15/10

JardenA@ariel.ac
054-600-210

לוגיקה ותורת הקבוצות - צבי ירדן

פרק א' - תורת הקבוצות

א) מהי קבוצה

קבוצה היא אוסף של איברים, לא חשוב הסדר. שמות הקבוצות יהיו בדר"כ אותיות גדולות באנגלית $(A, B, C, ...)$. יש שני דרכים להצגת קבוצה: או באמצעות רישום כל האיברים בה $A=\{1,3,5,7,...\}$, או באמצעות סימונים ותכונות $A=\{x: x\in \mathbb{N}, x>5\}$. בדר"כ נשתמש בדרך השנייה.

הסבר סימונים:

$\{\ \}$ - הגדרת הקבוצה.

x - מייצג את כל האיברים בקבוצה.

: (נקודתיים) - כך ש..

$\in$ - שייך ל..

ב) קבוצות מפורסמות

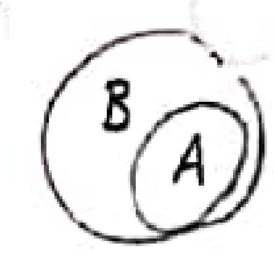
קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$ - מספרים שלמים חיוביים $\mathbb{N}=\{0,1,2,3...\}$.

קבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$ - מספרים שלמים $\mathbb{Z}=\{-2,-1,0,1,2,..\}$

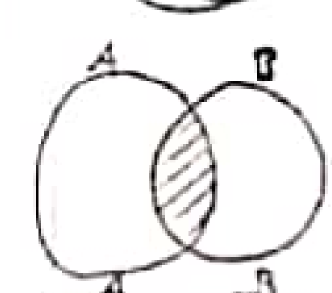
קבוצת המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}$ - מספרים שאפשר להציג כשבר $\mathbb{Q}=\{\frac{n}{k}: n,k\in \mathbb{Z}, k\neq 0\}$

קבוצת המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ - כל המספרים מ$-\infty$ עד ∞.

ג) סוגי קבוצות

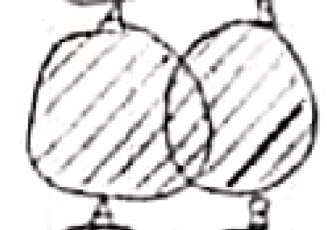


(1) קבוצה מוכלת - כל האיברים בקבוצה A נמצאים ב-B. נסמן: $A\subset B$.

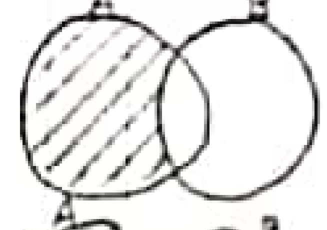


(2) קבוצה ריקה - שאין בה איברים כלל. נסמן: $\{\ \}$ או $\emptyset$. קבוצה ריקה מוכלת בתוך כל קבוצה שהיא.

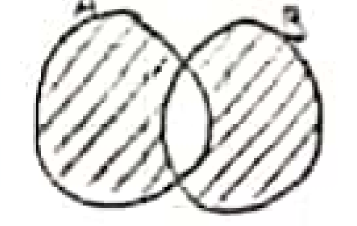
(3) חיתוך - רק האיברים שגם בקבוצה A וגם בקבוצה B. נסמן: $A\cap B$. $A\cap B=\{x: x\in A$ וגם $x\in B\}$



(4) איחוד - כל האיברים שהם או בקבוצה A או בקבוצה B. נסמן: $A\cup B$. $A\cup B=\{x: x\in A$ או $x\in B\}$



(5) הפרש - קבוצה A ללא קבוצה B. נסמן: $A\setminus B$ או $A-B$, יש חשיבות לסדר. $A\setminus B=\{x: x\in A$ וגם $x\notin B\}$



(6) הפרש סימטרי - קבוצה A ללא B או קבוצה B ללא A, כלומר איחוד הקבוצות פחות החיתוך. נסמן: $A\triangle B$ או $A\oplus B$. אין חשיבות לסדר.
$A\triangle B=\{A\setminus B \cup B\setminus A\}$

(7) קבוצה אוניברסלית - קבוצה כללית שכל הקבוצות בדיון מוכלות בתוכה. נסמן קבוצה זו ב-U.

