נושא 10 - רשתות זרימה

א) הגדרות

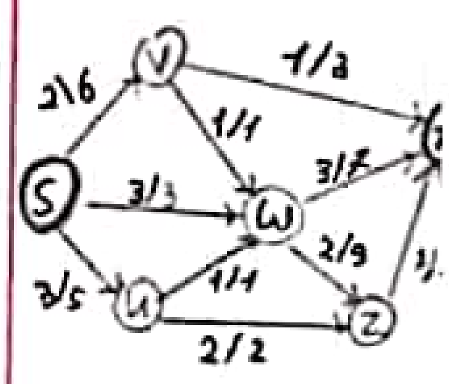
רשת זרימה - היא גרף מכוון ממושקל אי שלילי, שבו המשקל בכל צומת e כאשר $e\in E$, נקראת הקיבולת של e, ומסומנת $c(e)$. בכל רשת זרימה יש בגרף שני צמתים מרכזיים: צומת המקור s וצומת היעד t^*. ל-s אין קשתות נכנסות ול-t אין קשתות יוצאות. נסמן רשת זרימה ב-N.

* t נקראת בור (sink).

זרימה - בכל קשת e ברשת זרימה נוכל לבחור מהו הערך שאנו רוצים להזרים בקשת זו. ערך זה נקרא הזרימה של e ומסומן $F(e)$. שני כללים חשובים:

(1) כמות הזרימה של קשת תמיד קטנה מכמות הקיבולת שלה: $0\le F(e)\le c(e)$.

(2) עבור כל צומת בגרף השונה מ-s,t, כמות הזרימה הנכנסת תמיד שווה לכמות הזרימה היוצאת: $\sum_{e\in E^-(v)}F(e)=\sum_{e\in E^+(v)}F(e)$. $E^-(v),E^+(v)$ הם הקשתות הנכנסות והיוצאות מ-v.



$|F| = 2+3+5 = 1+3+4 = 8$

נשים לב, כי כמות הזרימה בכל קשת מאוד תלויה בקיבולת של הקשתות האחרות במסלול מ-s ל-t, ולא תמיד נוכל להזרים את הקיבולת המקסימלית.

זרימה F ברשת זרימה N, היא סך כל הזרימות שיוצאות מ-s, שגם שווה לסך הזרימות שנכנסות ל-t. נסמן $|F|$.

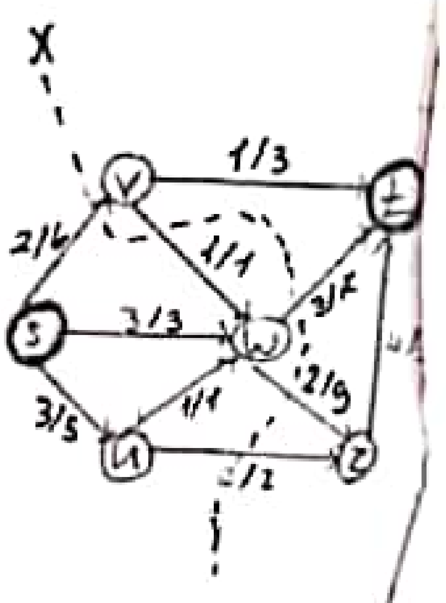
זרימה מקסימלית - ברשת זרימה N היא הזרימה עם הערך הגבוה ביותר. מטרתנו בפרק זה היא למצוא אלגוריתם למציאת זרימה מקסימלית ברשת זרימה.

ב) חתך ברשת זרימה

חתך X ברשת זרימה זוהי חלוקה של הצמתים ברשת זרימה לשתי קבוצות V_s,V_t, כך שצומת המקור s נמצאת בקבוצה V_s, וצומת המטרה t נמצאת בקבוצה V_t. $X-(V_s,V_t)$.

קשת קדימה בחתך X - זוהי קשת שמתחילה בצומת מ-V_s ומגיעה אל צומת ב-V_t.

