פרק ה' - הוכחות

א) הקדמה

בפרק זה נלמד כיצד להוכיח שפסוק מתקיים או לא מתקיים, בכל המבנים השונים של פסוקים. וכן נלמד להוכיח תכונות מסוימות של פונקציות ויחסים. בכל הוכחה כל פעם שנניח משהו או שנגיע למסקנה מסוימת נמספר הנחה או מסקנה זאת, כדי שבהמשך יהיה לנו יותר קל להשתמש בהנחה או מסקנה ולא נצטרך לרשום אותם מחדש.

ב) הוכחת פסוק מכומת

(1) הוכחת פסוק כללי - על מנת להוכיח שפסוק מהצורה $\forall x(B)$ מתקיים במבנה M, נכתוב כך: "יהי x איבר כללי בעולם של M", כלומר נתייחס ל-x כאל קבוע אישי שיכול להיות כל איבר ב-M. כעת עלינו להוכיח כי אכן נוסחא B מתקיימת. במידה שיש יותר משתנה מכומת אחד ב-$\forall$. נרשום יהי $x_1,x_2,...,x_n$ איברים כללים בעולם של M.

(2) הוכחת פסוק ישי - על מנת להוכיח שפסוק מהצורה $\exists x(B)$ מתקיים במבנה M, נגדיר x שווה לאיבר מסוים (ולא איבר כללי), שעבור x זה צריך להוכיח שנוסחא B מתקיימת.

ג) הוכחת פסוקים עם קשרים

(1) הוכחת פסוק גימום - על מנת להוכיח שפסוק מהצורה $A\land B$ מתקיים במבנה M. נחלק את ההוכחה לשני שלבים: (1) נוכיח שמתקיים A. (2) נוכיח שמתקיים B.

(2) הוכחת פסוק איווי - על מנת להוכיח שפסוק מהצורה $A\lor B$ מתקיים במבנה M, יש להוכיח או את A או את B, אין צורך בשניהם.

(3) הוכחת פסוק אמוב - על מנת להוכיח שפסוק מהצורה $A\to B$ מתקיים במבנה M, נניח כי A מתקיים וצריך להוכיח שגם B מתקיים. לחילופין, ניתן להוכיח בשלילה

(4) הוכחת פסוק אמום - על מנת להוכיח שפסוק מהצורה $A\leftrightarrow B$ מתקיים במבנה M, יש להוכיח שני שלבים: (1) שמתקיים $A\to B$, כלומר נניח ש-A מתקיים ונוכיח את B.
(2) שמתקיים $B\to A$. כלומר נניח ש-B מתקיים ונוכיח את A.

בחלק מהמקרים יהיו כמה קשרים בפסוק אחד, אך יהיה את הקשר המרכזי שמטרתנו הסופית היא להוכיח אותו, ולכן אסטרטגיית ההוכחה שלנו תיקבע לפיו. אולם לשם הוכחתו נצטרך להוכיח עוד קשרים. נתייחס אליהם כפסוק בפני עצמו, נוכיח אותם, וכך נוכל להמשיך בהוכחתנו המרכזית.

12/11

דוגמא: הוכח שהפסוק $\alpha = \forall x,y,z[S(x,y)\wedge S(y,z)]\to S(x,z)$ מתקיים במבנה $M=\langle \mathbb{N}^+, div\rangle$.

יהיו (1) $x,y,z\in\mathbb{N}^+$. נניח (2) $S(x,y)\wedge S(y,z)$. צ"ל $S(x,z)$.

לפי (2) $x\ div\ y$ ולכן קיים מספר כלשהו k כך שמתקיים (3) $x\cdot k=y$. עוד מתקיים

לפי (2) $y\ div\ z$ ולכן קיים מספר כלשהו j כך שמתקיים (4) $y\cdot j=z$. אזי לפי

(3) ו-(4) מתקיים גם (5) $x\cdot k\cdot j=z$. כלומר $x\ div\ z$ מ.ש.ל. ולכן $M\models\alpha$.

ג) מסקנות מהוכחות או מהנחות

כאשר הצלחנו להוכיח פסוק עמ'ק או שבאחד משלבי ההוכחה אנו מניחים שהוא מתקיים

אזי המשמעות במדויק הבא תהיה:

(1) מהפסוק $\forall x(B)$ נוכל להסיק ש-B מתקיים לכל משתנה שנציב בו.

