3/12

בס"ד

עוצמות אינסופיות

א) הגדרה

עוצמה של קבוצה A היא מספר האיברים בקבוצה, נסמן עוצמה של קבוצה A ב-$|A|$.
בפרק זה נעסוק בעוצמות של קבוצות אינסופיות.

ב) השוואה בין עוצמות

יהיו A,B,C קבוצות מספרים.

(1) מתקיים $|A|\le|B|$ אם ורק אם יש פונקציה חח"ע $f:A\to B$, או שיש פונקציה על $g:B\to A$. הסיבה לכך היא שבפונקציות אלו כנגד כל איבר ב-A יש לפחות איבר אחד ב-B.

הערה- היחס קטן שווה ($\le$) בין עוצמות הוא סדר קווי מפני שמקיים:
רפלקסיביות- $|A|\le|A|$.
אנטי-סימטריות- אם $|A|\le|B|$ וגם $|B|\le|A|$ אזי $|A|=|B|$.
טרנזיטיביות- אם $|A|\le|B|$ וגם $|B|\le|C|$ אזי $|A|\le|C|$.
תכונת סדר קווי- בין כל שתי קבוצות ניתן להשוות.

(2) מתקיים $|A|=|B|$ אם ורק אם יש פונקציה חח"ע ועל $f:A\to B$. הסיבה לכך היא שבפונקציה זו כנגד כל איבר ב-A יש בדיוק איבר אחד ב-B.

הערה- היחס שווה בין עוצמות הוא יחס שקילות מפני שמקיים:
רפלקסיביות- $|A|=|A|$.
סימטריות- אם $|A|=|B|$ אז $|B|=|A|$.
טרנזיטיביות- אם $|A|=|B|$ וגם $|B|=|C|$ אז $|A|=|C|$. מפני שאם $f:A\to B$ חח"ע ועל וגם $g:B\to C$ חח"ע ועל אזי $f\circ g:A\to C$ חח"ע ועל.

ג) קבוצה בת מניה

"קבוצה A בת מניה" פירושו שהעוצמה של A לא יותר גדולה מעוצמת המספרים הטבעיים, $|A|\le|\mathbb{N}|$. $\mathbb{N}$ היא קבוצה אינסופית עם העוצמה הכי קטנה שיש, שנסמן אותה $\aleph_0$, $|\mathbb{N}|=\aleph_0$. הסימון $\aleph_0$ היא סימון בינלאומי לעוצמה זו.

הוכחת קבוצה בת מניה

כדי להוכיח שקבוצה A בת מניה יש להוכיח $|A| \le |\mathbb{N}|$, כבר אמרנו (בסעיף ב') שאפשר כך יש להוכיח או שקיימת פונקציה חח"ע $f: A \to \mathbb{N}$ או שקיימת פונקציה על $g: \mathbb{N} \to A$.

משפט: לכל קבוצה לא ריקה A, קיימת פונקציה חח"ע $f: A \to \mathbb{N}$ אם ורק אם קיימת פונקציה על $g: \mathbb{N} \to A$. לכן אם דיי לנו שקבוצה בת מניה אנו יכולים להוכיח שקיימת אחת הפונקציות.

הוכחה: כיוון ראשון - נניח קיום $f: A \to \mathbb{N}$ חח"ע, נוכיח $g: \mathbb{N} \to A$ על. מכיוון ש-A אינה קבוצה ריקה יש $a_0 \in A$. נגדיר פונקציה $g: \mathbb{N} \to A$ לפי מקרים: אם יש a כך ש-$f(a) = n$ אזי ש-$g(n) = a$ אם אין a כזה אז $g(n) = a_0$. נוכיח ש-g על. יהי $a \in A$, נוכיח ① $n \in \mathbb{N}$ ② $a = g(n)$.

① מכיוון ש-$a \in A$ אזי $f(a) = n$, מכיוון ש-$f: A \to \mathbb{N}$ $n \in \mathbb{N}$.

② אם $f(a) = n$ אזי לפי הגדרת g $g(n) = a$.

