בס"ד

23/12

20

נושא 6 - למת הניפוח

א) למת הניפוח

עד כה למדנו להוכיח מתי שפה רגולרית (אם יש לה גסד, אסלד או ביטוי רגולרי). בפרק זה נלמד להוכיח מתי שפה היא לא רגולרית.

<u>משפט:</u> תהי L שפה רגולרית אזי קיים $n\in\mathbb{N}$ כך שלכל $z\in L$ כך ש- $n\leq|z|$ קיים פירוק ל-z מהצורה $z=uvw$ המקיים 3 תנאים:

(1) $n\leq|uv|$.

(2) $|v|\geq 1$. במילים אחרות $v\neq\varepsilon$.

(3) $uv^iw\in L$ לכל $i\geq 0$.

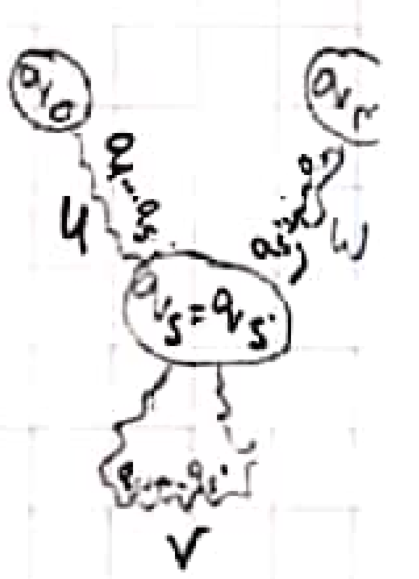
⊛ אם שפה L מקיימת את למת הניפוח זה לא בהכרח שהיא רגולרית, אך אם שפה L לא מקיימת את למת הניפוח אזי היא בוודאי לא רגולרית.

⊛ משפט זה מתקיים עבור שפות סופיות שכן ניתן לבחור n גדול מהמילה הכי ארוכה בשפה הסופית ולכן הטענה מתקיימת באופן ריק.

ב) הוכחת למת הניפוח

תהי L שפה רגולרית, אזי קיים אסד A שמקבל אותה. נגדיר $n=|Q|$ מספר המצבים ב-A.

תהי $z\in L$ כך ש-z מהצורה $z=a_1a_2..a_m$ כאשר $n\leq m$. נגדיר את q_i לכל $0\leq i\leq m$ להיות המצב שמגיעים אליו ב-A לאחר קריאת i אותיות מ-z. $q_i=\hat{\delta}(q_0,a_1...a_i)$. נשים לב שהמצב הראשון עבור $i=0$ הוא אכן q_0 מצב התחלתי. סה"כ יש לפחות $n+1$ מצבים כאלו בקריאת z ולכן מכיוון שיש רק n מצבים ולפי עקרון שובך היונים, קיימים $0\leq s<s'\leq n$ כך ש- $q_s=q_{s'}$. כעת נפרק את z לשלושה חלקים מהצורה $z=uvw$ כאשר $u=a_1...a_s$, $v=a_{s+1}...a_{s'}$, $w=a_{s'+1}...a_m$. נוכיח שאכן פירוק זה מקיים את 3 התנאים בלמת הניפוח.



(1) האורך של uv הוא s' שאכן הראינו לפי שובך היונים שמקיימת $n\geq s'$.

(2) באותו אופן, האורך של v לפחות 1 שכן $s<s'$.

(3) נוכיח קודם טענת עזר כי לכל $i\geq 0$ מתקיים $\hat{\delta}(q_s,v^i)=q_s$ באינדוקציה על i.

בסיס- עבור $i=0$ $v^0=\varepsilon$ ואכן $\hat{\delta}(q_s,\varepsilon)=q_s$.

