מבנים בדידים וקומבינטוריקה

אוניברסיטת בן גוריון בנגב

סמסטר קיץ, תשע״ב (2012)

מרצה: ד״ר סטיוארט סמית

סוכם ע״י: רז בויארסקי

תוכן עניינים

מבנים בדידים וקומבינטוריקה

שם המרצה: ד״ר סטיוארט סמית

שעות קבלה: יום ד׳: $14^{00}-13^{00}$, יום ה׳: $13^{00}-12^{00}$, חדר מינוס 109, בנין 58.

ציון בקורס: 10% עבודות, 90% מבחן.

מייל: smith@bgu.ac.il

ספר:

- מתמטיקה בדידה, נתי ליניאל ומיכל פרנס.

קומבינטוריקה

נתחיל בשני עקרונות מתורת הקבוצות:

עקרון החיבור:

תהיינה $A_1, A_2, \ldots, A_n$ קבוצות סופיות וזרות בזוגות (כלומר, כל 2 קבוצות שונות, זרות: $A_i \cap A_j = \emptyset$ לכל $i \neq j$). אז:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

דוגמא:

בכיתה מסוימת יש 19 בנים ו-13 בנות. אזי מספר הדרכים לבחור באחד התלמידים בכיתה הוא $19+13=32$.

עקרון הכפל:

תהיינה $A_1, A_2, \ldots, A_n$ קבוצות סופיות כלשהן. אז:

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|$$

דוגמא:

1. בדוגמא הקודמת, מספר הדרכים לבחור **בזוג** תלמידים שמכיל בן אחד ובת אחת, הוא: $19 \cdot 13 = 247$.

2. נחשב את מספר הדרכים למלא כרטיס טופס טוטו:

בטופס טוטו יש 16 שורות, בכל שורה יש לסמן ״1״, ״2״, או ״x״. לכן, בסה״כ יש בכל שורה 3 דרכים למלא אותה, ולכן בסה״כ יש: $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{\text{16 פעמים}} = 3^{16}$.

טענה:

תהי A קבוצה בת n איברים. מספר הסדרות מאורך r של איברים מ- A הוא n^r.

הוכחה:

יש n אפשרויות עבור האיבר הראשון, יש n אפשרויות עבור האיבר השני, וכך הלאה עד האיבר ה- r. ולכן, מעקרון הכפל, יש $\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{\text{r פעמים}} = n^r$ סדרות כאלה.

הנחנו כאן ש- $r > 0$, אבל התשובה גם נכונה עבור $r = 0$. כלומר יש $n^0 = 1$ סדרות מאורך 0 של איברים מ- A. הסדרה היחידה שמקיימת זו היא הסדרה הריקה. נוכל לסמנה ב- $<>$.

הגדרה:

יהיו $n, r \in \mathbb{N}$ כך ש- $0 \leq r \leq n$. נגדיר <u>r-תמורה של n</u> כסדרה מאורך r של איברים מהקבוצה $\{1,2, \dots, n\}$, כך שאין איבר בסדרה שמופיע יותר מפעם אחת.

אם $r = n$ אז נקרא לסדרה כזאת <u>תמורה של n</u>.

דוגמא:

יהי $n = 5$, אז 3-תמורה של 5 יכול להיות למשל: $< 2,5,3 >$, והסדרה $< 1,2,5,4,3 >$ היא תמורה של 5.

סימון:

יהיו $n, r \in \mathbb{N}$, נסמן ב- $P(n,r)$ את מספר r-תמורות ($r - permutations$) של n.

דוגמא:

נרשום את כל ה- 3-תמורות של 4 (כלומר של $\{1,2,3,4\}$):

$< 2,3,4 >$	$< 1,3,4 >$	$< 1,2,4 >$	$< 1,2,3 >$
$< 2,4,3 >$	$< 1,4,3 >$	$< 1,4,2 >$	$< 1,3,2 >$
$< 3,2,4 >$	$< 3,1,4 >$	$< 2,1,4 >$	$< 2,1,3 >$
$< 3,4,2 >$	$< 3,4,1 >$	$< 2,4,1 >$	$< 2,3,1 >$
$< 4,2,3 >$	$< 4,1,3 >$	$< 4,1,2 >$	$< 3,1,2 >$
$< 4,3,2 >$	$< 4,3,1 >$	$< 4,2,1 >$	$< 3,2,1 >$

לכן: $P(4,3) = 24$.

טענה:

יהיו $n, r \in \mathbb{N}$, אז:

$$P(n,r) = \begin{cases} 1 \quad , \quad r = 0 \\ 0 \quad , \quad r > n \\ n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots \big(n - (r-1)\big) \quad , \quad 1 \leq r \leq n \end{cases}$$

הוכחה:

נוכיח רק את המקרה $1 \le r \le n$, השאר זה ברור. אז:

- עבור האיבר הראשון בסדרה ישנן n אפשרויות.
- אחרי שבחרנו איבר ראשון נשארו רק $n-1$ נוספים, ולכן עבור האיבר השני יש $n-1$ אפשרויות.
- עבור האיבר השלישי יש $n-2$ אפשרויות, וכך הלאה, עד האיבר ה- r שעבורו יש $n-r+1$ אפשרויות.

בסה״כ מעיקרון הכפל: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots \big(n-(r-1)\big)$ אפשרויות.

הגדרה:

יהי $n \in \mathbb{N}$ מספר כלשהו. נגדיר n-עצרת $(n - factorial)$ באופן הבא:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, לכל $n > 0$, ובנוסף: $0! = 1$.

הערה:

נשים לב ש- $n! = n \cdot [(n-1)!]$ לכל $n \ge 2$. ז״א ש- $(n-1)! = \frac{n!}{n}$ לכל $n \ge 2$.

למשל: $2! = \frac{3!}{3}$, $1! = \frac{2!}{2}$...

אם נרחיב את הכלל הזה ל- $n = 1$, כלומר: $(n-1)! = \frac{n!}{n}$ לכל $n \ge 1$, נקבל ש-

$$0! = (1-1)! = \frac{1!}{1} = 1$$

אם ננסה להמשיך ולהגדיר זאת גם עבור מספרים שליליים, אז נראה ש:
$(-1)! = \frac{0!}{0} = \frac{1}{0}$ וזה כמובן לא מוגדר.

טענה:

לכל $0 \le r \le n$ מתקיים:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

הוכחה:

זה נובע מיידית מהגדרת התמורה והעצרת כי:

$$\begin{aligned} P(n,r) &= n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \\ &= n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \cdot \frac{(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

וזה נכון גם עבור $r = 0$ כי:

$$P(n,0) = \frac{n!}{n!} = 1$$

הגדרה:

יהיו $n, r \in \mathbb{N}$. נסמן ב- $C(n,r)$ את מספר תתי-הקבוצות בעלות עוצמה r של קבוצה בת n איברים. (האות C מסמלת ״קומבינציות״ (Combinations), או ״צירופים״)

דוגמא:

נחשב $C(4,3)$:

נתונה קבוצה $A = \{1,2,3,4\}$. תת הקבוצות בעלות עוצמה 3 של A הן:

$\{2,3,4\}$ $\{1,3,4\}$ $\{1,2,4\}$ $\{1,2,3\}$

לכן: $C(4,3) = 4$.

כעת נראה את הקשר בין תמורות לקומבינציות.

משפט:

יהיו $n, r \in \mathbb{N}$. אז:

$$P(n,r) = C(n,r) \cdot P(r,r)$$

הוכחה:

אם $r = 0$, אז $P(n,0) = 1$ (הסדרה הריקה), ו- $C(n,0) = 1$ (הקבוצה הריקה), ו- $P(0,0) = 1$ (שוב הסדרה הריקה). לכן $1 = 1 \cdot 1$ והנוסחה נכונה.

אם $n < r$, אז $P(n,r) = 0$, וגם $C(n,r) = 0$ (לא קיימות תתי קבוצות שעוצמתן גדולה מעוצמת הקבוצה ממנה הן נבחרו), ולכן: $0 = P(r,r) \cdot 0$ והנוסחה נכונה.

כעת נניח כי $1 \leq r \leq n$. נחשב את מספר ה- r-תמורות של n בשתי דרכים שונות: מצד אחד זה $P(n,r)$, ומצד שני אפשר לבנות r-תמורה בשני שלבים:

בשלב הראשון נבחר ב- r האיברים **שיופיעו** בסדרה (בלי לסדר אותם). יש $C(n,r)$ דרכים לעשות זאת.

בשלב השני נסדר את r האיברים האלו, ואפשר לעשות זאת ב- $P(r,r)$ דרכים.

מעיקרון הכפל, יש $C(n,r) \cdot P(r,r)$ r-תמורות של n.

מסקנה:

יהיו $n,r \in \mathbb{N}$ אז:

$$C(n,r) = \begin{cases} \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} & , \quad 0 \le r \le n \\ 0 & , \quad r > n \end{cases}$$

הוכחה:

אם $0 \le r \le n$, אז מהמשפט הקודם:

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{\left(\frac{n!}{(n-r)!}\right)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

וכבר ראינו ש- $C(n,r) = 0$ אם $r > n$.

סימון:

את המספר הצירופים $C(n,r)$ מסמנים ב- $\binom{n}{r}$, כאשר $0 \le r \le n$.

נקרא זאת "n מעל r" או "n בחר r" (n choose r).

דוגמא:

$$\binom{4}{3} = C(4,3) = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{24}{6} = 4$$

כפי שכבר ראינו.

הערה:

אם r קטן, אז ייתכן שנוח יותר לחשב את $C(n,r)$ באמצעות הנוסחה:

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{r!}$$

למשל:

$$C(50,3) = \frac{P(50,3)}{3!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48}{6} = 50 \cdot 49 \cdot 8 = 400 \cdot 49 = 19600$$

דוגמא:

בכרטיס לוטו יש לבחור ב-6 מספרים מתוך $\{1,2,3,\ldots,37\}$, ובנוסף לבחור במספר אחד מתוך $\{1,2,3,\ldots,7\}$.

אז מספר הדרכים למלא את הכרטיס הוא: $\binom{37}{6} \cdot \binom{7}{1}$.

משולש פסקל:

משולש פסקל הוא המשולש האינסופי הבא:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\ & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\ & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\ & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\ & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\ \iddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots \end{array}$$

כדי לחשב את הערכים של $\binom{n}{r}$ במשולש פסקל בדרך יעילה, נוכיח מספר זהויות:

<u>טענה</u>:

יהיו $n,r \in \mathbb{N}$ כך ש- $0 \le r \le n$, אז:

$$C(n,r) = C(n,n-r)$$

<u>הוכחה</u>:

<u>דרך 1</u>: (לפי הנוסחה)

נשתמש בנוסחה: $C(n,r) = \binom{n}{r}$, נקבל:

$$C(n,n-r) = \binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,[n-(n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \binom{n}{r} = C(n,r)$$

<u>דרך 2</u>: (דרך קומבינטורית)

מספר הדרכים לבחור בתת-קבוצה מעוצמה r מקבוצה בת n איברים, הוא $C(n,r)$, אבל מספר הדרכים לבחור בתת קבוצה בת r איברים שווה למספר הדרכים לבחור במשלים של תת-הקבוצה (שתיהיה מעוצמת $(n-r)$).

לכן $C(n,r) = C(n,n-r)$.

<u>טענה</u>: (זהות פסקל)

יהיו $n,r \in \mathbb{N}$ כך ש- $1 \le r \le n$, אז:

$$C(n,r) = C(n-1,r) + C(n-1,r-1)$$

<u>הוכחה</u>:

<u>דרך 1</u>: (לפי הנוסחה)

נחשב את הערך של הביטוי באגף ימין:

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1} &= \frac{(n-1)!}{r!\,(n-1-r)!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!\,[n-1-(r-1)]!}\\ &= \frac{(n-1)!}{r!\,(n-r-1)!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!}\\ &= \frac{(n-1)!}{r!\,(n-r-1)!}\cdot\frac{(n-r)}{(n-r)}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!}\cdot\frac{r}{r}\\ &= \frac{(n-1)!\,(n-r+r)}{r!\,(n-r)!}=\frac{(n-1)!\cdot n}{r!\,(n-r)!}\\ &= \frac{n!}{r!\,(n-r)!}=\binom{n}{r}\end{aligned}$$

<u>דרך 2</u>: (דרך קומבינטורית)

תהי A קבוצה בת n איברים, $n \geq 1$. נסמן את אחד מהאיברים של A בסימן מסוים. נבחר בתת-קבוצה בת r איברים ($r \geq 1$) של A. אז, מצד אחד יש $C(n,r)$ דרכים לעשות זאת, ומצד שני יש שני מקרים:

<u>מקרה 1</u>: האיבר המסומן אינו שייך לתת הקבוצה, אז יש $\binom{n-1}{r}$ אפשרויות עבור תת הקבוצה.

<u>מקרה 2</u>: האיבר המסומן שייך לתת הקבוצה, אז יש $\binom{n-1}{r-1}$ אפשרויות לעשות זאת.

סה״כ מעיקרון הסכום יש $C(n-1,r)+C(n-1,r-1)$ אפשרויות.

לכן סה״כ קיבלנו: $C(n,r)=C(n-1,r)+C(n-1,r-1)$.

<u>הערה</u>:

ברור ש- $1=\binom{n}{n}=\binom{n}{0}$ לכל n. לכן כל האיברים באלכסונים הימני והשמאלי של משולש פסקל הם 1.

<u>זהות פסקל – המשך</u>:

המשמעות של זהות פסקל במשולש היא שכל איבר פנימי (לא בקצוות) שווה לסכום של שני האיברים בשורה מעליו. כך נוכל למצוא בקלות את כל ערכי המשולש ע״פ הערכים בשורות הקודמות.

בצורה זו נקבל את כל המשולש:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ \iddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots \end{array}$$

הביטויים $\binom{n}{r}$ נקראים <u>מקדמים בינומיים</u> (או בינומיאליים – Binomial coefficients).

<u>משפט</u>: (נוסחת הבינום של ניוטון)

יהי $n \in \mathbb{N}$, ויהיו $a, b \in \mathbb{R}$, אז:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

<u>הוכחה</u>:

נוכיח באינדוקציה על n.

<u>בסיס</u>:

אם $n = 0$, אז:

$$(a+b)^0 = \sum_{r=0}^{0} \binom{0}{r} a^{0-r} b^r = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$$

<u>הנחה + מעבר</u>:

נניח שהנוסחה נכונה עבור n, ונוכיח אותה עבור $n+1$.

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$, אז:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\cdot(a+b)^n \\
&= (a+b)\cdot\left[\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}a\cdot b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n\right] \\
&= \left[\binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{0}a^n b\right] + \left[\binom{n}{1}a^n b + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2\right] + \left[\binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^3\right] \\
&\quad + \cdots + \left[\binom{n}{n}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}\right] \\
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right]a^n b + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right]a^{n-1}b^2 + \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{3}\right]a^{n-2}b^3 \\
&\quad + \cdots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right]ab^n + \binom{n+1}{0}b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \cdots + \binom{n+1}{n}ab^n \\
&\quad + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1} = \sum_{r=0}^{n+1}\binom{n+1}{r}a^{n+1-r}b^r
\end{aligned}$$

וזה מסיים את האינדוקציה.

דוגמא+הסבר לנוסחת הבינום:

נראה מדוע למשל המקדם של a^4b^2 בפיתוח של $(a+b)^6$ הוא: $\binom{6}{4}=15$:

נתבונן במכפלה:

$$(a+b)^6=(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

ללא שימוש בחוק החילוף של הכפל (כלומר, ניקח בחשבון את *המיקום* של כל גורם במכפלה).

נתבונן רק במכפלות שמכילות 4 a-ים, ו- 2 b-ים:

$$\begin{aligned}(a+b)^6&=(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)\\&=a^6+\cdots+[aaaabb+aaabba+aaabab+aabaab+\cdots+bbaaaa]+\cdots\end{aligned}$$

הסדר שבו מופיעים ה- a-ים וה- b-ים הוא לפי המיקום של הגורם במכפלה $(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)$ שממנו הם הגיעו. למשל:

$$(\underline{a}+b)(\underline{a}+b)(a+\underline{b})(a+\underline{b})(\underline{a}+b)(\underline{a}+b)=\cdots+aabbaa+\cdots$$

נשים לב שבביטוי: $\boxed{a}\boxed{a}\boxed{a}\boxed{a}\boxed{b}\boxed{b}$ יש 6 מקומות, ונרצה לבחור ב-4 מהמקומות שבהם נרשום "a" (או 2 מקומות שבהם נרשום "b"), ולכן בסה״כ $\binom{6}{2}=\binom{6}{4}$ אפשרויות.

