11/11 בס"ד

נושא 2 - אוטומט סופי דטרמיניסטי

א) אוטומט סופי

אוטומט סופי הוא מודל מתמטי מופשט המתאר מערכת שמגיבה לקלטים. עבור כל קלט האוטומט מתחיל את החישוב תמיד באותו מצב. האוטומט עובר על הקלט אות אחר אות, עבור כל אות האוטומט עובר למצב חדש, התלוי במצב הקודם והאות שנקראה. 25:50
בסוף הקלט האוטומט יחזיר האם הוא מקבל / לא מקבל את הקלט. ערך החזרה זה תלוי אך ורק במצבו הסופי של האוטומט. אוטומט סופי אינו יכול לזכור ואין חשיבות לזמן ריצה.
המיוחד באוטומט סופי הוא שאורך הקלט סופי וכן מספר המצבים האפשריים באוטומט סופי.
הדרך להציג אוטומט סופי היא באמצעות גרף כמו שמוצג בהמשך. יש שני סוגים של אוטומט סופי: דטרמיניסטי ולא דטרמיניסטי (בו נעסוק בנושא הבא).

ב) אוטומט סופי דטרמיניסטי

זהו אוטומט סופי ולו חמישה מרכיבים:

(1) א"ב - Σ: כל אותיות הקלט האפשריות עבור האוטומט. מספר האותיות בא"ב חייב להיות סופי.

(2) קבוצת מצבים - Q: כל המצבים שבהם יכול האוטומט להימצא. המצבים יהיו ממוספרים מ-0 עד מספר המצבים. נסמן מצב במקום i - q_i. מספר המצבים חייב להיות סופי.

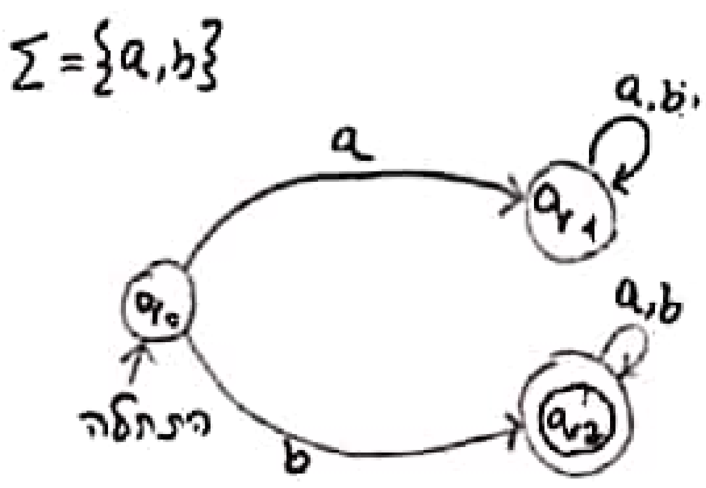
(3) מצב התחלתי - q_0: המצב שממנו מתחיל האוטומט את מסלול החישוב עבור כל מילת קלט. $q_0\in Q$.

(4) קבוצת מצבים מקבלים - F: קבוצה מתוך קבוצת המצבים, יכולה להיות $\emptyset$, שאם החישוב מסתיים בהם, אזי האוטומט מקבל את מילת הקלט.

(5) פונקציית המעברים - δ: לכל זוג של מצב ואות פונקציית המעברים מתאימה מצב אחד ויחיד שאליו עובר האוטומט כאשר במצב זה נקראת אות זו. $\delta:Q\times\Sigma\to Q$.
נפרט עוד בסעיף ג'.

אם כן, כדי לתאר אוטומט סופי דטרמיניסטי נדרשים 5 משתנים: $A=(\Sigma_A,Q_A,q_{0A},F_A,\delta_A)$.
המיוחד באוטומט סופי דטרמיניסטי שבו לכל מצב יש פונקציית מעברים לכל אות אפשרית ב-Σ, כך שהאוטומט לעולם לא נתקע.

ג) הצגה באמצעות גרף



מקובל לייצג אוטומט באמצעות גרף, שבו הקודקודים הם מצבים, הקשתות מייצגות את פונקציית המעבר, ומצבים מקבלים מיוצגים ע"י עיגול כפול.

3) פונקציית המעברים - δ

פונקציית המעברים $\delta:Q\times\Sigma\to Q$ זוהי הפונקציה שבאמצעותה עוברים בין מצב למצב בהתאם לאותיות שקוראים. הפונקציה מקבלת זוג סדור של מצב ואות, המייצג מצב נוכחי ואות שקראנו, ומחזירה להם את המצב הבא שהאוטומט יעבור בו. $\delta(q_i,a)=q_j$, יכול להיות $i=j$, כלומר שנשארים באותו מצב. פונקציית המעברים אינה חח"ע ואינה על.

