פרק ג' - מבנים מתמטיים ואיזומורפיזם

א) מבנים מתמטיים

מבנה מתמטי היא סדרה המורכבת משני חלקים: נסמן מבנה מתמטי באות M.

(1) האיבר הראשון היא קבוצה כלשהי של מספרים. שלהם נקרא "עולם הדיון" או בקיצור "העולם".

(2) האיברים הבאים המהווים את החלק השני יכולים להיות אחד מהסוגים הבאים:

* איבר קבוע אישי מהעולם של M.
* יחס n מקומי על M - תת קבוצה של המכפלה הקרטזית של M עם עצמו n פעמים. האיברים ביחס מקומי הם n-יות סדורות.
* פונקציה n מקומית על M - פונקציה המקבלת n איברים מ-M ומחזירה איבר מ-M.

נדגיש שהמבנה המתמטי חייב להיות סגור ביחס לפונקציה זו, כלומר שהערך שהפונקציה מחזירה חייב להיות גם הוא שייך ל-M.

לעיתים נתחום מבנה מתמטי M באמצעות סוגריים עגולים $()$ ולעיתים בסוגריים משולשים $\langle\ \rangle$.

דוגמאות: (1) $M=\langle R,F\rangle$ - העולם הוא שדה הממשיים, ו-F היא פונקציה דו מקומית המוגדרת $F(x,y)=\frac{x}{y}$

(2) $M=\langle Q\setminus\{0\},*\rangle$ - העולם הוא שדה הרציונלים ללא איבר 0. והמבנה מוגדר רק פעולת הכפל.

(3) $M=\langle\{1,2,3\},S,T,1\rangle$ - העולם הוא המספרים 1,2,3. S הוא היחס התלת מקומי $\{\langle 1,2,a\rangle : a<3\}$ ו-T הוא היחס ה-4 מקומי $\{\langle 1,2,2,1\rangle,\langle 1,2,3,1\rangle\}$.

ב) אוצר מילים

אוצר מילים היא סדרה של סימנים מאחד משלושת הסימנים הבאים:

(1) סימני קבועים אישיים, כאשר כל קבוע יתפרש כאיבר בעולם של המבנה המפרש.

(2) סימני יחס n מקומי.

(3) סימני פונקציות n מקומיות.

נסמן אוצר מילים באות L, ונתחום אותו בסוגריים משולשים $L=\langle\ \rangle$. נאמר שמבנה מתמטי מפרש את אוצר המילים אם במבנה המתמטי מופיעים כל הסימנים באוצר המילים. בדרך כלל הסימנים באוצר המילים המופיעים במבנה המתמטי נכתוב עם שם המבנה עליהם. לדוגמא הפירוש של הסימן F במבנה המתמטי M יכתב כך F^M. כך נדע להבדיל בין הסימן באוצר המילים לפירוש במבנה המתמטי. לכל אוצר מילים יכולים להיות המון מבנים שמפרשים אותו.

29/11 בס"ד

דוגמאות: (1) נתון אוצר המילים $L=\langle f,g,h\rangle$ כאשר f,g,h הם פונקציות דו מקומיות. מצא שני מבנים מתאימים המפרשים את L.

$M_1=\langle R,+,-,\cdot\rangle$ מפרש את L. f^{M_1} היא פונקציית חיבור, g^{M_1} פונקציית חיסור, h^{M_1} פונקציית כפל.

$M_2=\langle Z,+,+,-\rangle$ מפרש את L. f^{M_2} פונקציית חיבור, g^{M_2} פונקציית חיבור, h^{M_2} פונקציית חיסור.

(2) נתון אוצר מילים $L=\langle S,F\rangle$ כאשר S סימן יחס דו מקומי ו-F סימן יחס תלת מקומי. מצא שני מבנים מתאימים המפרשים את L.

$M_1=\langle R,<,+\rangle$, $S^{M_1}=\{\langle x,y\rangle\in R^2 : x<y\}$, $F^{M_1}(x,y,z)=x+y+z$

$M_2=\langle R,S^{M_2},F^{M_2}\rangle$, $S^{M_2}=\{\langle x,y\rangle\in R^2 \ \ y<2x\}$, $F^{M_2}(x,y,z)=\begin{cases} xy & z=1\\ 2 & z\neq 1\end{cases}$

ג) תת מבנה

תת מבנה הוא מבנה מתאים בתוך מבנה מתאים. לשם כך הוא צריך לקיים 4 תנאים:

(1) העולם של התת מבנה N חייב להיות מוכל בתוך המבנה הגדול M, $N\subseteq M$.