טענה:

יהי $n\in\mathbb{N}$ מספר שלם חיובי. שתי הטענות הבאות שקולות:

1. $(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}\cdot b^r$ לכל $a,b\in\mathbb{R}$.
2. $(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

הוכחה:

$\underline{1\Rightarrow 2}$:

נציב $a=1$, ו- $b=x$ ונראה שזה נכון.

$\underline{2\Rightarrow 1}$:

יהי $n\in\mathbb{N}$ מספר שלם חיובי, ונניח ש- $(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r$ לכל $x\in\mathbb{R}$. צ״ל: נוסחה 1 מתקיימת.

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$, אז:

מקרה 1:

$a = 0$, ואז מצד שמאל נקבל:

$$(a+b)^n = (0+b)^n = b^n$$

ומצד ימין:

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r &= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}0^{n-r}\cdot b^r \\ &= \binom{n}{0}0^n + \binom{n}{1}0^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}0^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}0^0\cdot b^n \\ &= b^n\end{aligned}$$

הערה: בקומבינטוריקה, נגדיר $0^0 = 1$ (זה נגזר מהנושא של חשבון עוצמות של קבוצות).

אז, נשים לב כי כל המחוברים מלבד האחרון מתאפסים, לכן:

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r = \binom{n}{n}0^0\cdot b^n = b^n$$

קיבלנו משני הצדדים ביטויים זהים - b^n.

מקרה 2:

$a \neq 0$, ואז נסמן $x = \frac{b}{a}$ ונציב בנוסחה (2), נקבל:

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\frac{b}{a}\right)^r \underset{\text{גורר}}{\Longrightarrow} \left(\frac{a+b}{a}\right)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\frac{b}{a}\right)^r$$
$$\underset{\text{גורר}}{\Longrightarrow} \boxed{\frac{(a+b)^n}{a^n} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\frac{b^r}{a^r}\right)}$$

נכפול את 2 האגפים ב- a^n, ונקבל:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\frac{b^r}{a^r}\right)a^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

כפי שרצינו.

משולש פסקל – המשך:

נשוב ונתבונן על משולש פסקל, ונשים לב שסכימה של האיברים בשורה ה- n-ית של המשולש, תתן לנו את התוצאה 2^n (השורה הראשונה היא הראשונה ה- 0).

<u>לדוגמא</u>:

נתבונן בשורה ה-4 של המשולש:

$$1 \qquad 4 \qquad 6 \qquad 4 \qquad 1$$

אז נשים לב כי: $1+4+6+4+1=16=2^4$.

זה מוביל אותנו לטענה הבאה:

<u>טענה</u>:

יהי $n \in \mathbb{N}$, אז:

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$$

<u>הוכחה</u>:

<u>דרך 1</u>:

הוכחנו ש- $\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r = (1+x)^n$ לכל $x \in \mathbb{R}$, בפרט כאשר $x=1$, אז:

$$(1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} 1^r \underset{\text{גורר}}{\Longrightarrow} \boxed{2^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}}$$

<u>דרך 2</u>: (דרך קומבינטורית)

תהי A קבוצה בת n איברים. נספור את תת-הקבוצות של A. מצד אחד, אנו יודעים שמספר תת-הקבוצות של A הוא: $|P(A)| = 2^n$, ומצד שני יש ל- A, $\binom{n}{0}$ תת-קבוצות בעלות עוצמה 0, $\binom{n}{1}$ תת-קבוצות בעלות עוצמה 1, וכו׳... עד $\binom{n}{n}$ תת קבוצות בעלות עוצמה n. לכן בסה״כ יש ל- A: $\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}$ תת-קבוצות.

קיבלנו: $\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = |P(A)| = 2^n$.

כעת נשים לב לתכונה מעניינת נוספת שמתקיימת במשולש פסקל. אם בשורה $n \geq 1$ של המשולש, נחבר ונחסר לסירוגין כל זוג איברים בשורה, נשים לב שהתוצאה שנקבל היא 0.

<u>לדוגמא</u>:

נתבונן בשורה ה-5 של המשולש:

1 5 10 10 5 1

אז נשים לב כי: $1-5+10-10+5-1=0$.

וזה מוביל אותנו לניסוח הטענה הבאה:

<u>טענה</u>:

יהי $1 \le n \in \mathbb{N}$, אז:

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \cdot (-1)^r = 0$$

<u>הוכחה</u>:

נציב $x=-1$ בנוסחה (2) ממקודם, ונקבל:

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r \underset{\text{גורר}}{\Longrightarrow} \big(1+(-1)\big)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \cdot (-1)^r$$

$$\underset{\text{גורר}}{\Longrightarrow} 0^n = \boxed{0 = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \cdot (-1)^r}$$

תכונה נוספת שעולה מן המשולש זה שאם נעלה בריבוע את כל האיברים בשורה ה- n-ית של המשולש ואז נסכום אותם, נקבל את האיבר האמצעי בשורה ה- $2n$-ית.

<u>לדוגמא</u>:

נתבונן בשורה ה-3 של המשולש:

1 3 3 1

אז, נשים לב כי: $1^2+3^2+3^2+1^2 = 20$ שזה בדיוק האיבר האמצעי בשורה ה-6, כלומר, זה שווה ל- $\binom{6}{3}$.

<u>טענה</u>:

יהי $n \in \mathbb{N}$, אז:

$$\sum_{r=0}^{n} \left[\binom{n}{r}^2\right] = \binom{2n}{n}$$

<u>הוכחה</u>:

<u>דרך 1</u>:

נשתמש בזהות הסימטריות: $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$.
נרשום את הביטוי באגף שמאל בצורה אחרת:

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}^2=\binom{n}{0}\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{n}$$
$$=\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\cdots+\binom{n}{n-1}\binom{n}{1}+\binom{n}{n}\binom{n}{0}$$

כעת נשתמש בחוקי חזקות:
$(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

המשמעות היא ששני הפולינומים הנ"ל באגף שמאל וימין הם זהים. בפרט המקדם של x^n בפולינום השמאלי שווה למקדם של x^n בפולינום הימני.

נחשב את המקדם של x^n באגף ימין ע"פ נוסחת הבינום:

$$(1+x)^{2n}=\sum_{r=0}^{2n}\binom{2n}{r}x^r$$
$$=\binom{2n}{0}x^0+\binom{2n}{1}x^1+\cdots+\binom{2n}{n}x^n+\cdots+\binom{2n}{2n}x^{2n}$$

נחשב את המקדם של x^n באגף שמאל:

$$(1+x)^n(1+x)^n=\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}+\binom{n}{n}x^n\right]\cdot\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}+\binom{n}{n}x^n\right]=\binom{n}{0}\binom{n}{0}+\left[\binom{n}{0}\binom{n}{1}+\binom{n}{1}\binom{n}{0}\right]x+\left[\binom{n}{0}\binom{n}{2}+\binom{n}{1}\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\binom{n}{0}\right]x^2+\cdots+\left[\boldsymbol{\binom{n}{0}\binom{n}{n}}+\boldsymbol{\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}}+\cdots+\boldsymbol{\binom{n}{n}\binom{n}{0}}\right]x^n$$

בסה"כ קיבלנו שהמקדם של x^n הוא:

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\binom{n}{n-r}$$

ובשימוש נוסף בזהות הסימטריות והשוואת המקדמים של x^n בשני האגפים נקבל:

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\binom{n}{n-r}=\boxed{\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}^2=\binom{2n}{n}}$$

<u>דרך 2</u>: (דרך קומבינטורית)

נתונה קבוצה של $2n$ אנשים שבה יש n גברים ו- n נשים. נמצא את מספר הדרכים לבחור בתת קבוצה שמכילה בדיוק n אנשים.
אז, מצד אחד יש $\binom{2n}{n}$ אפשרויות לעשות זאת, ומצד שני, לכל $0 \le r \le n$, מספר הדרכים לבחור בתת-קבוצה של n אנשים כך שבדיוק r מהם גברים ו-$n-r$ מהם נשים הוא: $\binom{n}{r}\binom{n}{n-r}$, לכן בסה"כ: $\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\binom{n}{n-r}$.

קיבלנו:

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\binom{n}{n-r}=\binom{2n}{n}$$

<u>טענה</u>:

יהי $n \in \mathbb{N}$, אז:

$$\sum_{r=0}^{n} r\binom{n}{r}=\sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r}=n\cdot 2^{n-1}$$

$$\left(0\cdot\binom{n}{0}+1\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+\cdots+n\binom{n}{n}=n\cdot 2^{n-1}\right)$$

<u>הוכחה</u>:

עבור $n=0$ ברור שהטענה נכונה. לכן נניח $n \ge 1$:

<u>דרך 1</u>:

נתבונן בנוסחת הבינום:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r$$

נחשוב על שני האגפים כעל פונקציות של x. שתי הפונקציות הללו רציפות וגזירות. נגזור את 2 האגפים:

$$(1)\quad [(1+x)^n]'=n(1+x)^{n-1}$$

$$(2)\quad \left[\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r\right]'=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\cdot r\cdot x^{r-1}=\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}\cdot r\cdot x^{r-1}$$

נשים לב שעבור $r=0$, המחובר הראשון הוא 0 ולכן התעלמנו ממנו במעבר האחרון בגזירה (2).

קיבלנו:

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}\cdot r\cdot x^{r-1}$$

נציב $x=1$, ונקבל:

$$n\cdot 2^{n-1}=\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}\cdot r=\sum_{r=0}^{n}r\binom{n}{r}$$

<u>דרך 2</u>: (דרך קומבינטורית)

תהי A קבוצה של $n\geq 1$ אנשים.נרצה לבחור בתת-קבוצה של A שתשמש כועד, כאשר אחד מאנשי הועד יהיה ראש הועד. נוכל לחשוב על כל בחירה כזו של ועד וראש וועד, כעל זוג סדור $<B,x>$ כך ש- $A\subseteq B\neq\emptyset$ ו- $x\in B$.

נחשב את מספר הדרכים לעשות זאת, כלומר, את מספר הזוגות הסדורים $<B,x>$:

מצד אחד, לכל $1\leq r\leq n$ יש $\binom{n}{r}$ אפשרויות עבור הועד B כך ש- $|B|=r$. לאחר שנבחרה קבוצה B כנ״ל, יש r אפשרויות עבור ראש הועד. לכן יש $r\binom{n}{r}$ זוגו סדורים $<B,x>$ כך ש- $|B|=r$ ו- $x\in B$. לכן בסה״כ (אם נחשב זאת עבור כל r) יש $\sum_{r=1}^{n}r\binom{n}{r}$ זוגות סדורים כאלה.

מצד שני, אפשר לעשות את הבחירה בסדר הפוך – קודם כל נבחר בראש הועד, יש n אפשרויות לעשות זאת. כעת נשלים לקבוצה B ע״י הוספת תת קבוצה כלשהי של $n-1$ האנשים הנותרים, יש 2^{n-1} תת קבוצות כאלה. אזי בסה״כ יש $n\cdot 2^{n-1}$ זוגות סדורים $<B,x>$ כך ש- $x\in B\subseteq A$.

קיבלנו:

$$\sum_{r=1}^{n}r\binom{n}{r}=n\cdot 2^{n-1}$$

<u>בחירת r איברים מקבוצה בת n איברים:</u>

נרצה לרכז בטבלה את הנוסחאות שמצאנו למציאת מספר האפשרויות לבחור r איברים מתוך קבוצה בת n איברים. נבדיל בין מקרים בהם יש חשיבות לסדר של האיברים, וכן בין מקרים בהם יש חשיבות לחזרה של איברים.

ישנם 3 מקרים שעבורם כבר מצאנו נוסחאות והם:

1. <u>הסדר חשוב + עם חזרות</u>:

יש n אפשרויות עבור האיבר הראשון, יש n אפשרויות עבור האיבר השני, וכו' ... ויש n אפשרויות עבור האיבר ה- r , סה״כ: n^r אפשרויות.

2. <u>הסדר חשוב + ללא חזרות</u>:

יש n אפשרויות עבור האיבר הראשון, יש $n-1$ אפשרויות עבור האיבר השני, יש $n-2$ אפשרויות עבור האיבר השלישי, וכו' ... עד שבאיבר ה- r יש $n-r+1$ אפשרויות. סה״כ: $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$ אפשרויות.

3. <u>הסדר אינו חשוב + ללא חזרות</u>:

זה בדיוק בחירת תת קבוצה בת r איברים, של קבוצה בת n איברים. ראינו שזה שווה ל- $C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$.

המקרה האחרון שעוד לא חישבנו הוא המקרה בו <u>הסדר אינו חשוב</u> ו- <u>עם חזרות</u>:

<u>לדוגמא</u>:

נניח למשל ש- $n=6$ ו- $r=9$. תהי $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, אזי, בחירה אפשרית היא המספרים הבאים: 6 , 6 , 1 , 2 , 3 , 4 , 2 , 1 , 2.

אז בחרנו במספר 1 פעמיים, במספר 2 שלוש פעמים, במספר 3 פעם אחת, במספר 4 פעם אחת, במספר 5 אפס פעמים, ובמספר 6 פעמיים.

באופן כללי, עבור $n\in\mathbb{N}$ כללי, וקבוצה $A=\{m\in\mathbb{N}\mid 1\le m\le n\}$, נוכל לייצג את הבחירות של מספרים מ- A בצורה הבאה:

נחלק את הקבוצה Aל- n תחומים שונים באמצעות $n-1$ מחיצות:

1	2	3	4	...	$n-1$	n

לאחר מכן, נוסיף r כדורים, כאשר מספר הכדורים בכל תחום יהיה שווה למספר הפעמים שבחרנו במספר המתאים לתחום, למשל עבור הדוגמא שלנו זה ייראה כך:

OO	OOO	O	O		OO
1	2	3	4	5	6

כעת, נייצג את הכדורים ע״י הספרה 0, ואת המחיצות באמצעות הספרה 1. התוצאה תהיה ספירה בינארית שמכילה r אפסים, ו- $(n-1)$ אחדות. בדוגמא שלנו, הסדרה הבינארית תהיה:

$$00100010101100$$

בסדרה כזו יש $r+(n-1)$ מקומות.
בדוגמא שלנו:

$$\underbrace{\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}}_{14\ \text{מקומות}}$$

יש $\binom{n+r-1}{r}$ דרכים לבחור במקומות שבהם הספרה 0 תופיע. לכן יש $\binom{n+r-1}{r}$ דרכים לבחור ב- r איברים מקבוצה בעלת n איברים <u>עם חזרות</u> וכאשר <u>הסדר אינו חשוב</u>.

לסיכום, נרכז את כל הנוסחאות שמצאנו בטבלה:

<u>טבלת נוסחאות לחישוב מספר האפשרויות לבחירת r איברים מתוך קבוצה בת n איברים</u>:

	עם חזרה	ללא חזרה
הסדר חשוב	n^r	$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$
הסדר אינו חשוב	$\binom{n+r-1}{r}=\binom{n+r-1}{n-1}$	$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

<u>דוגמא</u>:

1. נטיל 5 קוביות זהות. כמה תוצאות שונות נוכל לקבל?