באוטומט סופי דטרמיניסטי לכל מצב יש $|\Sigma|$ פונקציות מעבר. בסה"כ יש $|\Sigma|\cdot|Q|$ ערכים שהפונקציה מקבלת. ניתן לייצג את כל האפשרויות בטבלה כמו שמתואר בצד שמאל.

δ	a	b
q_0	q_1	q_2
q_1	q_1	q_1
q_2	q_2	q_2

הרחבת פונקציית המעברים למילים -

פונקציית המעברים שהגדרנו מתייחסת לקריאת אות בודדת, אמנם נרצה גם לתאר ריצות של האוטומט על מילים, לכן נרחיב את הגדרת פונקציית המעברים למילים באופן הבא:

$\hat{\delta}:Q\times\Sigma^*\to Q$ כאשר $\begin{cases}\delta(q,\varepsilon)=q\\ \delta(q,wa)=\delta(\delta(q,w),a)\end{cases}$, כלומר $\delta(q,w)$ הוא המצב אליו מגיעים לאחר קריאת כל המילה ב-w. נרחיב את פונקציית המעברים גם לשרשור מילים.

ε - מילה.
a - אות.
$\hat{\delta}$ - פונ' מעברים למילים

משפט: לכל $q\in Q$ ולכל $w_1,w_2\in\Sigma^*$ מתקיים: $\delta(q,w_1\cdot w_2)=\delta(\delta(q,w_1),w_2)$.

הוכחה: נוכיח באמצעות אינדוקציה על אורך w_2 - $|w_2|$.

בסיס - עבור $|w_2|=0$ כלומר $w_2=\varepsilon$ נקבל: $\delta(q,w_1\cdot w_2)=\delta(q,w_1)=\delta(\delta(q,w_1),\underbrace{\varepsilon}_{w_2})$.

הנחה - נניח שהטענה נכונה עבור $|w_2|=n$

הוכחה - נוכיח עבור $|w_2|=n+1$. נניח כי $w_2=ua$ כאשר u מילה באורך n ו-a אות כלשהי.

נקבל: $\delta(q,w_1\cdot w_2)\underset{\text{מהגדרת } w_2}{=}\delta(q,w_1\cdot ua)\underset{\text{מהגדרת } \delta \text{ למילים}}{=}\delta(\delta(q,w_1 u),a)\underset{\text{מהנחת האינדוקציה}}{=}\delta(\delta(\delta(q,w_1),u),a)=$

$\underset{\text{מהגדרת } \delta \text{ למילים}}{=}\delta(\delta(q,w_1),ua)\underset{\text{מהגדרת } w_2}{=}\delta(\delta(q,w_1),w_2)$ מ.ש.ל

ה) שפה של אוטומט

יהי A אוטומט סופי דטרמיניסטי. שפת האוטומט A, המסומנת L(A), היא קבוצת כל המילים המתקבלות על ידי A, כלומר כל המילים המסתיימות במצב מקבל כלשהו. $L(A)=\{w\in\Sigma^*|\delta(q_0,w)\in F_A\}$.

הגדרה נוספת היא "שפה של מצב". נגדיר שפה של מצב q, שנסמנה $L_A(q)$ להיות כל המילים עבורן האוטומט מסתיים ב-q. $L_A(q)=\{w\in\Sigma^*|\delta(q_0,w)=q\}$.

נשים לב כי איחוד כל שפות המצבים המקבלים שווים לשפת האוטומט: $L(A)=\bigcup_{q\in F}L_A(q)$.

אם קיים לשפה L אוטומט סופי דטרמיניסטי A כך שמתקיים $L(A)=L$, אזי נאמר כי A מקבל/מכריע את L. כל מילה שאינה ב-L לא תתקבל ב-A.

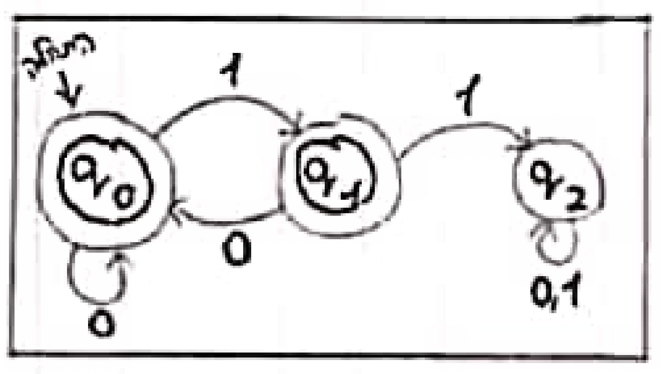
[illegible] להגדיר שפה
[illegible]מה של אוטומט
$\overline{L(A)}$, שפה מחליפים
ל מצב מקבל למצב
א מקבל, וכל מצב
א מקבל למצב מקבל.

7

1) בניית אוטומט

כאשר רוצים לבנות אוטומט לשפה כלשהי, יש קודם להחליט מהם המצבים אותם אנו רוצים לזכור במהלך המעבר על הקלט, כך שבאמצעותם נוכל להגיע אל מצב מקבל.