כיוון שני - נניח קיום $g: \mathbb{N} \to A$ על, נוכיח $f: A \to \mathbb{N}$ חח"ע. לכל $a \in A$ הקבוצה $\{n \in \mathbb{N} : g(n) = a\}$ אינה ריקה כי g על. נגדיר פונקציה $f: A \to \mathbb{N}$ כך: $f(a) = \min\{n : g(n) = a\}$. נוכיח ש-$f$ חח"ע. יהיו $a, b \in A$ ונניח $f(a) = f(b) = n$ אזי לפי הגדרת f מתקיים: $g(n) = a$ וגם $g(n) = b$, אזי חייב להיות $a = b$ אחרת g לא פונקציה.

③ איחוד שתי קבוצות בנות מניה

משפט: אם הקבוצות A, B בנות מניה אז $A \cup B$ בת מניה.

הוכחה: נניח A, B בנות מניה. נוכיח $A \cup B$ בת מניה. לפי ההנחה יש פונ' חח"ע $f: A \to \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, $g: B \to \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}$. נגדיר פונקציה $h: A \cup B \to \mathbb{N}$ כך: אם $x \in A$ אז $h(x) = f(x)$, אם $x \in B \setminus A$ אז $h(x) = g(x)$. נוכיח ש-h חח"ע. יהיו $x_1, x_2 \in A \cup B$, נוכיח אם $h(x_1) = h(x_2)$ אז $x_1 = x_2$. נחלק ל-4 מקרים:

מקרה 1 - $x_1, x_2 \in A$. במקרה כזה $h(x_1) = f(x_1)$, $h(x_2) = f(x_2)$ אז $f(x_1) = f(x_2)$ מכיוון ש-f חח"ע $x_1 = x_2$.

מקרה 2 - $x_1, x_2 \in B \setminus A$. דומה למקרה (1).

מקרה 3 - $x_1 \in A$, $x_2 \in B \setminus A$. במקרה כזה $h(x_1) = f(x_1)$ ו-$h(x_2) = g(x_2)$, יוצא ש-$h(x_1)$ זוגי ו-$h(x_2)$ אי זוגי לכן $h(x_1) \ne h(x_2)$. מכיוון שלא מתקיים הנ"ל אין צורך להוכיח $x_1 = x_2$.

מקרה 4 - $x_1 \in B \setminus A$, $x_2 \in A$. דומה למקרה (3).

$|\mathbb{N}| = |\{2n : n \in \mathbb{N}\}|$

$|\mathbb{N}| = |\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}|$

ניתן להוכיח בקלות ע"י הוכחת חח"ע ועל לפונקציות:

$f(x) = \frac{x}{2}$

$g(x) = \frac{x-1}{2}$

ה) סדר קווי על קבוצה

משפט: תהי A קבוצה ויהי S סדר קווי על A. לכל $x\in A$ נגדיר את "קבוצת הקודמים ל-x" כך $A_x=\{y\in A: S(y,x)\wedge y\neq x\}$. אם לכל $x\in A$ A_x היא קבוצה סופית, אזי A היא קבוצה בת מניה.

הוכחה: נגדיר פונקציה $F:A\to N$ כך: $F(x)=|A_x|$, כאשר אנו מניחים כי לכל $x\in A$ A_x קבוצה סופית. נוכיח ש-F חח"ע. יהיו $x_1,x_2\in A$, נניח כי $F(x_1)=F(x_2)$ (1), צ"ל $x_1=x_2$.
לפי (1) מתקיים: $|A_{x_1}|=|A_{x_2}|$ (3). מכיוון ש-S סדר קווי כל שני איברים חייבים להיות בני השוואה, לכן יכולים להיות שני מקרים:

מקרה א': $S(x_1,x_2)$ (4), ואז לפי תכונות הסדר הקווי $A_{x_1}\subseteq A_{x_2}$ (5). מכיוון ששתי הקבוצות סופיות ולפי (3) לכן $A_{x_1}=A_{x_2}$ (6). נניח בשלילה כי $x_1\neq x_2$, אזי לפי (4) $x_1\in A_{x_2}$ אבל לפי הגדרת קבוצת קודמים $x_1\notin A_{x_1}$. ואז נקבל $A_{x_1}\neq A_{x_2}$ שזו סתירה! לכן $x_2=x_1$.