(2) מהפסוק $\exists x(B)$ נוכל להסיק ש-B מתקיים עבור אותו ערך x שהשתמשנו בהוכחה.

(3) מהפסוק $A\wedge B$ נוכל להסיק שגם A וגם B מתקיימים

(4) את הפסוק $A\vee B$ נחלק לשני מקרים: מקרה ראשון ש-A מתקיים, ומקרה שני ש-B מתקיים.

(5) מהפסוק $A\to B$ נוכל להסיק שאם A מתקיים גם B מתקיים.

(6) את הפסוק $A\leftrightarrow B$ נחלק לשני מקרים: מקרה ראשון ששניהם מתקיימים, ומקרה שני ששניהם לא מתקיימים.

ועדק ?

ה) הוכחת תכונות של פונקציות

תכונות של פונקציות הם חח ערכיות (חח"ע) ועל. נראה איזה פסוק צריך להוכיח כדי להוכיח שתכונות אלו מתקיימות. נתונה פונקציה $F:A\to B$ ומבנה $M=\langle A\vee B, F, A, B\rangle$.

(1) כדי להוכיח חח"ע יש להוכיח את הפסוק: $\forall x,y\in A[[F(x)=F(y)]\to x=y]$

(2) כדי להוכיח על יש להוכיח את הפסוק: $\forall y\in B[\exists x\in A[F(x)=y]]$

(3) כדי להוכיח חח"ע ועל יש להוכיח את שני הפסוקים לעיל.

דוגמא:

19/11 בס"ד

1) הוכחת תכונות של יחסים

יש חמישה תכונות של כל סוגי היחסים השונים. נראה איזה פסוק יש להוכיח כדי להוכיח שתכונה מסוימת מתקיימת. נתון יחס S על קבוצה A ומבנה $M=\langle A,S\rangle$.

(1) S יחס "רפלקסיבי" פירושו שהפסוק הבא מתקיים במבנה M: $\forall x[S(x,x)]$

(2) " "סימטרי" " " " " : $\forall x,y[S(x,y)\to S(y,x)]$

(3) " "אנטי סימטרי" " " " : $\forall x,y[[S(x,y)\land S(y,x)]\to x=y]$

(4) " "טרנזיטיבי" " " " : $\forall x,y,z[[S(x,y)\land S(y,z)]\to S(x,z)]$

מסתבר שיחסים רבים המצויים בטבע מקיימים שלושה מתוך ארבעה מהיחסים אלו, ולכן יש עוד שתי תכונות המציגות כל אחת קבוצה גדולה של יחסים. לשתי תכונות אלו כמו שנראה בהמשך יש חשיבות רבה.

(5) S יחס "סדר" פירושו ש-S הוא: רפלקסיבי, אנטי סימטרי, וטרנזיטיבי.

(6) S יחס "שקילות" פירושו ש-S הוא: רפלקסיבי, סימטרי, וטרנזיטיבי.

דוגמאות: (1) הוכח כי היחס "להיות מאותה זוגיות" בין שני מספרים על N הוא יחס שקילות.

כאשר שני מספרים n,m מאותה זוגיות מתקיים (1) (n-m) זוגי.

רפלקסיביות- יהי $x\in N$. אז נשים לב כי $|x-x|=0 \Rightarrow$ זוגי ✓

סימטריות- יהי $x,y\in N$. נניח כי $|x-y|$ זוגי, צ"ל $|y-x|$ זוגי: $|y-x|=|x-y| \Rightarrow$ זוגי ✓

טרנזיטיביות- יהי $x,y,z\in N$ נניח כי $|x-y|$ זוגי וגם $|y-z|$ זוגי, צ"ל $|x-z|$ זוגי.

$|x-y|+|y-z|=|x-z| \Rightarrow$ זוגי ועוד זוגי הוא זוגי ✓

(2) הוכח כי יחס החלוקה על N $S=\{\langle x,y\rangle\in N^2:\exists n\in N, nx=y\}$ הוא יחס סדר.

רפלקסיביות- יהי $x\in N$ ו-$n=1$ אז $1\cdot x=x$ ✓

אנטי סימטריות- יהי $x,y\in N$ נניח כי $y=x\cdot n$ וגם $x=y\cdot m$ אז זה יכול להתקיים רק אם $x=y$ ✓.