דוגמאות:



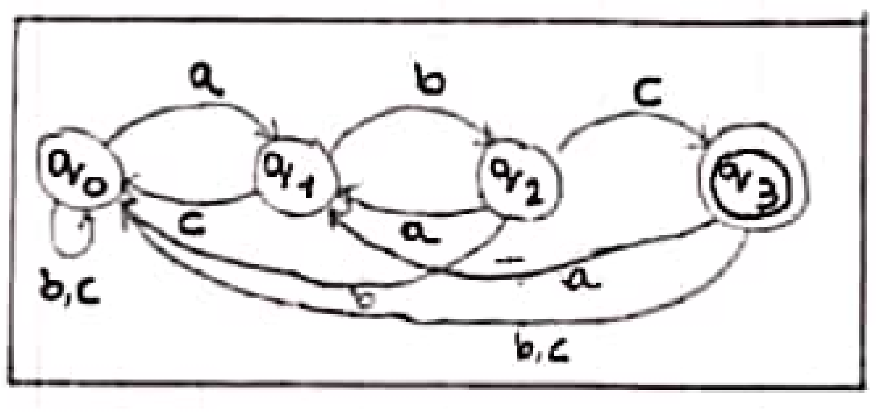
(1) האוטומט משמאל $\Sigma=\{0,1\}$, $Q=\{q_0,q_1,q_2\}$, $F=\{q_0,q_1\}$.

שפת האוטומט - כל המילים שאין בהם 11.

q_0 - קלט עד כה מסתיים ב-0 ואין 11.

q_1 - קלט עד כה מסתיים ב-1 ואין 11.

q_2 - בקלט עד כה יש 11. מצב q_2 הוא "בור", כלומר ממנו אי אפשר לצאת.



(2) האוטומט משמאל $\Sigma=\{a,b,c\}$, $Q=\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$, $F=\{q_3\}$

שפת האוטומט - כל המילים המסתיימות ב-abc.

q_0 - קלט עד כה אינו מסתיים ב- a/ab/abc.

q_1 - קלט עד כה מסתיים ב-a.

q_2 - קלט עד כה מסתיים ב- ab.

q_3 - קלט עד כה מסתיים ב-abc.

2) הוכחת נכונות של האוטומט

לאחר שבנינו אוטומט A שמקבל את השפה L, נרצה להוכיח שהאוטומט אכן מקבל את השפה. דרך ההוכחה היא באמצעות הכלה דו כיוונית:

(1) $L(A)\subseteq L$: נראה שקלט w המתקבל באוטומט, כלומר מסתיים במצב מקבל, מקיים גם את התנאי של השפה. בדרך כלל נעשה זאת באינדוקציה על אורך הקלט $|w|$.

(2) $L\subseteq L(A)$: נראה שמילה המקיימת את תנאי השפה גם תסתיים במצב מקבל באוטומט. בדרך כלל ע"י אינדוקציה על אורך המילה $|w|$.

נשתמש באינדוקציה כאשר הגדרת השפה לא באינדקסים והגיים בקלט אלא לאורך כל הקלט. אחרת, יותר נוח הוכחה בהנחה בשלילה על התכונות של האוטומט.

דוגמא להוכחה עבור אוטומט (1) מעמוד קודם.

(1) כיוון ראשון $L(A)\subseteq L$: תהי $w\in L(A)$ נוכיח באינדוקציה על $|w|$ כי $w\in L$ (לא מכיל 11).

בסיס - כאשר $|w|=0$, כלומר $w=\varepsilon$ אזי $w\in L(A)$ בגלל ש-$\delta(q_0,\varepsilon)=q_0$ וגם ε לא מכיל 11

הנחה - נניח כי הטענה נכונה עבור w כאשר $|w|=n$.

הוכחה - נוכיח עבור $|w|=n+1$. נניח כי המילה היא $w\cdot a$, המילה משלב קודם ו- $a\in\{0,1\}$.

18/11

8

מכיוון ש-$wa\in L(A)$ אז בהכרח המצב הסופי הוא q_0 או q_1, שהם מצבים מקבלים.
נבחן את שתי האפשרויות. באפשרות הראשונה לפי פונקציית המעברים: $\delta(q_0,wa)=\delta(\delta(q_0,w),a)=q_0$.
מכיוון ש-w מסתיים גם כן ב-q_0 או ב-q_1 שהרי גם הוא שייך ל-$L(A)$, a חייב להיות 0,
אחרת לא נגיע ל-q_0. ומכאן לפי הנחת האינדוקציה w אינו מכיל 11 ולכן גם wa לא.
באפשרות השנייה, לפי פונקציית המעברים נקבל: $\delta(q_0,wa)=\delta(\delta(q_0,w),a)=q_1$. באותו אופן,
מכיוון ש-$w\in L(A)$, כדי להגיע ל-q_1 w חייב להסתיים ב-0 ו-a חייב להיות 1. ולפי
הנחת האינדוקציה w אינו מכיל 11 ולכן גם wa לא.