(8) קבוצה משלימה - כאשר מחסירים מקבוצה U את קבוצה A מקבלים את הקבוצה המשלימה של A. פעולה זו נקראת "פעולה משלימה". נסמן: $A^c=\bar{A}=U-A$

Scanned with CamScanner

15/10

בס"ד

<u>תרגיל</u>- נתונות הקבוצות הבאות: $U=\{1,2,3,\dots,10\}$, $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4\}$, $C=\{1,5\}$

השלם את הביטוי הבא: $A\cap B=\emptyset$, $A\cap C=\{1\}$, $A\cup C=\{1,2,5\}$, $A\setminus C=\{2\}$

$C\setminus A=\{5\}$, $A\Delta C=\{2,5\}$, $\overline{A\cup B}=\{5,6,7,8,9,10\}$

ג) <u>תת קבוצה</u>

תת קבוצה היא קבוצה שהיא גם איבר בקבוצה אחרת. לדוגמא: הקבוצה $A=\{1\}$ היא תת קבוצה בתוך הקבוצה $B=\{\{1\},2,3\}$. חשוב לשים לב לכך שאיברי תת הקבוצה הם אינם איברים בתוך הקבוצה הכללית, אלא תת הקבוצה היא בעצמה האיבר. בדוגמא לעיל הקבוצה B אינה מכילה את האיבר 1 אלא את האיבר $\{1\}$, יש שוני ביניהם $\{1\}\neq 1$.

<u>תרגיל</u>- נתונות הקבוצות הבאות: $A=\{1\}$, $B=\{1,\{1,2\}\}$, $C=\{\{1\},\{2,3\},1\}$

השלם את הביטויים הבאים: $1\in A,B,C$, $2\in\emptyset$, $A\cap B=\{1\}$, $A\cap C=\{1\}$

$\{1,2\}\cap B=\{1\}$, $\{\{1,2\}\}\cap B=\{\{1,2\}\}$, $B\cup C=\{1,\{1,2\},\{1\},\{2,3\}\}$

ה) <u>קבוצת החזקה</u>

קבוצת חזקה של קבוצה A היא קבוצה שכל איבריה הם תתי קבוצות המורכבים מכל הקומבינציות האפשריות של האיברים בקבוצה A. נסמן קבוצת חזקה של קבוצה A כך: $P(A)$.

לדוגמא: קבוצת החזקה של הקבוצה $A=\{1,2,3\}$, היא: $P(A)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

הגדרת קבוצת החזקה בצורה מתמטית היא $P(A)=\{x : x\subset A\}$, כלומר אם $x\subset A$ אז הוא שייך לקבוצת החזקה.

נסמן $|A|$ מספר האיברים בקבוצה A. קבוצת חזקה נקראת כך משום שמספר האיברים בה מקיים: $\boxed{|P(A)|=2^{|A|}}$

ו) <u>קטעים פתוחים וסגורים</u>

כשנרצה לסמן טווח מסוים של איברים נשתמש בסוגריים שבתוכם נרשום את האיבר הראשון והאחרון. כדי לדעת האם הטווח פתוח או סגור, כלומר האם הוא כולל את הקצוות, נבדיל בין סוגריים מרובעות לעגולות. סוגריים עגולות עבור קטע פתוח, וסוגריים מרובעות עבור קטע סגור. נבחין בין 4 אפשרויות:

(1) $(a,b)=\{x\in\mathbb{R} : a<x<b\}$ (3) $(a,b]=\{x\in\mathbb{R} : a<x\leq b\}$

(2) $[a,b)=\{x\in\mathbb{R} : a\leq x<b\}$ (4) $[a,b]=\{x\in\mathbb{R} : a\leq x\leq b\}$

* a,b יכולים להיות אינסוף, אך אינסוף תמיד פתוח.

דוגמאות: $(1,2)\in[1,2]$, $2\notin(1,2)$, $2\in[1,2]$, $2\in(1,3)$

$(1,2)\subset(-\infty,3]$

Scanned with CamScanner

15/10

בס"ד

ז) ת-יות סדורות

הם קבוצות שמספר איברים בהם הוא n, כלומר בגודל משתנה. יכול להיות זוג סדור, שלישייה סדורה, וכן הלאה. יש חשיבות גם לסדר של האיברים. נגדיר קבוצות אלו בסימן $\langle\ \rangle$.

