1

אלגוריתמים 1 - דנה שפירא

נושא 1 - הפרד ומשול

האלגוריתמים שנלמד בפרק זה הם אלגוריתמים שלוקחים בעיה גדולה ומפרקים אותה לחלקים, ומתמודדים עם כל חלק בנפרד, כך שכעת הבעיה יותר קלה לפיתרון. ובסוף מחברים את כל הפתרונות יחד ובכך פותרים את הבעיה הגדולה. לרוב אלגוריתמים אלו ישתמשו ברקורסיה אך לא בהכרח. נציג מספר אלגוריתמים בשיטת הפרד ומשול וננתח אותם:

1) מציאת מינימום ומקסימום במערך

נרצה לכתוב פונקציה שמקבלת מערך ומחזירה זוג סדור (a,b), כאשר a הוא הערך של האיבר המינימלי במערך, ו-b הוא הערך של האיבר המקסימלי. הדרך הפשוטה אך לא יעילה היא לעבור פעמיים על כל המערך ולמצוא ערכים אלו. אמנם בדרך רקורסיבית בדרך של הפרד ומשול נוכל לייעל זאת.

א) דרך רקורסיבית: נחלק את המערך כל פעם לשני חלקים שווים, כאשר תנאי העצירה הוא שבמערך יש איבר אחד או שניים (נפרט בהמשך). נפעיל את הפונקציה בדרך רקורסיבית על כל אחד מהחצאים, כאשר אנו מניחים שאנו יודעים למצוא את האיברים המינימלי והמקסימלי בכל אחד מהחצאים.

תנאי העצירה - אם יש איבר 1 נחזיר אותו פעמיים, ואם יש 2 איברים נחזיר הקטן ואז הגדול.

ב) פסאודו קוד:

```
MinMax(i, j) {
    if (j = i)
        return (A[i], A[i])
    else if (j = i+1)
        if (A[i] < A[j])   return (A[i], A[j])
        else   return (A[j], A[i])
    else
        k = (i+j)/2
        (m1, M1) = MinMax(i, k)
        (m2, M2) = MinMax(k+1, j)
        return (min(m1, m2), max(M1, M2))
}
```

29/10 בס"ד

ג) חישוב זמן ריצה:

(2)

$$T(n)=\begin{cases}0 & n=1\\ 1 & n=2\\ \underset{\text{2 רקורסיות}}{2T\left(\frac{n}{2}\right)}+\underset{\text{השוואות בסוף}}{2} & n>2\end{cases}$$

$$T(n)=2T\left(\frac{n}{2}\right)+2=2\left(2T\left(\frac{n}{4}\right)+2\right)+2=2^2T\left(\frac{n}{2^2}\right)+2^2+2$$
$$=2^2\left(2T\left(\frac{n}{2^3}\right)+2\right)+2^2+2=2^3\cdot T\left(\frac{n}{2^3}\right)+2^3+2^2+2$$

לאחר k שלבים:
$$=2^kT\left(\frac{n}{2^k}\right)+2^k+\dots+2=2^kT\left(\frac{n}{2^k}\right)+2^{k+1}-2$$

במקרה הגרוע לאחר k שלבים ישארו 2 איברים, לכן $\frac{n}{2^k}=2$. ומכאן $n=2^{k+1}$. נציב זאת במשוואה.

$$T(n)=\frac{n}{2}\underset{1}{T(2)}+n-2=\frac{n}{2}+n-2=\boxed{\frac{3n}{2}-2}\Leftarrow$$ יותר יעיל

2) הכפלה בוליאנית

נרצה להכפיל שני מספרים בוליאניים x,y כאשר כל אחד באורך n. לפי שיטת כפל ארוך נצטרך להכפיל כל ספרה של x בכל ספרה של y, כך שבסך הכל נבצע n^2 פעולות כפל ו-n^2 פעולות חיבור - $O(n^2)$, כדי לקבל מספר באורך $2n$. ננסה לייעל זאת בשיטת הפרד ומשול.

