דף נוסחאות

חשבון דיפרנציאלי ואינטגראלי 2

כללי הגזירה

$(c)' = 0 \quad , \quad c$ - קבוע

$$(cu)' = c\,u'$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \qquad v \neq 0$$

טבלת הנגזרות

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1} \quad , \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad , \quad (e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x} \quad , \quad (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad , \quad (x > 0)$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (\sin x)' = \cos x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (|x| < 1) \quad , \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (|x| < 1)$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

טבלת האינטגרלים

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad , \quad \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \qquad \alpha \neq -1$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0) \quad , \quad \int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C \quad , \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad , \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \qquad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad (a \neq 0) \quad , \quad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad (a > 0) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \quad (a \neq 0)$$

שיטות האינטגרציה

(1) אם $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$, אז $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

(2) אם $x = g(t)$, אז $\int f(x)dx = \int f(t)g'(t)dt$

(3) אינטגרציה בחלקים : $\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)dx$

פיתוח פונקציות לטור מקלורן

1. $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad -\infty < x < \infty$$

2. $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \qquad -\infty < x < \infty$$

3. $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, \qquad -\infty < x < \infty$$

4. $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n, \qquad -1 < x \le 1$$

5. $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad -1 < x < 1$$

6. $$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \quad -1 < x < 1$$

פונקציות של מספר משתנים

1. משוואת מישור משיק למשטח S שנתון בצורה סתומה $F(x,y,z) = 0$
ועובר דרך הנקודה (x_0, y_0, z_0) :

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$$

משוואת ישר נורמל למשטח S דרך הנקודה (x_0, y_0, z_0) :

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$$

2. כללי השרשרת

(א) אם $z = f(x,y)$ ו- $y = y(x)$, אז $\frac{dz}{dx} = f'_x + f'_y \cdot \frac{dy}{dx}$

(ב) אם $z=f(x,y)$ ו- $y=y(t)$ $x=x(t)$, אז $f'_t=f'_x\cdot x'_t+f'_y\cdot y'_t$

(ג) אם $z=f(x,y)$ ו- $y=y(u,v)$ $x=x(u,v)$, אז

$f'_v=f'_x\cdot x'_v+f'_y\cdot y'_v$, $f'_u=f'_x\cdot x'_u+f'_y\cdot y'_u$

3. גרדיאנט של הפונקציה $f(x,y,z)$ **בנקודה** $M(x,y,z)$:

$$grad\ f(M)=\frac{\partial f(M)}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial f(M)}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial f(M)}{\partial z}\bar{k}$$

נגזרת מכוונת של הפונקציה $f(x,y,z)$ **בנקודה** $M_0(x_0,y_0,z_0)$

בכוון של הווקטור $\bar{u}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \bar{u}}=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cdot\cos\beta+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cdot\cos\gamma$$

4. $M(x_0,y_0)$ <u>**נקודה קריטית**</u> של $f(x,y)$, כאשר $f'_x(x_0,y_0)=0, f'_y(x_0,y_0)=0$
או אחת מהנגזרות החלקיות או שנייהן אינן קיימות .

מיון נקודות קריטיות

תהי $M_0(x_0,y_0)$ נקודה קריטית של $f(x,y)$,
ו- $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר שני. נסמן

$\Delta=AC-B^2$, $B=f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$, $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$.

(i) יש ל- $f(x,y)$ <u>**מקסימום מקומי**</u> ב- M_0, כאשר $\Delta>0$ $A<0$,

(ii) יש ל- $f(x,y)$ <u>**מינימום מקומי**</u> ב- M_0, כאשר $\Delta>0$ $A>0$,

(iii) אין ל- $f(x,y)$ ערך קיצון מקומי ב- M_0 , כאשר $\Delta<0$.

במקרה הזה $M_0(x_0,y_0)$ נקראת **נקודת אוכף** של $f(x,y)$.

(iv) אם $\Delta=0$, אז המבחן לא מספק מידע על הנקודה $M_0(x_0,y_0)$.

משוואות דיפרנציאליות

1. משוואה הומוגנית עם מקדמים קבועים $y''+py'+qy=0$, $p,q\in R$

משוואה אופיינית היא $r^2+pr+q=0$.

פתרונות בלתי תלויים ליניארית $y_2(x)$ $y_1(x)$, מקבלים בהתאם ל- $D=\frac{p^2}{4}-q$:

(1) $D>0$, $r_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{D}$, $r_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{D}$, $y_1=e^{r_1x}, y_2=e^{r_2x}$

(2) $D=0$, $r_1=r_2=-\frac{p}{2}$, $y_1=e^{r_1x}, y_2=xe^{r_1x}$

(3) $D<0$, $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$, כאשר $\alpha=-\frac{p}{2}$, $\beta=\sqrt{-\frac{D}{4}}$,

$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$

2. משוואה לא הומוגנית עם מקדמים קבועים $y''+py'+qy=g(x)$, $p,q\in R$

פתרון כללי $y = y_h + y_p$, כאשר

y_h הוא פתרון כללי של משוואה הומוגנית $y'' + py' + qy = 0$,

y_p הוא אחד מהפתרונות הפרטיים של משוואה לא הומוגנית $y'' + py' + qy = g(x)$.

שיטת הבחירה (המקדמים הלא מוגדרים)

1. ל- $y'' + py' + qy = ke^{\alpha x}$

בוחרים $y_p = Ae^{\alpha x}$, כאשר a אינו שורש של המשוואה האופיינית ,

בוחרים $y_p = xAe^{\alpha x}$, כאשר a הוא שורש פשוט של המשוואה האופיינית ,

בוחרים $y_p = x^2 Ae^{\alpha x}$, כאשר a הוא שורש כפול של המשוואה האופיינית ,

2. ל- $y'' + py' + qy = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$

בוחרים $y_p = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n$, כאשר $a = 0$ אינו שורש של המשוואה האופיינית ,

בוחרים $y_p = x \cdot \left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n\right)$, כאשר $a = 0$ שורש פשוט של המשוואה האופיינית .

3. ל- $y'' + py' + qy = a_1 \cos bx + a_2 \sin bx$

בוחרים $y_p = A_1 \cos bx + A_2 \sin bx$, כאשר $\sin bx$, $\cos bx$ אינם פתרונות של המשוואה ההומוגנית המתאימה .

בוחרים $y_p = x \cdot \left(A_1 \cos bx + A_2 \sin bx\right)$, כאשר $\sin bx$, $\cos bx$ הן פתרונות של המשוואה ההומוגנית המתאימה .

אינטגרל כפול בקואורדינאטות קוטביות $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$

$$\iint_R f(x,y)\,dS = \iint_\Delta f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) r\,dr\,d\varphi$$

אינטגרל קווי

נתון העקום $L = \left\{\left(x(t), y(t), z(t)\right):\quad \alpha \le t \le \beta\right\}$ **במרחב .**

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left(P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\right)dt$$

נוסחת גרין $\int_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$