דוגמאות: (1) אם נתון $\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle$ אז המשמעות היא ש: $a=c$ ו-$b=d$.

(2) $\langle 1,2\rangle\neq\langle 2,1\rangle$ למרות שבקבוצה רגילה כן מתקיים: $\{1,2\}=\{2,1\}$.

ח) מכפלה קרטזית

* חשיבות לסדר ההכפלה.

מכפלה קרטזית היא הכפלה בין קבוצות.* התוצאה של מכפלה כזו תהיה קבוצה אחת שאיבריה הם ת-יות סדורות, כך שבכל ת-יה סדורה יש איבר אחד מכל קבוצה שהוכפלה. ניתן לנסח זו באמצעות התכונה הבאה: $A\cdot B\cdot C=\{\langle a,b,c\rangle: a\in A, b\in B, c\in C\}$

מספר הת-יות הסדורות בתוך הקבוצה הסופית יהיה כמספר הצירופים האפשריים של איבר אחד מכל קבוצה. ניתן לחשב זאת באמצעות הנוסחה הבאה: $\boxed{|A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot\ldots\cdot A_n|=|A_1|\cdot|A_2|\cdot|A_3|\cdot\ldots\cdot|A_n|}$

דוגמאות: $\{1,2\}\cdot\{3,4\}\cdot\{5,6\}=\{\langle 1,3,5\rangle,\langle 1,4,5\rangle,\langle 1,3,6\rangle,\langle 1,4,6\rangle,\langle 2,3,5\rangle,\langle 2,4,5\rangle,\langle 2,3,6\rangle,\langle 2,4,6\rangle\}$

$\{1,2\}^2=\{1,2\}\cdot\{1,2\}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

ט) יחסים.

יחס בין שתי קבוצות שונות היא בעצם תת קבוצה של מכפלת שתי הקבוצות. ומכיון שהכפלת שתי קבוצות יוצרת קבוצה אחת שאיבריה הם ת-יות סדורות, היחס בין שתי הקבוצות האלו הוא בעצם כל אחת מהת-יות הסדורות האלו.

יחס בין קבוצה המוכפלת בעצמה נקרא: "יחס n מקומי", כאשר n מבטא את מספר הפעמים שהקבוצה מוכפלת בעצמה (החזקה). יחס בין A ל-A (A^2) נקרא "יחס דו מקומי" או "יחס בינרי".

* ניתן להוסיף תכונה נוספת כדי להגיע לתת קבוצה מסוימת.

דוגמאות: (1) נתונות הקבוצות $A=\{1,2\}$ $B=\{3,4\}$. תת הקבוצה $\langle 2,3\rangle$ שייך ליחס בין A ל-B.

(2) $\{\langle x,y\rangle\in R^2: x<y\}$ הוא יחס דו מקומי על R, ומכיל את כל הזוגות שהשמאלי קטן מהימני.

י) פונקציות

פונקציה היא שלשה סדורה $\langle A,B,F\rangle$. נוהג יותר לרשום זאת כך $F: A\to B$. A היא הקבוצה שתקרא התחום (מייצגת את x), B היא הקבוצה שתקרא "טווח" (מייצגת את y). ו-F היא ההתאמה, היא מתאימה לכל איבר ב-A איבר יחיד ב-B.

דוגמאות: (1) פונקציה מסוג $F: R\Rightarrow R$, לדוגמא הפונקציה $F(x)=x^2$, נציב $x=2$ ונקבל: $F(2)=4$.

