מבנים דיסקרטיים למדעי המחשב – דף נוסחאות

1. **בחירה של k איברים מתוך n:**

עם חזרות, עם חשיבות לסדר: n^k

בלי חזרות, עם חשיבות לסדר: $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$

בלי חזרות, בלי חשיבות לסדר:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

עם חזרות, בלי חשיבות לסדר:

$$\binom{n+k-1}{n-1}$$

2. **משפט הבינום של ניוטון:**

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

3. **משפט המולטינום:**

$$(a_1 + \cdots a_m)^n = \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1,\dots,k_m} \prod_{i=1}^{m} a_i^{k_i}$$

כאשר:

$$\binom{n}{k_1,\dots,k_m} = \frac{n!}{k_1!\cdots k_m!}$$

4. **עיקרון ההכלה והדחה:**

$$|B_1 \cup \cdots \cup B_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1<\cdots<i_k} \left|B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_k}\right|$$

5. **מספרי Catalan** : יהי C_n מספר המחרוזות x באורך $2n$ מעל $\{0,1\}$ עם n אפסים בדיוק, כך שבכל רישא של x, מספר האפסים ברישא גדול או שווה למספר האחדים. אז:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

6. **משפט Erdős-Szekeres** : בכל סדרה של $(n-1)^2+1$ מספרים שונים קיימת תת-סדרה מונוטונית (עולה או יורדת) באורך n.

7. **עיקרון שובך היונים:** אם $dt+1$ יונים נכנסים ל-t שובכים, אז קיים שובך עם לפחות $d+1$ יונים.

8. **הגדרה:** גרף קשיר שאין בו מעגל פשוט נקרא **עץ**.

9. **משפט:** כל גרף קשיר עם n קודקודים מכיל לפחות $n-1$ צלעות.

10. **משפט:** כל גרף עם $n \geq 3$ קודקודים ולפחות n צלעות מכיל מעגל פשוט.

11. **משפט:** יהי G גרף קשיר ותהי e צלע של G. אז $G \backslash \{e\}$ הוא קשיר אם ורק אם e נמצאת על מעגל פשוט ב-G.

12. **משפט Hall :** יהי $G = (V_1 \cup V_2, E)$ גרף דו-צדדי עם צדדים V_1, V_2 , כאשר $|V_1| \leq |V_2|$. אז G מכיל זיווג מושלים אם ורק אם לכל תת-קבוצה $S \subseteq V_1$ מתקיים $|N(S)| \geq |S|$, כאשר $N(S)$ היא קבוצת השכנים של הקודקודים ב-S.

13. **נוסחת Euler :** בכל הצגה מישורית של גרף מישורי מתקיים $n - m + f = 2$ כאשר n הוא מספר הקודקודים, m הוא מספר הצלעות, ו-f הוא מספר הפאות.

14. **משפט:** כל גרף מישורי עם $n \geq 3$ קודקודים מכיל לכל היותר $3n - 6$ צלעות.

15. **אסימפטוטיקה:** יהיו $f, g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ פונקציות.
    - מסמנים $f = O(g)$ אם קיימים c, x_0 כך שלכל $x \geq x_0$ מתקיים $f(x) \leq c \cdot g(x)$.
    - מסמנים $f = \Omega(g)$ אם $g = O(f)$.
    - מסמנים $f = \Theta(g)$ אם גם $f = O(g)$ וגם $f = \Omega(g)$.
    - מסמנים $f = o(g)$ אם $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
    - מסמנים $f = \omega(g)$ אם $g = o(f)$.

16. **פתרון נוסחאות נסיגה:** תהי
$$f(n) = c_1 f(n-1) + \cdots + c_k f(n-k)$$
נוסחת נסיגה, כאשר $c_1, \ldots, c_k$ הם קבועים. יהי
$$p(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k$$
הפולינום האופייני המתאים לנוסחה. יהיו $z_1, \ldots, z_\ell \in \mathbb{C}$ השורשים השונים של p, ויהיו $d_1, \ldots, d_\ell$ הריבויים שלהם בהתאמה (לכן $d_1 + \cdots + d_\ell = k$). אז כל פתרון לנוסחת הנסיגה הוא צירוף לינארי של $A = A_1 \cup \cdots \cup A_\ell$ כאשר
$$A_i = \{z_i^n, n z_i^n, \ldots, n^{d_i - 1} z_i^n\}$$