קשת אחורה בחתך X - זוהי הקשת שמתחילה בצומת מ-V_t ומגיעה אל צומת ב-V_s.



קיבולת חתך - סך כל הקיבולות של קשתות קדימה. נסמן $c(X)$.

$c(X)=6+7+9+2=$

זרימת חתך - סך הזרימה של קשתות קדימה פחות סך הזרימה על קשתות אחורה. נסמן $F(X)$.

$F(X)=2+8+2+2-$

חתך מינימלי - זהו החתך בעל הקיבולת המינימלית מכל החתכים האפשריים.

7/1/20

ג) משפטים על חתך ברשת זרימה

1) **משפט** - בכל חתך ברשת זרימה, זרימת החתך שווה לזרימה של רשת הזרימה.

בניסוח מתמטי, עבור כל חתך X מתקיים: $F(X)=|F|$.

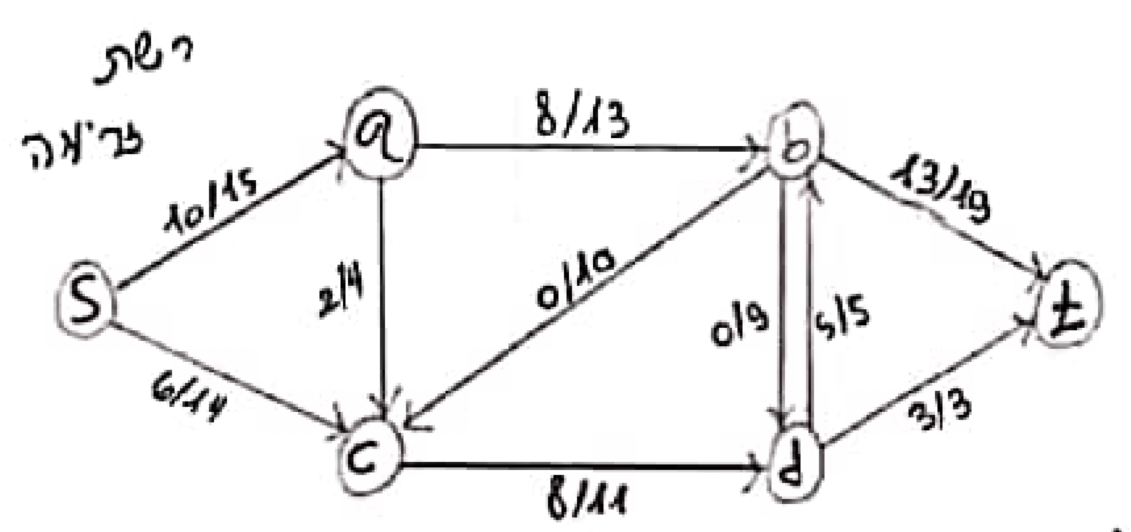
הוכחה - המרצה שלחה את ההוכחה בקובץ נפרד, שמור לי במחשב.