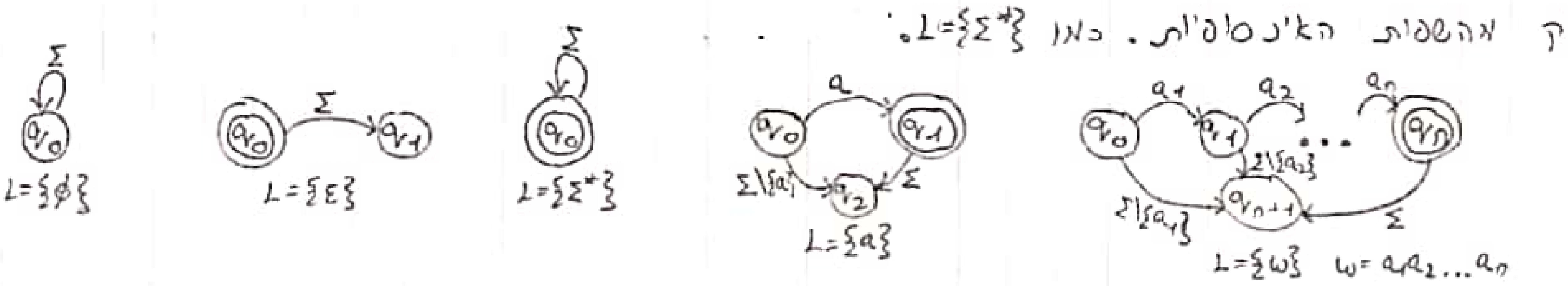
(2) כיוון שני $L\subseteq L(A)$: צ"ל להוכיח שאם $w\in L$ אז $w\in L(A)$. נוכיח בדרך ההפוכה כלומר
נניח ש-$w\notin L(A)$ ונוכיח כי גם $w\notin L$. אם $w\notin L(A)$ אז בהכרח $\delta(q_0,w)=q_2$. לשם
כך חייב להתקיים $w=x11y$, כאשר x,y הם רצף כלשהו של 0 ו-1, כי זו הדרך
היחידה להגיע ל-q_2. ומכאן ש-$w\notin L$.

ח) שפה רגולרית

שפה L תיקרא "שפה רגולרית" אם יש אוטומט סופי דטרמיניסטי A שמקבל אותה, $L(A)=L$.
בוודאי ישנן שפות שהן לא רגולריות, שהרי מספר האוטומטים האפשריים הוא $\aleph_0$ לכל היותר,
מפני שלכל אוטומט סופי יש מספר סופי של מצבים, ואילו מספר השפות האפשריות
מעל Σ הוא $|P(\Sigma^*)|$. מכאן שמספר האוטומטים בן מנייה ואילו מספר השפות אינו
בן מנייה, לכן בהכרח ישנן שפות לא רגולריות.

סוגי שפות רגולריות:

- שפות סופיות. כמו $L=\{\emptyset\}$, $L=\{\varepsilon\}$, $L=\{a\}$ כאשר $a\in\Sigma$, $L=\{w\}$ כאשר $w\in\Sigma^*$.
- שפות אינסופיות שהשפות המשלימות שלהן סופיות. ניתן בשוט להחליף בין המצבים המקבלים ללא מקבלים
- חלק מהשפות האינסופיות. כמו $L=\{\Sigma^*\}$.



בגוף עקרוני כדי שיהיה שפה האוטומט צריך לזכור ערך גדול וגם להגיע לאינסוף, השפה היא לא רגולרית.

נניח ששפה אינסופית היא רגולרית בדרך השלילה. בשלילה שהיא ... לאחר מכן נראה שבאוטומט יש שני מצבים שונים שלאותו מצב הם מגיעים. לכן נשרשר לשתיהם מילה שתביא לאחת להיות מקבלת ולשנייה לא. כך נגיע לסתירה.

דוגמא לשפה לא רגולרית:

טענה: השפה $L=\{0^n1^n\mid n\geq 1\}$ אינה רגולרית. מילה ב-L מתחילה ב-n פעמים 0 ולאחר מכן n פעמים 1.
הוכחה: נניח בשלילה ש-L רגולרית, $\underbrace{\text{.}}_{\text{אז קיים אס"ד }A\text{ שמקבל אותה}}$ נגדיר את q_i כמצב אליו מגיעים לאחר i פעמים 0, $\delta(q_0,0^i)=q_i$. כיוון שמספר
המצבים סופי ונדרש הסדרה אינסופית. לפי עקרון שובך היונים קיים $i\neq j$ כך ש-$q_i=q_j$, כלומר $\delta(q_0,0^i)=\delta(q_0,0^j)$.

