26/11

הנגזרת

1) הגדרה

כדי למצוא משוואת ישר אנו צריכים שיהיו לנו שני כלים: נקודה על הישר ואת השיפוע שלו. את השיפוע של הישר ניתן למצוא בעזרת שתי נקודות על הישר ולהשתמש בנוסחה $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. אבל מה נעשה כאשר נרצה למצוא משוואת ישר המשיק לפונקציה בנק' $(x_0, f(x_0))$? הרי יש לנו רק נקודה אחת? לצורך כך ניקח נק' אחרת על הישר המשיק ונאמר שהנק' הזו היא x_0+h כאשר h שואף ל-0. מכאן נגיע לנוסחה $m=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

שיפוע המשיק של הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_0 נקרא "<u>הנגזרת</u> של הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_0". נגזרת פירושה שיפוע המשיק. אם בנק' x_0 הגבול של הנוסחה שווה לאינסוף או שאין גבול, נאמר שהפונקציה אינה גזירה בנק' x_0, היינו שאין שיפוע בנק' זו. מקובל לסמן נגזרת בסימון $f'(x)$.

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad , \quad f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

2) משוואת משיק

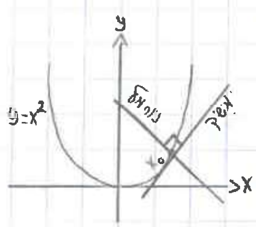
לאחר שמצאנו את שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה x_0 שהוא $f'(x_0)$, נוכל למצוא את משוואת המשיק לפונקציה בנק' x_0 בעזרת נוסחת משוואת הישר עם נקודה ושיפוע:

$$\boxed{y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0) = \text{משוואת המשיק}}$$

3) נגזרת של הפונקציה

כאשר קיימת פונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ לכל x בתחום הגדרה, נאמר שקיימת פונקציה נגזרת ל$f(x)$ שהיא $g(x)$ או $f'(x)$. המשמעות של נגזרת לפונקציה היא שבכל נקודה של הפונקציה שנציב בנגזרת נקבל את שיפוע המשיק של הפונקציה באותה נקודה.

<u>תחום הגדרה</u> - במקרה זה ודאי שתחום ההגדרה של הפונקציה חל גם על הנגזרת, אך תחום הגדרה של הנגזרת אינו משפיע על הפונקציה.



4) נורמל

נורמל הוא ישר המאונך למשיק. בהינתן פונקציה $f(x)$, הנורמל לפונקציה זו בנק' $(x_0,f(x_0))$ הוא ישר העובר דרך נק' זו ומאונך למשיק העובר דרך נק' זו. כדי למצוא את שיפוע הנורמל נשתמש בנוסחה $\boxed{m = -\frac{1}{f'(x_0)} \text{ שיפוע הנורמל.}}$ זאת במידה שהפונקציה גזירה בנק' ומתקיים $f'(x_0)\neq 0$.

את משוואת הנורמל נמצא בעזרת הנוסחה בסעיף 2. אם $f'(x_0)=0$, כלומר שמשוואת המשיק מקבילה לציר x, אז משוואת הנורמל תהיה מקבילה לציר y, היינו $x=x_0$.

5) נגזרת של פונקציה סתומה

פונקציה סתומה היא פונקציה המוצגת בצורה סתומה. הצגה סתומה של פונקציה היא כל הצגה בה ערכי הפונקציה לא מבודדים, כלומר שאינם מוצגים בצורה מפורשת של $y=f(x)$ אלא בכל צורה אחרת.

כאשר אנו רוצים לגזור פונקציה סתומה אין צורך לבודד את ה-y, מה שפעמים רבות יהיה עבודה קשה ומסובכת, אלא ניתן לגזור כל פונקציה כמו שהיא. אך חשוב לזכור שה-y הוא אינו משתנה רגיל כמו ה-x אלא הוא "פונקציה של x", לכן בכל פעם שגוזרים את y יש לאחר מכן להכפיל ב-y'. בשלבים הראשונים יהיה קל יותר אם נחליף את האות y ב-$y(x)$ או אפילו ב-$f(x)$ כל פעם שהיא מופיעה.