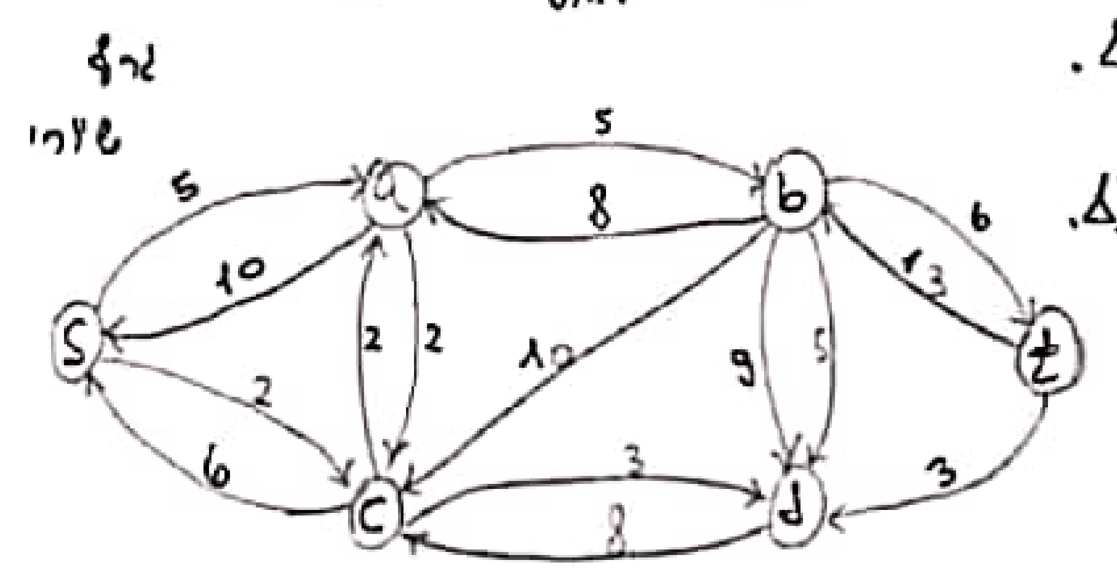
2) **משפט** - הזרימה בחתך X תמיד קטנה או שווה לקיבולת החתך. $F(X)\le c(X)$.

הוכחה - זרימת החתך שווה לזרימה בכל הקשתות קדימה פחות זרימה בכל קשתות אחורה בחתך. ואילו קיבולת החתך הוא סכום הקיבולות בכל קשתות קדימה בחתך. ובכל קשת מתקיים $0\le F(e)\le c(e)$. לכן סכום הקיבולות בקשתות קדימה תמיד גדול מסכום הזרימות (אפילו עוד לפני שמחסירים זרימה בקשתות אחורה).

מסקנה - ממשפטים 1 ו-2 נובע כי כל זרימה ברשת זרימה תמיד קטנה או שווה לקיבולת של כל חתך X ברשת זרימה. $|F|\le c(X)$. בפרט הזרימה המקסימאלית קטנה או שווה לקיבולת של החתך המקסימאלי.

3) גרף שיורי





עבור כל קשת $e=(u,v)$ ברשת זרימה, נגדיר:

קיבולת שיורית מ-u ל-v - כמה עוד ניתן להעביר בקשת. כלומר הקיבולת פחות הזרימה: $\Delta_F(u,v)=c(e)-F(e)$.

קיבולת שיורית מ-v ל-u - כמה זרימה עוברת בפועל ב-e: $\Delta_F(v,u)=F(e)$.

במילים אחרות, קיבולת שיורית בכיוון הקשת שווה לכמה זרימה עוד ניתן להעביר, ואילו בכיוון ההפוך שווה לכמות הזרימה בפועל.

גרף שיורי זהו גרף שמציג את כל הקשתות עם הקיבולת השיורית שלהם בשני הכיוונים. כאשר הקיבולת השיורית שווה ל-0 נתעלם מהקשת. נסמן גרף שיורי $G_F=(V,E_F)$.

$E_F=\{e: F(e)<c(e)\}\cup\{e^R: F(e)>0\}$

ה) מסלול שיפור

זהו מסלול P בגרף השיורי מ-s ל-t שמשקל הקשת הכי קטנה בה עובר מסלול זה גדולה מ-0. נסמן את משקל הקשת הכי קטנה במסלול P כך: $\Delta_F(P)$.

ת"ב להתקיים $\Delta_F(P)>0$, אחרת P אינו מסלול שיפור.

זה בעצם צריך קיבולת השיורית לאורך צינורי הקשת.

מכיוון שאנו בכל מקרה מתעלמים מקשתות בגודל 0 בגרף השיורי, אזי אם יש מסלול מ-s ל-t בגרף השיורי, נאמר שזהו מסלול שיפור. בדוגמא לעיל $P=\{s,a,b,t\}$ הוא מסלול שיפור שבו $\Delta_F(P)=5$.