25/11

כעת נוכל לקבל:
$$\delta(q_0,0^j1^i) \underset{\text{תכונת פונ' מעברים}}{=} \delta(\delta(q_0,0^j),1^i) \underset{q_i=q_j \text{ נתון}}{=} \delta(\delta(q_0,0^i),1^i) \underset{\text{תכונת פונ' מעברים}}{=} \delta(q_0,0^i1^i)$$

אמנם $\delta(q_0,0^i1^i)\in F$ ושייך למצבי מקבל, ואילו $\delta(q_0,0^j1^i)\notin F$ אינו שייך למצב מקבל. סתירה!

ט) פעולות על שפות רגולריות

בהינתן שפה רגולרית נרצה לבדוק האם הפעולות הבאות: הכלה, משלים, חיתוך ואיחוד, על שפה זו, גם כן תהיה שפה רגולרית.

(1) הכלה:

שאלה - L_1 היא שפה רגולרית המוכלת ב-L_2, $L_1\subseteq L_2$. האם גם L_2 רגולרית?

תשובה - לא. נביא דוגמא נגדית. נגדיר $L_1=\{01\}$ שפה בת מילה אחת, ו-$L_2=\{0^n1^n \mid n\geq 1\}$.

נשים לב כי $L_1\subseteq L_2$ אך L_1 רגולרית ו-L_2 אינה רגולרית כמו שהוכחנו בסעיף קודם.

(2) השלמה:

שאלה - אם שפה L רגולרית, האם בהכרח גם השפה המשלימה $\bar{L}$ רגולרית?

תשובה - כן. מכיוון שאם L רגולרית אזי יש אוטומט A שמקבל אותה, נוכל לבנות אוטומט חדש $\bar{A}$ שבו נחליף בין המצבים המקבלים ללא מקבלים ונקבל אוטומט שמקבל את $\bar{L}$.

נגדיר $A=(Q,\Sigma,q_0,\delta,F)$, ומכאן $\bar{A}=(Q,\Sigma,q_0,\delta,Q\setminus F)$. נוכיח $L(\bar{A})=\bar{L}$:
$$w\in\bar{L} \Leftrightarrow w\notin L=L(A) \Leftrightarrow \delta(q_0,w)\notin F \Leftrightarrow \delta(q_0,w)\in Q\setminus F \Leftrightarrow w\in L(\bar{A})$$

⊛ הערה: אם L לא רגולרית האם בהכרח $\bar{L}$ גם לא רגולרית? כן. נניח בשלילה ש-$\bar{L}$ רגולרית, אזי לפי משפט קודם $\bar{\bar{L}}$ רגולרית. והרי $\bar{\bar{L}}=L$, ומכאן ש-L רגולרית. סתירה!

(3) חיתוך:

שאלה - נתון כי שפות L_1 ו-L_2 רגולריות, האם גם השפה $L_1\cap L_2$ רגולרית?

תשובה - כן. באמצעות האוטומטים A_1,A_2 המקבלים את השפות L_1,L_2 נוכל לבנות אוטומט A שיקבל את השפה $L_1\cap L_2$. אוטומט הנבנה באמצעות חיתוך בין שתי שפות נקרא "אוטומט המכפלה".

נגדיר $A_1=(Q_1,\Sigma,q_{01},F_1,\delta_1)$, $A_2=(Q_2,\Sigma,q_{02},F_2,\delta_2)$ אוטומטים שונים עם אותו אוסף מילים Σ.

באוטומט המכפלה יש $|Q_1\times Q_2|$ מצבים כאשר כל מצב הוא זוג של מצבים (q_1,q_2) אחד מ-A_1 והשני מ-A_2. נגיע למצב (q_1,q_2) רק אם נקרא מילה w שבאוטומט A_1 תגיע ל-q_1, ובאוטומט A_2 תגיע ל-q_2. כדי לקבל מילה צריך ש-q_1 מקבל ב-A_1 ו-q_2 מקבל ב-A_2.

$A=(Q,\Sigma,q_0,\delta,F)$ כך ש $Q=Q_1\times Q_2$, $q_0=(q_{01},q_{02})$, $F=F_1\times F_2$,

$\forall q_1\in Q_1,\ q_2\in Q_2$ כך ש $\delta((q_1,q_2),a)=(\delta_1(q_1,a),\delta_2(q_2,a))$

נוכיח שאכן באוטומט המכפלה A מתקיים: $L(A)=L_1\cap L_2$.