(2) פונקציה מסוג $F: R\Rightarrow Q$. אינה פונקציה, שכן אם נציב בפונקציה $F(x)=\sqrt{x}$ $x=2$ נקבל: $F(2)=\sqrt{2}\neq Q$

Scanned with CamScanner

22/10

(3) ניתן להרכיב בשתי הדרכים ומתקיים: $g\circ f=f\circ g$.

$$\begin{cases} g: \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ g(x)=x-1 \end{cases} \quad \begin{cases} f: \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g\circ f: \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ g\circ f(x)=g(x+1)=x+1-1=x \end{cases}$$

$$\begin{cases} f\circ g: \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f\circ g(x)=f(x-1)=x-1+1=x \end{cases}$$

יג) פונקציה הפיכה

נתונות שתי פונקציות f ו-g המוגדרות: $f:A\to B$, $g:B\to A$. אם לכל x ב-A מתקיים $g\circ f(x)=x$ וכן לכל x ב-B מתקיים $f\circ g(x)=x$, אז נאמר ש-g היא הפונקציה ההפכית של f ו-f היא פונקציה הפיכה (כלומר שיש לה הופכית), או ההיפך ש-f היא הפונקציה ההופכית של g ו-g הפיכה. במילים אחרות, אם בפונקציה רגילה אני מציב x ומקבל y אז משמעות הפונקציה ההפכית היא שאם אציב בה את אותו y אקבל את אותו x.

נסמן: פונקציה הופכית כך: f^{-1}.

משפט: פונקציה f תהיה הפיכה אם ורק אם f היא גם חח"ע וגם על. ולכן בשאלה בה יש שלושה סעיפים ושואלים האם הפונקציה חח"ע/על/הפיכה? אז ניתן להסיק שהפונקציה הפיכה אם הוכחנו שהיא חח"ע ועל. וכן אם הוכחנו שהפונקציה הפיכה ניתן להסיק כי היא בוודאי גם חח"ע ועל.

שלבים למציאת פונקציה הופכית:

נסביר את השלבים תוך כדי דוגמא. נתונה פונקציה $\begin{cases} f: \mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}\setminus\{2\} \\ f(x)=\frac{2x}{x-1} \end{cases}$ נחפש פונקציה הפיכה ל-f.

(1) נכתוב את הפונקציה ב-x ו-y. $y=\frac{2x}{x-1}$

(2) נחליף בין x ל-y. $x=\frac{2y}{y-1}$

(3) נבודד את y. $(y-1)x=2y \Rightarrow xy-2y=x \Rightarrow y(x-2)=x \Rightarrow y=\frac{x}{x-2}$

(4) נגדיר את הפונקציה ההופכית. $\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}\setminus\{1\} \\ f^{-1}(x)=\frac{x}{x-2} \end{cases}$

(5) נבדוק האם התחום והטווח מתאימים כדי לוודא שהפונקציה הפיכה. $f(4)=\frac{2\cdot4}{4-1}=\frac{8}{3}$

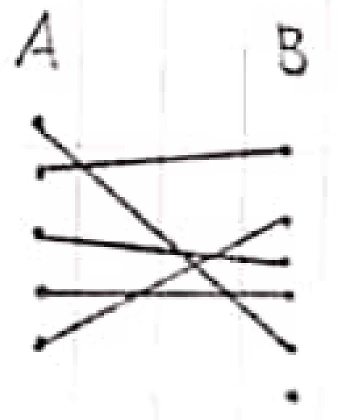
וכן נעשה בדיקות לוודא שאנחנו חוזרים לאותו מספר. $f^{-1}\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{\frac{8}{3}}{\frac{8}{3}-2}=\frac{\frac{8}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{24}{6}=4$

15/10

פונקציה n מקומית על קבוצה A היא פונקציה שאם נציב בה n-יות סדורות מהפונקציה A^n נקבל איבר מ-A.

דוגמא: פונקציה תלת מקומית על קבוצת הטבעיים $F: \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, כמו הפונקציה: $F(<x,y,z>) = x\cdot y + z$,
אם נציב שלשה סדורה מ-$\mathbb{N}^3$ $<1,2,3>$, נקבל: $F(1,2,3)=1\cdot 2+3=5$, שהיא איבר ב-$\mathbb{N}$.

