19/11 בס"ד

רציפות של פונקציה

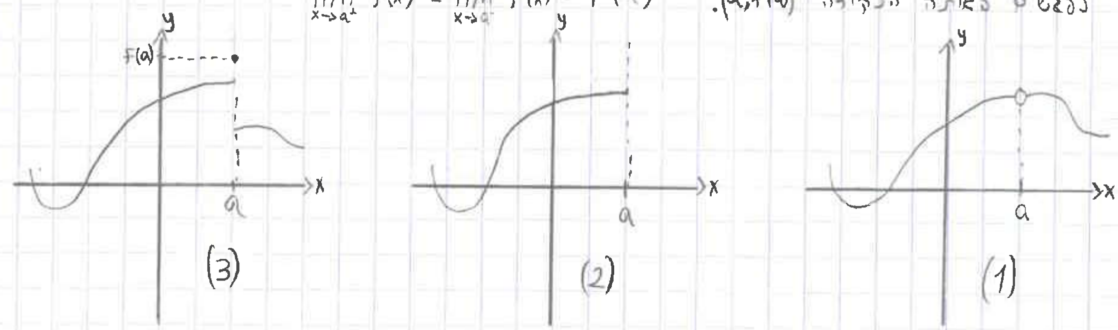
1) הגדרה ותנאים לרציפות

פונקציה רציפה היא פונקציה שניתן לשרטט את הגרף שלה במשיכת קולמוס אחת. כדי שהפונקציה $f(x)$ תהיה רציפה בנקודה $x=a$, צריכים להתקיים שלושה תנאים:

(1) הפונקציה מוגדרת עבור $x=a$, משום שאחרת בנקודה a יהיה חור והפונקציה לא הייתה רציפה.

(2) הגבולות החד צדדיים של הפונקציה בנקודה a קיימים, כלומר שמשני הכיוונים, הימני והשמאלי, הפונקציה הולכת ומתקרבת אל $x=a$.

(3) שהגבולות החד צדדיים שווים ביניהם וגם שווים לערך הפונקציה בנקודה a, כלומר שהגבולות החד צדדיים נפגשים באותה הנקודה $(a,f(a))$. $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$



במידה והפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה $x=a$, נאמר "הפונקציה רציפה בנקודה a". במידה והפונקציה אינה רציפה נאמר "לפונקציה יש נקודת אי רציפות ב-a".

דוגמא: קבע האם הפונקציה רציפה עבור $x=2$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2} & x\neq 2\\ 5 & x=2\end{cases}$$

ת"ה: כל x $\Rightarrow \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)}=x+2=4\neq 5 \Rightarrow$ הפונקציה אינה רציפה ב-$x=2$

2) נקודות אי רציפות

משפט: כל הפונקציות האלמנטריות רציפות בתחום ההגדרה שלהם, ואילו בכל נקודות אי ההגדרה הפונקציות האלמנטריות לא יהיו רציפות. פונקציה אלמנטרית היא פונקציה המורכבת מחלק אחד לכל x, ופונקציה לא אלמנטרית היא פונקציה המורכבת מכמה חלקים לערכי x שונים (כמו הדוגמא למעלה).

פועל יוצא מכך היא שנקודות אי רציפות יכולות להתרחש אך ורק בשני מקרים:

(1) נקודות מחוץ לתחום הגדרה בכל סוגי הפונקציות הם בוודאי נקודות אי-רציפות.

(2) נקודות התפר בפונקציות הלא אלמנטריות. יש לבדוק זאת לפי שלושת הכללים לעיל.

* בנושא זה יש שני סוגי שאלות דומות אך שונות: "קבע האם הפונקציה רציפה עבור כל x" ו-"קבע האם הפונקציה רציפה בכל תחום הגדרתה". בסוג שאלות הראשון עלינו למצוא נקודות אי רציפות בכל הפונקציה כולל נק' אי הגדרה, במידה ויש כאלו הפונקציה אינה רציפה עבור כל x. בסוג השני אין מתחשבים באי רציפות של תחום הגדרה ומתחשבים בנקודות אי רציפות בנקודות התפר. במידה ואין הפונקציה רציפה בתחום הגדרתה.

3) רציפות חד צדדית

אפשר להגדיר את מושג הרציפות ולומר שפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה a רק מצד אחד, הימני או השמאלי.

לצורך כך צריך שיתקיימו שני תנאים:

(1) הפונקציה מוגדרת בנקודה $f(a)$

(2) גבול הפונקציה כאשר x שואף ל-a רק מצד אחד שווה לערך הפונקציה באותה נקודה $\lim_{x\to a^+/a^-} f(x) = f(a)$

כאשר שני תנאים אלו מתקיימים אך גבולות הפונקציה כש-x שואף ל-a משני הצדדים (אינה שווה) או שהפונקציה אינה מוגדרת באחד הצדדים של a, נאמר שקיימת רציפות חד צדדית מימין/משמאל בנקודה a.

דוגמא: $f(x)=\sqrt{x(x-3)} \Rightarrow x(x-3)\ge 0 \Rightarrow x=0,3 \Rightarrow \underset{0\qquad 3}{+\quad -\quad +} \Rightarrow$ ת"ה: $\begin{cases} x\ge 3 \\ x\le 0\end{cases}$

מכיוון שהפונקציה היא אלמנטרית אפשר לומר שהפונקציה רציפה מצד ימין של $x=3$ ורציפה מצד שמאל של $x=0$.