א) פתרון 1: נפצל את x לשני חלקים שווים $X=X_1,X_2$, ונרשום את x בצורה הבאה: $X=X_1\cdot 2^{n/2}+X_2$, וכך נעשה גם ל-y. במספרים עשרוניים הצגה זו שקולה ל-$2745=27\cdot 10^2+45$.

הכפלה ב-2^k מתבצעת ב-$O(1)$ מפני ששקולה לפעולת shift שמאלה באורך k.

כעת נכפיל בין x ל-y המוצגים בצורה חדשה. $xy=2^n\cdot X_1Y_1+2^{n/2}(X_1Y_2+X_2Y_1)+X_2Y_2$. $\begin{cases}X=X_1\cdot 2^{n/2}+X_2\\ Y=Y_1\cdot 2^{n/2}+Y_2\end{cases}$

נקבל חיבור של 4 איברים שכל איבר הוא מכפלה בין שני מספרים עם $\frac{n}{2}$ ספרות.

ב) חישוב זמן ריצה: נסמן ב-$T(n)$ מספר פעולות כפל בהכפלת שני מספרים באורך n. נתמקד בספירת פעולות הכפל ולא בחיבור כי מבחינת סיבוכיות הוא יותר קריטי, וגם בוודאי מספר פעולות החיבור הוא קבוע, לכן נסמנו cn. תנאי העצירה הוא $n=1$ שאז יש לבצע רק הכפלה אחת.

$$T(n)=\begin{cases}1 & n=1\\ 4T\left(\frac{n}{2}\right)+cn & n>1\end{cases}$$

$$T(n)=4T\left(\frac{n}{2}\right)+cn=4\left(4T\left(\frac{n}{4}\right)+c\cdot\frac{n}{2}\right)+cn=4^2T\left(\frac{n}{2^2}\right)+2cn+cn$$
$$=4^2\left(4T\left(\frac{n}{2^2}\right)+c\cdot\frac{n}{2^3}\right)+2cn+cn=4^3\cdot T\left(\frac{n}{2^3}\right)+2^2cn+2cn+cn$$

לאחר k שלבים:
$$=4^kT\left(\frac{n}{2^k}\right)+cn\left(2^{k-1}+\dots+2^1+2^0\right)=4^k\left(\frac{n}{2^k}\right)+cn\left(2^k-1\right)$$

נעצור כאשר $\frac{n}{2^k}=1$. ומכאן $k=\log_2 n$.

$$T(n)=\underset{2^{2\log_2 n}}{4^{\log_2 n}}\cdot\underset{1}{T(1)}+cn\left(\underset{n}{2^{\log_2 n}}-1\right)=n^2+cn^2-cn=O(n^2)\Leftarrow$$

מסקנה: לא שיפרנו, ננסה דרך אחרת

29/10 בס"ד

③

$$\begin{cases} A = x_1 \cdot y_1 \\ B = x_2 \cdot y_2 \\ C = (x_1+x_2)(y_1+y_2) \end{cases}$$

ג) <u>פתרון 2</u>: ננסה לשפר את המשוואה של xy מפתרון קודם ע"י שימוש בסימונים:
נשים לב כי עבור כל אחד מהסימנים A,B,C דרוש מכפלה בין שני מספרים
עם $n/2$ סיביות. כעת, בעזרת הסימנים נוכל להציג את xy כך: $xy=2^n\cdot A+2^{n/2}(C-A-B)+B$.
בדורה זו אומנם יש לנו יותר חיבורים אך יש רק 3 מכפלות (A,B,C. לאחר שמכפלים
פעם אחת ניתן להשתמש בערך במקום אחר). נסמן את מספר החיבורים $c'n$. תנאי
העצירה לא משתנה. נחשב את זמן הריצה $T(n)$.