Scanned with CamScanner

7/1/20

1) משפט על מסלול שיפור

משפט - תהי רשת זרימה N עם זרימה נוכחית $|F|$. אם קיים בגרף השיורי של N מסלול שיפור P, אזי קיימת ב-N זרימה $|F'|$ המקיימת $|F'|=|F|+\Delta_F(P)$.

כלומר קיימת זרימה טובה יותר הגדולה ב-$\Delta_F(P)$ מהזרימה הנוכחית.

ניתן למצוא את F' בכך שנגדיל ברשת זרימה N את $\Delta_F(P)$ במסלול השיפור P. כל קשת עם אותו כיוון בגרף השיורי וברשת הזרימה פשוט נוסיף לה $\Delta_F(P)$, וכל קשת בגרף השיורי שהכיוון שלה הפוך מהקשת ברשת הזרימה נחסיר מהקשת ברשת הזרימה את $\Delta_F(P)$.

קשת קדימה $\Leftarrow$ $f'(e)=f(e)+\Delta_F(P)$

קשת אחורה $\Leftarrow$ $f'(e)=f(e)-\Delta_F(P)$

הוכחה - אין כל כך צורך, כי פעולת הזרימה שתיארנו פשוט מוסיפה ל-$|F|$ את $\Delta_F(P)$.

מסקנה - מסלול השיפור מראה לנו כמה ניתן לשפר ברשת הזרימה דרך מסלול זה. כמות השיפור תלויה במשקל הקשת הכי קטנה במסלול שכן היא מהווה "צוואר בקבוק" שחוסם את גודל הזרימה שניתן להעביר דרך המסלול כולו. מעבר בקשת אחורה הוא תיקון החלטות קודמות.

ב) אלגוריתם פורד-פלקרסון (Ford-Fulkerson)

זהו אלגוריתם שמוצא זרימה מקסימלית ברשת זרימה. האלגוריתם מתבסס על המשפט שתיארנו בסעיף קודם.

אלגוריתם זה מס' [illegible] יציק. זהו המימוש הפשוט. מימוש מספיק: אדמונדס-קארפ. וכו'.

פעולת האלגוריתם:

1) נאפס את הזרימה בכל הקשתות ל-0.

2) לולאת "כל עוד" (while) קיים מסלול שיפור P ברשת זרימה. — עד (5) לולאה

* נמצא מסלול שיפור באמצעות DFS (או BFS) על רשת הזרימה, כאשר מעבר בקשת $e=(u,v)$ יתבצע רק אם הקיבולת השיורית שלה באחד מהכיוונים גדול מ-0. $\Delta_F(v,u)>0$ או $\Delta_F(u,v)>0$.

3) נגדיר $\Delta=\infty$ כקיבולת השיורית של המסלול שיפור $\Delta_F(P)=\Delta$.

4) עבור כל קשת במסלול שיפור $e\in P$, אם e קשת קדימה נגדיר את הקיבולת השיורית שלה כקיבולת פחות הזרימה, ואם e קשת אחורה נגדיר את הקיבולת השיורית כזרימה בלבד. אם מצאנו קיבולת שיורית הקטנה מ-Δ נעדכן את Δ לקיבולת השיורית. — מציאת Δ הכי קטן במסלול שיפור.

5) שוב נעבור על כל הקשתות במסלול השיפור $e\in P$. אם e קשת קדימה נוסיף לזרימה שלה את Δ, ואם קשת אחורה נחסיר מהזרימה את Δ. — עדכון הזרימה Δ בכל הקשת לפי המסלול שיפור.

6) בסיום הלולאה נקבל ברשת הזרימה זרימה מקסימלית.