הנחה - נניח נכונות עבור i ונוכיח עבור $i+1$. מתקיים:

$$\hat{\delta}(q_s,v^{i+1})\overset{\text{הגדרת פונ' מעברים}}{=}\hat{\delta}(\hat{\delta}(q_s,v^i),v)\overset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=}\hat{\delta}(q_s,v)\overset{\text{מהגדרת } v}{=}q_s$$

נשתמש בטענת עזר לסיום הוכחה:

$$\hat{\delta}(q_0,uv^iw)\overset{\text{הגדרת פונ' מעברים}}{=}\hat{\delta}(\hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0,u),v^i)w)\overset{\text{הגדרת } u}{=}\hat{\delta}(\hat{\delta}(q_s,v^i),w)\overset{\text{טענת עזר}}{=}\hat{\delta}(q_s,w)\overset{\text{הגדרת } w}{=}q_m$$

כעת, כיוון ש- $z\in L$ ומסת"ם q_m באפ' אזי $q_m\in F$ ולכן $uv^iw\in L$. מ.ש.ל.

30/1

21

ג) הוכחת אי-רגולריות באמצעות למת הניפוח

נשתמש בלמת הניפוח להוכחת אי-רגולריות לשפה L: נניח בשלילה שהשפה L רגולרית. נגדיר n הקבוע שקיומו מובטח בלמה. נבחר $z\in L$ באורך לפחות n. ניקח פירוק כללי כמובטח בלמה שמקיים שני תנאים ראשונים ונמצא איזשהו $i\neq1$ עבורו uv^iw אינה שייכת ל-L וכך נגיע לסתירה.*

דוגמאות:

(1) נוכיח כי השפה $L=\{x\in\{a,b\}^* \mid \#_a(x)=\#_b(x)\}$ אינה רגולרית.

נניח בשלילה כי L רגולרית ויהי n הקבוע שקיומו מובטח מהלמה. נבחר $z=a^nb^n$ השייך ל-L ומקיים $n\le|z|$. יהי פירוק $z=uvw$ כמובטח בלמה. נשים לב שבגלל ש-$n\ge|uv|$ ו-$|v|\ge1$ ח״ב להתקיים $u=a^s$ כאשר $s\ge0$ וגם $v=a^t$ כאשר $t\ge1$ ו-$s+t\le n$. נמצא אם כן כי w חייב להיות מהצורה $w=a^{n-s-t}b^n$. לפי צורות אלו של u,v ו-w נראה כיצד נראה z_i כללי: $z_i=uv^iw=a^s(a^t)^ia^{n-s-t}b^n\overset{\text{לפי חוקי חזקות}}{=}a^{n+t(i-1)}b^n$. נשים לב כי עבור i=0 נקבל $a^{n-t}b^n\notin L$ שהרי $t\ge1$ ולכן אינו שייך ל-L, סתירה ללמת הניפוח!

(2) נוכיח כי השפה $L=\{xx\mid x\in\{a,b\}^*\}$ אינה רגולרית.

נניח בשלילה כי L רגולרית ויהי n הקבוע שקיומו מובטח מהלמה. נבחר $z=a^nba^nb$ השייך ל-L ומקיים $n\le|z|$. יהי פירוק $z=uvw$ כמובטח בלמה. נשים לב שבגלל ש-$n\ge|uv|$ ו-$|v|\ge1$ ח״ב להתקיים $u=a^s$ כאשר $s\ge0$ ו-$v=a^t$ כאשר $t\ge1$ ו-$s+t\le n$. נמצא אם כן כי $w=a^{n-s-t}ba^nb$. z_i כללי הוא מהצורה: $z_i=uv^iw=a^s(a^t)^ia^{n-s-t}ba^nb=a^{n+t(i-1)}ba^nb$, שלפי למת הניפוח צריך להיות שייך ל-L לכל $i\ge0$, אולם עבור i=0 נקבל $z_0=a^{n-t}ba^nb\notin L$ שהרי x חייב להסתיים ב-b ואז יוצא שבחלק הראשון יש פחות a מחלק שני כי $t\ge1$. סתירה!