ד) <u>חישוב זמן ריצה</u>:

$$T(n)=\begin{cases} 1 & n=1 \\ 3T\left(\frac{n}{2}\right)+c'n & n>1 \end{cases}$$

$$T(n)=3T\left(\frac{n}{2}\right)+c'n=3\left(3T\left(\frac{n}{2^2}\right)+c'\frac{n}{2}\right)+c'n=3^2T\left(\frac{n}{2^2}\right)+\frac{3}{2}c'n+c'n$$

$$=3^2\left(3T\left(\frac{n}{2^3}\right)+c'\cdot\frac{n}{2^2}\right)+\frac{3}{2}c'n+c'n=3^3T\left(\frac{n}{2^3}\right)+\left(\frac{3}{2}\right)^2c'n+\frac{3}{2}c'n+c'n$$

לאחר k שלבים:
$$=3^kT\left(\frac{n}{2^k}\right)+c'n\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}+\dots+\frac{3}{2}+1\right)=3^kT\left(\frac{n}{2^k}\right)+2c'n\left(\left(\frac{3}{2}\right)^k-1\right)$$

נעצור כאשר $\frac{n}{2^k}=1$, ומכאן $k=\log_2 n$.

$$T(n)=3^{\log_2 n}\cdot T(1)+2c'\cancel{n}\cdot\frac{3^{\log_2 n}}{\cancel{2^{\log_2 n}}}-2c'n=3^{\log_2 n}(1+2c')-2c'n$$

$$=3^{\log_3 n\cdot\log_2 3}(1+2c')-2c'n=n^{\log_2 3}(1+2c')-2c'n=O(n^{1.584})$$

חישובי עזר
(1) $\log_2 n=\frac{\log_3 n}{\log_3 2}=\log_3 n\cdot\frac{1}{\log_3 2}=\log_3 n\cdot\log_2 3$.
(2) $\log_2 3=1.584$

מסקנה: הצלחנו לייעל את זמן הריצה באמצעות אלגוריתם הפרד ומשול.

③ <u>מציאת חציון</u>

במערך לא ממוין נרצה למצוא את האיבר שחצי מהאיברים גדולים ממנו וחצי
מהאיברים קטנים ממנו. איבר זה נקרא "חציון". נרצה למצוא את החציון לשימוש
במיון מהיר (QuickSort) כדי לקבוע אותו כאיבר הציר (Pivot), ובכך לקבל מיון יעיל
יותר. דרך פשוטה למצוא חציון היא למיין את המערך ואז לקחת את האיבר
האמצעי בזמן ריצה של $O(n\log n)$, אמנם זה כמו בעיית הביצה והתרנגולת שהרי אנו רוצים
למצוא חציון לצורך מיון. ננסה להשתמש באלגוריתמים של הפרד ומשול לפתרון יעיל יותר.

א) <u>פתרון 1</u>: נחלק את המערך ל-2 חלקים שווים A_1,A_2, ונמצא ברקורסיה את החציונים
m_1,m_2 בכל אחד מהם. אם שני החציונים שווים, $m_1=m_2$, נחזיר את הערך השווה. אם
אינם שווים, אזי אם $m_1<m_2$ ניקח את האיברים שגדולים מ-m_1 ב-A_1 ואת האיברים

29/10 פסו"ד

(4)

הקטנים מ-m_2 ב-A_2 ונמצא בהם את החציון, והוא יהיה גם החציון של A.
ואם $m_1 > m_2$ אז ניקח את האיברים שקטנים מ-m_1 ב-A_1 ואת האיברים שגדולים מ-m_2 ב-A_2, ובהם נמצא חציון.

ב) פסאודו-קוד:

```
median(A) {
    divide A into A1 and A2
    m1= median(A1)
    m2= median(A2)
    if(m1==m2)
        return m1
    else if (m1< m2)
        B= (a∈A1| a>m1 + b∈A2| b<m2)
    else // m1> m2
        B = (a∈A1) a<m1 + b∈A2| b>m2)
    return median(B)
}
```