20/7/1 בס"ד

פסאודו-קוד

```
Ford-Fulkerson(N) {
    For each e∈E
        F(e)=0
    while (G has augmenting path M) {   // using DFS
        Δ = ∞
        For each e∈M {
            IF (e is Forward edge) δ(e)= c(e)- F(e)
            else (e is backward edge) δ(e) = F(e)
            IF(δ(e)<Δ) Δ= δ(e)
        }
        For each e∈M {
            IF (e is Forward edge) F(e) += Δ
            else(e is backward edge) F(e) -= Δ
        }
    }
}
```

ח) הוכחת האלגוריתם

הוכחת האלגוריתם היא לפי משפט "מקסימום זרימה וחתך מינימלי" (Max-Flow Min-Cut).

משפט זה אומר ששלושת התנאים הבאים שקולים:

(1) F היא זרימה מקסימלית ברשת זרימה.

(2) בגרף השיורי של רשת הזרימה לא קיימים מסלולי שיפור.

(3) קיים חתך $X=(V_s,V_t)$ שהקיבולת שלו שווה לזרימת ברשת זרימה $|F|=c(X)$.

נוכיח את המשפט באמצעות גרירה של כל התנאים.

1 גורר 2: אם F זרימה מקסימלית צריך להוכיח שאין מסלולי שיפור. נניח בשלילה שיש מסלול שיפור M. אזי לפי משפט מסלול ו' קיימת זרימה F' כך שמתקיים $|F'|=|F|+\Delta_F(M)$. אולם מכאן נסיק כי $|F|<|F'|$ שהרי $\Delta_F(M)$ חיובי. בסתירה למקסימליות של F.

2 גורר 3: אם אין מסלולי שיפור צריך להוכיח שקיים חתך השווה לזרימה. נגדיר V_s כל הצמתים שניתן להגיע אליהם מ-s בגרף השיורי, ו-V_t יהיו כל שאר הצמתים. בחתך זה הקיבולת השיורית בכל הקשתות קבואה שווה ל-0, כי אחרת היה ניתן להגיע מצומת מ-V_s ל-V_t בניגוד להגדרה. נמצא אם כן שמתקיים $c(X)=F(X)$. לפי משפט 1 בסעיף ג' האומר $|F|=F(X)$, נקבל $|F|=c(X)$.

3 גורר 1: אם $|F|=c(X)$ אזי F מקסימלי, לפי משפט 2 בסעיף ג' האומר שבכל חתך X: $|F|\le c(X)$.

14/1/20 בס"ד

ט) **סיבוכיות האלגוריתם**

באלגוריתם אנו עוברים בלולאה ומחפשים מסלול שיפור. כדי למצוא מסלול שיפור יש לעבור על כל הקשתות והצמתים ב-DFS, לכן זה דורש $(n+m)$ פעולות. במקרה הגרוע מספר מסלולי השיפור שנעבור עליהם תלוי בגודל הזרימה המקסימלית $|f^*|$, עבור שעבור כל מסלול שיפור נגדיל את הזרימה ב-1 (בדוגמא במעגת שקופית 33.

לכן סיבוכיות האלגוריתם $O(|f^*|(n+m))$.

י) **אלגוריתם אדמונדס-קארפ**

זהו אלגוריתם שמממש את אלגוריתם פורד-פולקרסון למציאת זרימה מקסימלית ברשת זרימה ומשפר אותו. באלגוריתם פורד-פולקרסון אמרנו שכל עוד קיים מסלול שיפור נוכל לשפר את הזרימה, אך לא תיארנו דרך מדויקת למציאת מסלול שיפור, אלא רק אמרנו שנעשה זאת באמצעות DFS או BFS. השינוי היחיד באלגוריתם אדמונדס-קארפ הוא שאת מסלול השיפור נבחר בכל איטרציה כמסלול הקצר ביותר מ-s ל-t בגרף השיורי G_f באמצעות אלגוריתם BFS. המסלול הקצר ביותר מוגדר כאן כמסלול עם הכי מעט קשתות, לא נתחשב בקיבולת והזרימה של כל קשת מאחר ו-BFS עובד רק על גרף לא ממושקל.