(2) כל קבוע אישי באוצר מילים כלשהו מפרש אותו הדבר ב-M וב-N.

(3) לכל סימן יחס n מקומי S באוצר מילים, אם כל n-יה המורכבת מאיברים בעולם של N המתפרשת במבנה N, מופיעה גם במבנה M: $(a_1,a_2,\dots,a_n)\in S^N,S^M$.

(4) לכל סימן של פונקציה n מקומית F באוצר מילים, אם נבחר ערך מהעולם של N שנציב בפונקציה F^N המתפרשת במבנה N, נקבל את אותה תוצאה לו היינו מציבים אלו בפונקציה F^M המתפרשת במבנה M. $F^N(a_1,a_2,\dots,a_n)=F^M(a_1,a_2,\dots,a_n)$

יש לוודא שהעולם של התת מבנה סגור לכל הפונקציות שבמבנה הגדול. כלומר שאם נציב בפונקציה ה-n מקומית שבמבנה הגדול ערכים מהעולם של התת מבנה N, הערך שהפונקציה תחזיר חייב להיות גם הוא מהעולם של N.

דוגמאות: (1) N הוא תת מבנה של M.

$M=\langle\{1,2,3\},F\rangle$, $F(1)=1$, $F(2)=3$, $F(3)=2$.

$N=\langle\{2,3\},F\rangle$, $F(2)=3$, $F(3)=2$.

(2) N הוא תת מבנה של M

$M=\langle\{1,2,3\},\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle\}\rangle$

$N=\langle\{1,2\},\{\langle 1,2\rangle\}\rangle$

(3) N הוא אינו תת מבנה של M, מכיוון ש-N הוא כלל לא מבנה שאינו סגור לחיבור.

$M=\langle N,+\rangle$

$N=\langle\{1,2,3\},+\rangle$

3) איזומורפיזם

איזומורפיזם זו פונקציה, שנסמן אותה ב-h, המתאימה בין שני מבנים מתמטיים M_1 ו-M_2 באופן ששומר על המאפיינים המגדירים את המבנה. מבנים שיש ביניהם איזומורפיזם נקראים איזומורפים זה לזה, ונסמן $M_1 \cong M_2$.

הגדרה: אם M_1 ו-M_2 הם מבנים מתמטיים המפרשים את אותו אוצר מילים L, נאמר שהפונקציה $h: M_1 \to M_2$ נקראת איזומורפיזם אם מקיימת את 4 התנאים הבאים:

(1) h היא פונקציה חח ערכית ועל.

(2) לכל סימן של קבוע אישי (c) באוצר המילים מתקיים: $h(c^{M_1}) = c^{M_2}$.

(3) לכל סימן של יחס n מקומי (S) באוצר המילים, ולכל האיברים בעולם של M_1 $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ מתקיים:
$\langle a_1,a_2,\dots,a_n\rangle \in S^{M_1}$ אם ורק אם $\langle h(a_1), h(a_2),\dots h(a_n)\rangle \in S^{M_2}$.

(4) לכל סימן של פונקציה n מקומית (F) באוצר מילים, ולכל האיברים בעולם של M_1 $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ מתקיים: $h[F^{M_1}(a_1,a_2,\dots,a_n)] = F^{M_2}[h(a_1),h(a_2),\dots,h(a_n)]$

דוגמה: (1) נתון אוצר המילים $L=\langle f\rangle$ כאשר f הוא סימן של פונקציה דו מקומית. נתונים שני מבנים $M_1=\langle N, \perp\rangle$, $M_2=\langle N, \times\rangle$. האיזומורפיזם ביניהם הוא $h(x)=2^x$. אם לדוגמא ניקח את האיברים 2 ו-3 נשים לב שמתקיים:

$$h[F^{M_1}(2,3)] = h(2\perp 3) = 2^{2\perp 3} = 2^5$$
$$F^{M_2}[h(2),h(3)] = F^{M_2}(2^2,2^3) = 2^2\cdot 2^3 = 2^5$$

(2) נתון אוצר המילים $L=\langle c, f\rangle$ כאשר c הוא סימן של קבוע אישי ו-f היא פונקציה דו מקומית. נתונים שני מבנים $M_1=\langle Z, 0, \perp\rangle$, $M_2=\langle Z, 1, \perp\rangle$. האם קיים איזומורפיזם ביניהם?

