כלל לופיטל

1) הגדרה

כלל לופיטל הוא כלל העוזר לחשב גבול של פונקציה במקרים מסויימים של אי וודאות בעזרת הנגזרת של הפונקציה. בעזרת כלל זה אנו יכולים לסלק את אי הוודאות.

הכלל אומר כך: אם הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ הם שתי פונקציות השואפות ל-0 או ל-$\pm\infty$ כאשר x שואף ל-a (a יכול להיות גם $\pm\infty$), אז הגבול של מנת הפונקציות כש-x שואף ל-a שווה לנגזרת של מנת הפונקציות כל אחד לחוד.

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\ \text{כאשר מתקיים}\ \frac{0}{0}\ \text{או}\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}}$$

הערות לשימוש בכלל:

(1) כלל לופיטל עובד רק כאשר מתקיימים מקרי האי וודאות $\frac{0}{0}$ או $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. ישנם מקרי אי וודאות נוספים. עליהם נדבר בהמשך, שבכלל לופיטל עוזר למצאם, אך כדי להשתמש בכלל צריך להעביר לאחת מן המקרים הללו.

(2) כשאנו גוזרים את הפונקציה, אנו גוזרים מונה לחוד ומכנה לחוד ולא לפי חוקי הגזירה של מנה.

(3) אם לאחר שגזרנו את הפונקציות מצאנו שלמנת הנגזרות אין גבול, אין זה בהכרח אומר שגם לפונקציה המקורית לפני הגזירה אין גבול, יש להשתמש בשיטה אחרת לסלק את אי הוודאות.

דוגמאות:

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-5x-1}{x^2}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{e^{5x}\cdot 5-5}{2x}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\frac{e^{5x}\cdot 25}{2}=\frac{25}{2}=12.5$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^5 x}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}=\frac{\frac{5\ln^4 x}{x}}{2x}=\frac{5\ln^4 x}{2x^2}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow\frac{20\ln^3 x}{4x^2}=\frac{60\ln^2 x}{8x^2}=\frac{120\ln x}{16x^2}=\frac{120}{32x^2}=0$$

2) מקרי אי וודאות נוספים

ישנם מקרים נוספים של אי וודאות שבהם ניתן להיעזר בכלל לופיטל למציאת הגבול, אמנם לא בדרך ישירה ע"י העברה של הפונקציה למצב אי וודאות של $\frac{0}{0}$ או $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ואז להשתמש בכלל לופיטל.

מקרי אי וודאות אלו הם: $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0. נחלקם לשלושה סוגים:

3) מקרה ראשון - גבול מהצורה $0\cdot\pm\infty$

גבול של מכפלה $f(x)\cdot g(x)$, כאשר $f(x)$ שואף ל-0 ו-$g(x)$ שואף ל-$\pm\infty$, נעביר באמצעות תיק' שברים ל- $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ שכעת שואפים ל-$\frac{0}{0}$, או לחילופין נעביר ל- $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ שכעת שואפים ל-$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. בשני המצבים ניתן להשתמש בכלל לופיטל, נגזור את הפונקציה, נמצא את הגורמים לאי הוודאות, נציב ונפתור.

בכלל, כשמשתמשים בהעברה כן מומלץ שהפונקציה שתעבור למכנה תהיה כזה שיותר פשוטה לגזירה לפי חוקי גזירת מנה.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = & \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = & \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \\ 0\cdot\pm\infty & \dfrac{0}{0} & \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty} \end{array}}$$

דוגמא:

$$\lim_{x\to0^+} x\cdot e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{lop}{=} \frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot -\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{-e^{\frac{1}{x}}\cdot x^2}{-x^2} = e^{\frac{1}{x}} = e^{\infty} = \infty$$

4) מקרה שני - גבול מהצורה $\infty-\infty$

כאשר בגבול הפונקציה שאנו מחשבים מתקבל אי וודאות מסוג $\infty-\infty$, יש שני שיטות כדי להעביר את הפונקציה למצב שבו ניתן יהיה להשתמש בכלל לופיטל, לפרק את אי הוודאות ולהגיע לפתרון.

(1) מכנה משותף - נמצא מכנה משותף לשני הגורמים, נעביר את הפונקציה לצורה של שבר, במידה והשבר מסוג $\frac{0}{0}$ או $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ניתן להשתמש בכלל לופיטל למציאת הגבול.

דוגמא:

$$\lim_{x\to1} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x\cdot\ln x - x+1}{\ln x(x-1)} \overset{lop}{=} \frac{\ln x+\cancel{1}-\cancel{1}}{\ln x+\frac{x-1}{x}} \overset{lop}{=} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{x-(x-1)}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+1}{x^2}} = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

(2) בחלק אחר של התרגילים כדאי להשתמש בזהות $\ln(e^x)=x$. לפי נוסחה זו $f(x)-g(x)=\ln\left(e^{f(x)-g(x)}\right)=\ln\left(\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}}\right)$ במידה והשבר הפנימי מסוג $\frac{0}{0}$ או $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, ניתן לחשב <u>לחוד</u> את הגבול של פנים הלוגריתם בעזרת כלל לופיטל את הגבול שקיבלנו נציב חזרה בלוגריתם ונמצא את הגבול של הפונקציה כולה.

דוגמא:

$$\lim_{x\to\infty} \ln(3^x+x)-\ln(2^x+x) = \ln\left(e^{\ln(3^x+x)-\ln(2^x+x)}\right) = \ln\left(\frac{e^{\ln(3^x+x)}}{e^{\ln(2^x+x)}}\right) = \ln\left(\frac{3^x+x}{2^x+x}\right) \Rightarrow \frac{3^x+x}{2^x+x} \,/:3^x = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x} = \infty \Rightarrow \ln\infty = \infty$$

5) מקרה שלישי - גבולות מהצורה $0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$

במקרים אלו נשתמש בזהות $e^{\ln x}=x$. לפי נוסחה זו $\boxed{f(x)^{g(x)} = e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{g(x)\ln(f(x))}}$ לאחר שנעביר את הפונקציה למצב זה נמצא מהו הגבול של החזקה $g(x)\ln(f(x))$, שבשלושת המקרים תהיה מסוג $0\cdot\pm\infty$ אותו אנו יודעים לחשב מהמקרה הראשון. לאחר מכן נעלה את e בחזקת הגבול שמצאנו ונקבל את גבול הפונקציה כולה.

דוגמא:

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = e^{\sin x\ln\left(\frac{1}{x}\right)} \Rightarrow \frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}} \overset{lop}{=} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x} = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x = 1\cdot1\cdot0 = 0 \Rightarrow e^0 = \boxed{1}$$