שינוי יחיד זה יגרום לכך שבמקום סיבוכיות של $O(|f^*|(n+m))$ מהאלגוריתם הקודם, נוכל למצוא זרימה מקסימלית בסיבוכיות של $O(n \cdot m^2)$.

יא) **הוכחת סיבוכיות**

נוכיח כי כל קשת בגרף השיורי יכולה להיבחר כקשת הקריטית לכל היותר $\frac{|V|}{2}$ פעמים.

ומכיוון שיש $2|E|$ קשתות לכל היותר בגרף השיורי נקבל שנצטרך למצוא סה"כ $|V|\cdot|E|$ מסלולי שיפור.

הפעלת BFS למציאת מסלול שיפור לוקח $O(E)$, לכן בסה"כ הסיבוכיות $O(|V|\cdot|E|^2)$. נוכיח שתי טענות עזר:

__טענת עזר 1:__ אורך המסלול הקצר ביותר מ-s לכל צומת $v \in V$ לאחר שיפור הזרימה לעולם אינו קטן.

הוכחה: נסמן את הזרימה לפני השיפור f והזרימה אחרי השיפור f'. נניח בשלילה כי הטענה אינה נכונה וכי v הצומת הראשונה שבה המסלול הקצר לאחר השיפור קטן מהמסלול הקצר לפני השיפור, $\delta_{f'}(s,v) < \delta_f(s,v)$.

נניח כי u הצומת הקודמת ל-v במסלול לאחר השיפור, $\delta_{f'}(s,u) = \delta_{f'}(s,v) - 1$. מהמינימליות של v נובע $\delta_{f'}(s,u) \geq \delta_f(s,u)$ נחלק לשני מקרים: אם לפני השיפור הקשת (u,v) הקיבולת השיורית שונה מ-0: סתירה! $\delta_f(s,v) \leq \delta_f(s,u)+1 \leq \delta_{f'}(s,u)+1 = \delta_{f'}(s,v)$ *

ואם שווה ל-0 אזי יש קשת (v,u) ב-G_f לפני השיפור. נסתכל על המסלול מ-s ל-u במקרה זה. +

בכל אפשרות קיבלנו סתירה. $\delta_f(s,v) = \delta_f(s,u) - 1 \leq \delta_{f'}(s,u) - 1 = \delta_{f'}(s,v) - 2 < \delta_{f'}(s,v)$ סתירה! :+

* כלומר: $f(u,v) < c(u,v)$ אזי נקבל $\delta_f(s,v) \leq \delta_f(s,u) + 1$.

+ כלומר: $f(u,v) = c(u,v)$ אזי נקבל אותה תוצאה.

Scanned with CamScanner

טענה: כל קשת בגרף השיורי יכולה להיבחר כקשת קריטית לכל היותר $\frac{|V|}{2}$ פעמים.

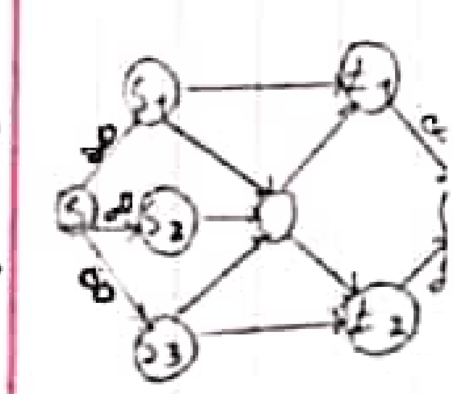
הוכחה: נסתכל על הקשת (u,v) בגרף השיורי. לאחר ש-(u,v) נבחרה בפעם הראשונה כקשת קריטית היא נעלמת מהגרף. היא תחזור לגרף כאשר הקשת (v,u) תיבחר כקשת קריטית. במסלול זה המרחק הקצר ביותר מ-s ל-u חייב לעבור ב-v, ולכן המרחק מ-s ל-u גדל בלפחות 2 מהמסלול הראשון. $\delta_{f'}(s,u)=\delta_{f'}(s,v)+1\underset{\text{לפי טענה קודמת}}{\geq}\delta_f(s,v)+1=\delta_f(s,u)+2$