טרנזיטיביות- יהי $x,y,z\in N$ נניח כי $y=x\cdot n$ וגם $m\cdot y=z$, אז: $m\cdot y=z\Rightarrow(m\cdot n)\cdot x=z$ ✓

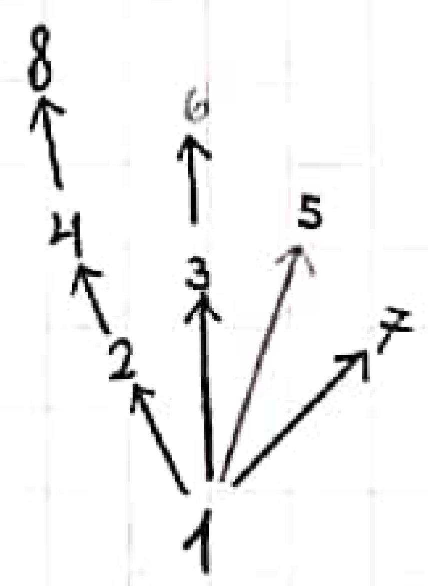
ב) סדר קווי/מלא

בסעיף קודם פירטנו שלוש תכונות שמקיים "יחס סדר", אמנם יחס שמקיים שלוש תכונות אלו בלבד נקרא יחס חלקי. כדי שיחס חלקי יחשב יחס קווי (או מלא או לינארי) הוא צריך לקיים תכונה נוספת, לשם כך נלמד מושג חדש שנקרא "איברים בני השוואה".

איברים בני השוואה- שני איברים a,b יקראו בני השוואה ביחס S אם מתקיים: $S(a,b) \vee S(b,a)$, כלומר שלפחות אחד מהיחסים מתקיים.

סדר קווי- נתון יחס S שהוא סדר חלקי על קבוצה A, אזי S יקרא "סדר קווי" אם כל שני איברים ב-A הם בני השוואה, כלומר שעל כל שני איברים מתקיים היחס $S(a,b) \vee S(b,a)$. לדוגמא: היחס "קטן שווה" הוא סדר קווי מפני שעל כל שני איברים מתקיים: $a \le b \vee b \le a$.

דיאגרמת הסה ליחס החילוק 1-8



דיאגרמת הסה- היא דיאגרמה שבה רושמים את כל האיברים ומותחים חץ בין כל שני איברים שמקיימים את היחס, אם היחס טרנזיטיבי כך שיש חץ בין a ל-b ובין b ל-c, אזי ברור שיש גם חץ אבל נרשום אותו בין a ל-c העובר דרך b. אם היחס רפלקסיבי לא חייב למתוח חץ בין איבר לעצמו. בסדר קווי אזי בין כל שני איברים בדיאגרמת הסה יהיה חץ.

ח) משמעות יחס שקילות

לפני שנסביר את המשמעות של יחס שקילות נסביר כמה מושגים:

חלוקת קבוצה- חלוקה של קבוצה A היא קבוצה P שאיבריה הם תת קבוצות של A $B_1,B_2,\dots,B_n$, כך שלכל איבר a ב-A קיימת תת קבוצה אחת ויחידה B_i כך ש-$a \in B_i$. במילים אחרות חלוקת קבוצה מחלקת את כל האיברים לתתי קבוצות כך שכל איבר נמצא רק בקבוצה אחת.

איחוד קבוצות- נתונה קבוצה P של תתי קבוצות, איחוד קבוצות נסמן $\vee P$ היא קבוצה המכילה את כל האיברים שמופיעים אפילו רק בקבוצה אחת.

חיתוך קבוצות- נתונה קבוצה P של תתי קבוצות, חיתוך קבוצות נסמן $\wedge P$ היא קבוצה המכילה את כל האיברים שמופיעים בכל אחת ואחת מתתי הקבוצות.

דוגמא: נתון: $A=\{1,2,3,4\}$, ותלוקה של A $P=\{B_0,B_1,B_2\}$ כך: $B_0=\{1,2\}$, $B_1=\{2,3\}$, $B_2=\{1,2,4\}$.

אזי: $\wedge P=\{2\}$, $\vee P=\{1,2,3,4\}$.

חלוקת קבוצות הגדרה 2- קבוצה P היא חלוקה של A אם מתקיימות שתי הדרישות הבאות:

(1) $\vee P = A$.

(2) כל שתי קבוצות שונות B_n, B_m ב-P מתקיים: $B_n \wedge B_m=\emptyset$, כלומר P זרה בזוגות.