(3) נוכיח כי השפה $L=\{a^{k^2}\mid k\in\mathbb{N}\}$ אינה רגולרית. נשים לב כי $\Sigma=\{a\}$.

נניח בשלילה ש-L רגולרית ויהי n הקבוע המובטח מהלמה. נבחר $z=a^{n^2}$ השייך ל-L ומקיים $n\le|z|$. יהי פירוק $z=uvw$ כמובטח מהלמה. v הוא מהצורה a^t כאשר $1\le t\le n$ בגלל שני התנאים הראשונים בלמה. לפי למת הניפוח $z_i=uv^iw$ שייך ל-L לכל $i\ge0$. אולם עבור i=2 נקבל $z_2=a^{n^2+t}$ שאינו שייך ל-L שכן $n^2<n^2+t<(n+1)^2=n^2+2n+1$. נובע מהגדרת t. ולכן כיוון ש-n^2+t בין שני ריבועים שלמים עוקבים $z_2\notin L$.

6/1

22

3) שפות לא-רגולריות המקיימות את למת הניפוח

אמנם שלמת הניפוח עוזרת להוכיח אי-רגולריות אך אינה יכולה להוכיח רגולריות. נוכיח זאת ע"י שנראה קיום שפה שאינה רגולרית אך מקיימת את למת הניפוח.

שפה כזו היא: $L=\{a\}^* \cup \{b^j a^{k^2} \mid j,k \in \mathbb{N}^+\}$.

<u>הוכחת קיום למת הניפוח:</u> נבחר קבוע $n=1$. יהי $z\in L$ כך ש-$|z|\geq 1$, ויהי פירוק $z=uvw$

כדי שיתקיימו שני תנאים ראשונים צריך שיתקיים $|v|=1$ ו-$u=\varepsilon$. נשקול כל אפשרות לבחירת z.

- אם $z\in\{a\}^*$ כך ש-$z=a^t$ כאשר $t\geq 0$, אזי בבחירה $v=a$ ו-$z_i=uv^iw=a^{t+i-1}\in L$ לכל $i\geq 0$
- אם $z\in b^j a^{k^2}$ ו-$j>1$ אזי בבחירה $v=b$ ו-$z_i=uv^iw=b^{j+i-1}a^{k^2}\in L$ לכל $i\geq 0$.
- אם $z\in b^j a^{k^2}$ ו-$j=1$ אזי בבחירה $v=b$ ו-$z_i=uv^iw=b^i a^{k^2}\in L$ לכל $i\geq 0$. אם $i=0$ אזי $z_0=uv^0w=a^{k^2}\in\{a\}^*\in L$.

נמצא כי עבור כל $z\in L$ למת הניפוח מתקיימת. מ.ש.ל.

<u>הוכחת אי-רגולריות:</u> נניח בשלילה ש-L רגולרית. כיוון ש-$\{a^*\}$ ו-$b^j a^{k^2}$ הן קבוצות זרות, שהרי $j\geq 1$ ולכן הקבוצה השנייה תמיד מתחילה ב-b, נוכל לבטא את הקבוצה השנייה כהפרש בדרך הבאה: $L'=\{b^j a^{k^2} \mid j,k\in\mathbb{N}^+\} = L\setminus\{a\}^*$. מסגירות להפרש בשפות רגולריות נקבל כי גם L' רגולרית. ומסגירות להיפוך נקבל כי $(L')^R=\{a^{k^2}b^j \mid j,k\in\mathbb{N}^+\}$ רגולרית, אולם לפי דוגמה (3) בסעיף קודם $(L')^R$ אינה מקיימת את למת הניפוח (נבחר $z=a^{k^2}b$. ונשתמש באותה הוכחה). ולכן $(L')^R$ אינה רגולרית. סתירה להנחה ש-L רגולרית! מ.ש.ל.