אזי, נשים לב שבהטלה מסוימת יכול לצאת לדוגמא $1,6,5,3,5$, ותוצאה זו תהיה שווה לתוצאה: $1,5,5,3,6$. כלומר אין חשיבות לסדר אך אפשרי שיהיו חזרות. אזי נציב בנוסחה שלנו $n=6$ כיוון שזהו מספר התוצאות האפשריות בכל קובייה (כלומר זה שקול לקבוצה A מעוצמה 6 שממנה אנחנו ״בוחרים״ את האיברים), ו- $r=5$ (סה״כ 5 קוביות, כלומר עלינו ״לבחור״ 5 איברים).
נציב בנוסחה ונקבל:

$$\binom{n+r-1}{r}=\binom{10}{5}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=2\cdot3\cdot2\cdot7\cdot3=252$$

2. באופן דומה, בשש-בש מספר התוצאות השונות מהטלת שתי קוביות זהות הוא:

$$\begin{matrix}n=6\\ r=2\end{matrix}\qquad \binom{n+r-1}{r}=\binom{7}{2}=\frac{7\cdot6}{2}=21$$

הגדרה:

מולטי קבוצה (multiset) היא אוסף של עצמים מתמטיים שבו לכל איבר יש ריבוי מסוים.
למשל:

"$\{1,4,1,3,3,1,2\}$"

הערה:

בתורת הקבוצות הגדרנו שקבוצה כזו שווה לקבוצה $\{1,2,3,4\}$. במולטי-קבוצה הסדר עדיין לא חשוב, אבל ריבוי האיברים כן חשוב.

במקרה כללי קיים סימון עבור מולטי קבוצה. אם למשל מולטי-קבוצה מכילה 5 a-ים, 4 b-ים, ו- 2 c-ים, אפשר לסמן ע״י: $\{a^5, b^4, c^2\}$.

אבל סימון זה עשוי לבלבל לפעמים כאשר a, b, c מספרים, ואז זה נראה כמו חזקות.

חלוקת r עצמים ל- n תאים:

בדומה לחלק הקודם, נרצה למצוא דרכים לחישוב מספר האפשרויות לחלק r עצמים ל- n תאים, כאשר כאן נבדיל בין מקרים בהם העצמים והתאים שונים (מובחנים), לבין מקרים בהם הם זהים. כמו כן, נרצה להתייחס גם לאילוצים על מספר העצמים בכל אחד מהתאים: בכל תא עצם אחד לפחות (נדרוש: $r \geq n$) , עצם אחד לכל היותר (נדרוש: $0 \leq r \leq n$), בדיוק עצם אחד ($n = r$), ומקרה כללי ללא אילוצים.

נמנה את המקרים השונים ולבסוף נסכמם בטבלה:

1. העצמים מובחנים + התאים מובחנים – מקרה כללי:

יש n אפשרויות עבור בחירת התא שיכיל את עצם מספר 1.
יש n אפשרויות עבור בחירת התא שיכיל את עצם מספר 2.
$\vdots$
יש n אפשרויות עבור בחירת התא שיכיל את עצם מספר r.

סה״כ: $n^r = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{r \text{ פעמים}}$ אפשרויות.

2. העצמים מובחנים + התאים מובחנים – עצם אחד לכל היותר בכל תא:

יש n אפשרויות עבור התא שיכיל את עצם מספר 1.
יש $n-1$ אפשרויות עבור התא שיכיל את עצם מספר 2.
יש $n-2$ אפשרויות עבור התא שיכיל את עצם מספר 3.
$\vdots$
יש $n-r+1$ אפשרויות עבור התא שיכיל את עצם מספר r.

סה״כ: $\frac{n!}{(n-r)!} = P(n,r)$ אפשרויות.

<u>הערה</u>: במקרה בו ההגבלה היא שיהיה בדיוק עצם אחד בכל תא (המקרה בו $r = n$), הנוסחה הנ״ל עדיין תקפה, ומכיוון ש- $r = n$, נקבל: $P(n, n) = n!$ אפשרויות.

3. <u>העצמים זהים + התאים מובחנים – מקרה כללי</u>:

זהו בדיוק מספר הדרכים לבחור ב- r איברים של קבוצה בת n איברים (שהיא קבוצת התאים במקרה זה), **עם חזרות** ו-**ללא חשיבות לסדר**. מספר זה כפי שראינו הוא: $\binom{n+r-1}{r}$.

4. <u>העצמים זהים + התאים מובחנים – עצם אחד לכל היותר בכל תא</u>:

מתוך n התאים, עלינו לבחור ב- r מהם שלא יהיו ריקים. יש $C(n, r) = \binom{n}{r}$ אפשרויות לעשות זאת.

5. <u>העצמים זהים + התאים מובחנים – לפחות עצם אחד בכל תא</u>:

נחלק r עצמים **זהים** ל- n תאים **מובחנים** כך שאין תא ריק (כאן אנחנו מניחים $r \geq n$). בהתחלה נשים עצם אחד בכל תא – יש בדיוק דרך אחת לעשות זאת כיוון שהעצמים זהים.

לאחר שעשינו זאת, נשארו $r - n$ עצמים. נחלק את $r - n$ העצמים הללו ל- n התאים **ללא אילוצים**. אנחנו יודעים כבר ממקרה (3), שמספר הדרכים לעשות זאת הוא:

$$\binom{n + (r-n) - 1}{r - n} = \binom{r-1}{r-n} = \binom{r-1}{(r-1) - (r-n)} = \binom{\boldsymbol{r-1}}{\boldsymbol{n-1}}$$

עד כה מנינו את הדרכים שאנחנו כבר מכירים לחישוב מספר האפשרויות לשיבוץ העצמים לתאים. כעת נמצא את מספר האפשרויות עבור המקרים הבאים:

6. העצמים מובחנים + התאים מובחנים – לפחות עצם אחד בכל תא.
7. העצמים מובחנים + התאים זהים – מקרה כללי.
8. העצמים מובחנים + התאים זהים – לפחות עצם אחד בכל תא.

נמצא את הקשר בין מקרים (6), (7) ו- (8).
נסמן ב- $S(r, n)$ את מספר האפשרויות עבור מקרה (8) (בפרק על ״עיקרון ההכלה וההדחה״ נמצא את הנוסחה המדויקת). מספרים אלו נקראים <u>מספרי סטרלינג</u> *(Stirling)* <u>מהסוג השני</u>. טבלת המספרים מופיעה בסוף חלק זה.

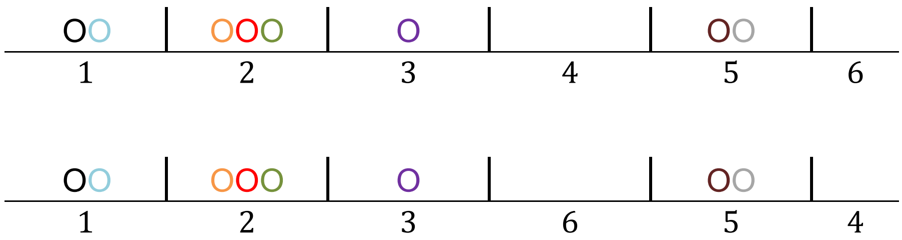
<u>כעת נחשב את מספר האפשרויות עבור מקרה (6)</u>:

נחלק r עצמים מובחנים ל- n תאים **זהים** כך שאין תא ריק, לכך יש $S(r, n)$ אפשרויות.
כעת נמספר את התאים – יש $n!$ דרכים שונות למספר אותם. לכן סה״כ האפשרויות עבור מקרה זה: $n! \cdot S(r, n)$

<u>הערה</u>:

כאשר יש תאים ריקים, ייתכן ששני מספורים שונים של התאים מתאימים לאותה החלוקה של r עצמים מובחנים ל- n תאים מובחנים.

למשל, 2 החלוקות הבאות של עצמים מובחנים לתאים מובחנים הן זהות (הן אותה החלוקה למעשה):



<u>נחשב את מספר האפשרויות עבור מקרה (7)</u>:

נחלק r עצמים מובחנים ל- n תאים זהים. נסמן ב- k את מספר התאים הלא ריקים, $1 \leq k \leq \min(n, r)$. אז, סה״כ האפשרויות עבור מקרה זה יהיה:

$S(r,1) + S(r,2) + \cdots + S(r,n)$ אם $r \geq n$.
$S(r,1) + S(r,2) + \cdots + S(r,r)$ אם $r < n$.

<u>הערה</u>:

אם $k > r$ אז $S(r,k) = 0$. ז״א שאם $r < n$ אז אפשר להוסיף:

$$S(r, r+1) = 0\,,\quad S(r, r+2) = 0\,,\quad S(r, r+3) = 0\,,\quad \dots\,,\quad S(r, n) = 0$$

לסכום האחרון. כך נקבל שבשני המקרים בהם $r \geq n$ או $r < n$ הנוסחה תהיה אותו הדבר:

$$S(r,1) + S(r,2) + \cdots + S(r,n) = \sum_{k=1}^{n} S(r,k)$$

נרכז את כל הנוסחאות שמצאנו בטבלה. נציין כי ישנם מקרים נוספים אותם לא חישבנו, במקרים אלו מספר האפשרויות לסידור העצמים בתאים הוא 1. הטבלה מציגה גם אותם.

טבלת נוסחאות לחישוב מספר האפשרויות לחלוקת r עצמים לתוך n תאים:

	כללי	עצם אחד לכל היותר בכל תא $(0 \le r \le n)$	לפחות עצם אחד בכל תא (אין תא ריק) $(r \ge n)$	בדיוק עצם אחד בכל תא $(r = n)$
העצמים מובחנים + התאים מובחנים	n^r (מקרה 1)	$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ (מקרה 2)	$n! \cdot S(r,n)$ (מקרה 6)	$n!$ (מקרה 2)
העצמים זהים + התאים מובחנים	$\binom{n+r-1}{r}$ (מקרה 3)	$\binom{n}{r}$ (מקרה 4)	$\binom{r-1}{n-1}$ (מקרה 5)	1
העצמים מובחנים + התאים זהים	$\sum_{k=1}^{n} S(r,k)$ (מקרה 7)	1	$S(r,n)$ (מקרה 8)	1
העצמים זהים + התאים זהים	$-$ (לא נמצאה נוסחה פשוטה)	1	$-$ (לא נמצאה נוסחה פשוטה)	1

טבלת מספרי סטירלינג מהסוג השני:

$n \backslash r$	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2		1	3	7	15	31
3			1	6	25	90
4				1	10	65
5					1	15
6						1

דוגמא:

יהיו $n = r = 3$, ונחשב את $\sum_{k=1}^{3} S(3,k)$.

אז:

$S(3,1) = 1$ (צריך לחלק 3 עצמים שונים לתא אחד).

$S(3,2) = 3$ (צריך לחלק 3 עצמים ל-2 תאים זהים בלי תא ריק).

$S(3,3) = 1$ (צריך לחלק 3 עצמים ל-3 תאים זהים בלי תא ריק).

לכן בסה"כ: $\sum_{k=1}^{3} S(3,k) = 5$.

נשים לב ש- $S(n,k)$ שקול למספר החלוקות של קבוצה בת n איברים ל- k קבוצות:

אם למשל $A = \{1,2,3\}$, אז החלוקות המתאימות ל- $S(3,k)$ $(1 \le k \le 3)$ הן:

$S(3,1) = 1 \quad : \quad \{\{1,2,3\}\}$

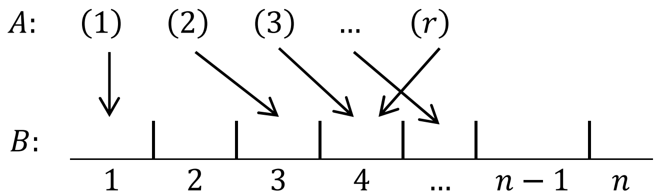
$S(3,2) = 3 \quad : \quad \{\{1\},\{2,3\}\}$, $\{\{2\},\{1,3\}\}$, $\{\{3\},\{1,2\}\}$

$S(3,3) = 1 \quad : \quad \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

<u>**דוגמא**</u>:

תהיינה A, B קבוצות כך ש- $|A| = r$ ו- $|B| = n$. נחשב את מספר הפונקציות מ- A ל- B.

נשים לב כי כל פונקציה מתאימה כל איבר מ- A ל- B. אם נתייחס אל A ו- B כקבוצות מספרים של כדורים ותאים בהתאמה, אזי פונקציה אפשרית תוכל להיראות כך:



אז:

א. מספר <u>כל</u> הפונקציות מ- A ל- B הוא: n^r.
ב. מספר הפונקציות ה<u>חח״ע</u> מ- A ל- B הוא $P(n,r)$ (אם $r > n$ זה יהיה שווה ל- 0).
ג. מספר הפונקציות מ- A <u>על</u> B הוא $n! \cdot S(r,n)$ (אם $r > n$ זה יהיה שווה ל- 0).

<u>עיקרון שובך היונים (Pigeonhole principle):</u>

(נקרא גם ״עיקרון דיריכלה (Dirichlet)״)

<u>**משפט**</u>:

תהיינה A ו- B קבוצות כך ש- $|B| < |A|$. אז אין פונקציה חח״ע מ- A ל- B.

אפשר להשתמש בעיקרון הזה כדי להוכיח מספר דברים:

<u>דוגמא</u>:

יהי $n \in \mathbb{N}$ מספר חיובי. תהי $A = \{1,2,3, \dots ,2n-1,2n\}$, ותהי $B \subseteq A$ כך ש- $|B| = n+1$. אזי יש ב- B שני מספרים זרים, כלומר שני מספרים שאין להם גורם משותף גדול מ-1 (ה- gcd שלהם שווה ל-1).

<u>הערה</u>: זה אינו נכון כאשר $|B| = n$, כי אפשר לבחור ב- $B = \{2,4,6, \dots ,2n\}$.

אז, נשתמש בעיקרון שובך היונים לפתרון הבעיה:

נבנה n "שובכים":

$$\begin{array}{ccccc} \square & \square & \square & \dots & \square \\ 1 & 2 & 3 & & n \end{array}$$

תהי $f: B \to \{1,2,3, \dots ,n\}$ פונקציה שמוגדרת ע"י:

$$f(k) = \begin{cases} \dfrac{k}{2} & \text{זוגי k} \\ \dfrac{k+1}{2} & \text{אי זוגי k} \end{cases}$$

מכיוון ש- $|B| = n+1$, f אינה חח"ע. אז קיימים 2 איברים $b_1, b_2 \in B$ כך ש- $f(b_1) = f(b_2)$. לכן $b1, b2$ הם מספרים עוקבים, ולכן: $\gcd(b_1, b_2) = 1$.

<u>תרגיל</u>:

יהי $n \geq 2$ מספר טבעי כלשהו. תהי $A = \{1,2,3, \dots ,2n-1,2n\}$, ותהי $B \subseteq A$ כך ש- $|B| = n+1$. אז יש 2 איברים של B כך שאחד מהם מחלק את השני ללא שארית.

הפתרון ניתן כתרגיל לבית.

<u>פתרון</u>:

ראשית, נשים לב כי כל מספר טבעי גדול מ-1 אפשר לכתוב כמכפלה: $2^k \cdot m$ כאשר m הוא מספר אי-זוגי ומתקבל על-ידי חלוקה של המספר ב-2 עד שמתקבל מספר אי-זוגי (לכל מספר אי-זוגי m מתקיים: $2^0 \cdot m = m$).

אז, נגדיר קבוצה $C = \{1,3,5, \dots ,2n-1\}$ של כל המספרים האי-זוגיים ב- A, ומכיוון שיש $\frac{2n}{n} = n$ מספרים אי-זוגיים, אזי $|C| = n$.

כעת, נגדיר פונקציה $f: B \to C$ באופן הבא:

$$f(b) = \{m \quad , \quad \exists k \in \mathbb{N} \,.\, m = \frac{b}{2^k}$$

אזי, f מוגדרת היטב כי כפי שאמרנו לכל מספר, קיים m **אי-זוגי** כזה, ומתקיים: $m \leq b \leq 2n$, כך שבצירוף 2 התכונות הללו $m \in C$.

אז, מעיקרון שובך היונים מכיוון ש- $|B| = n+1$ ו- $|C| = n$ אז f לא חח״ע, ולכן קיימים $b_1 \neq b_2$ כך ש- $f(b_1) = f(b_2)$. נניח בלי הגבלת הכלליות ש- $b_1 > b_2$ ולכן מתקיים:

$$f(b_1) = f(b_2) \Rightarrow \frac{b_1}{2^{k_1}} = \frac{b_2}{2^{k_2}} \Rightarrow \frac{b_1}{b_2} = \frac{2^{k_1}}{2^{k_2}} \Rightarrow \frac{b_1}{b_2} = 2^{k_1-k_2}$$

מכיוון ש- $b_1 > b_2$, אזי $2^{k_1-k_2} > 1$ ולכן $k_1 - k_2 > 0$ וכמובן ש- $k_1 - k_2 \in \mathbb{Z}$ ולכן $2^{k_1-k_2} \in \mathbb{N}$. ראינו ש- b_1 מחלק את b_2.