<u>תכונת יחס שקילות</u>- לכל יחס שקילות E על קבוצה A יש חלוקה יחידה P של A, כך שלכל x ו-y ב-A מתקיים $E(x,y)$ אם ורק אם יש תת קבוצה B ב-P כך ש-$\{x,y\}\subseteq B$. וכן ההפך, לכל חלוקה P של קבוצה A מתאים יחס שקילות יחיד E על A, כך שלכל x ו-y ב-A מתקיים $E(x,y)$ אם ורק אם יש תת קבוצה B כך ש-$\{x,y\}\subseteq B$.

במילים אחרות, P מחלקת את A למחלקות שקילות, כך שאם שתי איברים מקיימים את יחס השקילות הם באותה הקבוצה, ואם הם לא מקיימים את היחס אזי אינם באותה קבוצה.

דוגמא: נגדיר קבוצה {כל הנקודות על היבשת והאיים}=A, ונגדיר את יחס השקילות $E=\{\langle x,y\rangle\in A^2:$ ניתן להגיע מ-x ל-y בלי לעבור בים$\}$, אזי קיימת חלוקה של A שהיא {כל יבשת או אי בתת קבוצה} = P.

6) <u>הכלה דו כיוונית</u>

כדי להוכיח ששני קבוצות A,B שווים, נשתמש באקסיומת ההיקפיות, הנקראת גם "הכלה דו כיוונית", האומרת אם $A\subseteq B$ וגם $B\subseteq A$ אזי $A=B$. לכן כדי להוכיח $A=B$ נוכיח שני דברים אלו.

הערה: כדי להוכיח $A\subseteq B$ יש להוכיח $\forall x\in A\,(x\in B)$.

<u>דוגמא:</u> הוכח את חוק הפילוג האומר לכל A,B,C $A\vee(B\wedge C)=(A\vee B)\wedge(A\vee C)$.

(1) כיוון ראשון - נוכיח: $A\vee(B\wedge C)\subseteq(A\vee B)\wedge(A\vee C)$.

יהי $x\in A\vee(B\wedge C)$ (1). צ"ל $x\in(A\vee B)\wedge(A\vee C)$.

מקרה א': כאשר $x\in A$. אזי $x\in A\vee B$ וגם $x\in A\vee C$, לכן $x\in(A\vee B)\wedge(A\vee C)$. מ.ש.ל.

מקרה ב': כאשר $x\in B\wedge C$, כלומר $x\in B$ (3) וגם $x\in C$ (4). אזי לפי (3) (4) $x\in A\vee B$ וגם $x\in A\vee C$, כלומר $x\in(A\vee B)\wedge(A\vee C)$. מ.ש.ל.

(2) כיוון שני - נוכיח: $(A\vee B)\wedge(A\vee C)\subseteq A\vee(B\wedge C)$

יהי $x\in(A\vee B)\wedge(A\vee C)$ (1'). צ"ל $x\in A\vee(B\wedge C)$.

מקרה א': כאשר $x\in A$. אזי $x\in A\vee(B\wedge C)$. מ.ש.ל.

מקרה ב': כאשר $x\in B\wedge C$. אזי $x\in A\vee(B\wedge C)$. מ.ש.ל.

מסקנה: בגלל שיש הכלה דו כיוונית מתקיים חוק הפילוג: $A\vee(B\wedge C)=(A\vee B)\wedge(A\vee C)$.

19/11 בס״ד

4) הוכחות ושיטת המשחק

כאשר מבקשים שנוכיח פסוק האם מתקיים, אזי ניתן להוכיח באמצעות שיטת המשחק.
כלומר, לבחור אסטרטגיות נכונות לאחד הכמתים ואז להגדיר את ערכי המשתנים לפי
שיטת המשחק ולהגדיר את ההוכחה.

דוגמא: נתון מבנה $L=\langle c,S,f\rangle$ והמבנה המפרש אותו $M=\langle R,0,<,*\rangle$. האם M מקיים
את הפסוק $M\models\forall x\exists y\forall z\exists w(\neg(xz=c)\to S(x,y,z,w,c))$?

הוכחה: לפי שיטת המשחק יהי $x\in R$ (1). נגדיר $y=1$ (2). יהי $z\in R$ (3). נגדיר $w=-xz$ (4)
צ״ל $xz\neq 0\to xyzw<0$. נניח $xz\neq 0$, צ״ל $xyzw<0$.
לפי (2) (4) $xyzw=x\cdot1\cdot z\cdot(-xz)=-(x^2z^2)$. נשים לב כי תמיד מתקיים $-(x^2z^2)<0$. מ.ש.ל.