מכיוון שמסלול הכי קצר הוא לכל היותר $|V|$ שאינו עובר בכל הצמתים, לא יכול להיות שתהליך זה יתרחש יותר מ-$\frac{|V|}{2}$ פעמים.

יב) צמתי מקור ומטרה מרובים

עד כה ראינו כיצד ניתן למצוא זרימה מקסימלית כאשר יש צומת מקור אחד וצומת מטרה אחת. אך מה נעשה כאשר יש מספר צמתים כאלו?

פתרון: נוסיף צומת s ונשלח ממנו קשתות לכל צמתי המקור, וכן נוסיף צומת t ונשלח מכל צמתי המטרה קשת אל t. קיבולת כל הקשתות אלו היא ∞. כעת ניתן להעביר מ-s לכל צמתי המקור כמה זרימה שנרצה, וכל הזרימה שתיכנס לצמתי המטרה תגיע בסוף ל-t ללא הגבלה. לכן נוכל להפעיל אלגוריתם פורד-פולקרסון על הרשת זרימה החדשה והזרימה שתתקבל תהיה נכונה גם לרשת זרימה המקורית.



יג) (Maximum Bipartite Matching) MBM

באמצעות אלגוריתם פורד פולקרסון נוכל למצוא MBM של גרף. MBM זהו גרף דו-צדדי שבו ההתאמה מקסימלית. באמצעות MBM של גרף נוכל לפתור כל מיני בעיות חשובות בגרף המקורי.

גרף דו-צדדי - זהו גרף שכל הצמתים בו מחולקים לשתי קבוצות L,R, כך שכל קשת בגרף היא מ-L ל-R או ההיפך. אין קשת לשני צמתים מאותה קבוצה.

התאמה - זוהי תת קבוצה של E, כך שלכל צומת יש רק קשת אחת שנכנסת או יוצאת אלה.

התאמה מקסימלית זוהי ההתאמה עם הכי הרבה קשתות. נסמן התאמה M.

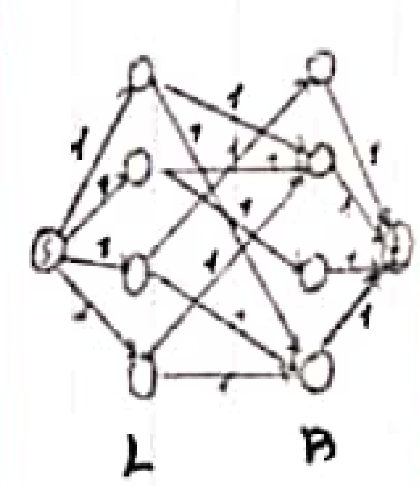
נוכל למצוא MBM של גרף באמצעות האלגוריתם הבא:

1) נחלק את הגרף לשתי קבוצות L,R כך שיתקיים גרף דו-צדדי.

2) נוסיף צומת s ונמתח קשתות לכל הצמתים ב-L, וכן נוסיף צומת t ונמתח אליו הקשתות מכל צומת ב-R.

3) נקבע משקל כל הקשתות ל-1 ונכוון כל קשתות מ-L ל-R.

4) נפעיל אלגוריתם פורד-פולקרסון על הגרף. כל הקשתות שבהם עוברת זרימה הן ההתאמה המקסימלית M.



בסוף האלגוריתם מתקיים $|M|=|f|$ מספר הקשתות מקס'לי שווה לזרימה מקס'לית