לפי הגדרת האיזומורפיזם צריך שיתקיים $h(0)=1$, אמנם אם ננסה להציב (0,0) נקבל:

$$h[F^{M_1}(0,0)] = h(0\perp 0) = h(0) = 1$$
$$F^{M_2}[h(0),h(0)] = F^{M_2}(1,1) = 1\perp 1 = 2$$

סתירה: לכן M_1 ו-M_2 הם לא איזומורפים.

ה) משפטים על איזומורפיזם

(1) הוכחת איזומורפיזם - כדי להוכיח איזומורפיזם צריך להוכיח שמתקיימים כל ארבעת התנאים לעיל. כלומר צריך להוכיח:

* שהפונקציה חח"ע - נניח שמתקיים $f(x)=f(y)$, ואז נוכיח שהדבר היחידי שגורם לזה להתקיים הוא כאשר $x=y$.
* שהפונקציה על - נמצא את y ביחס ל-x, ואז נחשב את $f(x)$ באמצעות מה שמצאנו, ונוכיח ש-$f(x)=y$.
* לכל סימן באוצר מילים שמתפרש במבנה מתקיימים המשוואות שהגדרנו בסעיף קודם.

(2) אם h איזומורפיזם מ-M_1 ל-M_2 אז h^{-1} הוא איזומורפיזם מ-M_2 ל-M_1. מכיון שבהגדרת איזומורפיזם h צריכה להיות פונקציה חח"ע ועל, אזי h היא תמיד הפיכה. כלומר אם M_1 איזומורפי ל-M_2 אזי תמיד גם M_2 איזומורפי ל-M_1, וקיים איזומורפיזם h^{-1}.

(3) אם M_1 איזומורפי ל-M_2 באמצעות איזומורפיזם h ו-M_2 איזומורפי ל-M_3 באמצעות איזומורפיזם g, אזי M_1 הוא גם איזומורפי ל-M_3 באמצעות ההרכבה $g(h)$.

1) פונקציה עולה/יורדת

ניתן לתאר פונקציה עולה או יורדת באמצעות איזומורפיזם. נתון אוצר מילים L שמופיע בו יחס דו מקומי S, ושני מבנים M_1 ו-M_2 איזומורפיים. אזי אם הסימן קטן (<) או גדול (>) זה בשני המבנים הפונקציה עולה, ואם הסימנים מנוגדים הפונקציה יורדת.

$$\left.\begin{array}{ccc} M_1=\langle R,<\rangle & & M_2=\langle R,<\rangle \\ \hline x,y & \xrightarrow{h} & h(x),h(y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x<y & \xrightarrow{h} & h(x)<h(y) \end{array}\right\} \text{הפונקציה עולה}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} M_1=\langle R,<\rangle & & M_2=\langle R,>\rangle \\ \hline x,y & \xrightarrow{h} & h(x),h(y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x<y & \xrightarrow{h} & h(x)>h(y) \end{array}\right\} \text{הפונקציה יורדת}$$

דוגמאות: (1) נתון אוצר מילים $L=\langle S\rangle$ כאשר S הוא יחס דו מקומי. האם המבנים המתמטיים $M_1=\langle[0,1),<\rangle$ ו-$M_2=\langle(4,7],<\rangle$ הם איזומורפיים?

נשים לב שהסימנים הפוכים, על כן הפונקציה יורדת. לכן נחפש משוואת קו ישר $y=a\cdot x+b$ שאם נציב 0 נקבל 7 ואם נציב מספר השואף ל-1 נקבל מספר השואף ל-4.

$$\left.\begin{array}{l} h(0)=7 \Rightarrow a\cdot 0+b=7 \Rightarrow b=7 \\ h(1)=4 \Rightarrow a\cdot 1+7=4 \Rightarrow a=-3 \end{array}\right\} h(x)=-3x+7$$

נוכיח שלכל x בתחום $h(x)$ נמצא באזור: $0\le x<1 \;/\cdot -3 \Rightarrow -3<-3x\le 0 \;/+7 \Rightarrow 4<-3x+7\le 7$ ✓

הוכחת חח"ע: $f(x)=f(y) \Rightarrow -3x+7=-3y+7 \Rightarrow x=y$ ✓

הוכחת על: נגדיר $x=\frac{y-7}{-3}$ כאשר $y\in(4,7]$.