מקרה ב': $S(x_2,x_1)$ כמו מקרה א'.

ו) קבוצת השלמים Z בת מניה

הוכחה 1: [לפי סעיף ג'] נגדיר פונקציה $F:N\to Z$ כך: $F(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & x \text{ זוגי} \\ -\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} & x \text{ אי-זוגי}\end{cases}$. יש להוכיח ש-$F$ על.
יהי $y\in Z$ נגדיר: $x=\begin{cases}2y & y\geq 0 \\ -2y-1 & y<0\end{cases}$. צ"ל: (א) $x\in N$, (ב) $F(x)=y$.
(א) כאשר $y\geq 0$ אזי $x=2y\geq 0$, וכאשר $y<0$ $x=-2(-y)-1=2y-1>0$. הנוסח x מספר שלם מפני ש-$y\in Z$ לכן יוצא שבכן $x\in N$.
(ב) כאשר $y\geq 0$ אזי $x=2y$, נציב בפונקציה: $F(x)=F(2y)=\frac{2y}{2}=y$. כאשר $y<0$ אזי $x=-2y-1$, נציב בפונקציה: $F(x)=F(-2y-1)=-\frac{1}{2}(-2y-1)-\frac{1}{2}=y$. מ.ש.ל.

הוכחה 2: [לפי סעיף ה'] נגדיר יחס S על Z כך: $S(x,y)$ פירושו או $|x|<|y|$. או $x=-y$ $(x<0)$ או $x=y$ $(x>0)$. נוכיח כי S מקיים את 4 התכונות של סדר קווי, ונוסיף כי לכל $x\in Z$ A_x קבוצה סופית. אם נוכיח זאת אז לפי משפט מסעיף ה' Z בת מניה.

(א) רפלקסיביות: $S(x,x)$ אכן מתקיים $x=x$.

(ב) אנטי סימטריות: נניח $S(x,y)$ וגם $S(y,x)$, צ"ל $x=y$. נשים לב כי כל האפשרויות של יחס $S(x,y)$ הן בעצם $|x|\leq|y|$. לכן לפי ההנחה מתקיים $|x|\leq|y|\leq|x|$, כלומר $|y|=|x|$. אם $x=y$ סיימנו. לכן נניח בשלילה כי לפי $S(x,y)$ $x=-y<0$ וכן לפי $S(y,x)$ $y=-x<0$ שזו סתירה כי לא יכול להיות שניהם קטנים מ-0 ומקיימים את המשוואות לכן $x=y$. מ.ש.ל.

ג) טרנזיטיביות: נניח $S(x,y)$ וגם $S(y,z)$. צ"ל $S(x,z)$. לפי ההנחות מתקיים $|x|\le|y|\le|z|$
ולכן $|x|\le|z|$. אם $|x|<|z|$ אזי $S(x,z)$. לכן נניח $|z|=|x|$, אם $x<0$ אזי מתקיים
$x=z$ או $x=-z$, בשני המקרים $S(x,z)$. לכן נניח $x\ge0$. נשים לב שגם מתקיים: $|x|=|y|=|z|$.
לכן אם $x\ge0$ אזי $x=y$ ולכן גם $y\ge0$. ואם $y\ge0$ אזי $y=z$ ולכן גם $z\ge0$.
מכאן ש $x=z$ ולכן $S(x,z)$. בכל מקרה אפשרי מתקיים $S(x,z)$. מ.ש.ל

3) תכונת סדר קווי: יהיו $x,y\in Z$ צ"ל $S(x,y)$ או $S(y,x)$. יש שלושה מקרים אפשריים:
מקרה א' - $|y|>|x|$, אז מתקיים $S(x,y)$.
מקרה ב' - $|y|<|x|$, אז מתקיים $S(y,x)$.
מקרה ג' - $|y|=|x|$, 4 אפשרויות- אם שניהם חיוביים או שניהם שליליים אז $y=x$ ומתקיים
$S(x,y)$ וגם $S(y,x)$. אם x שלילי ו-y חיובי אזי $x=-y$ כאשר $x<0$ ולכן $S(x,y)$. אם x
חיובי ו-y שלילי אזי $y=-x$ כאשר $y<0$ ולכן $S(y,x)$.