נשתמש בטענת עזר: $\forall w\in\Sigma^*,\ \forall(q_1,q_2)\in Q \Rightarrow \delta((q_1,q_2),w)=(\delta_1(q_1,w),\delta_2(q_2,w))$

זוהי בעצם הגדרת פונקציית המעברים של אוטומט המכפלה למילים. ניתן להוכיח בקלות ע״י אינדוקציה על $|w|$

נוכיח באמצעות הכלה דו כיוונית:

$$w\in L(A) \Leftrightarrow \delta(q_0,w) \underset{\text{תכונת אוטומט המכפלה}}{=} \delta((q_{01},q_{02}),w)\in F \underset{\text{תכונת אוטומט המכפלה}}{=} F_1\times F_2 \underset{\text{טענת עזר}}{\Leftrightarrow} (\delta_1(q_{01},w),\delta_2(q_{02},w))\in F_1\times F_2$$

$$\underset{\text{תכונת אוטומט המכפלה}}{\Leftrightarrow} \delta_1(q_{01},w)\in F_1 \cap \delta_2(q_{02},w)\in F_2 \underset{\text{הגדרת אוטומט}}{\Leftrightarrow} w\in L_1\cap w\in L_2 \Leftrightarrow w\in L_1\cap L_2$$ מש״ל

(4) איחוד:

שאלה - נתון כי שפות L_1,L_2 רגולריות, האם גם השפה $L_1\cup L_2$ רגולרית?

תשובה - כן. יש שתי דרכים להוכיח זאת:

① נבנה אוטומט זהה לאוטומט המכפלה אלא שהשינוי היחיד כי הוא הקבוצת המצבים המקבלים F אותם נגדיר: $F=\{(q_1,q_2)\mid q_1\in F_1 \text{ או } q_2\in F_2\}=(F_1\times Q)\cup(F_2\times Q)$

ההוכחה תהיה זהה בדיוק להוכחה של חיתוך שפות, אלא שנתחשב בשינוי ב-F.

② כיוון ש-L_1,L_2 רגולריות אזי גם השפות המשלימות $\overline{L_1},\overline{L_2}$ רגולריות, ובפרט החיתוך בין השפות המשלימות $\overline{L_1}\cap\overline{L_2}$ רגולרית, כמו שהוכחנו לעיל. ולפי חוקי דה-מורגן מתקיים $L_1\cup L_2=\overline{L_1}\cap\overline{L_2}$. לכן גם איחוד השפות היא שפה רגולרית.

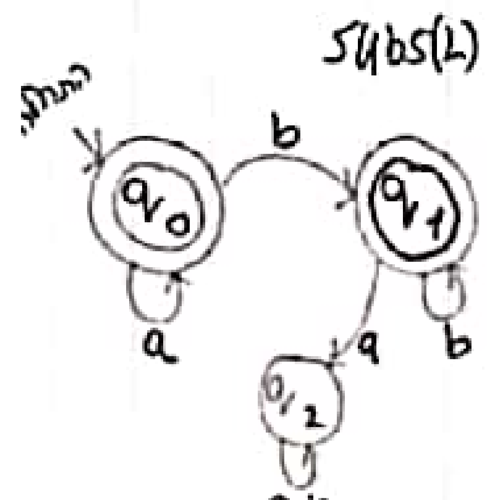
* הערה: נלמד עוד בעיות על שפות רגולריות בפרק הבא של אוטומט סופי לא דטרמיניסטי.

ד) תרגילים

(1) הוכח או הפרך: עבור שפה L, נגדיר שפה חלקית ל-L: $subs(L)=\{y\in\Sigma^*\mid \exists x,z\in\Sigma^*, xyz\in L\}$.

$subs(L)$ היא השפה המכילה את כל תתי המילים של L. אם L לא רגולרית אזי $subs(L)$ לא רגולרית.

תשובה: הפרכה, נביא דוגמא נגדית. נגדיר $L=\{0^n1^n\mid n\ge 1\}$ שאינה רגולרית. אזי $subs(L)$ היא כל תתי המילים ב-L: $subs(L)=\{0^l1^m\mid l,m\ge 1\}$ שהיא כן רגולרית.



(2) הוכח או הפרך: אם השפות L_2,L_3,L_4 רגולריות ומתקיים: $L_1\cup L_2=L_3$, $L_1\cap L_2=L_4$ אזי גם L_1 רגולרית.

תשובה: הוכחה. נבטא את L_1 באמצעות השפות האחרות: $L_1=L_3\cap\overline{L_2}\cup L_4$

כיוון ש-L_2 רגולרית אזי גם השפה המשלימה $\overline{L_2}$ רגולרית. ולכן גם $L_3\cap\overline{L_2}$ רגולרית מכיוון שזהו חיתוך שפות רגולריות. ומכאן $L_3\cap\overline{L_2}\cup L_4$ רגולרית בגלל איחוד שפות רגולריות. מסקנה: L_1 רגולרית.