ג) חישוב זמן ריצה: בקוד זה אנו מפעילים 3 פעמים את הפונקציה median על מערך בגודל $\frac{n}{2}$. גם B בגודל $\frac{n}{2}$ שהרי אנו לוקחים חצי מ-A_1 וחצי מ-A_2 שהם כל אחד חצי מ-A. כדי לבנות את B צריך לעבור על כל המערך ולבחור את האיברים המקיימים את התנאי, בסיבוכיות $O(n)$.
תנאי העצירה הוא כאשר $n=1$, שאז הוא החציון של עצמו. לסיכום, זמן הריצה הוא:

$$T(n)=\begin{cases} 1 & n=1 \\ 3T(\frac{n}{2})+n & n>1 \end{cases}$$

כבר באלגוריתם קודם חישבנו זמן ריצה זה שהוא $O(n^{1.584})$. אמנם כבר עדיף סיבוכיות של $O(n\log n)$, לכן זהו פתרון לא יעיל. ננסה פתרון שונה.

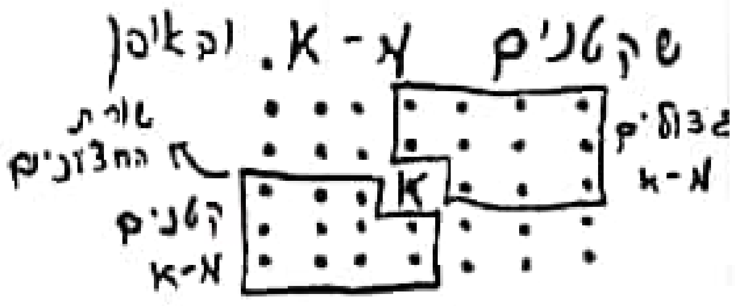
3) פתרון 2: נשתמש בפונקציה $Find(A,t)$ המקבלת מערך A ומחזירה את האיבר הכי גדול במקום t, כלומר שיש $t-1$ איברים קטנים במערך שגדולים ממנו.
נרצה להשתמש בפונקציה עבור $t=\frac{n}{2}$ כדי למצוא את החציון. פונקציה זו עובדת כך שהיא בוחרת איבר ציר x (בהמשך נלמד שיטה טובה לבחירת איבר זה).
ואז מחלקת את המערך A ל-2 חלקים: S_1 שיכיל את האיברים הגדולים מ-x,

(5)

ו-S_2 שיכיל את האיברים הקטנים מ-k. אם ב-S_1 יש $t-1$ איברים נחזיר את k. ואם גדול מ-$t-1$ אזי נפעיל עליו שוב את הפונקציה $Find(S_1,t)$, ואם S_1 קטן מ-$t-1$ איברים, אזי נפעיל על S_2 את הפונקציה $Find(S_2,t-|S_1|-1)$.

ה) **בחירת איבר ציר (pivot):** אנו רוצים שאיבר הציר k שלנו יהיה כמה שיותר קרוב לחציון, כלומר שמבחינת גודל כל האברים הוא איבר אמצעי יחסית. לשם כך, נחלק את A לקבוצות בגודל b כאשר b הוא מספר אי זוגי קטן. סה"כ נקבל $\frac{n}{b}$ קבוצות. נמיין כל קבוצות אלו. ניקח את האיבר האמצעי מכל קבוצה ונכניס אותו למערך B, כך שבסוף במערך B יש $\frac{n}{b}$ איברים. נמצא את החציון במערך B על ידי הקריאה $Find(B,\frac{n}{2b})$. איבר זה יהיה איבר הציר שלנו. נמצא שאנו משתמשים בפונקציה $Find(A,t)$ גם כדי למצוא חציון וגם כדי למצוא איבר ציר.

איבר זה הוא אכן איבר אמצעי יחסית. נוכיח כי יש לפחות $\frac{n}{4}$ איברים גדולים ממנו ובדרך דומה ניתן להוכיח שישנם לפחות $\frac{n}{4}$ איברים קטנים ממנו. במערך B יש $\frac{n}{b}$ איברים. מתוכם בדיוק $\frac{n}{2b}$ קטנים מ-k. בנוסף, בכל קבוצה של כל איבר כזה יש $\frac{b}{2}$ איברים שקטנים מהחציון ולכן בוודאי קטנים מ-k. סה"כ יש לפחות $\frac{n}{2b}\cdot\frac{b}{2}=\frac{n}{4}$ איברים שקטנים מ-k. ובאופן דומה נוכיח גם שיש לפחות $\frac{n}{4}$ איברים שגדולים מ-k.