ה) לכל $x\in Z$ A_x סופית: לפי הגדרת קבוצת קודמים של x $A_x=\{y\in Z:S(y,x)\land y\neq x\}$
יהי $y\in A_x$ אזי מתקיים: $|y|\le|x|$, מכאן ש-y יכול להיות כל האיברים בין x ל-$-x$,
כלומר $-x\le y\le x$. נשים לב כי סך כל האיברים ש-y יכול להיות לא יותר גדול מ-$2x$,
לכן $|A_x|\le 2x$. ומכיוון ש-x מספר סופי אזי הוכחנו ש-A_x קבוצה סופית.

ב) <u>מכפלת קבוצות בנות מניה</u>

משפט: הקבוצה $\mathbb{N}\cdot\mathbb{N}$ היא בת מניה.

הוכחה: אין חובה לדעת את ההוכחה אולם יש להבין את הרעיון. נוכיח בשני דרכים:
דרך 1- נציג פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\cdot\mathbb{N}$ ונוכיח שהיא על.
דרך 2- נמצא יחס על $\mathbb{N}\cdot\mathbb{N}$ ונוכיח שהוא סדר קווי, וגם נוכיח קבוצת הקודמים לכל $x\in\mathbb{N}\cdot\mathbb{N}$ סופית.
ביאור לסדר כזה: $S=\{\langle n_1,k_1\rangle\langle n_2,k_2\rangle\in(\mathbb{N}\cdot\mathbb{N})^2:(n_1+k_1<n_2+k_2)\cup(n_1<n_2\land n_1+k_1=n_2+k_2)\cup(n_1=n_2\land k_1=k_2)\}$

משפט: לכל $n\in\mathbb{N}^+$ הקבוצה $\mathbb{N}^n$ בת מניה.

הוכחה: באינדוקציה. עבור $n=1$ אכן מתקיים $|\mathbb{N}|\le|\mathbb{N}|$
צעד - נניח כי $|\mathbb{N}|\le|\mathbb{N}^n|$ יש. להוכיח $|\mathbb{N}|\le|\mathbb{N}^{n+1}|$. לפי הנחת האינדוקציה יש פונקציה על
$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^n$. נשים לב כי $|\mathbb{N}^n\cdot\mathbb{N}|=|\mathbb{N}^{n+1}|$. כעת נוכל להגדיר פונקציה $h:\mathbb{N}\cdot\mathbb{N}\to\mathbb{N}^n\cdot\mathbb{N}$ כך
$h(n,k)=\langle f(n),k\rangle$, אז נוכיח שהיא על ס"מנו. יהי $y\in\mathbb{N}^n\cdot\mathbb{N}$ כך שיש y',k כך ש-$y=\langle y',k\rangle$. כאשר $k\in\mathbb{N}$
ו-$y'\in\mathbb{N}^n$. מכיוון ש-f על יש n כך ש-$f(n)=y'$. נגדיר $x=\langle n,k\rangle$ יש להוכיח: 1) $x\in\mathbb{N}\cdot\mathbb{N}$. 2) $h(x)=y$.

א) לפי הגדרת x נשים לב כי אכן $x\in\mathbb{N}\cdot\mathbb{N}$.

ב) נציב בפונקציה: $h(x)=\langle f(n),k\rangle=\langle y',k\rangle=y$. אכן מתקיים $h(x)=y$. מ.ש.ל.

<u>משפט:</u> לכל n טבעי הקבוצה $B_n=\{x\in P(\mathbb{N}):|x|=n\}$ היא בת מניה. במילים אחרות B_n מכילה את כל תתי הקבוצות הקבוצות החלקיות של $\mathbb{N}$ שהעוצמה (מספר האיברים) שלהם היא n.