16/12 בס"ד

15

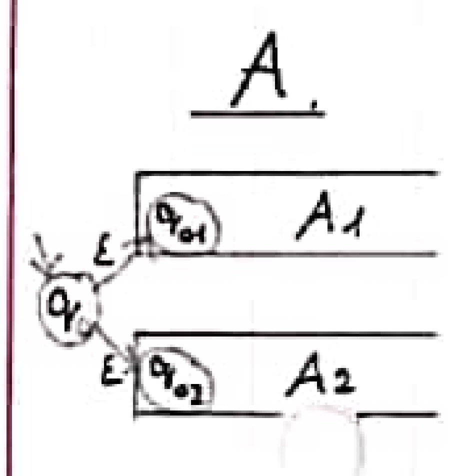
נושא 4 - פעולות נוספות על שפות רגולריות

בנושא 2 ראינו ששפות רגולריות סגורות לפעולות השלמה, חיתוך ואיחוד (לא הוכחה). בנושא זה נוכיח דרך נוספת להוכחת סגירות לאיחוד וסגירות לפעולות נוספות: שרשור, איטרציה והיפוך, באמצעות מה שלמדנו בנושא קודם על אוטומט סופי לא דטרמיניסטי ומעברי ε.

א) סגירות לאיחוד

יהיו L_1,L_2 שתי שפות רגולריות, נרצה להוכיח שגם $L_1 \cup L_2$ רגולרית.

הוכחה: כיוון ש-L_1 ו-L_2 רגולריות יש להם אוטומט A_1,A_2 שמקבל אותם. $A_i=(Q_i,\Sigma,q_{0i},\delta_i,F_i)$, $i=\{1,2\}$.
נניח כי $Q_1\cap Q_2=\emptyset$, כלומר אין מצבים משותפים. נגדיר אוטומט חדש A שבו מצב התחלתי q_0 שבו יש מסע' ε ל-q_{01} ו-q_{02}. מלבד זאת A_1 ו-A_2 נשארים כפי שהם. עבור כל מילה w מ-L_1 או מ-L_2, האוטומט "ינחש" נכון לפי שייכות המילה ילך או ל-q_{01} או q_{02}, ולכן מקבל $L_1\cup L_2$.



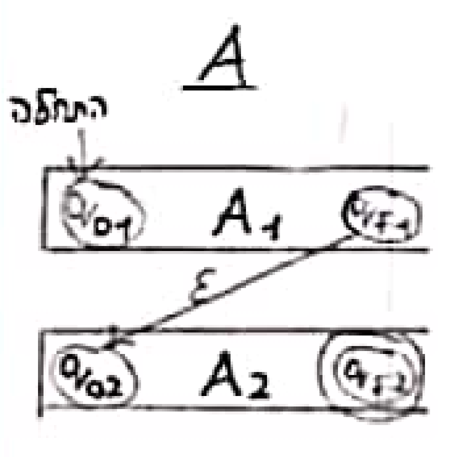
ב) סגירות לשרשור

יהיו L_1,L_2 שתי שפות רגולריות, נרצה להוכיח שגם השרשור שלהן $L_1\cdot L_2$ שפה רגולרית.

$L_1 L_2$ היא שפה שבה כל מילה מורכבת משני מילים, הראשון שייך ל-L_1 והשני ל-L_2.

הוכחה: כיוון ש-L_1 ו-L_2 רגולריות יש להם אוטומטים A_1,A_2 שמקבלים אותם. $A_i=(Q_i,\Sigma,q_{0i},\delta_i,F_i)$, $i=\{1,2\}$.
שאין ממנו הקשתות יוצאות
נניח כי $Q_1\cap Q_2=\emptyset$, כלומר אין מצבים משותפים, וגם לכל אוטומט יש מצב מקבל יחיד: q_{F1},q_{F2}.
נגדיר אוטומט חדש A שמתחיל מ-q_{01}, וב-q_{F1} יש מסע' ε ל-q_{02}. המצב המקבל היחיד הוא q_{F2}. באוטומט זה כל מילה מ-L_1 תגיע ל-q_{F1} תעבור ל-q_{02} ואז מילה מ-L_2 תתקבל.
לכן האוטומט מקבל $L_1\cdot L_2$.

ניתן להעביר כל אוטומט לאוטומט מסוג כזה ע"י יצירת מעברת מסע' ε למצב חדש וביטול המצב המקבל בכולם חוץ ממנו.