נוכיח $x\in[0,1)$: $4<y\le 7 \;/-7 \Rightarrow -3<y-7\le 0 \;/:-3 \Rightarrow 0\le\frac{y-7}{-3}<1$ ✓

$h(x)=y$: $h(x)=h\left(\frac{y-7}{-3}\right) \Rightarrow -\cancel{3}\,\frac{y-7}{-\cancel{3}}+7=y-7+7=y$ ✓

(2) נתון אוצר מילים $L=\langle S\rangle$ כאשר S יחס דו מקומי. האם המבנים המתמטיים $M_1=\langle[0,1),<\rangle$ ו-$M_2=\langle(1,2),<\rangle$ איזומורפיים?

מכיון שאין קצוות לקטע (1,2) יודעים ש-$h(0)$ הוא באמצע הקטע (1,2), ומכיון ש-0 הוא קצה לא יכולה להיות פונקציה חח"ע שמקיימת את זה.

מבנים - איזומורפיזם

בשאלה על איזומורפיזם נצטרך להראות קיום של פונקצית איזומורפיזם בין 2 מבנים או לשלול קיום של איזומורפיזם.

כדי להוכיח שיש איזומורפיזם, צריך להגדיר פונקציה $h: M_1 \to M_2$ המקיימת את התנאים:

- h חח"ע ועל. צריך להוכיח לפי הגדרת חח"ע ועל.
  הוכחת חח"ע: נרשום כך: **יהיו $x_1, x_2 \in M_1$ נניח ש $h(x_1) = h(x_2)$, צ"ל: $x_1 = x_2$.** המשך ההוכחה הוא ע"י ההצבה של x_1 ו x_2 בפונקציה והשוואת התוצאות וע"י פישוט אלגברי מגיעים לתוצאה $x_1 = x_2$.
  הוכחת על: **יהא $y \in M_2$. צ"ל שקיים $x \in M_1$ כך ש $h(x) = y$.**
  המשך ההוכחה ע"י מציאת x כזה. מוצאים את x בכך שמבודדים אותו מהפונקציה ובודקים שאין בעיה בתחום ההגדרה. מציבים את ה x שמצאנו בפונקציה והתוצאה צריכה להיות בדיוק y. לדוגמא: אם הפונקציה היא: $h(x) = e^x$ אז כדי להוכיח על נבודד את x ונקבל $x = \ln y$. לכן נרשום: **נגדיר $x = lny$** ואם נציב בפונקציה h נקבל: $h(\ln y) = e^{\ln y} = y$. (כי e^x ו $\ln y$ הן פונקציות הפוכות אחת לשנייה).
- $h(c^{M_1}) = c^{M_2}$ – (במקרה ויש קבועים במבנה) כלומר שהפונקציה צריכה לקחת את הקבוע מ M_1 ולהעביר אותו לקבוע ב M_2. זה יכול מאוד לעזור במציאת הפונקציה.
- שמירת היחס (במקרה ויש יחס): צריך להוכיח שאם לוקחים 2 איברים (כל זה מדובר כאשר היחס הוא דו מקומי – זוג סדור, אם היחס הוא לדוגמא תלת מקומי אז ניקח 3 איברים) מ M_1 המקיימים את היחס ב M_1. אז אם נפעיל על שניהם את הפונקציה ונשלח אותם ל M_2 עדיין יישאר היחס ביניהם ב M_2. לדוגמא:אם הפונקציה היא: $h(x) = 2x$ והיחס ב 2 המבנים הוא > אז לוקחים 2 איברים מהמבנה הראשון מניחים ש $x < y$ וצ"ל ש $2x < 2y$. ומגיעים להנחה ע"י פישוט אלגברי.
  בהוכחה נרשום כך: **יהיו $x_1, x_2 \in M_1$ נניח ש $S^{M_1}(x_1, x_2)$, צ"ל: $S^{M_2}(h(x_1), h(x_2))$.**
- שמירה על הפונקציה (במקרה ויש פונקציה ,גם כאן נראה עבור פונקציה דו מקומית): צריך לשים לב שהפונקציה שבודקים היא הפונקציה של המבנה (נקרא לה f), ויש את פונקצית האיזומורפיזם (נקרא לה h) צריך להוכיח שאם לוקחים 2 איברים מ M_1, מפעילים עליהם את הפונקציה מ M_1 ואת התוצאה שקיבלנו שולחים ל M_2 ע"י פונקצית האיזומורפיזם מקבלים אותו דבר אם קודם נשלח כל איבר בנפרד ל M_2 ע"י פונקצית האיזומורפיזם ואז נפעיל על התוצאות את הפונקציה מ M_2.
  כלומר: צ"ל ש $h(f^{M_1}(x,y)) = f^{M_2}(h(x), h(y))$. בהוכחה נרשום:
  יהיו $x_1, x_2 \in M_1$ צ"ל ש $h\left(f^{M_1}(x,y)\right) = f^{M_2}(h(x), h(y))$.
  לדוגמא: אם האיזומורפיזם הוא $h(x) = 2x$ והפונקציה ב 2 המבנים היא + אז נבדוק כך: $h(x+y) = h(x) + h(y)$ ונציב: $2(x+y) = 2x + 2y$ ורואים שהתוצאה שווה.