<u>משפט</u>: (משפט ארדש-סקרש - Erdős–Szekeres)

יהיו $m,n \in \mathbb{N}$ מספרים חיוביים. לכל סדרה מאורך $mn+1$ של מספרים ממשיים <u>שונים</u>, קיימת תת-סדרה עולה ממש מאורך $m+1$ לפחות, או קיימת תת-סדרה יורדת ממש מאורך $n+1$ לפחות.

<u>דוגמא</u>:

יהיו $m=3$, $n=4$, ונסתכל על הסדרה מאורך 13 הבאה:

16 , 17 , 13 , 14 , 15 , 6 , 9 , 11 , 5 , 7 , 1 , 3 , 4

נעזר בדוגמא זה לשם הבנת ההוכחה.

<u>הוכחת המשפט</u>:

נתונים $m,n \in \mathbb{N}$ שלמים וחיוביים. תהי $< a_1, a_2, a_3, \dots, a_{mn+1} >$ סדרה מאורך $mn+1$ של מספרים ממשיים שונים.

לכל $1 \le i \le mn+1$ נגדיר:

$f(i) =$ **האורך** של תת-הסדרה **העולה ממש** והארוכה ביותר כך שהאיבר האחרון בתת הסדרה הוא: a_i

$g(i) =$ **האורך** של תת-הסדרה **היורדת ממש** והארוכה ביותר כך שהאיבר האחרון בתת הסדרה הוא: a_i

<u>בדוגמא שלנו</u>:

i	$f(i)$	תת סדרה עבור $f(i)$	$g(i)$	תת סדרה עבור $g(i)$
1	1	$<4>$	1	$<4>$
2	1	$<3>$	2	$<4,3>$
3	1	$<1>$	3	$<4,3,1>$
4	2	$<4,7>$	1	$<7>$

5	2	$< 4,5 >$	2	$< 7,5 >$
6	3	$< 4,7,11 >$	1	$< 11 >$

<u>טענת עזר</u>:

אם $i \neq j$, אז: $< f(i), g(i) > \neq < f(j), g(j) >$.

<u>הוכחת טענת העזר</u>:

נניח בלי הגבלת כלליות ש- $i < j$, אזי:

<u>מקרה 1</u>:

$a_i < a_j$, אזי יש תת-סדרה עולה ממש מאורך $f(i)$ כך שהאיבר האחרון של תת הסדרה הוא a_i.

$$< \underbrace{\ldots, \ldots, \ldots, a_i}_{f(i)\ \text{איברים}} >$$

לכן הסדרה: $< \ldots, \ldots, \ldots, a_i, a_j >$ היא תת סדרה עולה ממש מאורך $f(i) + 1$ כך שהאיבר האחרון שלה הוא a_j. ז״א ש- $f(j) \geq f(i) + 1$, בפרט $f(i) \neq f(j)$.

<u>מקרה 2</u>:

$a_i > a_j$, אזי יש תת-סדרה יורדת ממש מאורך $g(i)$ כך שהאיבר האחרון שלה הוא a_i.

$$< \underbrace{\ldots, \ldots, \ldots, a_i}_{g(i)\ \text{איברים}} >$$

לכן הסדרה: $< \ldots, \ldots, \ldots, a_i, a_j >$ היא תת-סדרה יורדת ממש מאורך $g(i) + 1$ כך שהאיבר האחרון שלה הוא a_j. ז״א ש: $g(j) \geq g(i) + 1$, ובפרט $g(i) \neq g(j)$.

מש״ל (טענת עזר)

כעת נחזור להוכחת המשפט. נניח בשלילה שאין תת-סדרה עולה ממש מאורך $m + 1$ או יותר, ואין תת-סדרה יורדת ממש מאורך $n + 1$ או יותר. במילים אחרות: $1 \leq f(i) \leq m$ ו- $1 \leq g(i) \leq n$ לכל $1 \leq i \leq mn + 1$.

נגדיר פונקציה $h: \{1,2, \ldots, mn + 1\} \to \{1,2, \ldots, m\} \times \{1,2, \ldots, n\}$ באופן הבא:

$$h(i) = < f(i), g(i) >$$

לכל $1 \leq i \leq mn + 1$.

הוכחנו בטענת העזר ש- h חח״ע, אבל $|Dom(h)| = mn + 1$ ו- $|\mathrm{R}ng(h)| \leq mn$, וזה סותר את עיקרון שובך היונים.

מש״ל (משפט)

הגדרה:

יהי $x \in \mathbb{R}$:

1. <u>הרצפה</u> *(floor)* של x שמסומנת ע״י $\lfloor x \rfloor$ היא המספר השלם k הגדול ביותר כך ש- $x \geq k$.
2. <u>התקרה</u> *(ceiling)* של x שמסומנת ע״י $\lceil x \rceil$ היא המספר השלם k הקטן ביותר כך ש- $x \leq k$.

משפט: (עיקרון שובך היונים המוכלל)

תהיינה A ו- B קבוצות סופיות, כאשר $|A| = n$ ו- $|B| = k$, ותהי $f: A \to B$ פונקציה.
אז יש לפחות איבר אחד $b \in B$ שיש לו לפחות $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ מקורות.

כלומר, $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \leq |\{a \in A | f(a) = b\}|$.

דוגמאות:

1. תהי A קבוצה בגודל $n = 23$, ותהי B קבוצה בגודל $k = 5$, אז יש איבר ב- B עם לפחות $5 = \left\lceil \frac{23}{5} \right\rceil$ מקורות.
2. בקבוצה של 1000 אנשים, יש לפחות 3 אנשים שנולדו באותו יום בשנה. (זה משום ש- $3 = \left\lceil \frac{1000}{365} \right\rceil$).

עיקרון ההכלה וההדחה (Inclusion-exclusion principle):

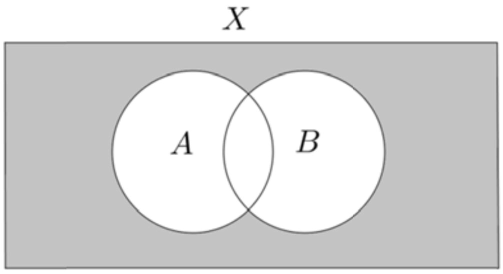
נתחיל בדוגמא:

דוגמא:

תהי X קבוצה סופית, ותהיינה $A, B \subseteq X$. נתונות העוצמות של $A, B, X, A \cap B$. נרצה לחשב את העוצמה של המשלים של האיחוד, כלומר את העוצמה של:

$$|X \setminus (A \cup B)| = |-(A \cup B)|$$

בציור:



ידוע כי לכל שתי קבוצות A, B מתקיים: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, ולכן:

$$|X \setminus (A \cup B)| = |-(A \cup B)| = |X| - |A \cup B| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

משפט: (עיקרון ההכלה וההדחה)

תהי X קבוצה סופית, ותהיינה $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq X$ קבוצות, כאשר $n \geq 1$.
אזי:

$$|-(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)| = |X| - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$$

כאשר:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

הוכחה:

נוכיח באינדוקציה על n.

בסיס:

אם $n = 1$, נקבל: $|-A_1| = |X| - |A_1|$.

אם $n = 2$, נקבל: $|-(A_1 \cup A_2)| = |X| - (|A_1| + |A_2|) + |A_1 \cap A_2|$ כמו שכבר ראינו.

<u>הנחת האינדוקציה + מעבר</u>:

נניח שהנוסחה נכונה עבור n, ונוכיח עבור $n+1$.

אז, נתונות $n+1$ קבוצות: $A_1, A_2, \dots A_n, A_{n+1} \subseteq X$, ונתונות כל העוצמות של כל החיתוכים שלהן. אז:

$$
\begin{aligned}
|-(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1})| &= |X| - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}| \\
&= |X| - |(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cup A_{n+1}| \\
&= |X| - (|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| + |A_{n+1}|) \\
&\quad + |(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1}|
\end{aligned}
$$

בתוצאה האחרונה השתמשנו בנוסחה עבור $n = 2$ עם 2 הקבוצות:
$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ ו- A_{n+1}.

נשתמש בהנחת האינדוקציה עבור המחובר השני בתוצאה האחרונה ונשתמש בדיסטריביוטיביות של איחוד וחיתוך על המחובר האחרון, נקבל:

$$
\begin{aligned}
\dots = |X| - \Bigg(&\sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
&- \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| + |A_{n+1}| \Bigg) \\
&+ |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \dots \cup (A_n \cap A_{n+1})|
\end{aligned}
$$

נשתמש שוב בהנחת האינדוקציה על המחובר האחרון:

$$
\begin{aligned}
\dots &= |X| - \sum_{1 \le i \le n+1} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
&+ \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| + \sum_{1 \le i \le n} |A_i \cap A_{n+1}| \\
&- \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1}| \\
&= |X| - \sum_{1 \le i \le n+1} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n+1} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
&+ \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n+1}|
\end{aligned}
$$

וזה מסיים את האינדוקציה.

<u>סימון</u>:

נתונה קבוצה סופית בת N איברים.

תהיינה $a_1, a_2, \dots, a_r$ תכונות מסוימות של איברים בקבוצה.

נסמן ב- $N(a_i)$ את מספר האיברים של הקבוצה שיש להם את התכונה a_i (ואולי גם תכונות אחרות, אבל בפרט יש להם את התכונה a_i).

נסמן ב- $N\left(a_i a_j\right)$ את מספר האיברים של הקבוצה שיש להם את התכונות a_i ו- a_j ביחד.

ובאופן כללי, נסמן ב- $N\left(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}\right)$ את מספר האיברים של הקבוצה שיש להם את התכונות: $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$.

<u>ובצורה הפוכה</u>:

נסמן ב- $N(a_i')$ את מספר האיברים בקבוצה **שאין להם** את התכונה a_i.

ובאותו אופן נסמן ב- $N\left(a_{i_1}' a_{i_2}' \dots a_{i_k}'\right)$ את מספר האיברים שאין להם את התכונות: $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$.

<u>הערה</u>:

באמצעות סימון זה נוכל גם לערבב איברים שיש להם תכונה מסוימת ואין להם תכונה אחרת, למשל $N(a_1 a_2' a_3' a_4)$ הוא מספר האיברים בקבוצה שיש להם את התכונות a_1 ו- a_4, ואין להם את התכונות a_2 ו- a_3.

בצורה זו:

$$N(a_i') = N - N(a_i)$$

אז, אפשר לכתוב את עיקרון ההכלה וההדחה כך:

$$N(a_1' a_2' a_3' \dots a_r') = N - \sum_{1 \le i \le r} N(a_i) + \sum_{1 \le i < j \le r} N\left(a_i a_j\right) - \sum_{1 \le i < j < k \le r} N\left(a_i a_j a_k\right) + \dots + (-1)^r N(a_1 a_2 \dots a_r)$$

<u>**דוגמא**</u>:

תהי $S = \{1,2,3, \dots, 400\}$. נחשב את מספר האיברים של S ש<u>אינם מתחלקים</u> באף אחד מהמספרים 2,3,5,7.

אז:

תהי a_1 התכונה שמספר ב- S מתחלק ב-2 ללא שארית.
תהי a_2 התכונה שמספר ב- S מתחלק ב-3 ללא שארית.
תהי a_3 התכונה שמספר ב- S מתחלק ב-5 ללא שארית.
תהי a_4 התכונה שמספר ב- S מתחלק ב-7 ללא שארית.

נרצה לחשב את $N(a_1' a_2' a_3' a_4')$.

נעשה את כל החישובים שאנחנו נזקקים להם לשם שימוש בעיקרון ההכלה וההדחה.

קל לראות ש- $N = |S| = 400$.

<u>נחשב את מספר האיברים עבור תכונה אחת</u>:

$$N(a_1) = \frac{400}{2} = 200 \quad , \quad N(a_2) = \left\lfloor \frac{400}{3} \right\rfloor = 133$$
$$N(a_3) = \left\lfloor \frac{400}{5} \right\rfloor = 80 \quad , \quad N(a_4) = \left\lfloor \frac{400}{7} \right\rfloor = 57$$

סה״כ:

$$\sum_{1 \le i \le 4} N(a_i) = 470$$

<u>נחשב את מספר האיברים עבור צירוף של 2 תכונות</u>:

$$N(a_1 a_2) = \left\lfloor \frac{400}{6} \right\rfloor = 66 \quad , \quad N(a_1 a_3) = \left\lfloor \frac{400}{10} \right\rfloor = 40 \quad , \quad N(a_1 a_4) = \left\lfloor \frac{400}{14} \right\rfloor = 28$$
$$N(a_2 a_3) = \left\lfloor \frac{400}{15} \right\rfloor = 26 \quad , \quad N(a_2 a_4) = \left\lfloor \frac{400}{21} \right\rfloor = 19 \quad , \quad N(a_3 a_4) = \left\lfloor \frac{400}{35} \right\rfloor = 11$$

סה״כ:

$$\sum_{1 \le i < j \le 4} N(a_i a_j) = 190$$

<u>נחשב את מספר האיברים עבור צירוף של 3 תכונות</u>:

$$N(a_1 a_2 a_3) = \left\lfloor \frac{400}{30} \right\rfloor = 13 \quad , \quad N(a_1 a_2 a_4) = \left\lfloor \frac{400}{42} \right\rfloor = 9$$
$$N(a_1 a_3 a_4) = \left\lfloor \frac{400}{70} \right\rfloor = 5 \quad , \quad N(a_2 a_3 a_4) = \left\lfloor \frac{400}{105} \right\rfloor = 3$$

סה״כ:

$$\sum_{1 \le i < j < k \le n} N(a_i a_j a_k) = 30$$

<u>נחשב את מספר האיברים עבור כל ארבעת התכונות</u>:

$$N(a_1 a_2 a_3 a_4) = \left\lfloor \frac{400}{210} \right\rfloor = 1$$

לכן לסיכום מעיקרון ההכלה וההדחה:

$$N(a_1' a_2' a_3' a_4') = N - \sum_{1 \le i \le n} N(a_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} N(a_i a_j) - \sum_{1 \le i < j < k \le n} N(a_i a_j a_k) + N(a_1 a_2 a_3 a_4)$$
$$= 400 - 470 + 190 - 30 + 1 = 91$$

<u>מספר הדרכים לחלק r עצמים מובחנים ל- n תאים מובחנים כך שאין תא ריק</u>:

באמצעות עיקרון ההכלה וההדחה נוכל לחשב את מספר הדרכים לחלק r עצמים **מובחנים** ל- n תאים **מובחנים** כך שאין תא ריק.

בטבלה שבנינו עבור חלוקת r עצמים ל- n תאים, סימנו את המספר הזה ב- $n!\cdot S(r,n)$, כאשר $S(r,n)$ הוא מספר האפשרויות לחלק r עצמים **מובחנים** ל- n תאים **זהים** כך שאין תא ריק.

נתבונן בקבוצת **כל החלוקות** של r עצמים מובחנים ל- n תאים מובחנים ללא הגבלות. אנחנו יודעים שמספר זה הוא n^r. לכן נסמן:

$$N=n^r$$

נגדיר n תכונות של החלוקות האלה. לכל i, $1\le i\le n$, התכונה a_i היא שתא מספר i **נשאר ריק**. אז, נשים לב כי:

$N(a_1)$ הוא מספר החלוקות כך שתא מספר 1 ריק, כלומר: $N(a_1)=(n-1)^r$.
$N(a_2)$ הוא מספר החלוקות כך שתא מספר 2 ריק, כלומר: $N(a_2)=(n-1)^r$

ובאותו אופן, לכל $1\le i\le n$, $N(a_i)=(n-1)^r$.

נמשיך לחשב גם את $N\left(a_ia_j\right)$, כלומר מספר החלוקות בהם התאים i ו- j ריקים, ולכן: $N\left(a_ia_j\right)=(n-2)^r$, וכך הלאה:

$N\left(a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}\dots a_{i_k}\right)=(n-k)^r$ לכל $1\le i_1<i_2<i_3<\dots<i_k\le n$.

