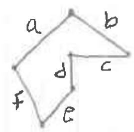
4/6 בס"ד

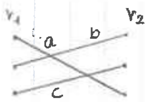
זיווגים בגרפים

א) הגדרות



$M = a, c, e$

זיווג מושלם



$M = a, b, c$

זיווג בגרף כלשהו: יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. זיווג ב-G הוא אוסף M של צלעות כך שאין שתי צלעות באוסף עם קודקוד משותף. הזיווג M יקרא בנוסף "זיווג מושלם" אם כל קודקודי הגרף משתתפים בו. אם $\{u,v\} \in M$ נאמר שהקודקודים u,v מזווגים ע' M.

זיווג בגרף דו-צדדי: יהי $G=(V_1, V_2, E)$ גרף דו-צדדי. הגדרת הזיווג וזיווג מושלם זהה לזה שהגדרנו לעיל, אלא שבזיווג מושלם בגרף דו-צדדי בהכרח מספר הקודקודים בכל קבוצה V_1, V_2

ב) משפט החתונה של הול (Hall)

משפט: יהי $G=(V_1,V_2,E)$ גרף דו-צדדי כך ש-$|V_1|=|V_2|$, כלומר מספר הקודקודים בהם שווה! אזי ב-G יש זיווג מושלם אם ורק אם לכל קבוצה S חלקית ל-V_1 מתקיים $|S| \le |\Gamma(S)|$, כלומר שכל תת קבוצה שנבחר ב-V_1, מספר הקודקודים בקבוצה זו קטן או שווה למספר השכנים של התת-קבוצה.

נזכיר כי שכנים של תת קבוצה S הם כל הקודקודים שיש צלע בינם לבין קודקוד כלשהו ב-S.

הוכחה: כיוון 1 - נניח שיש בגרף G זיווג מושלם ותהי S קבוצה חלקית ל-V_1, נוכיח $|S| \le |\Gamma(S)|$: לכל קודקוד ב-S יש בן זוג "יחודי" לו בזיווג המושלם, לכן בהכרח מספר השכנים של S הוא לפחות בגודל S, $|S| \le |\Gamma(S)|$.

כיוון 2 - נניח כי מתקיים לכל קבוצה S חלקית ל-V_1 $|S| \le |\Gamma(S)|$, נוכיח כי יש ב-G זיווג מושלם באינדוקציה על מספר הקודקודים n ע

בסיס - כאשר $n=1$ אזי $|V_1|=|V_2|=1$, כך שהצלע היחידה בין V_1 ל-V_2 היא הזיווג המושלם.

הנחה - נניח כי הטענה נכונה עבור $n=|V_1|$.

שלב - נוכיח עבור $n+1=|V_1|$. יכולים להיות שני מקרים אפשריים עבור כל קבוצה S חלקית ל-V_1:

(1) $|S| < |\Gamma(S)|$ - נבחר קודקוד כלשהו $x \in V_1$. אזי במקרה זה ל-x יש לפחות שני שכנים, נבחר אחד מהם y ונכלול את הצלע $\{x,y\}$ בזיווג המושלם M שאנו מחפשים. נסתכל על הגרף $G' = G \setminus \{x,y\}$ שבו הורדנו את הקודקודים x,y ואת הצלע ביניהם. בקבוצה $V_1 \setminus \{x\}$ יש כעת n קודקוד ובכל קבוצה S החלקית ל-$V_1 \setminus \{x\}$ מתקיים $|S| \le |\Gamma(S)|$ ב-G', מפני שהורדנו קודקוד y ב-V_2. לכן לפי הנחת האינדוקציה יש זיווג מושלם ב-G', נחזיר את x,y והצלע ביניהם ונקבל זיווג מושלם ב

(2) $|S| = |\Gamma(S)|$ - אזי קיימת קבוצה S חלקית ממש ל-V_1, כלומר $|S| < |V_1|$ כך שיש בה n או פחות קודקודים, ומתקיים בה $|S| = |\Gamma(S)|$. לפי הנחת האינדוקציה יש בה זיווג מושלם.

נס׳ר מהגרף G את קבוצת הקודקודים S ו- $\Gamma(S)$, כך שנקבל גרף דו-צדדי $G'=(V_1\setminus S, V_2\setminus \Gamma(S), E')$. בגרף G' גם יש n או פחות קודקודים, ולכל תת קבוצה H שחלקית ל- $V_1\setminus S$ מתקיים $|\Gamma(H)|\geq|H|$ לפי ההנחה (בציון ב), שהרי גם H היא תת קבוצה של V_1. ומכאן שגם G' מקיים את הנחת האינדוקציה ויש בו זיווג מושלם. לכן אם נאחד את הזיווג המושלם ב-G' עם הזיווג המושלם בקבוצה החלקית שהשמטנו, נקבל זיווג מושלם ב-G. מ.ש.ל.