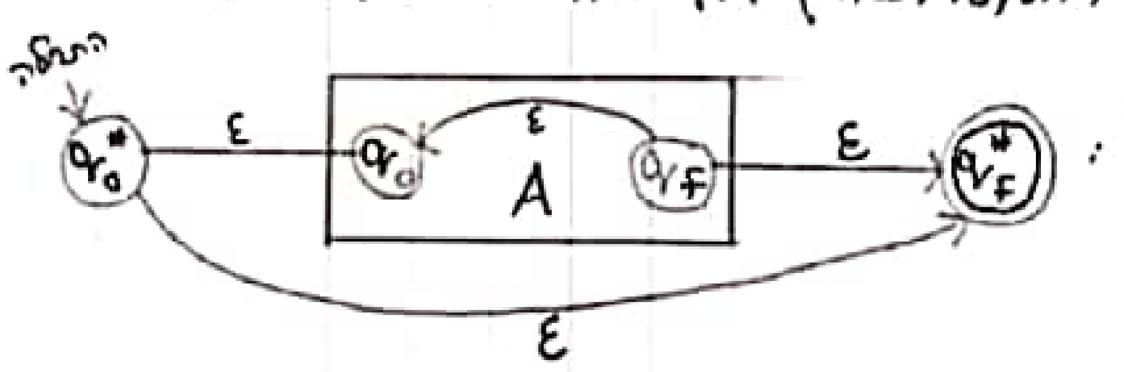


ג) סגירות לאיטרציה

תהי L שפה רגולרית, נרצה להוכיח כי גם האיטרציה שלה L^* שפה רגולרית.

L^* היא שפה שבה כל מילה מורכבת ממספר כלשהו של מילים (כולל 0) מ-L.

הוכחה: כיוון ש-L רגולרית נגדיר אוטומט A שמקבל אותה $A=(Q,\Sigma,q_0,\delta,F)$. נניח כי ל-A יש מצב מקבל יחיד שאין ממנו הקשתות יוצאות q_F.



נבנה אוטומט A^* כמו הדוגמה בצד שמאל. באוטומט זה $\varepsilon\in L(A^*)$ שיש מעבר ε למצב מקבל. וכן שרשור כלשהו בין מילים ב-L נמצאים בשפת האוטומט מפני שיש לולאה לכל $w\in L(A)$ עם מסע' ε בין q_F ל-q_0. לכן האוטומט מקבל את L^*.

23/12

16

3) סגירות להיפוך

תהי L שפה רגולרית, נרצה להוכיח כי גם ההיפוך שלה L^R שפה רגולרית.

L^R היא שפה שכל המילים הם המילים מ-L רשומות מהסוף להתחלה.

הוכחה: כיוון ש-L רגולרית יש לה אוטומט שמקבל אותה $A=(Q,\Sigma,q_0,\delta,F)$. נגדיר אוטומט חדש $A^R=(Q\cup\{q_s\},\Sigma,q_s,\delta_R,\{q_0\})$. באוטומט זה נוסיף מצב חדש ונחבר במסעי ε מצב זה לכל המצבים ב-F. q_s הוא המצב ההתחלתי. נהפוך את הכיוון של כל החיצים כך שבעת לכל $\forall q\in Q, \forall a\in\Sigma, \delta(q,a)=p$, נגדיר את פונקציית המעברים $q\in\delta_R(p,a)$. כלומר, עבור כל מצב, δ_R מחזירה את כל המצבים שב-δ ניתן להגיע מהם אליו עבור אותו קלט. מסיבה זו A_R הוא בהכרח אוטומט לא דטרמיניסטי עם מסעי ε.

המצב המקבל היחיד ב-A_R הוא q_0.

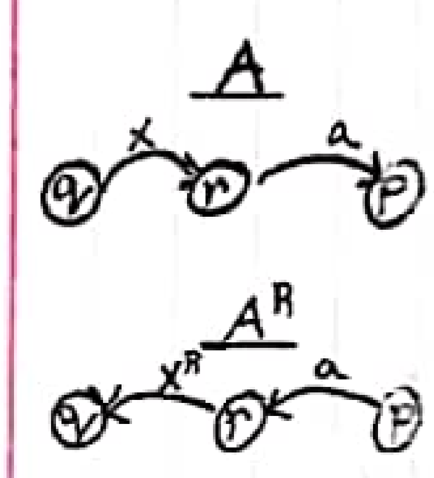
נוכיח באינדוקציה על אורך המילה $|w|$ כי $\delta(q,w)=p \Leftrightarrow q\in\delta_R(p,w^R)$.

בסיס - עבור $|w|=0$, כלומר $w=\varepsilon$ אזי $\delta(q,\varepsilon)=q$. ההיפך הוא זהה לכן מתקיים.

הנחה - נניח שהטענה נכונה עבור $|w|=n$.

הוכחה - נוכיח עבור $|w|=n+1$ נניח ש $w=xa$ כאשר $a\in\Sigma$. מתקיים

$$\underline{\delta(q,w)=p} \Leftrightarrow \delta(q,xa)=p \Leftrightarrow \delta(\underbrace{\delta(q,x)}_{\text{נסמן: מצב זה } r},a)=p \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow r\in\delta_R(p,a) \text{ וגם } q\in\delta_R(r,x^R) \Leftrightarrow q\in\delta_R(\delta_R(p,a),x^R) \Leftrightarrow$$

מהנחת האינדוקציה על שתי הפונקציות במשוואה קודמת

מחליף שני המשוואות

$$\Leftrightarrow q\in\delta_R(p,ax^R) \Leftrightarrow \underline{q\in\delta_R(p,w^R)}$$ מ.ש.ל.

הגדרת פונ' המעברים