כמו כן, אנחנו יודעים שמספר הצירופים האפשריים של k תאים מתוך n תאים הוא $\binom{n}{k}$. לכן מצאנו:

$$N=n^r$$

$$\sum_{1\le i\le n}N(a_i)=\binom{n}{1}(n-1)^r$$

$$\sum_{1\le i<j\le n}N\left(a_ia_j\right)=\binom{n}{2}(n-2)^r$$

$$\vdots$$

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n}N\left(a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_k}\right)=\binom{n}{k}(n-k)^r$$

$$\vdots$$

$$N(a_1a_2a_3\dots a_n)=\binom{n}{n}(n-n)^r=0$$

אז, מעיקרון ההכלה וההדחה נובע ש:

$$n!\cdot S(r,n)=N(a_1'a_2'a_3'\dots a_n')=\sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^r\right]$$

ולכן :

$$S(r,n) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^r\right]$$

בלבולים (Derangements):

הגדרה :

יהי n מספר שלם וחיובי. בלבול של n היא תמורה של $\{1,2,\dots,n\}$ כך שלכל $1 \le i \le n$, המספר ה- i אינו נמצא במקום ה- i.

נסמן ב- d_n את מספר הבלבולים של n.

דוגמא :

כאשר $n = 4$, הבלבולים של n הם :

$$\begin{matrix} <2,4,1,3> & , & <2,3,4,1> & , & <2,1,4,3> \\ <3,4,2,1> & , & <3,4,1,2> & , & <3,1,4,2> \\ <4,3,2,1> & , & <4,3,1,2> & , & <4,1,2,3> \end{matrix}$$

אז : $d_4 = 9$.

נחשב נוסחה עבור d_n :

תהי S קבוצת כל התמורות של $\{1,2,3,\dots,n\}$. אז :

$$N = |S| = n!$$

לכל i, $1 \le i \le n$, תהי a_i התכונה של תמורה שהמספר i **נמצא במקום** ה- i (במקרה כזה אומרים ש- i היא נקודת שבת). אז :

מספר מחוברים	מספר תמורות	סימון	מספר תכונות
$\binom{n}{0}$	$n!$	N	0
$\binom{n}{1}$	$(n-1)!$	$N(a_i)$	1
$\binom{n}{2}$	$(n-2)!$	$N(a_i a_j)$	2
$\vdots$			
$\binom{n}{k}$	$(n-k)!$	$N(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k})$	$2 < k < n$
$\vdots$			
$\binom{n}{n}$	$(n-n)!$	$N(a_1 a_2 \dots a_n)$	n

לכן אם נרצה לחשב את מספר התמורות שבהן המספר ה- i **לא נמצא** במקום ה- i, נצטרך לחשב את $N(a_1' a_2' \dots a_n')$. נעשה זאת:

$$\begin{aligned}
d_n &= N(a_1'a_2'a_3' \dots a_n') \\
&= \binom{n}{0} n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)! \\
&= \frac{n!}{0!\,n!} \cdot n! - \frac{n!}{1!\,(n-1)!} \cdot (n-1)! + \frac{n!}{2!\,(n-2)!} \cdot (n-2)! - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{n!}{n!\,0!} \cdot 0! \\
&= n! \cdot \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]
\end{aligned}$$

לכן:

$$\boxed{d_n = n! \cdot \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]}$$

<u>דוגמא</u>:

נחשב את d_4:

$$\begin{aligned}
d_4 = 4! \cdot \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right] &= 24 \cdot \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) \\
&= 24 \cdot \left(\frac{12 - 4 + 1}{24}\right) = 24 \cdot \left(\frac{9}{24}\right) = 9
\end{aligned}$$

<u>הערות</u>:

1. נשים לב כי מחדו״א אנחנו יודעים כי טור טיילור (סביב $x = 0$) של הפונקציה e^x הוא:

$$e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

הטור הזה מתכנס לכל $x \in \mathbb{R}$, ולכן:

$$e^{-1} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \dots$$

לכן בנוסחה שקיבלנו עבור d_n, הביטוי בסוגריים הוא **קירוב** ל- $e^{-1} = \frac{1}{e}$.
למעשה השגיאה של הפונקציה קטנה במהירות, וכבר לאחר מספר חד ספרתי של מחוברים, ההבדל בין הקירוב לבין e^{-1} יהיה זניח מאד.

2. יהי n מספר שלם וחיובי. ההסתברות שתמורה של $\{1,2,3,\dots,n\}$ שנבחרה באופן אקראי תהיה בלבול היא:

$$\frac{d_n}{n!} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \approx \frac{1}{e}$$

לכן, מהערה (1), אם n גדול מספיק (אך עדיין קטן מאד), ההסתברות הזאת כמעט אינה תלויה ב- n. כלומר, זה לא משנה אם $n = 10$ או $n = 30000$, ההסתברות תהיה (בקירוב מאד גדול) זהה.

ובכל זאת, לעניין זה **הזוגיות** של n כן חשובה:

- אם n אי-זוגי, אז: $\frac{d_n}{n!} < \frac{1}{e}$.
- אם n זוגי, אז: $\frac{d_n}{n!} > \frac{1}{e}$.

בגלל שהסימן של המחובר האחרון נקבע לפי $(-1)^n$, ולכן הזוגיות של n חשובה.

במילים אחרות, אם n_1, n_2 הם מספרים זוגיים, ו- n_3 אי-זוגי, אזי $\frac{d_{n_1}}{n_1!}$ יהיה יותר קרוב ל- $\frac{d_{n_2}}{n_2!}$ מאשר ל- $\frac{d_{n_3}}{n_3!}$ ללא תלות בערכים של n_1, n_2, n_3. (כמובן שזה נכון גם עבור 2 מספרים אי-זוגיים ואחד זוגי).

למשל, אם $n_1 = 6, n_2 = 10000$ ו- $n_3 = 7$, אזי: $\frac{d_6}{6!}$ יותר קרוב ל- $\frac{d_{10000}}{10000!}$ מאשר ל- $\frac{d_7}{7!}$.

<u>**נוסחה עבור d_n – המשך**</u>:

בהמשך להערות מעלה, אפשר להראות ש:

$$d_n = \begin{cases} \left\lceil \frac{n!}{e} \right\rceil & \text{זוגי } n \\ \left\lfloor \frac{n!}{e} \right\rfloor & \text{אי זוגי } n \end{cases}$$

בצורה זו אפשר לחשב את d_n בדרך נוחה.

<u>לדוגמא</u>:

$$d_4 = \left\lceil \frac{24}{e} \right\rceil = \lceil 8.829 \rceil = 9$$

וראינו שזה נכון בדוגמא שאיתה התחלנו.

<u>פונקציית ה- φ של אוילר:</u>

<u>**הגדרה**</u>:

יהי n מספר שלם חיובי. נגדיר $\varphi(n)$ להיות מספר המספרים השלמים k כך ש- $1 \le k \le n$ וכך ש- $\gcd(n,k) = 1$.

כלומר, מספר המספרים בין 1 ל- n שאין להם גורם משותף (פרט ל-1) עם n.

דוגמא:

נרצה לחשב את $\varphi(12)$. נמנה את המספרים בין 1 ל- 12 ונסמן את המספרים שאין להם גורם משותף עם 12:

$$12 \;,\; \boxed{11} \;,\; 10 \;,\; 9 \;,\; 8 \;,\; \boxed{7} \;,\; 6 \;,\; \boxed{5} \;,\; 4 \;,\; 3 \;,\; 2 \;,\; \boxed{1}$$

ראינו שיש 4 מספרים כאלו, ולכן: $\varphi(12) = 4$.

נחפש נוסחה עבור $\boldsymbol{\varphi(n)}$:

הנוסחה תלויה בפירוק של n לגורמים ראשוניים, $n > 1$ (כמובן ש- $\varphi(1) = 1$).

אז, נניח ש- $n \geq 2$, כאשר הפירוק של n לגורמים ראשוניים הוא:

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$$

כאשר $k \geq 1$, כל p_i הוא ראשוני ו- $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$, וכל $e_i \geq 1$ מספר שלם וחיובי.

כדי לחשב את $\varphi(n)$, נגדיר קבוצה $S = \{1,2,3, \ldots, n\}$, ולכל i, $1 \leq i \leq k$, תהי a_i התכונה של איבר של S שמתחלק ב- p_i ללא שארית. אז:

$$\varphi(n) = N(a_1' a_2' a_3' \ldots a_k')$$

ברור כי: $N = n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$.

נחשב את $N(a_i)$, כלומר את מספר המספרים ב- S שמתחלקים ב- p_i. ברור שמתקיים:

$$N(a_i) = \frac{n}{p_i}$$

יש לשים לב שמכיוון ש- p_i הוא גורם של n, אנחנו יודעים ש- $N(a_i)$ הוא מספר שלם, ולכן אין צורך לעגל כמו שעשינו בדוגמא אחרת שעסקה במחלקים.

באותו אופן, נחשב את $N(a_i a_j)$, כלומר המספרים ב- S שמתחלקים גם ב- p_i וגם ב- p_j, אלו כל המספרים שהם כפולות של $p_i \cdot p_j$. סה"כ:

$$N(a_i a_j) = \frac{n}{p_i p_j}$$

וכך הלאה...:

$$N(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_l}) = \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_l}}$$

לכן :

$$\varphi(n)=n-\frac{n}{p_1}-\frac{n}{p_2}-\cdots-\frac{n}{p_k}+\frac{n}{p_1p_2}+\frac{n}{p_1p_3}+\cdots+\frac{n}{p_{k-1}p_k}-\frac{n}{p_1p_2p_3}-\frac{n}{p_1p_2p_4}-\cdots-\frac{n}{p_{k-2}p_{k-1}p_k}+\cdots+(-1)^k\cdot\frac{n}{p_1p_2\ldots p_k}$$

נקבל בסוף :

$$\boxed{\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{1}{p_3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)}$$

<u>דוגמא</u> :

נחשב $\varphi(12000)$:

ראשית, נפרק את 12000 לגורמים :

$$12000=2^5\cdot 3\cdot 5^3$$

אז :

$$\varphi(12000)=12000\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=12000\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)=12000\cdot\frac{4}{15}=\frac{2^5\cdot 3\cdot 5^3\cdot 2^2}{3\cdot 5}=2^7\cdot 5^2=2^5\cdot 10^2=3200$$

<u>מקדמים מולטי-נומיאליים:</u>

נתחיל בשאלה :

<u>שאלה</u> :

נתונים n עצמים : q_1 עצמים מסוג 1, q_2 עצמים מסוג 2, q_3 עצמים מסוג 3, ו- q_t עצמים מסוג t $(q_1+q_2+q_3+\cdots+q_t=n)$.

מהו מספר הסדרות מאורך n שמכילות את כל העצמים.

אז, יש n מקומות בסדרה, וצריכים למצוא את כל האפשרויות למקם את העצמים $q_1,q_2,\ldots,q_t$.

בשלב הראשון נבחר ב- q_1 מקומות שבהם נמקם את העצמים מסוג 1 – יש לכך $\binom{n}{q_1}$ אפשרויות. בשלב השני נבחר ב- q_2 מהמקומות הנותרים עבור העצמים מסוג 2 – יש לכך $\binom{n-q_1}{q_2}$ אפשרויות. באותו אופן יש $\binom{n-q_1-q_2}{q_3}$ אפשרויות למקם את העצמים מסוג 3,

וכך הלאה עד העצם ה- t שנותרו $1 = \binom{q_t}{q_t} = \binom{n-q_1-q_2-\dots-q_{t-1}}{q_t}$ אפשרויות למקם אותו.

כעת, מעיקרון הכפל, מספר האפשרויות למקם את כל העצמים $q_1, q_2, \dots, q_t$ הוא:

$$\binom{n}{q_1}\binom{n-q_1}{q_2}\binom{n-q_1-q_2}{q_3}\cdots\binom{n-q_1-q_2-\dots-q_{t-2}}{q_{t-1}}\binom{n-q_1-q_2-\dots-q_{t-1}}{q_t}$$
$$=\frac{n!}{q_1!\,(n-q_1)!}\cdot\frac{(n-q_1)!}{q_2!\,(n-q_1-q_2)!}\cdot\frac{(n-q_1-q_2)!}{q_3!\,(n-q_1-q_2-q_3)!}\cdots\frac{(n-q_1-q_2-\dots-q_{t-1})!}{q_t!\,0!}$$
$$=\boxed{\frac{n!}{q_1!\,q_2!\dots q_t!}}$$

אפשר להוכיח זאת בצורה אחרת:

נתייחס אל כל n עצמים כאלה עצמים מובחנים, ונמצא את מספר האפשרויות לסדר את העצמים האלו בסדרה בת n איברים. אנחנו יודעים שמספר התמורות הנ"ל הוא $n!$.

כעת, אנחנו רוצים לחשב כמה סדרות כאלו יש כאשר לא ניתן להבחין בין עצמים מאותו סוג. אזי, נשים לב כי בכל תמורה, מספר האפשרויות לשנות את סדר העצמים, בתוך המקומות שכבר נקבעו לכל אחד מסוגי העצמים, הוא:

לסידור q_1 העצמים מסוג 1, יש $q_1!$ אפשרויות, לסידור q_2 העצמים מסוג 2, יש $q_2!$ אפשרויות, וכך הלאה... ולסידור q_t העצמים מסוג t, יש $q_t!$ אפשרויות.

כדי לקבל את מספר הסידורים האפשריים כמתבקש בשאלה נחלק את מספר התמורות הכולל במספר האפשרויות לסדר את העצמים – סה"כ: $\frac{n!}{q_1!q_2!\cdots q_t!}$ כפי שראינו.

<u>דוגמא</u>:

חשב את מספר התמורות של המילה TENNESSEE.

אז, נתייחס לכל אות כעל סוג של עצם כפי שראינו בשאלה מעלה, כלומר יש 9 מקומות לשיבוץ עצם אחד מסוג T, 4 עצמים מסוג E, 2 עצמים מסוג N, ו- 2 עצמים מסוג S.

סה"כ אפשרויות לעשות זאת כפי שראינו:

$$\frac{9!}{4!\,2!\,2!\,1!}=9\cdot4\cdot7\cdot3\cdot5=3780$$

אפשר להכליל את המושג של "מקדם בינומי" באופן הבא:

נרצה למצוא ביטוי עבור הפיתוח של $(a_1+a_2+\dots+a_t)^n$ עבור $t>2$ (כי עבור $t=2$ זה נתון ע"י נוסחת הבינום).

<u>הגדרה</u>:

יהיו $k_1, k_2, \dots, k_t \in \mathbb{N}$, ויהי $n = \sum_{i=1}^{t} k_i$.

<u>המקדם המולטינומי</u> $\binom{n}{k_1, k_2, k_3, \dots, k_t}$ הוא המקדם של $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdot \dots \cdot a_t^{k_t}$ בפיתוח של $(a_1 + a_2 + \cdots + a_t)^n$.

כלומר:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_t)^n = \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \cdots + k_t = n \\ \forall\, k_i \geq 0}} \binom{n}{k_1, k_2, k_3, \dots, k_t} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdot \dots \cdot a_t^{k_t}$$

<u>הערת מחבר</u>:

נשים לב כי מספר המחוברים בנוסחה האחרונה הוא כמספר הפתרונות שיש למשוואה:

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_t = n$$

וזהו למעשה כמו לחלק n עצמים זהים (כל עצם כזה הוא למעשה המספר 1) ל- t תאים שונים (אלו הם המשתנים k_i) ללא אילוצים (כלומר אפשר שב-"תא" מסוים יהיו 0 "עצמים" או n "עצמים"). אנחנו יודעים שמספר האפשרויות לכך הוא: $\binom{t+n-1}{n}$, לכן זהו מספר הפתרונות האפשריים של המשוואה.