<u>הוכחה:</u> נגדיר פונקציה $f:\mathbb{N}^n\longrightarrow B_n$ כך: $f(a_1,a_2,\dots,a_n)=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$, כלומר הפונקציה מתאימה לכל n-יה סדורה של מספרים טבעיים את הקבוצה B_n המתאימה. אם לדוגמא נכניס זוג סדור $\langle 2,5\rangle$ הפונקציה תתאים לו את הקבוצה $\{2,5\}$. נוכיח ש-f על.* יהי $y\in B_n$ כך ש-$y=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$. נגדיר $x=\langle a_1,a_2,\dots,a_n\rangle$. צ״ל: $x\in\mathbb{N}^n$ וגם $f(x)=y$. ניתן לראות כי אכן $x\in\mathbb{N}^n$. נציב את x בפונקציה $f(x)=f(a_1,a_2,\dots,a_n)=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}=y$. מ.ש.ל.

*מספיק להוכיח זאת לאור השוויון שהוכחנו במשפט קודם ש- $|\mathbb{N}|=|\mathbb{N}^n|$

ח) <u>איחוד קבוצות בנות מניה</u>

<u>משפט:</u> לכל $n\in\mathbb{N}$ הקבוצה B_n היא בת מניה אזי $\bigcup\{B_n:n\in\mathbb{N}\}$ היא קבוצה בת מניה. במילים אחרות איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה היא גם קבוצה בת מניה.

<u>הוכחה:</u> נסמן $A=\bigcup\{B_n:n\in\mathbb{N}\}$. נניח כי לכל $n\in\mathbb{N}$ B_n היא בת מניה. צ״ל A בת מניה. לפי ההנחה קיימים n פונקציות על מהצורה $f_n:\mathbb{N}\longrightarrow B_n$. נגדיר פונקציה $h:\mathbb{N}\cdot\mathbb{N}\longrightarrow A$ כך $h(n,k)=f_n(k)$. נוכיח ש-h על. מספיק להוכיח זאת מכיוון ש-$|\mathbb{N}|=|\mathbb{N}\cdot\mathbb{N}|$ (הוכחנו בסעיף קודם) ולכן אם $|\mathbb{N}\cdot\mathbb{N}|=|A|$ אזי $|\mathbb{N}|=|A|$ מפני שכבר הוכחנו (סעיף א) שיחס השוויון בין עוצמות הוא טרנזיטיבי, ואם $|\mathbb{N}|=|A|$ A היא בת מניה. יהי $y\in A$. אזי יש $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$y\in B_n$. ומכיוון ש-f_n היא על יש $k\in\mathbb{N}$ כך ש-$f_n(k)=y$. נגדיר $x=\langle n,k\rangle$, צ״ל $x\in\mathbb{N}\cdot\mathbb{N}$, $h(x)=y$. מכיוון שהגדרנו $n,k\in\mathbb{N}$ אזי אכן $x\in\mathbb{N}\cdot\mathbb{N}$. נציב את x בפונקציה: $h(x)=h(n,k)=f_n(k)=y$. מש״ל.

<u>משפט:</u> קבוצת הרציונליים $\mathbb{Q}$ היא בת מניה.

<u>הוכחה:</u> לכל $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ נגדיר קבוצה $B_n=\{\frac{k}{n}:k\in\mathbb{Z}\}$. ניתן לראות כי $\mathbb{Q}=B_1\cup B_2\cup\dots\cup B_n=\bigcup\{B_n:n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\}$. לפי משפט קודם אם נוכיח לכל $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ B_n היא בת מניה סיימנו. יהי $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, צ״ל B_n בת מניה. נגדיר פונקציה $f:\mathbb{Z}\to B_n$ כך $f(k)=\frac{k}{n}$, נוכיח כי f היא על. יהי $y\in B_n$ אזי קיים $k\in\mathbb{Z}$ כך ש-$y=\frac{k}{n}$. נגדיר $x=k$. צ״ל $x\in\mathbb{Z}$ וגם $f(x)=y$. מכיוון שהגדרנו $k\in\mathbb{Z}$ אזי אכן $x\in\mathbb{Z}$. נציב את x בפונקציה ונקבל: $f(x)=\frac{x}{n}=\frac{k}{n}=y$. מ.ש.ל.