כיוון שהאלגוריתם זה מבצע חישובים רבים (אמנם בזמן ריצה יעיל כמו שנוכיח בהמשך), נפעיל אותו רק כאשר $n\geq 50$. אם $n<50$ נמיין את A וניקח את האיבר האמצעי בזמן ריצה של O(הפעלת).

ו) פסודו קוד:

$\frac{n}{2}$
$\Downarrow$

```
Find(A, t) {
    If |A| < 50 sort A and return the t elemen
    divide A into groups of size b, and sort each group
    B = medians of all the groups
    k = Find(B, n/2b)
    S1 = {x∈A | x>k} ,  S2 = {x∈A | x<k}
    If (|S1| = t-1) return k
    else if (|S1| > t-1) Find(S1, t)
    else Find(S2, t-|S1|-1)        //|S1| < t-1
}
```

5/11

6

בס"ד

ג) <u>חישוב זמן ריצה:</u> אנו מפעילים רקורסיבית את הפונקציה Find פעמיים: פעם אחת לצורך מציאת ציר הציר, שגודל המערך הוא $\frac{n}{5}$. ופעם שניה למציאת חציון של S_1 או S_2. מכיוון שאמרנו ש-S_1 ו-S_2 מכילים לפחות $\frac{n}{4}$ איברים כל אחד, במקרה הגרוע נפעיל את הפונקציה על מערך עם $\frac{3n}{4}$ איברים. בנוסף, חלוקת המערך לקבוצות של b ומיונם, הכנסת החציונים ל-B, והכנסת האיברים הגדולים מ-k ל-S_1 והקטנים ל-S_2, כולם מתבצעים בזמן ריצה לינארי, ולכן נסמנם ב-$c\cdot n$ כאשר c קבוע.

בדרך כלל נבחר את $b=5$. זה יעזור לנו בהוכחת זמן ריצה וגם בגלל שמיון מערך בגודל 5 דרושים 7 השוואות בסה"כ.

כי חישבנו לפי המקרה הגרוע.

זמן הריצה הסופי הוא אם כן:

$$T(n)\le\begin{cases} n\log n & n<50 \\ T\left(\frac{n}{5}\right)+T\left(\frac{3}{4}n\right)+c\cdot n & n\ge 50\end{cases}$$

נוכיח באינדוקציה חזקה שזמן ריצה זה הוא לינארי, כלומר שמתקיים: $T(n)\le cdn$, כאשר cd קבוע.

<u>בסיס:</u> $n<50$. זמן הריצה הוא $T(n)\le n\log n$, ולכן $T(n)\le 50\log 50<6n$. שהוא אכן לינארי.

<u>הנחה:</u> נניח באינדוקציה חזקה כי עבור כל $k<n$ מתקיים $T(k)\le 20ck$.

בחרנו $d=20$ כי הוא המכנה המשותף של 4 ו-5.

<u>הוכחה:</u> לפי הנחת האינדוקציה $T\left(\frac{n}{5}\right)\le\frac{20cn}{5}$, $T\left(\frac{3}{4}n\right)\le\frac{20\cdot 3cn}{4}$. ומכאן נחשב:

$$T(n)\le T\left(\frac{n}{5}\right)+T\left(\frac{3}{4}n\right)+cn\le\frac{20cn}{5}+\frac{20\cdot 3cn}{4}+cn$$

$$=4cn+15cn+cn=20cn \Rightarrow T(n)\le 20cn$$ מ.ש.ל.

הוכחנו כי לכל n, $T(n)\le 20ck$, ולכן זמן הריצה הוא אכן לינארי $O(n)$, שזהו זמן ריצה יעיל יותר לבעיה זו.