כדי לשלול איזומורפיזם, צריך לעשות זאת ב 2 דרכים:

- ע"י עוצמות שונות: אם העוצמות של העולמות שונות אז אין פונקציה חח"ע ועל בין המבנים ולכן לא קיים איזומורפיזם. לדוגמא: $< Q, <>$ לא איזומורפי ל $< R, <>$ כי Q היא בת מניה ו R אינה בת מניה.

Scanned with CamScanner

הכפלה של הקטע הקטן בקבוע שישווה אותו עם האורך של הגדול או שנחלק את הגדול כדי להשוות אותו עם האורך של הקטן. בדוגמא שלנו: נכפול את (0,1) ב 3 כדי שהוא יהיה באורך 3 ונקבל: (0,3) , לאחר מכן, בבדוק כמה צריך להוסיף או להחסיר מכל צד כדי לקבל את הקטע השני, במקרה שלנו, אם נוסיף 6 לכל צד ב (0,3) נקבל את (6,9) (מה שרצינו). ולכן סה"כ הפונקציה שקיבלנו היא: $h(x) = 3x + 6$ כי כפלנו ב 3 ואז הוספנו 6. אם נבדוק, נראה אכן שכל מספר שנציב מהטווח (0,1) נקבל תוצאה בטווח (6,9).

<u>תכונות ופסוקים שכדאי לדעת כדי לשלול איזומורפיזם</u>

- איבר מינימאלי: $\exists x\forall y(x \neq y \to S(x,y))$
- אין איבר מינימאלי: $\forall x\exists y(S(y,x))$
- בין כל 2 איברים יש עוד איבר: $\forall x\forall y(S(x,y) \to \exists z(S(x,z) \wedge S(z,y)))$
- לכל איבר קיים ההופכי שלו: $\forall x\exists y(f(x,f(y,y)) = y)$. לדוגמא: עבור חיבור, ההופכי הוא למעשה המספר השלילי הנגדי, נקבל ע"י הצבה בפסוק: $\forall x\exists y(x + 2y = y)$, נעביר אגפים: $\forall x\exists y(x = -y)$. (פסוק זה מתקיים ב Z ולא ב N) . ועבור כפל,ההופכי הוא השבר ההופכי: נציב בפסוק: $\forall x\exists y(x * y * y = y)$, נבודד את x: $\forall x\exists y(x = \frac{1}{y})$ (פסוק זה מתקיים ב Q ולא ב Z או ב N).
- אם יש כפל ו 0 במבנה אחד ובשני אין כפל או אין 0 אז יש את הפסוק שאומר כי כל מספר כפול 0 זה 0 - $\exists x\forall y(f(x,y) = x)$
- איבר נטרלי לחיבור ולכפל – אם מחברים/כופלים אותו עם כל מספר – מקבלים את המספר עצמו - $\exists x\forall y(f(x,y) = y)$
- לכל איבר יש את ה"חצי" שלו: $\forall x\exists y(f(y,y) = x)$ (פסוק זה מתקיים לדוגמא ב Q ולא ב Z או N)

חשוב להדגיש כי גם אם המבנים נראים די דומים, זה לא אומר שיש איזומורפיזם ביניהם, אפילו קבוע יכול "להרוס", לדוגמא: $< Z,+,1 >$ לא איזומורפי ל $< Z,+,2 >$ כי לדוגמא נוכל לרשום את הפסוק: $\exists x(f(x,x) = c)$, כלומר, שקיים x שאם נחבר אותו עם עצמו $(x + x)$ נקבל את הקבוע, ופסוק זה לא מתקיים עבור $< Z,+,1 >$, כי אין $\frac{1}{2}$ בעולם של Z.