצה X ווקטור הפתרונות של y, נוכל להכפיל משוואה זו משמאל במטריצה ההופכית של X, שהיא X^{-1}, ובכך לקבל את וקטור המקדמים.

$$X \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = X^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}$$

שתמש בהערכה
פולינומית כדי למצוא
$2n-1$ נקודות בשתי
פולינומים A,B.
בעזרת המשוואה ההפוכה
שתמש בהערכה פולינומית
כדי למצוא את וקטור
המקדמים של פולינום C.

ה) שורשי יחידה פרימיטיביים

מספר כלשהו ω יקרא שורש n פרימיטיבי של היחידה, לכל $1 < n$, אם מתקיים: $\omega^n = 1$.
לדוגמא: במרוכבים $-i$ הוא שורש 4 פרימיטיבי של היחידה מפני ש- $(-i)^4 = 1$. לעומת זאת -1 הוא גם שורש 2 פרימיטיבי של היחידה וגם שורש 4 פרימיטיב של היחידה.
נסמן שורש n פרימיטיבי של היחידה ω_n.
ניתן למצוא את שורשי היחידה עבור n כלשהו באמצעות משפט דה-מואבר.

21/1/20

תכונות שורשי היחידה

אם ω_n הוא שורש n פרימיטיבי של היחידה, אזי מתקיימות התכונות הבאות:

1) הופכיות - $\omega_n^{-1}=\omega_n^{n-1}$.

2) ביטול - עבור $n>k>-n$ שאינו שלילי מתקיים: $\sum_{j=0}^{n-1}(\omega^j)^k=0$.

3) צמצום - אם ω_n הוא שורש n פרימיטיבי של היחידה, אזי ω_n^2 הוא שורש n/2 פרימיטיבי של היחידה.

4) חצייה - אם n זוגי אזי $\omega^{n/2}=-1$.

תכונה נוספת היא שחזקות שונות של שורש ה-n פרימיטיבי של היחידה מאוד מזכירות התנהגות של מספרים מודולו n. כדוגמא לכך בשתי השורות משמאל בו כל ערך בשורה השניה שווה לערך בשורה מעליו.

$$\text{שורשי היחידה}\left\{\begin{array}{l}\omega_n^0, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}\\ \omega_n^n, \omega_n^{n+1}, \omega_n^{n+2}, \ldots, \omega_n^{2n-1}\end{array}\right.$$

נשתמש בתכונה זו כדי לחשב מהר שורשי יחידה מחזקות שונות.

$$\text{מודולו } n.\left\{\begin{array}{l}0, 1, 2, \ldots, n-1\\ n, n+1, n+2, \ldots, 2n-1\end{array}\right.$$

1) התמרת פורייה - DFT

כל הערכה פולינומית שבה הערכים במטריצה X הם חזקות של שורש ה-n פרימיטיבי של היחידה ω_n.

בהינתן וקטור מקדמים $\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_{n-1}\end{pmatrix}$ של פולינום מדרגה n-1, נכפיל מטריצה X בוקטור זה, כאשר מטריצה X היא מטריצה מסדר גודל nxn כאשר כל תא $X[i,j]$ $0\le i\le n-1, 0\le j\le n-1$, הוא שורש ה-n פרימיטיבי של היחידה בחזקת $i\cdot j$. $X[i,j]=\omega_n^{i\cdot j}$.

$$X\cdot\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\\vdots\\y_{n-1}\end{pmatrix} \Rightarrow y_j=\sum_{i=0}^{n-1}a_i\cdot\omega^{ij}=P(\omega^j)\Rightarrow$$

(ω_j, y_j) היא נקודה על הפולינום שהמקדמים שלו הם $\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_{n-1}\end{pmatrix}$.

$$X=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \omega_n^1 & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)(n-1)}\end{bmatrix}$$

בעזרת DFT נוכל למצוא את 2n-2 הנקודות שאנו צריכים למצוא עבור כל אחד מהפולינומים שאנו מכפילים A,B. כלומר נכפיל את מטריצת התמרת פורייה בגודל 2n-2 בוקטור המקדמים של A ו-B. נדרש "לרפד" את A ו-B באפסים לשם כך.

21/1/20

ט) התמרת פורייה הפוכה - DFT הפוך

כעת הערכה פולינומית הפוכה, שבה נתון לנו את וקטור הפתרונות $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ ואת המטריצה X^{-1}, בגודל $n\times n$, שהיא המטריצה ההפיכה של X, ובעזרתם נוכל למצוא את וקטור המקדמים $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ של פולינום מדרגה $n-1$.

המטריצה X^{-1} היא המטריצה ההפיכה של מטריצת התמרת פורייה. במטריצה זו כל תא $X^{-1}[i,j]$ $0\le i\le n-1$ $0\le j\le n-1$, הוא שורש ה-n פרימיטיבי של היחידה בחזקת $-i\cdot j$, וצריך לחלק ערך זה ב-n. $X^{-1}[i,j]=\frac{1}{n}\cdot \omega^{-i\cdot j}$.