משפט: הקבוצה $A=\{x\in P(\mathbb{N}) : \text{סופי } x\}$ היא קבוצה בת מניה. כלומר, איחוד כל תת הקבוצות של קבוצת החזקה של $\mathbb{N}$ שהם בגודל סופי היא קבוצה בת מניה.

הוכחה: לפי משפט 1 בסעיף זה מכיוון שכל הקבוצות הם בנות מניה אם נוכיח כי אוסף קבוצות אלו היא גם בן מניה, הוכחנו את המשפט. במשפט 2 בסעיף הקודם הוכחנו כי קבוצת איחוד כל תת הקבוצות של קבוצת החזקה של $\mathbb{N}$ שהן באותו גודל היא בת מניה. ומשפט זה נכון לכל גודל של תת קבוצה. לכן, מכיוון שיש $\mathbb{N}$ גדלים שונים של תתי קבוצות מקבוצת החזקה של $\mathbb{N}$ וידוע ש-$\mathbb{N}$ היא בת מניה, אזי לפי משפט 1 בסעיף זה יוצא שמספר תתי הקבוצות בקבוצת החזקה של $\mathbb{N}$ היא קבוצה בת מניה. כעת משאנו יודעים שכל תתי הקבוצות בקבוצת החזקה של $\mathbb{N}$ שיש להם גודל סופי הם בנות מניה, וגם מספרם הוא בן מניה, ניתן שוב להפעיל את משפט 1 בסעיף זה ולהוכיח את המשפט הנ"ל. מ.ש.ל.

ט) קבוצות שאינן בנות מניה

משפט: קבוצת המספרים הממשיים בין 0 ל-1 שכל ספרותיהם הם 0 או 1 איננה בת מניה.

הוכחה: נסמן ב-A קבוצה זו. נניח בשלילה כי A היא אכן בת מניה, כלומר $|\mathbb{N}|\leq|A|$. אזי קיימת פונקציה על $f:\mathbb{N}\to A$. איננו יודעים איך פונקציה זו נראית אך פעולתה צריכה להיות שעבור כל מספר טבעי n היא מתאימה מספר מקבוצה A. נגדיר:

דוגמאות:
$0.10101\in A$
$0.2\notin A$
$1.011\notin A$

$$\left.\begin{aligned} f(0)&=0.a_{00},a_{01},a_{02}\dots\\ f(1)&=0.a_{10},a_{11},a_{12}\dots\\ &\vdots\\ f(n)&=0.a_{n0},a_{n1},a_{n2}\dots\end{aligned}\right\}$$

הסימון a_{ij} מייצג ספרה 0 או 1 כאשר i זהו הערך הטבעי שהודבק בפונקציה, ו-j זהו המיקום של הספרה a_{ij} במספר העשרוני המתאים ל-i.

לדוגמא: פונקציה המבצעת את הפעולה הבאה: $f(2)=10$. אזי $1=a_{20}$, $0=a_{21}$. נגדיר $y\in A$ כך $y=0.y_0,y_1,y_2,\dots,y_n$, כאשר $y_0=1-a_{00}$, $y_1=1-a_{11}$, וכו' עד $y_n=1-a_{nn}$ כך שאם. לדוגמא $a_{00}=1$ אז $y_0=0$ ואם $a_{00}=0$ אז $y_0=1$. לכל $x\in\mathbb{N}$ מתקיים $f(x)\neq y$, משום שהספרה ה-x של $f(x)$ היא a_{xx} ואילו הספרה ה-x של y היא $1-a_{xx}$, בדיוק ההפך. נמצא שלא קיימת פונקציה המתאימה מספר טבעי ל-y, שזו סתירה להנחה שלנו שקיימת פונקציה כזו שהיא על. ולכן לא ניתן להניח ש-A בת מניה, אלא A אינה בת מניה. מ.ש.ל.

משפט: קבוצת המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ איננה בת מניה.