<u>טענה</u>: (נוסחת המקדם המולטינומי)

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_t} = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \dots k_t!}$$

<u>הוכחה</u>:

נתבונן במכפלה:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n = \underbrace{(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)(x_1 + x_2 + \cdots + x_t) \cdots (x_1 + x_2 + \cdots + x_t)}_{n \text{ פעמים}}$$

המקדם של $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_t^{k_t}$ הוא מספר הדרכים לבחור ב- k_1 גורמים שיתרמו x_1, k_2 גורמים שיתרמו x_2, וכך הלאה... ו- k_t גורמים שיתרמו x_t.

<u>הערה</u>:

נשים לב כי כאשר $t = 2$, נקבל: $\binom{n}{k_1, k_2} = \frac{n!}{k_1! k_2!}$, ומכיוון ש- $k_1 + k_2 = n$, אז $k_2 = n - k_1$ ולכן: $\binom{n}{k_1} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} = \frac{n!}{k_1! k_2!} = \binom{n}{k_1, k_2}$ כמו בבינום הרגיל.

תרגיל:

מצא את מספר התמורות של המילה COMBINATORICS שבהן התבניות ORC ו- CAT **אינן** מופיעות.

אז, נשתמש בעיקרון ההכלה וההדחה:

יהי N מספר התמורות של המילה הנ"ל, a_1 התכונה שהתבנית ORC **מופיעה** בתמורה כלשהי, ו- a_2 התכונה שהתבנית CAT **מופיעה** בתמורה כלשהי. אנחנו מחפשים את $N(a_1'a_2')$.

נחשב:

- כדי למצוא את N נחשב כמה סידורים אפשריים עבור סידור המילה COMBINATORICS (באורך 13), כאשר נשים לב כי האותיות C, O ו- I מופיעות פעמיים כל אחת. לכן:
$$N = \frac{13!}{2!\,2!\,2!}$$
- נחשב את $N(a_1)$:
נתייחס למילה ORC כאילו היא אות אחת, ולכן מתוך 13 אותיות, יש לנו 11 אותיות: $\boxed{S}\ \boxed{I}\ \boxed{T}\ \boxed{A}\ \boxed{N}\ \boxed{I}\ \boxed{B}\ \boxed{M}\ \boxed{O}\ \boxed{C}\ \boxed{ORC}$, מתוכן רק האות I מופיעה פעמיים, לכן:
$$N(a_1) = \frac{11!}{2!}$$
- נחשב את $N(a_2)$:
כאן נתייחס למילה CAT כאילו היא אות אחת, ולכן גם כאן יש לנו 11 אותיות: $\boxed{S}\ \boxed{C}\ \boxed{I}\ \boxed{R}\ \boxed{O}\ \boxed{N}\ \boxed{I}\ \boxed{B}\ \boxed{M}\ \boxed{O}\ \boxed{CAT}$ והפעם גם האות O וגם האות I חוזרות על עצמן פעמיים, ולכן:
$$N(a_2) = \frac{11!}{2!\,2!}$$
- נחשב את $N(a_1a_2)$:
נרצה לחשב את כל התמורות בהן מופיעות 2 המילים יחד. אך נשים לב שהופעה של 2 המילים יחד יכולה להיות ב-2 צורות:
$$\boxed{S}\ \boxed{I}\ \boxed{N}\ \boxed{I}\ \boxed{B}\ \boxed{M}\ \boxed{O}\ \boxed{ORC}\ \boxed{CAT} \quad (1)$$
$$\boxed{S}\ \boxed{I}\ \boxed{N}\ \boxed{I}\ \boxed{B}\ \boxed{M}\ \boxed{O}\ \boxed{C}\ \boxed{ORCAT} \quad (2)$$
לכן נחשב את מספר התמורות עבור 2 האפשרויות.
1. אם המילים נפרדות ואנחנו מתייחסים לכל מילה בתור אות, אז יש סה"כ 9 אותיות כאשר האות I מופיעה פעמיים. סה"כ: $\frac{9!}{2!}$ אפשרויות.
2. אם המילים חולקות אות משותפת, אז גם יש סה"כ 9 אותיות, כאשר האות I מופיעה פעמיים. סה"כ: $\frac{9!}{2!}$ אפשרויות.

לכן בסה"כ:

$$N(a_1a_2) = \frac{9!}{2!} + \frac{9!}{2!}$$

לכן, בסה״כ מעיקרון ההכלה וההדחה:

$$N(a_1'a_2') = \frac{13!}{2!\,2!\,2!} - \frac{11!}{2!} - \frac{11!}{2!\,2!} + \frac{9!}{2!} + \frac{9!}{2!}$$

נוסחאות נסיגה:

אפשר להגדיר סדרה בשתי דרכים שונות:

1. אפשר לתת ביטוי מפורש עבור a_n – האיבר ה- n-י בסדרה.

<u>למשל</u>:

$a_n = n^2 \cdot 3^n + 4n + 2$ לכל $n \in \mathbb{N}$, ואז במקרה כזה אם נרצה לחשב את האיבר ה- 100 בסדרה, אז נוכל פשוט להציב ולקבל:
$a_{100} = 100^2 \cdot 3^{100} + 400 + 2$.

2. אפשר לקבוע את a_n ע״פ הערך של מספר איברים שקדמו ל- a_n בסדרה. שיטה זו נקראת <u>נוסחת נסיגה</u>.

<u>למשל</u>:

נגדיר $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ לכל $n \geq 2$, כאשר $a_0 = 0$ ו- $a_1 = 1$.
סדרה זו היא סדרה מוכרת הנקראת <u>סדרת פיבונצ׳י</u>.

ואז במקרה זה נוכל לחשב את האיבר ה- n-י בסדרה, ע״פ האיברים ה- $(n-1)$ ו- $(n-2)$. נחשב את האיברים הראשונים של הסדרה הזו:

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = 1 \quad , \quad a_3 = 2 \quad , \quad a_4 = 3$$
$$a_5 = 5 \quad , \quad a_6 = 8 \quad , \quad a_7 = 13 \quad , \quad a_8 = 21 \quad , \quad a_9 = 34$$

המטרה שלנו היא למצוא דרך בה נוכל לעבור מנוסחת נסיגה לביטוי מפורש עבור a_n.

<u>הגדרה</u>:

<u>נוסחת נסיגה לינארית</u> היא נוסחה מהצורה:

$$\forall n \geq r \qquad f(n) = C_0a_n + C_1a_{n-1} + \cdots + C_ra_{n-r}$$

כאשר כל C_i הוא קבוע, $C_0 \neq 0$, $C_r \neq 0$, ו- $f(n)$ היא פונקציה שתלויה ב- n (ולא באיברים של הסדרה).

אם $f(n) = 0$ לכל $n \geq r$, נאמר שהנוסחה <u>הומוגנית</u>.

<u>הערה</u>:

לפעמים במקום $\forall n \geq r$, יופיע $\forall n \geq k$ כאשר $k \geq r$.

<u>דוגמאות</u>:

1. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (לכל $n \geq 2$), כלומר: $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$ (לכל $n \geq 2$) היא לינארית והומוגנית.

2. $a_n - 3a_{n-2} + 4a_{n-5} = n^3 \cdot 5^n$ (לכל $n \geq 5$) היא לינארית אבל לא הומוגנית.

3. $a_n - na_{n-1} = 0$ (לכל $n \geq 1$) אינה לינארית משום שהמקדם של a_{n-1} איננו קבוע.

4. $a_n - a_{n-1}a_{n-2} = n$ (לכל $n \geq 2$) אינה לינארית.

<u>הגדרה</u>:

תהי $f(n)$ נוסחת נסיגה לינארית:

$$\forall n \geq r \qquad f(n) = C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + \cdots + C_r a_{n-r}$$

<u>פתרון</u> לנוסחת הנסיגה הוא סדרה אינסופית $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ כך ש:

$$\forall n \geq r \qquad f(n) = C_0 \beta_n + C_1 \beta_{n-1} + \cdots + C_r \beta_{n-r}$$

<u>הגדרה</u>:

תהי $f(n)$ נוסחת נסיגה לינארית:

$$\forall n \geq r \qquad f(n) = C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + \cdots + C_r a_{n-r}$$

רצף של r ערכים עוקבים:

$$\begin{gathered} a_k = \beta_k \\ a_{k+1} = \beta_{k+1} \\ \vdots \\ a_{k+r-1} = \beta_{k+r-1} \end{gathered}$$

נקרא קבוצה של <u>תנאי התחלה</u> (initial conditions), או <u>תנאי שפה</u> (boundary conditions).

(בד"כ $k = 0$, אבל לא תמיד)

<u>טענה</u>:

תהי $f(n)$ נוסחת נסיגה לינארית כמו בהגדרה. אז יש לנוסחת הנסיגה **פתרון יחיד** שמקיים את תנאי השפה.

<u>הוכחה</u>:

נוכל ליצור את הפתרון $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ בדרך הבאה:

נתונים $\beta_{k+r-1}, \dots, \beta_{k+1}, \beta_k$. נחשב את הערך של β_{k+r} שמקיים את נוסחת הנסיגה עבור $n = k + r$:

$$f(k+r) = C_0\beta_{k+r} + C_1\beta_{k+r-1} + \cdots + C_r\beta_k$$

אפשר לבודד את β_{k+r} משום ש- $C_0 \neq 0$.
כעת גם β_{k+r} ידוע ולכן אפשר להציב $n = k + r + 1$ כדי לחשב את β_{k+r+1} וכך הלאה...

אם $k > 0$, נוכל לחשב את β_{k-1} ע״י הצבת $n = k + r - 1$ בנוסחת הנסיגה:

$$f(k+r-1) = C_0\beta_{k+r-1} + C_1\beta_{k+r-2} + \cdots + C_{r-1}\beta_k + C_r\beta_{k-1}$$

אפשר לבודד את β_{k-1} משום ש- $C_r \neq 0$, ואז אפשר להמשיך לחשב את β_{k-2} וכך הלאה... ■

נגדיר מרחב וקטורי V שמכיל את כל הסדרות האינסופיות $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ מעל $\mathbb{R}$ (או מעל $\mathbb{C}$).
נגדיר את הפעולות חיבור וכפל בסקלר כנדרש במרחב וקטורי:

- <u>חיבור</u> סדרות מוגדר ע״י:
$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} + \{b_n\}_{n=0}^{\infty} = \{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$$
- <u>כפל בסקלר</u> מוגדר ע״י:
$$\forall c \in \mathbb{C}\ (or\ c \in \mathbb{R}) \qquad c \cdot \{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{c \cdot a_n\}_{n=0}^{\infty}$$

אז V מרחב וקטורי, והמימד של V הוא **אינסופי**.

כעת, נתבונן בנוסחת נסיגה לינארית **והומוגנית**:

$$\forall n \geq r \qquad C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + \cdots + C_r a_{n-r} = 0$$

נסמן ב- W את <u>קבוצת כל הפתרונות</u> לנוסחת הנסיגה הזו.

<u>משפט</u>:

הקבוצה W מהווה תת-מרחב של V, ו- $\dim W = r$.

(W נקרא <u>מרחב הפתרונות</u> לנוסחת הנסיגה).

<u>הוכחה</u>:

1. <u>נוכיח ש- W הוא תת-מרחב של V</u>:

   א. <u>$\vec{0} \in W$</u>:

   צ״ל שהסדרה $\{0\}_{n=0}^{\infty} \in W$. ואכן, אם נציב:
$$a_n = 0 \quad , \quad a_{n-1} = 0 \quad , \quad a_{n-2} = 0 \quad , \quad \dots \quad , \quad a_{n-r} = 0$$
   בנוסחת הנסיגה, אז הנוסחה מתקיימת ולכן $\{0\}_{n=0}^{\infty} \in W$.

ב. <u>W סגורה תחת חיבור</u>:
תהיינה $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ ו- $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ שתי סדרות ב- W, ז"א ש:

$$\forall n \geq r \quad C_0\alpha_n + C_1\alpha_{n-1} + \cdots + C_r\alpha_{n-r} = 0$$
$$\forall n \geq r \quad C_0\beta_n + C_1\beta_{n-1} + \cdots + C_r\beta_{n-r} = 0$$

נחבר את שתי המשוואות, ונקבל:

$$\forall n \geq r \quad C_0(\alpha_n + \beta_n) + C_1(\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}) + \cdots + C_r(a_{n-r} + \beta_{n-r}) = 0$$

לכן $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty} + \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty} \in W$.

ג. <u>W סגורה לכפל בסקלר</u>:
תהי $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in W$, ויהי d סקלר. אז:

$$\forall n \geq r \quad C_0\alpha_n + C_1\alpha_{n-1} + \cdots + C_r\alpha_{n-r} = 0$$

נכפיל ב- d ונקבל:

$$\forall n \geq r \quad C_0 d\alpha_n + C_1 d\alpha_{n-1} + \cdots + C_r d\alpha_{n-r} = 0$$

ולכן: $\{d \cdot \alpha_n\}_{n=0}^{\infty} = d \cdot \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in W$.

בסה"כ הראנו ש- W תת-מרחב של V.

2. <u>נחשב את $\dim W$</u>:

כדי לחשב את $\dim W$ נמצא בסיס ל- W:

נגדיר r וקטורים (כלומר סדרות) בדרך הבאה:

$$\overrightarrow{v_0} =< 1, \underbrace{0,0,0,\dots,0}_{r-1 \text{ אפסים}}, *,*,*,\dots >\in W$$

$$\overrightarrow{v_1} =< 0,1, \underbrace{0,0,\dots,0}_{r-2 \text{ אפסים}}, *,*,*,\dots >\in W$$

$$\vdots$$

$$\overrightarrow{v_{r-1}} =< \underbrace{0,0,0,0,\dots}_{r-1 \text{ אפסים}}, 1,*,*,*,\dots >\in W$$

כאשר $\overrightarrow{v_i}$ יהיה הפתרון לנוסחת הנסיגה המתאימה לתנאי ההתחלה: $a_i = 1$ ו- $a_j = 0$ לכל $j \neq i$ ו- $i,j \leq r-1$.

א. נראה ש- $\{\overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_{r-1}}\}$ פורשת את W:

יהי $\vec{w} =< \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1}, *, *, *, \dots > \in W$ וקטור כלשהו מ- W, כלומר פתרון כלשהו לנוסחת הנסיגה. זה פתרון שמתאים לתנאי התחלה: $a_0 = \beta_0$, $a_1 = \beta_1$, ..., $a_{r-1} = \beta_{r-1}$.

כעת נשים לב כי הוקטור הנוצר ע״י הצירוף הלינארי:

$$\beta_0 \cdot \overrightarrow{v_0} + \beta_1 \overrightarrow{v_1} + \dots + \beta_{r-1} \overrightarrow{v_{r-1}}$$

הוא גם פתרון שמתאים לאותם תנאי שפה כמו $\vec{w}$:
$a_0 = \beta_0$, $a_1 = \beta_1$, ..., $a_{r-1} = \beta_{r-1}$.

אבל הפתרון הזה יחיד ולכן:

$$\vec{w} = \beta_0 \overrightarrow{v_0} + \beta_1 \overrightarrow{v_1} + \dots + \beta_{r-1} \overrightarrow{v_{r-1}}$$

ב. נראה ש- $\{\overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_{r-1}}\}$ קבוצה בלתי תלויה:

נניח ש: $\beta_0 \overrightarrow{v_0} + \beta_1 \overrightarrow{v_1} + \dots + \beta_{r-1} \overrightarrow{v_{r-1}} = \vec{0}$, כלומר:

$$< \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}, *, *, *, \dots > = < 0,0,0,0,0, \dots >$$

אז:

$$\beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_{r-1} = 0$$

ולכן הקבוצה בלתי תלויה.

הראנו ש-r הוקטורים שהגדרנו מהווים בסיס ל- W ו-$\dim W = r$.

כעת, נתונה נוסחת נסיגה לינארית והומוגנית:

$$\forall n \geq r \qquad C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + \dots + C_r a_{n-r} = 0$$

נחפש **בסיס חדש** עבור W שבנוי מסדרות גאומטריות (הנדסיות):

נגדיר:

$$\begin{gathered} \overrightarrow{w_1} =< 1, \lambda_1, \lambda_1^2, \lambda_1^3, \lambda_1^4, \dots, \lambda_1^n, \dots > \\ \overrightarrow{w_2} =< 1, \lambda_2, \lambda_2^2, \lambda_2^3, \lambda_2^4, \dots, \lambda_2^n, \dots > \\ \vdots \\ \overrightarrow{w_r} =< 1, \lambda_r, \lambda_r^2, \lambda_r^3, \lambda_r^4, \dots, \lambda_r^n, \dots > \end{gathered}$$

יש לציין כי לא תמיד קיים בסיס כזה, ואם הוא לא קיים עלינו להוסיף עוד וקטורים.