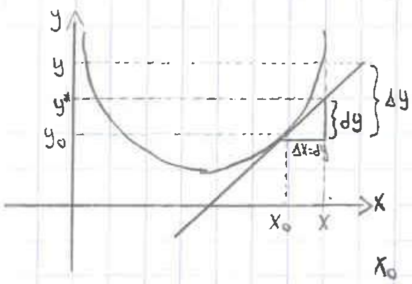
דוגמא:

א) מצא את $y'(1,1)$.

$x^3\cdot y^2=1 \Rightarrow 3x^2\cdot y^2+x^3\cdot 2y\cdot y'=0 \Rightarrow$ נציב $y=1$ $x=1$

$3\cdot 1^2\cdot 1^2+1^3\cdot 2\cdot 1\cdot y'=0 \Rightarrow 3+2y'=0 \Rightarrow y'=-\frac{3}{2}$

6) דיפרנציאל



כאשר למדנו כיצד מוצאים שיפוע של פונקציה בנקודה x_0 השתמשנו בנוסחה: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{y-y_0}{x-x_0}$. אם נסמן $\Delta x=x-x_0$ ו- $\Delta y=y-y_0$ נקבל $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

כעת נניח כי הנקודה (x,y^*) היא נק' העוברת במשיק של הפונקציה בנק' x_0 ונסמן $dx=\Delta x=x-x_0$ ו- $dy=y^*-y_0$. במקרה כזה גם כן נקבל $f'(x_0)=\frac{dy}{dx}$.

"dy" הוא הדיפרנציאל של הפונקציה $f(x)$ בנק' x_0.

דוגמא:

נתונה הפונקציה $y=\ln x$. חשב את dy ואת Δy המתאימים ל $\Delta x=dx=0.2$ בנק' $(1,0)$

$\Delta x=x-x_0=0.2 \Rightarrow x-1=0.2 \Rightarrow x=1.2 \Rightarrow \Delta y=y-y_0 \Rightarrow \Delta y=\ln 1.2-\ln 1\approx 0.1823$

$\frac{dy}{dx}=y' \Rightarrow dy=y'\cdot dx \Rightarrow dy=\frac{1}{x}\cdot 0.2=\frac{1}{1}\cdot 0.2=0.2$

7) תנאים לגזירות של פונקציה

הנוסחה שממנה מקבלים את הנגזרת בנק' x_0 היא: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ כדי שהפונקציה תהיה גזירה אנו צריכים שיתקיימו שני תנאים: א) שיש גבול שהוא סופי לנוסחה בנק' x_0. אם הגבול שווה ל-∞ או שאין גבול הפונקציה לא גזיר

ב) מאחר שהמכנה שואף ל-0 גם המונה צריך לשאוף ל-0, כלומר $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

שני תנאים אלו הם בדיוק התנאים הנדרשים "לרציפות של פונקציה", מכאן ניתן להסיק:

(1) אם הפונקציה $f(x)$ גזירה בנק' x_0, אז הפונקציה גם רציפה בנק' זו.

(2) אם הפונקציה $f(x)$ רציפה בנק' x_0, וגזירה בסביבה של x_0, וקיים הגבול $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=L$ אז הפונקציה גזירה גם בנק' x_0 ומתקיים $f'(x_0)=L$.

3/12

דוגמא:

גזור את הפונקציה הבאה:

ת״ה: לכל x

$$f(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ x+1 & 0\le x\le 2 \\ x^2-1 & x>2 \end{cases}$$

תשובה: ראשית, נגזור את הפונקציה ללא נק' התחום הגדרה והנק' שאנו חושדים שבהם הפונקציה לא רציפה, לאחר מכן נבדוק רציפות בכל נק' התפר.