4) מיון נקודות אי רציפות

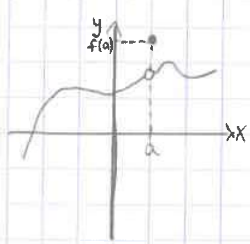
יכולים להיות שלושה סוגים של נקודות אי-רציפות: אי רציפות סליקה, אי רציפות מסדר ראשון (קפיצה), אי רציפות מסדר שני. בשאלות שנקבל יבקשו לבדוק אם הנקודה רציפה או לא, ואם לא מהו סוג הרציפות.

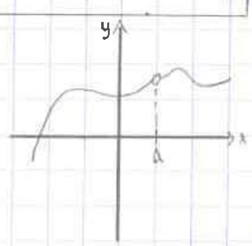
(1) אי רציפות סליקה

נקודת אי רציפות שבה הגבולות משני הצדדים קיימים, שווים, ואינם אינסופיים. אולם בנקודה עצמה או שהגבולות אינם שווים לערך הפונקציה בנקודה או שהפונקציה לא מוגדרת שם.

$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) \ne f(a) \ \|\ f(a)\ \text{לא מוגדר}}$

אי-רציפות סליקה נראית כך:





אי רציפות סליקה נקראת כך משום שהיא נחשבת אי רציפות חלשה שבקלות אפשר לסלק אותה ולהפוך אותה לרציפה, ע"י הוספת חלק לפונקציה בנקודה a המוגדר ושווה לגבולות החד צדדיים.

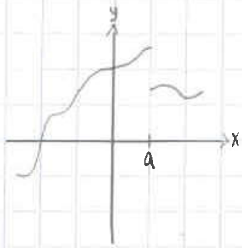
$$g(x)=\begin{cases} f(x) & x\ne a \\ \lim_{x\to a^+/a^-} f(x) & x=a\end{cases}$$

דוגמא:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x>1 \Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \sqrt{x}+1 = 2 \\ 3 & x=1 \\ \frac{x^2-1}{x-1} & x<1 \Rightarrow \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1 = 2\end{cases}$$

ישנה אי רציפות סליקה משום שהגבולות החד צדדיים שווים אך לא שווים לערך הפונקציה בנקודה. ניתן בקלות לסלק אי רציפות כזו ע"י שינוי הנק' $x=1$ מ-3 ל-2.

(2) אי רציפות מסדר ראשון (הקפיצה)

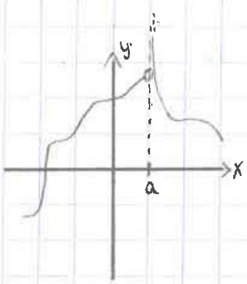


נקודת אי רציפות שבה הגבולות החד צדדיים קיימים ואינם אינסופיים, אולם אינם שווים זה לזה. בסוג אי רציפות זה כלל לא חשוב מהו ערך הפונקציה בנקודת אי הרציפות, הוא יכול להיות שווה לאחד הגבולות החד צדדים, שונה משניהם, או אפילו לא מוגדר באותה נקודה. $\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)}$.

אי רציפות מסדר ראשון נחשבת לאי רציפות חזקה, משום שלא ניתן לתקן את הפונקציה כדי שתהיה רציפה בקלות, וכן נקראת "אי רציפות הקפיצה" משום ששרטוט גרף הפונקציה קופץ מעלה או מטה בנקודת אי הרציפות

דוגמא: אי רציפות מסוג ראשון (הקפיצה) = $\lim_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}=-1$, $\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}=1 \Leftarrow$ ת"ה: $x\neq0$ $f(x)=\frac{|x|}{x}$

(3) אי רציפות מסדר שני



נקודת אי רציפות שבה לפחות אחד מהגבולות החד צדדיים שווה ל-$\pm\infty$ או שאין גבול למרות שהפונקציה מוגדרת בסביבה של a (הפונקציות הטריגונומטריות לדוגמא). כאשר תנאי זה מתקיים כלל לא משנה מהם שאר הנתונים בפונקציה ונאמר שבנקודה a ישנה נקודת אי רציפות מסדר שני $\boxed{\lim_{x\to a^+/a^-} F(x)=\infty/\emptyset}$

דוגמא:

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2+|x|-2} \Rightarrow \begin{cases} x^2+x-2\neq0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow x\neq1,\cancel{-2} \text{ (לא גדול מ-0)} \\ x^2-x-2\neq0 \Rightarrow (x-2)(x+1)=0 \Rightarrow x\neq-1,\cancel{2} \text{ (לא קטן מ-0)} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+x-2}{x^2+|x|-2}=\frac{0^+}{0^+}=1 \ , \ \lim_{x\to1^-}\frac{x^2+x-2}{x^2+|x|-2}=\frac{0^-}{0^-}=1 \Rightarrow f(1)=$$

לא מוגדר. לכן נק' אי הרציפות היא נק' סליקה.

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2+x-2}{x^2+|x|-2}=\frac{-3}{0^-}=\infty \ , \ \lim_{x\to-1^-}\frac{x^2+x-2}{x^2+|x|-2}=\frac{-2}{0^+}=-\infty \Rightarrow$$

שואף ל $\pm\infty$ לכן נקודת אי הרציפות היא מסדר שני.