הוכחה: מכך שקבוצה A במשפט הקודם איננה בת מניה אזי גם קבוצת המספרים באינטרוול $(0,1)$ אינה בת מניה, כי $A\subseteq(0,1)$. ואז גם $\mathbb{R}$ איננה בת מניה מפני ש-$(0,1)\subseteq\mathbb{R}$. מ.ש.ל.

י) עוצמת קבוצת הממשיים - $|\mathbb{R}|$

משפט: לכל $a,b\in\mathbb{R}$ מתקיים: $|[a,b]|=|\mathbb{R}|$, $|(a,b]|=|\mathbb{R}|$, $|[a,b)|=|\mathbb{R}|$, $|(a,b)|=|\mathbb{R}|$.

כלומר עוצמת כל אינטרוול שווה לעוצמת הממשיים ושווה לעוצמת כל אינטרוול אחר.

הוכחה: אין צורך לדעת את ההוכחה, אמנם כן דרוש לדעת להוכיח כי עוצמת שני אינטרוולים שווים. נעשה זאת ע״י הגדרת פונקציה המתאימה בין שני האינטרוולים ונוכיח שפונקציה זו חח״ע או על.

דוגמא: הוכח כי $|(0,2]|\le|(0,1)|$. נגדיר פונקציה $f:(0,2]\to(0,1)$ כך: $f(x)=\frac{x}{3}$.

נוכיח ש-f חח״ע. יהי $x_1,x_2\in(0,2]$, צ״ל אם $f(x_1)=f(x_2)$ אז $x_1=x_2$. נניח כי $f(x_1)=f(x_2)$, אזי $\frac{x_1}{3}=\frac{x_2}{3}$. נכפיל ב-3 את המשוואה ונקבל $x_1=x_2$. מ.ש.ל.

משפט: מתקיים $|P(\mathbb{N})|=|\mathbb{R}|$. כלומר, עוצמת קבוצת הממשיים שווה לעוצמת קבוצת החזקה של $\mathbb{N}$.

הוכחה: אין צורך לדעת את ההוכחה.

יא) משפט קנטור

משפט: לכל קבוצה A מתקיים $|A|<|P(A)|$.

הוכחה: נגדיר פונקציה $f:A\to P(A)$. נניח ש-f אינה פונקציה על, אם נוכיח זאת אז הוכחנו את המשפט. יהי $y\in P(A)$ כך $y=\{a\in A: a\notin f(a)\}$. כלומר y היא תת קבוצה שמכילה את כל האיברים שלכל אחד מהם אם נדע איתו בפונקציה אזי תת הקבוצה שמתקבלת הוא אינו מופיע (בדוגמא בהמשך). נניח שאם ישנו $x\in A$ כך ש-$f(x)=y$ אז מתקבלת סתירה, במילים אחרות נניח שאין פונקציה כזאת שמקיימת $f(x)=y$ ומכיוון ש-$y\in P(A)$ אזי f אינה על. נתחיל בהוכחה, נניח בשלילה כי $f(x)=y$.

כיוון ראשון - נניח ש-$x\in y$, אזי לפי הגדרת y $x\notin f(x)$. אמנם אם $f(x)=y$ ולכן $x\notin f(x)$ אזי בהכרח $x\notin y$ בסתירה להנחה!

כיוון שני - נניח ש-$x\notin y$ אזי לפי הגדרת הקבוצה y ש-$x\notin y$ היא מפני ש $x\in f(x)$.
ואז אם $f(x)=y$ חייב להתקיים $x\in y$ בסתירה להנחה!

לכן f אינה על והוכחנו את משפט קנטור.

דוגמא לקבוצה y: נתון $A=\{1,2\}$. נגדיר פונקציה $f:A\to P(A)$ כך $f(1)=\{2\}$, $f(2)=\{1,2\}$ אז $y=\{1\}$. ולכן $f(1)\neq y$ ו- $f(2)\neq y$. אם נגדיר $f(1)=\{1\}$ אז $y=\{\emptyset\}$ ושוב $f(1)\neq y$, $f(2)\neq y$.