ג) <u>מסקנה ממשפט החתונה של הול</u>

<u>מסקנה:</u> אם $G=(V_1,V_2,E)$ גרף דו-צדדי d-רגולרי (דרגות כל הקודקודים בו שווים ל-d) אזי יש בו זיווג מושלם

הוכחה: ניקח תת קבוצה חלקית S של V_1. לכל קודקוד בקבוצה זו יש d צלעות, לכן כמות הצלעות היוצאות מקבוצה זו היא $|S|\cdot d$. נשים לב כי מתקיים $|S|\leq|\Gamma(S)|$, כלומר קבוצת השכנים של S גדולה מ-S, מפני שכל צלע ב-S נמצאת גם ב-$\Gamma(S)$ ומפני שהגרף d-רגולרי לא יכול להיות שמספר הקודקודים ב-$\Gamma(S)$ קטן מ-S. לכן לפי משפט החתונה של הול יש זיווג מושלם ב-G.

3) <u>מסלולים בזיווג</u>

יהי M זיווג בגרף $G=(V,E)$, ויהי P מסלול פשוט (לא חוזר על אותה צלע פעמיים) אזי P יקרא:

<u>מסלול מתחלף:</u> אם כל הצלעות במסלול נמצאות לסירוגין בזיווג M, כלומר יש צלע בזיווג ולאחריה צלע לא בזיווג, כך בכל המסלול.

<u>מסלול הרחבה לזיווג M:</u> אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

(1) P הוא מסלול מתחלף.

(2) הקודקוד הראשון והאחרון ב-P אינם נמצאים באף צלע בזיווג M.

מסלול הרחבה אינו ת״ב לכלול את כל הצלעות בזיווג M ועדיין להיות הרחבה שלו. נשים לב כי המשמעות היא ש-M אינו זיווג מקסימלי מפני שניתן לבחור זיווג אחר שיכלול את הצלע הראשונה והאחרונה והוא בהכרח גדול יותר.

ה) <u>משפט ברג׳ (Berge)</u>

<u>משפט:</u> בגרף $G=(V,E)$ בעל זיווג M, קיים זיווג אחר N עם יותר צלעות מ-M אם ורק אם קיים מסלול הרחבה ל-M.

נספח ה

הוכחה: כיוון 1 - נניח שקיים מסלול הרחבה ל-M, אזי קיים זיווג גדול יותר שכולל את הצלע הראשונה והאחרונה

כיוון 2 - נניח ש-N גדול יותר, נוכיח שקיים מסלול הרחבה ל-M. נתבונן בגרף H שקבוצת הקודקודים

שלו היא V וקבוצת הצלעות שלו היא איחוד הצלעות ב-M ו-N, רק שאם יש צלע שמופיע גם ב-M וגם ב-N יהיו 2 צלעות מקבילות, כלומר H אינו בהכרח פשוט אלא יכול להכיל מעגל בין 2 צלעות, $H=(V, M\cup N)$. נשים לב שמכיוון ש-H מורכב מאיחוד של שני זיווגים, הדרגה המקסימלית של כל קודקוד היא 2. מתכונה זו נובע כי בכל רכיב קשירות של H כל הצלעות ברכיב הקשירות מרכיבים או מעגל או מסלול פשוט. נבחר קודקוד מסוים ברכיב הקשירות ונתחיל לטייל על רכיב הקשירות בלי לחזור על אותה צלע, מכיוון שהדרגה המקסימלית היא 2 בוודאי נעבור בכל הצלעות, ואז או שנחזיר לקודקוד הראשון ונקבל מעגל או שנקבל מסלול פשוט.

בכל רכיב קשירות כל 2 צלעות סמוכות חייבות להיות אחת מ-N והשנייה מ-M, כי לא יכול להיות 2 צלעות סמוכות מאותו זיווג. כתוצאה מכך נקבל כי ברכיבי הקשירות המעגליים יש מספר זהה של צלעות מ-N ו-M. אמנם מכיוון ש-$|M|<|N|$ ח"ב להיות לפחות רכיב קשירות אחד שהוא מסלול פשוט ובו מספר הצלעות מ-N גדול מ-M. כדי שזה יקרה המסלול הפשוט חייב להתחיל מצלע מ-N ולסיים בצלע מ-N, ובאמצע הצלעות מתחלפות לסירוגין. מסלול פשוט זה הוא מסלול הרחבה ל-M. מ.ש.ל.