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & x<0 \\ 1 & 0<x<2 \\ 2x & x>2 \end{cases}$$

$x=0$ כאשר $\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)=1 \ , \ \lim_{x\to 0^-} f(x)=0 \Rightarrow 0\neq 1 \Rightarrow$ הפונקציה אינה רציפה בנק' $x=0$ ולכן אינה גזירה

$x=2$ כאשר $\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x)=2^2-1=3 \ , \ \lim_{x\to 2^-} f(x)=2+1=3 \ , \ f(2)=2+1=3 \Rightarrow$ הפונקציה רציפה בנק' $x=2$ אך כעת נשאר לבדוק גם אם גבול הנגזרות שווה בסביבת נק' זו.

$\lim_{x\to 2^+} f'(x)=2\cdot 2=4 \ , \ \lim_{x\to 2^-} f'(x)=1 \Rightarrow$ הפונקציה אינה גזירה בנק' $x=2$

מסקנה: נגזרת הפונקציה היא-
$$f'(x)=\begin{cases} 1 & x<0 \\ 1 & 0<x<2 \\ 2x & x>2 \end{cases}$$

8) נגזרת מסדר גבוה

עד כה למדנו שהנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)$. באותו אופן ניתן לגזור גם את $f'(x)$ ולקבל את הנגזרת מסדר שני של הפונקציה $f(x)$ שהיא $f''(x)$, וכך נוכל לגזור שוב ושוב עד שהפונקציה כבר לא תהיה גזירה. פונקציה שיש לה מספר מוגבל של נגזרות היא לדוגמא פונקציה עם פולינום (רב איבר).

סימונים:

ישנם כמה דרכים לסמן נגזרות מסדר גבוה: או ע״י הוספת תג ('), או על ידי נוסחת הדיפרנציאל $\frac{dy}{dx}$, או ע״י הסימון הבא $f^{(k)}(x)$ הנוח במיוחד לנגזרות מסדר גבוה מאוד.

(1) $f'(x)=\frac{dy}{dx}=f^{(1)}(x)$

(2) $f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=f^{(2)}(x)$

(3) $f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3}=f^{(3)}(x)$

(4) $f^{(k)}(x)=\frac{d^ky}{dx^k}$

נוסחאות וכללי הגזירה

נוסחאות הגזירה

1) חזקות

$(x)' = 1$ $\quad (a)' = 0$

$(b \cdot x^{a})' = b \cdot a \cdot x^{a-1}$ $\quad (x^{a})' = a \cdot x^{a-1}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $\quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2) לוגריתמים

$(e^{x})' = e^{x}$ $\quad (a^{x})' = a^{x} \cdot \ln a \quad a>0$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$ $\quad (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad x \neq 0$

3) פונקציות טריגונומטריות

$(\cos x)' = -\sin x$ $\quad (\sin x)' = \cos x$

$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $\quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$-1 < x < 1$

$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\text{arccot}\, x)' = \frac{-1}{1+x^2}$ $\quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

4) פונקציות מורכבות בסיסיות

$(f^{a}(x))' = a \cdot f^{a-1}(x) \cdot f'(x)$

$(a^{f(x)})' = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x) \quad a>0$

$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

$(\log_a f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x) \cdot \ln a}$, $(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

$(\sin f(x))' = \cos f(x) \cdot f'(x)$

$(\cos f(x))' = -\sin f(x) \cdot f'(x)$

$(\tan f(x))' = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$

$(\cot f(x))' = -\frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$

כללי הגזירה

1) חיבור וחיסור

$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

2) כפל ומנה

$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$, $\left(\frac{f(x)}{a}\right)' = \frac{f'(x)}{a} \quad a \neq 0$

$(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

$\left(\frac{a}{f(x)}\right)' = \frac{-a \cdot f'(x)}{(f(x))^2}$

3) פונקציות מורכבות

$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

מהפונקציה החיצונית אל הפנימית

$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$

4) פונקציות מיוחדות

$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{\ln f(x)^{g(x)}}\right)' = \left(e^{g(x) \cdot \ln f(x)}\right)' =$

$e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\right) =$

$f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{g(x) \cdot f'(x)}{f(x)}\right)$

$(f_1 \cdot f_2 \cdots f_n)' = f_1' \cdot f_2 \cdots f_n + f_1 \cdot f_2' \cdots f_n + f_1 \cdots f_{n-1} \cdot f_n'$