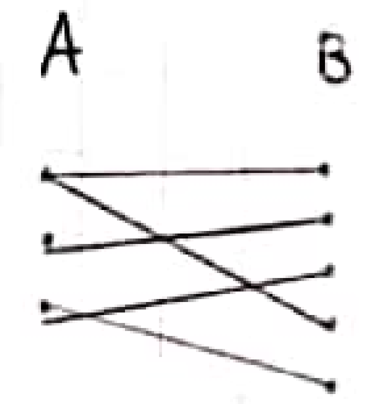
יא) פונקציה חד חד ערכית (חח"ע) ופונקציית על



פונקציה חח"ע - היא פונקציה שבה לכל איבר ב-B מותאם עד אחד איבר ב-A, כלומר או שאין התאמה או התאמה אחת. אם לשני איברים ב-A מותאם אותו איבר ב-B הפונקציה היא לא חח"ע.
כדי להוכיח שפונקציה היא חח"ע יש להניח שמתקיים: $F(x_1)=F(x_2)$, ואז להוכיח שהדרך היחידה ששוויון זה מתקיים הוא בכך שגם מתקיים $x_1=x_2$.

דוגמאות: (1) לא חח"ע, לא ניתן להוכיח $x_1=x_2$ $\Leftarrow$ $x_1^2 = x_2^2 /\sqrt{\ }$, $F(x)=x^2$, $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

(2) הפונקציה חח"ע, מתקיים רק כאשר $x_1=x_2$ $\Leftarrow$ $x_1^2 = x_2^2 /\sqrt{\ }$, $F(x)=x^2$, $F:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$



פונקציית על - היא פונקציה שבה לכל איבר ב-B מותאם לפחות איבר אחד ב-A או יותר.
אם ישנו איבר ב-B שאין לו התאמה הפונקציה היא לא פונקציית על.

דוגמאות: (1) לכל ערך יש התאמה לכן הפונקציה על $\Leftarrow$ $F(4)=\pm 2$, $x=4$, $F(x)=\sqrt{x}$, $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

(2) הפונקציה לא על משום שלא ניתן להגיע לכל מספר שלילי, $y=-2$ לדוגמא. $\Leftarrow$ $F(x)=x^2$, $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

(ג) יהי $y\in[0,\infty)$ נגדיר $x=\sqrt{y}$ ומתקיים: $F(x)=x^2=(\sqrt{y})^2=y$, הוכחנו ש $F(x)=y$ כלומר שלכל y שנבחר יש $F(x)$ ולכן הפונקציה על. $\Leftarrow$ $F:\mathbb{R}\to[0,\infty)$, $F(x)=x^2$

יב) פונקציה מורכבת

נתונות שתי פונקציות F ו-g, המוגדרות: $F:A\to B$, $g:B\to C$. ההרכבה של g על F,
אותה נסמן $g\circ F$, מוגדרת כך: $g\circ F: A\to C$, ונרשום כך: $g\circ F(x)=g(F(x))$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left, "g\circ F"] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

יש לשים לב שלא תמיד ניתן להרכיב פונקציות, כדי שזה יהיה אפשרי צריך שהקבוצה B הנפלטת מפונקציה F תהיה קבוצה חוקית לשמש כקלט ב-g. בחלק מהפונקציות במידה והתנאי מתקיים
ניתן להרכיב פונקציות בשתי צורות או $g\circ F$ או $F\circ g$.

דוגמאות: (1) בפונקציה זו ניתן להרכיב גם הפוך

$$\begin{cases} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ g(x)=2x \end{cases} \quad \begin{cases} F:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ F(x)=x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g\circ F:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ g\circ F(x)=g(F(x))=2(x+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ F\circ g(x)=F(g(x))=2x+1 \end{cases}$$

ההרכבה. נשים לב כי: $g\circ F \neq F\circ g$

(2)

$$\begin{cases} g:\{0,1,2,3\}\to\mathbb{R} \\ g(x)=2x \end{cases} \quad \begin{cases} F: P(\{0,1,2\})\to\{0,1,2,3\} \\ F(x)=|x| \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} g\circ F: P(\{0,1,2,3\})\to\mathbb{R} \\ g\circ F(\{0,1\})=g(2)=2\cdot 2=4 \end{matrix}$$

פונקציה F מתאימה בין קבוצת החזקה את מספר האיברים שיש בכל תת קבוצה. ניתן לראות כי מוגדר רק $g\circ F$ ולא $F\circ g$. בדוגמא בחרנו להזין את תת הקבוצה $\{0,1\}$.

Scanned with CamScanner