אז נחפש פתרונות מהצורה $a_n = \lambda^n$ לנוסחת הנסיגה.
נציב בנוסחה $a_n = \lambda^n$ ונקבל:

$$\forall n \geq r \qquad C_0\lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + \cdots + C_r\lambda^{n-r} = 0$$

ז"א ש:

$$\forall n \geq r \qquad \lambda^{n-r}(C_0\lambda^r + C_1\lambda^{r-1} + \cdots + C_{r-1}\lambda + C_r) = 0$$

<u>אפשרות 1</u>: $\lambda = 0$, ואז נקבל רק את הפתרון הטריביאלי: $a_n = 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

<u>אפשרות 2</u>: $\lambda \neq 0$, ואז חייב להיות ש:

$$C_0\lambda^r + C_1\lambda^{r-1} + \cdots + C_{r-1}\lambda + C_r = 0$$

ז"א ש- λ הוא שורש של <u>הפולינום האופייני</u>:

$$P(x) = C_0x^r + C_1x^{r-1} + \cdots + C_{r-1}x + C_r$$

לפי המשפט היסודי של האלגברה, לפולינום האופייני יש r שורשים מעל $\mathbb{C}$, אבל השורשים האלה אינם בהכרח שונים זה מזה:

$$P(x) = C_0(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\cdots(x - \lambda_r)$$

כאשר כל $\lambda_i \in \mathbb{C}$, אבל ייתכן ש- $\lambda_i = \lambda_j$ עבור $i \neq j$.

<u>דוגמא</u>:

נמצא את נוסחת הנסיגה של סדרת פיבונצ'י:

$$\forall n \geq 2 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

כאשר: $a_0 = 0$ ו- $a_1 = 1$.

אז:

$$\forall n \geq 2 \qquad a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$$

אם נציב $a_n = \lambda^n$ נקבל:

$$\begin{aligned} & \lambda^n - \lambda^{n-1} - \lambda^{n-2} = 0 \\ \Rightarrow\quad & \lambda^{n-2}(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0 \end{aligned}$$

ואז הפולינום האופייני הוא:

$$P(x) = \lambda^2 - \lambda - 1$$

השורשים של $P(x)$ הם:

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$
$$\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

לכן מרחב הפתרונות W נפרש ע״י 2 הסדרות:

$$\overrightarrow{w_1} = \langle 1, \lambda_1, \lambda_1^2, \lambda_1^3, \dots \rangle = \langle 1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2, \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3, \dots \rangle$$

$$\overrightarrow{w_2} = \langle 1, \lambda_2, \lambda_2^2, \lambda_2^3, \dots \rangle = \langle 1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2, \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3, \dots \rangle$$

משום ש- $\overrightarrow{w_1}$ ו- $\overrightarrow{w_2}$ בלתי תלויים (אפשר להוכיח זאת).

אז, **הפתרון הכללי** לנוסחת הנסיגה $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$ $(\forall n \geq 2)$ הוא מהצורה:

$$A\overrightarrow{w_1} + B\overrightarrow{w_2}$$

ז״א ש:

$$a_n = A \cdot \lambda_1^n + B \cdot \lambda_2^n = A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

כעת, למציאת A ו- B נשתמש בתנאי השפה ונציב $a_0 = 0$, $a_1 = 1$:

$$\begin{cases} a_0 = 0 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 \\ a_1 = a_1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = A + B \\ 1 = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ 1 = -B\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{B = -\frac{1}{\sqrt{5}}} \\ \boxed{A = \frac{1}{\sqrt{5}}} \end{cases}$$

אז, האיבר ה- n-י בסדרת פיבונצ׳י הוא:

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

<u>הערה</u>:

נשים לב כי $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618$, ולכן: $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$, אז: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = 0$, ז״א שהמחובר השני בנוסחת פיבונצ׳י הוא זניח ולכן:

$$a_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

אפשר לעגל למספר הטבעי הקרוב ביותר אם $n > 1$.

למשל: $a_{12} \approx 144.001389$, לכן נוכל להסיק $a_{12} = 144$.

אם בנוסחה הנ"ל היה מתקיים שוויון, כלומר: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, אז סדרת פיבונצ'י הייתה סדרת גיאומטרית (הנדסית), אך במקום זאת: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

מספר זה - $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ הוא **יחס הזהב**.

נשוב לעסוק במציאת השורשים של הפולינום האופייני ומציאת פתרון כללי לנוסחת הנסיגה.

נתונה נוסחת נסיגה לינארית והומוגנית:

$$\forall n \geq r \qquad C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + \cdots + C_r a_{n-r} = 0$$

הפולינום האופייני הוא:

$$P(x) = C_0 x^r + C_1 x^{r-1} + \cdots + C_{r-1} x + C_r$$

ידוע ש- $P(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{C}$.

<u>יש 3 מקרים</u>:

<u>מקרה 1</u>:

יש ל- $P(x)$ r שורשים ממשיים **שונים** $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, ואז אפשר להוכיח ש- r הוקטורים:

$$\overrightarrow{w_1} = \langle 1, \lambda_1, \lambda_1^2, \lambda_1^3, \dots \rangle$$
$$\overrightarrow{w_2} = \langle 1, \lambda_2, \lambda_2^2, \lambda_2^3, \dots \rangle$$
$$\vdots$$
$$\overrightarrow{w_r} = \langle 1, \lambda_r, \lambda_r^2, \lambda_r^3, \dots \rangle$$

הם בלתי תלויים במרחב W, ולכן הם פורשים אותו. ז"א שכל פתרון לנוסחת הנסיגה הנתונה יהיה מהצורה:

$$a_n = A_1 \lambda_1^n + A_2 \lambda_2^n + \cdots + A_r \lambda_r^n$$

בהנחה שכל ה- C_i בנוסחת הנסיגה הם ממשיים, וגם כל תנאי השפה נתונים באמצעות מספרים ממשיים, אז גם כל ה- A_i יהיו ממשיים.

<u>מקרה 2</u> (חסרים חלקים):

יש ל- $P(x)$ r שורשים **שונים** , כאשר לפחות אחד מהם הוא מספר מרוכב שאינו ממשי. אז כאן, בהנחה שכל ה- C_i הם ממשיים, אז $P(x)$ יהיה פולינום מעל $\mathbb{R}$.

אפשר להוכיח שאם $\lambda \in \mathbb{C}$ הוא שורש של $P(x)$, אז הצמוד $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ גם יהיה שורש של $P(x)$.
לכן אם נניח ש- $\lambda \in \mathbb{C}$ הוא שורש של $P(x)$, אז גם $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ הוא שורש, ולכן

החומר שהועבר בהרצאה בנושא זה חסר לי ולכן הושלם מהספר "מתמטיקה בדידה" של א. אברון, עם תוספות קלות שלי.

$a_n = A_1\lambda^n + A_2\overline{\lambda}^n$ יהיה פתרון לנוסחת הנסיגה (אבל לא בהכרח הפתרון הכללי) ו- a_n יהיה מספר ממשי, בהנחה שתנאי השפה יהיו ממשיים.

נרצה למצוא ביטוי שאינו מכיל את החלק המדומה (כלומר, מכיל רק מספרים ממשיים):

קיבלנו ש:

$$\lambda^n = (\alpha + \beta i)^n$$
$$\overline{\lambda}^n = (\alpha - \beta i)^n$$

שניהם מהווים פתרונות לנוסחת הנסיגה. אנחנו יודעים מאלגברה לינארית שכל מספר מרוכב אפשר להציג באמצעות הצגה פולרית, לכן נעביר את שני הפתרונות שמצאנו להצגה פולרית:

$$(\alpha + \beta i)^n = r^n(\cos n\theta + i \cdot \sin n\theta)$$
$$(\alpha - \beta i)^n = r^n(\cos n\theta - i \cdot \sin n\,\theta)$$

ומתקיים (לאחר פתיחת סוגריים והצבות מתאימות):

$$r^n \cos n\theta = \frac{(\alpha + \beta i)^n + (\alpha - \beta i)^n}{2}$$
$$r^n \sin n\theta = \frac{(\alpha + \beta i)^n - (\alpha - \beta i)^n}{2i}$$

כלומר, קיבלנו ש- $r^n \cos n\theta$ ו- $r^n \sin n\theta$ הם צירופים לינאריים של 2 הפתרונות λ^n ו- $\overline{\lambda}^n$ שמצאנו, ולכן גם מהווים פתרונות. לכן נוכל להשתמש בהם כדי לבטא את הפתרון הכללי. נשים לב שביטויים אלה אינם מכילים חלקים מדומים, ולכן נעדיף להשתמש בהם.

<u>דוגמא</u>:

<דוגמא על נוסחת נסיגה שמייצגת את הדטרמיננטה של מטריצה מגודל $n \times n$, הדוגמא לא הייתה מובנת לי ולכן נכתבה עם טעויות, אז לא הוספתי אותה>

<u>מקרה 3</u>:

לפולינום האופייני $P(x)$ יש שורש בעל ריבוי **גדול מ-1**, כלומר:

$$P(x) = (x - \lambda_1)^{e_1} \cdot (x - \lambda_2)^{e_2} \cdots (x - \lambda_k)^{e_k}$$

כאשר לפחות אחד מה- e_i הוא גדול מ-1.
כאן: $e_1 + e_2 + \cdots + e_k = r = \deg\big(P(x)\big)$.

דוגמא:

נניח ש- $P(x)=(x-2)^3(x+1)(x-4)^2$, אז כאן: $r=\deg P(x)=6$. ז"א שהמימד של מרחב הפתרונות הוא 6, ואנחנו צריכים למצוא 6 סדרות בלתי-תלויות כדי לפרוש את המרחב (אז נדע שכל פתרון הוא קומבינציה של 6 הפתרונות האלה).

אבל כאן יש רק 3 פתרונות:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w_1}&=\langle 1,2,4,8,\dots\rangle=\{2^n\}_{n=0}^{\infty}\\ \overrightarrow{w_2}&=\langle 1,-1,1,-1,1,-1,\dots\rangle=\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}\\ \overrightarrow{w_3}&=\langle 1,4,16,64,\dots\rangle=\{4^n\}_{n=0}^{\infty}\end{aligned}$$

לכן $a_n=A\cdot 2^n+B\cdot(-1)^n+C\cdot 4^n$ מהווה פתרון, אבל הוא אינו הפתרון הכללי.

עלינו לחפש עוד פתרונות. לשם כך נשתמש בטענה הבאה:

טענה:

יהי $f(x)$ פולינום מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$. יהי λ שורש של $f(x)$, אז λ הוא שורש בעל ריבוי k אם ורק אם:

$$f(\lambda)=0 \quad , \quad f'(\lambda)=0 \quad , \quad f''(\lambda)=0 \quad , \quad \dots \quad , \quad f^{(k-1)}(\lambda)=0 \quad , \quad f^{(k)}(\lambda)\neq 0$$

הוכחה:

נניח שהריבוי של λ הוא k. ז"א ש- $f(x)=(x-\lambda)^k\cdot g(x)$, כאשר $g(x)$ הוא פולינום ו- $g(\lambda)\neq 0$. אז:

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x-\lambda)^k g'(x)+k(x-\lambda)^{k-1}g(x)\\ &=(x-\lambda)^{k-1}[(x-\lambda)g'(x)+kg(x)]\\ &=(x-\lambda)^{k-1}\cdot h(x)\end{aligned}$$

כאשר:

$$h(\lambda)=0\cdot g'(\lambda)+kg(\lambda)=0+kg(\lambda)\neq 0$$

לכן גזירה מורידה את הריבוי של השורש λ ב- 1, מכאן אפשר להוכיח את הטענה.

כעת, נתבונן על נוסחת נסיגה לינארית והומוגנית:

$$\forall n\geq r \quad C_0a_n+C_1a_{n-1}+\cdots+C_ra_{n-r}=0$$

נניח ש- λ הוא שורש בעל ריבוי $k>1$ של הפולינום האופייני:

$$P(x)=C_0x^r+C_1x^{r-1}+\cdots+C_{r-1}x+C_r$$

אז λ הוא גם שורש בעל ריבוי k של כל הפולינומים:

$$\forall n \geq r \quad f(x) = x^{n-r} \cdot P(x) = C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + \cdots + C_{r-1} x^{n-r+1} + C_r x^{n-r}$$

ו- $\lambda \neq 0$ כי $C_r \neq 0$.

מהטענה הקודמת נובע ש- λ הוא שורש בעל ריבוי $k-1$ של $f'(x)$, כלומר של:

$$f'(x) = C_0 n x^{n-1} + C_1 (n-1) x^{n-2} + C_2 (n-2) x^{n-3} + \cdots$$
$$+ C_{r-1}(n-r+1) x^{n-r} + C_r (n-r) x^{n-r-1}$$

ואז λ גם יהיה שורש בעל ריבוי $k-1$ של $xf'(x)$, כלומר של:

$$\forall n \geq r \quad xf'(x) = C_0 n x^n + C_1 (n-1) x^{n-1} + \cdots$$
$$+ C_{r-1}(n-r+1) x^{n-r+1} + C_r (n-r) x^{n-r}$$

במילים אחרות:

$$\forall n \geq r \quad C_0 n \lambda^n + C_1 (n-1) \lambda^{n-1} + \cdots + C_r (n-r) \lambda^{n-r} = 0$$

ז"א ש- $a_n = n \cdot x^n$ מהווה פתרון לנוסחת הנסיגה.

אפשר לחזור על התהליך עוד $k-2$ פעמים כדי להסיק ש-

$$a_n = \lambda^n \quad , \quad a_n = n \cdot \lambda^n \quad , \quad a_n = n^2 \cdot \lambda^n \quad , \quad \ldots \quad , \quad a_n = n^{k-1} \cdot \lambda^n$$

כולם מהווים פתרונות לנוסחת הנסיגה (ואפשר להוכיח שהם בלתי-תלויים).

אז לכל שורש λ בעל ריבוי k, אפשר למצוא k פתרונות בלתי תלויים.

<u>דוגמא</u>:

הפתרון הכללי לנוסחת נסיגה לינארית והומוגנית בעלת הפולינום האופייני:

$$P(x) = (x-2)^3 (x+1)(x-4)^2$$

הוא:

$$a_n = A_1 2^n + A_2 n 2^n + A_3 n^2 2^n + B_1 (-1)^n + C_1 4^n + C_2 n 4^n$$

<u>דוגמא</u>:

נפתור את נוסחת הנסיגה הבאה:

$$\forall n \geq 3 \quad a_n + 6a_{n-1} + 12a_{n-2} + 8a_{n-3} = 0 \quad \begin{bmatrix} a_0 = 4 \\ a_1 = 12 \\ a_2 = 16 \end{bmatrix}$$

כאן: $P(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

נשים לב שאם $P(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$ אזי האיבר הקבוע בפולינום יהיה: $-\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ (מתקבל לאחר פתיחת סוגריים), כלומר 8 הוא (-1) כפול המכפלה של כל השורשים. אם כל השורשים **שלמים** אז הם כולם מחלקים של 8.

כלומר, נחשוד באפשרויות הבאות בתור השורשים: ± 1, ± 2, ± 4, ± 8, אבל אם $x \geq 0$ ברור ש- $P(x) > 0$, לכן האפשרויות היחידות הן $-1, -2, -4, -8$.