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = X^{-1}\cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

* הוכחה לכך שזוהי אכן מטריצה הפיכה ל-X נמצא בשקופית 13 במצגת.

$$X^{-1}=\frac{1}{n}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n^{-1} & \omega_n^{-2} & \cdots & \omega_n^{-(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{-(n-1)} & \omega_n^{-2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{-(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}$$

בעזרת DFT הפוך נוכל למצוא את וקטור המקדמים של פולינום המכפלה C. ניקח את 2n-2 הנקודות שקיבלנו מ-A,B, נציב את ערכי ה-y שלהם בנוסחת ה-DFT ההפוך לעיל ונכפיל במטריצה ההפיכה של מטריצת התמרת פורייה. התוצאה תהיה וקטור המקדמים של פולינום C.

י) התמרת פורייה מהירה - FFT

אלגוריתם מהיר לחישוב DFT הוא FFT המבוסס על עקרון הפרד ומשול. בפסע"ד זה נמצא FFT לחישוב DFT רגיל $X\cdot a=y$, ובפסע"ד הבא נמצא FFT הפוך לחישוב DFT הפוך $a=X^{-1}\cdot y$.

נפצל ברקורסיה את הפולינום ל-2 חלקים: חזקות זוגיות וחזקות אי זוגיות, כך שבכל פעם נקבל שני פולינומים חדשים. נפעיל ברקורסיה את FFT שוב על כל אחד מהפולינומים עד שנקבל פולינום עם איבר אחד, ואז נחזיר את המקדם מטתר המצב את הערך פ בפולינום זה. כדי לחזור לפולינום בשלב הקודם נצטרך להציב בכל אחד מהחצאים x^2 במקום X ואת החצי האי זוגי להכפיל ב-X.

21/1/20

(51)

בנוסף:

נפצל את הפולינום לשני פולינומים:

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{n-1}x^{n-1}$$

מקדמים זוגיים:

$$p^{even}(x)=a_0+a_2x+\dots+a_{n-2}\cdot x^{n/2-1}$$

מקדמים אי-זוגיים:

$$p^{odd}(x)=a_1+a_3x+\dots+a_{n-1}x^{n/2-1}$$

חזרה לפולינום המקורי:

$$p(x)=p^{even}(x^2)+x\cdot p^{odd}(x^2)$$

בשיטה זו כדי לחשב פולינום בנקודה מספיק $\log(n)$ פעולות כפל, כי אנו מפרקים את הפולינום כל פעם ב-2, ומבצעים פעולת כפל אחת כדי לחזור לשלב הקודם.

ט) FFT הפוך

באותו אופן כמו FFT רגיל רק שנפעיל בוקטור התוצאות y כדי למצוא את וקטור המקדמים a. אלא שלבסוף לאחר שנקבל את וקטור המקדמים נצטרך להכפיל אותו ב-$\frac{1}{n}$.

י) סיכום שלבי כפל פולינומים ב-FFT

בהינתן שני פולינומים A,B מדרגה כלשהי נרצה לחשב את פולינום המכפלה C.

1) נחשב מהי הדרגה ש-C אמור לקבל. נמצא את החזקה של 2 שהכי קרובה למספר זה מלפני מעלה, ונרפד את A ו-B באפסים עד שיגיעו לחזקה זו. נניח n.

2) נבנה את מטריצת התמרת פוריה בגודל n, כאשר ω_n הוא שורש n פרימיטיבי של היחידה.* $\Leftarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n^1 & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}$$

כגון: $n=4$ $\omega_n=i$

כגון: $n=8$ $\omega_n=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$

3) נחשב:*

$$P_{0,1,2,\dots,n-1}(\omega_n^0)=P_{0,2,\dots,n/2-1}((\omega_n^0)^2)+\omega_n^0\cdot P_{1,3,\dots,n/2-1}((\omega_n^0)^2)$$

$$P_{0,1,2,\dots,n-1}(\omega_n^1)=P_{0,2,\dots,n/2-1}((\omega_n^1)^2)+\omega_n^1\cdot P_{1,3,\dots,n/2-1}((\omega_n^1)^2)$$

$$\vdots$$

$$P_{0,1,2,\dots,n-1}(\omega_n^{n-1})=P_{0,2,\dots,n/2-1}((\omega_n^{n-1})^2)+\omega_n^{n-1}\cdot P_{1,3,\dots,n/2-1}((\omega_n^{n-1})^2)$$

זה חישוב לפי FFT עבור n נקודות לכל פולינום A,B.

4) לאחר שמצאנו n ערכי y עבור כל פולינום A,B, נמצא n ערכי y לפולינום C על ידי מכפלה וקטורית של שני וקטורי התוצאות:*

$$y_C=\{y_{0A}\cdot y_{0B},\ y_{1A}\cdot y_{1B},\ \dots,\ y_{nA}\cdot y_{nB}\}$$

זה שלב ג' בפרק זה - אינטרפולציה פולינום.

5) נבצע FFT הפוך על וקטור התוצאות y_C כדי לקבל את וקטור המקדמים של C. זהו אותו חישוב כמו בשלב 3) רק על וקטור y_C. לבסוף נכפיל את וקטור המקדמים שקיבלנו ב-$\frac{1}{n}$. וקטור זה הוא וקטור המקדמים הסופי של C.*

דוגמא לכפל פולינומים עבור $n=4$ במצגת שקופיות 19-21. עבור $n=8$ ראה פתרון שאלה 4.