אז:

$$P(-1) \neq 0$$
$$P(-2) = -8 + 24 - 24 + 8 = 0$$

אז (-2) הוא שורש של $P(x)$, ז״א ש- $P(x)$ מתחלק ב- $x+2$ ללא שארית:

$$\begin{array}{l}
x^2+4x+4 \\
\hline
x^3+6x^2+12x+8 \,\big|\, x+2 \\
x^3+2x^2 \\
\hline
\quad 4x^2+12x+8 \\
\quad 4x^2+8x \\
\hline
\qquad 4x+8 \\
\qquad 4x+8 \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}$$

אז:

$$P(x) = (x+2)(x^2+4x+4) = (x+2)(x+2)^2 = (x+2)^3$$

אפשרות נוספת היא לבדוק את הריבוי של השורש $\lambda = -2$:

$$P'(x) = 3x^2 + 12x + 12$$
$$P'(-2) = 12 - 24 + 12 = 0$$
$$P''(x) = 6x + 12$$
$$P''(-2) = -12 + 12 = 0$$
$$P'''(x) = 6$$
$$P'''(-2) \neq 0$$

ז״א שהריבוי של השורש (-2) הוא 3.
ואז: $P(x) = (x+2)^3 g(x)$.

אבל $\deg g(x) = 0$, כלומר $g(x)$ קבוע והוא שווה ל-1 כי המקדם של x^3 ב- $P(x)$ הוא 1.

לכן הפתרון הכללי לנוסחת הנסיגה הנתונה הוא:

$$a_n = A(-2)^n + Bn(-2)^n + Cn^2(-2)^n$$

כאשר $a_0 = 4$, $a_1 = 12$, $a_2 = 16$.

נקבע את A, B, C בעזרת תנאי ההתחלה:

$$a_0 = 4 \Rightarrow 4 = A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 \Rightarrow \boxed{A = 4}$$
$$a_1 = 12 \Rightarrow 12 = -2A - 2B - 2C \Rightarrow A + B + C = -6$$

משתי המשוואות הנ"ל נקבל:

$$4 + B + C = -6 \Rightarrow B + C = -10$$
$$a_2 = 16 \Rightarrow 16 = 4A + 8B + 16C \Rightarrow 4 = A + 2B + 4C$$

נרכז את כל המשוואות שמצאנו:

$$\begin{cases} A = 4 \\ B + C = -10 \\ A + 2B + 4C = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B + C = -10 \\ B + 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B + C = -10 \\ C = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{A = 4} \\ \boxed{B = -20} \\ \boxed{C = 10} \end{cases}$$

<u>מערכות משוואות של נוסחאות נסיגה</u>:

נפתח בדוגמא.

<u>דוגמא</u>:

נרצה לחשב את מספר הסדרות מאורך n מעל $\{0,1,2\}$ כך שמספר האפסים הוא זוגי. אז:

נסמן ב- a_n את מספר הסדרות כנ"ל באורך n.
נסמן ב- b_n את מספר הסדרות באורך n מעל $\{0,1,2\}$ כך שמספר האפסים הוא אי-זוגי.

<u>נבנה נוסחה עבור a_n</u>:

אז, נשים לב שנוכל לחלק למקרים:

1. אם בסדרה שלנו האיבר האחרון הוא 0, אז אנחנו צריכים לספור את כל האפשרויות שב- $n-1$ המקומות האחרים יהיה מספר **אי-זוגי** של אפסים. ואנחנו יודעים שמספר האפשרויות לכך הוא b_{n-1}.
2. אם בסדרה שלנו האיבר האחרון הוא 1 או 2, אז אנחנו צריכים לספור את כל האפשרויות שב- $n-1$ המקומות האחרים יהיה מספר **זוגי** של אפסים. מספר האפשרויות לכך הוא a_{n-1}, אך בגלל שזה למעשה 2 מקרים (1 או 2), אז סה"כ האפשרויות הוא: $2a_{n-1}$.

<u>נבנה נוסחה עבור b_n</u>:

נפעל באותו אופן ונחלק למקרים:

1. אם בסדרה האיבר האחרון הוא 0, אז אנחנו צריכים לספור את כל הסדרות האלה שב- $n-1$ המקומות הנותרים יש מספר **זוגי** של אפסים. מספר האפשרויות לכך הוא a_{n-1}.

2. אם בסדרה האיבר האחרון הוא 1 או 2, אז צריך לספור את כל הסדרות האלה שב- $n-1$ המקומות הנותרים יש מספר **אי-זוגי** של אפסים. יש לכך סה״כ: $2b_{n-1}$ אפשרויות.

קיבלנו בסה״כ:

$$(*) \quad (\forall n \geq 2) \quad \begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1} \end{cases}$$

כאשר אנחנו יודעים ש- $a_1 = 2$ ו- $b_1 = 1$.

אז, מהמשוואה הראשונה נובע ש:

$$(1) \ (\forall n \geq 2) \quad b_{n-1} = a_n - 2a_{n-1}$$

ולכן:

$$(2) \ (\forall n \geq 1) \quad b_n = a_{n+1} - 2a_n$$

אז נוכל להציב את (1) ו- (2) בנוסחה שקיבלנו עבור b_n ב- $(*)$, ונקבל:

$$(\forall n \geq 2) \quad a_{n+1} - 2a_n = a_{n-1} + 2(a_n - 2a_{n-1})$$

קיבלנו נוסחת נסיגה רגילה עם a_n בלבד. נמשיך לפשט:

$$\begin{aligned} & a_{n+1} - 2a_n = a_{n-1} + 2a_n - 4a_{n-1} \\ & \Rightarrow a_{n+1} - 4a_n + 3a_{n-1} = 0 \quad (\forall n \geq 2) \end{aligned}$$

אז, קל לחשב ש:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= 5 \end{aligned}$$

נמצא את הערך של a_0 כך שהנוסחה תתקיים עבור $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} & a_2 - 4a_1 + 3a_0 = 0 \\ & \Rightarrow 5 - 4 \cdot 2 + 3a_0 = 0 \\ & \Rightarrow 3a_0 = 3 \\ & \Rightarrow a_0 = 1 \end{aligned}$$

הפולינום האופייני הוא:

$$x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$$

ולכן:

$$\boxed{a_n = A \cdot 3^n + B \cdot 1^n = A \cdot 3^n + B}$$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל:

$$\begin{cases} a_0 = 1 = A + B \\ a_1 = 2 = 3A + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1 - A \\ 2 = 3A + 1 - A \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \boxed{A = \frac{1}{2}} \\ \boxed{B = \frac{1}{2}} \end{array}$$

ולכן לסיכום:

$$\boxed{a_n = \frac{3^n + 1}{2}}$$

מספרי קטלן (Catalan):

הגדרה:

סדרה בינארית מאוזנת מאורך $2n$ היא סדרה שמכילה n אפסים ו- n אחדות, כך שבכל **רישא** של הסדרה, מספר האפסים הוא גדול או שווה למספר האחדות.

רישא של סדרה $\langle a_1, a_2, \dots, a_{2n}\rangle$ היא תת-סדרה $\langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_i\rangle$ כאשר $1 \le i \le 2n$.

דוגמא:

הסדרה הבינארית: 0010101101 היא סדרה מאוזנת, כי התנאי בהגדרה מתקיים בכל רישא:

$$0 \quad 00 \quad 001 \quad 0010 \quad 00101 \quad \dots$$

מצד שני, הסדרה הבינארית: 01011001 איננה מאוזנת, כי ברישא 01011 יש 3 אחדות ו- 2 אפסים.

דוגמא:

אם נסתכל על ביטוי שבנוי ממספרים, פעולות חשבון, וסוגריים, ונתבונן רק על הסוגריים, נקבל משהו בצורת: $(())(())()$.
אם נציב $"(" = 0$ ו- $")" = 1$, התוצאה היא סדרה מאוזנת.

הגדרה:

מספר הקטלן C_n הוא מספר הסדרות הבינאריות המאוזנות מאורך $2n$.

דוגמא:

יהי $n = 3$, נרשום את כל הסדרות הבינאריות המאוזנות מאורך 6:

$$000111 \quad , \quad 001011 \quad , \quad 001101$$
$$010011 \quad , \quad 010101$$

לכן: $C_3 = 5$.

משפט:

לכל $n \ge 1$ מתקיים:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

<u>הוכחה</u>:

יהי $n \in \mathbb{N}$ מספר שלם חיובי.
נגדיר מספר קבוצות של סדרות:

$A =$ קבוצת כל **הסדרות הבינאריות** שמכילות n אפסים ו-n אחדות

$S =$ קבוצת כל **הסדרות המאוזנות** שמכילות n אפסים ו-n אחדות

$C =$ קבוצת כל **הסדרות הבינאריות** שמכילות $n-1$ אפסים ו-$n+1$ אחדות

$B =$ קבוצת כל הסדרות הבינאריות **הלא מאוזנות** שמכילות n אפסים ו- n אחדות

אז $C_n = |S|$.

מכיוון ש- $S \cap B = \emptyset$ ו- $S \cup B = A$, אז: $|S| = |A| - |B|$.

נשים לב ש- $|A| = \binom{2n}{n}$ (נבחר ב- n מקומות מתוך $2n$ שבהם יהיו האפסים).
ובאופן דומה: $|C| = \binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n+1}$.

<u>טענת עזר</u>:

$|B| = |C|$.

אם נוכיח את טענת העזר, אז נקבל:

$$|\boldsymbol{S}| = |A| - |B| = |A| - |C| = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!}$$
$$= \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{(n-1)!\,n!} \cdot \frac{n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{n}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!\,n!}$$
$$= \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}$$

<u>הוכחת טענת העזר</u>:

נגדיר פונקציה $f: B \to C$ ונראה שהיא חח"ע ועל.

<u>סימון</u>: לשם נוחות ההוכחה נסמן: $\overline{1} = 0$, $\overline{0} = 1$.

תהי $\langle a_1, a_2, \dots, a_{2n} \rangle \in B$. יהי k האינדקס הראשון כך שמספר האחדות ברישא $\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$ הוא **גדול** ממספר האפסים.

<u>לדוגמא</u>:

נתונה הסדרה הבאה מ- B:

0011011001

אז $k = 7$.

יהי m מספר האפסים ברישא הזה. אז מספר האחדות הוא $m+1$ כי ברישא $\langle a_1, a_2, \dots, a_{k-1} \rangle$ מספר האחדות הוא **קטן או שווה** (למעשה יהיה שווה) למספר האפסים.

אז, נגדיר:

$$f(\langle a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{2n} \rangle) = \langle a_1, a_2, \dots, a_k, \overline{a_{k+1}}, \overline{a_{k+2}}, \dots, \overline{a_{2n}} \rangle$$

<u>בדוגמא שלנו</u>:

$$f(0011011001) = 0011011110$$

נשים לב כי **בסיפא** $\langle a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{2n} \rangle$ יש $n-m$ אפסים ו-$n-(m+1)$ אחדות (כלומר $n-m-1$).

לכן בסיפא $\langle \overline{a_{k+1}}, \dots, \overline{a_{2n}} \rangle$ יש $n-m$ אחדות, ו- $n-m-1$ אפסים.

כלומר, בסדרה: $\langle \underbrace{a_1, a_2, \dots, a_k}_{m \text{ אפסים}}, \underbrace{\overline{a_{k+1}}, \dots, \overline{a_{2n}}}_{n-m-1 \text{ אפסים}} \rangle$ יש $n-1$ אפסים, ו- $n+1$ אחדות.

כלומר הראנו ש- f מוגדרת היטב.

כדי להראות ש- $f: B \xrightarrow[\text{על}]{1-1} C$ נגדיר $g: C \to B$ ונראה ש- $g = f^{-1}$.

נגדיר את g באופן הבא:

תהי $\langle a_1, a_2, \dots, a_{2n} \rangle \in C$ (ז"א שיש $n-1$ אפסים ו- $n+1$ אחדות בסדרה).
אז יש לסדרה הזאת **רישא** שבו מספר האחדות **גדול** ממספר האפסים (למשל הרישא יכול להיות הסדרה כולה $\langle a_1, \dots, a_{2n} \rangle$).

יהי $\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$ הרישא הראשון שבו מספר האחדות הוא גדול ממספר האפסים.
אז כמו קודם, אם m הוא מספר האפסים, אז $m+1$ יהיה מספר האחדות ברישא.

נגדיר:

$$g(\langle a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{2n} \rangle) = \langle a_1, a_2, \dots, a_k, \overline{a_{k+1}}, \dots, \overline{a_{2n}} \rangle$$

אז בסיפא $\langle a_{k+1}, \dots, a_{2n} \rangle$ יש $(n-1)-m$ אפסים ו- $(n+1)-(m+1) = n-m$ אחדות. לכן בסיפא $\langle \overline{a_{k+1}}, \dots, \overline{a_{2n}} \rangle$ יש $n-1-m$ אחדות, ו- $n-m$ אפסים.
ואז בסדרה $\langle a_1, a_2, \dots, a_k, \overline{a_{k+1}}, \dots, \overline{a_{2n}} \rangle$ יש $m+(n-m) = n$ אפסים ו- $m+1+n-1-m = n$ אחדות.

הסדרה $\langle a_1, a_2, \dots, a_k, \overline{a_{k+1}}, \dots, \overline{a_{2n}} \rangle$ **אינה מאוזנת** בגלל הרישא $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$, ולכן $g: C \to B$ מוגדרת היטב.

לבסוף $g = f^{-1}$ כי $g \circ f = Id_B$ ו- $f \circ g = Id_C$.

הערה: יש צורך להוכיח את המשפט האחרון, אבל קל לראות לפי הגדרת g, שהיא למעשה הפעולה ההפוכה של f.

פונקציות יוצרות רגילות (Ordinary Generating Functions):

בחלק זה נראה איך עקרון הסכום ועיקרון הכפל מתאימים לפעולות החיבור והכפל על פולינומים וגם על טורי חזקות.

נתחיל בדוגמא:

דוגמא:

נתונים 6 טושים: 3 שחורים, 2 אדומים, 1 ירוק. נבחר ב-4 מהם כאשר הסדר אינו חשוב. נחשב את מספר הדרכים לעשות זאת.

נבנה פולינום נפרד לכל אחד מהצבעים:

שחור:

נגדיר: $F_b(x) = 1 + bx + b^2x^2 + b^3x^3$

כאשר המעלה של כל מחובר מייצגת את מספר הטושים שאנחנו רוצים לבחור מהצבע והאות b מייצגת את הצבע השחור. למשל, מכיוון שאנחנו יכולים לבחור ב-4 טושים, אז באחת הבחירות אפשר לבחור רק 2 מהטושים השחורים. בצורה זו, כל חזקה מייצגת בחירה אפשרית של כמות טושים שחורים, נראה בהמשך איך זה יעזור לנו במציאת הפתרון.

אדום:

נגדיר: $F_r(x) = 1 + rx + r^2x^2$

ירוק:

נגדיר: $F_g(x) = 1 + gx$

כעת, נגדיר פונקציה נוספת:

$$F(x) = F_b(x) \cdot F_r(x) \cdot F_g(x)$$

נחשב את $F(x)$:

$$\begin{aligned}
F(x) &= [(1 + bx + bx^2 + b^3x^3)(1 + rx + r^2x^2)](1 + gx) \\
&= [1 + (b + r)x + (b^2 + br + r^2)x^2 + (b^3 + b^2r + br^3)x^3 \\
&\quad +(b^3r + b^2r^2)x^4 + b^3r^3x^5](1 + gx) \\
&= 1 + (b + r + g)x + (b^2 + br + r^2 + bg + rg)x^2 \\
&\quad +(b^3 + b^2r + br^2 + b^2g + brg + r^2g)x^3 \\
&\quad +(b^3r + b^2r^2 + b^3g + b^2rg + br^2g)x^4 \\
&\quad +(b^3r^2 + b^3rg + b^2r^2g)x^5 + (b^3r^3g)x^6
\end{aligned}$$

בצורה זו, אם נרצה לראות את כל הפתרונות האפשריים של מספר הדרכים לבחור ב-r טושים, נוכל להתבונן במקדם של x^r שבו כל מחובר מייצג בחירה אפשרית של r טושים וכמות המחוברים יהיה מספר הדרכים לבחור ב- r איברים. למשל, כדי לדעת כמה אפשרויות יש כדי לבחור 2 טושים, נתבונן במקדם של x^2, הוא:

$$b^2+br+r^2+bg+rg$$

אז כל מחובר הוא אפשרות לבחור ב-2 איברים. המחובר הראשון b^2 מייצג בחירה אפשרים של 2 איברים ששניהם שחורים, המחובר br מייצג בחירה אפשרית של טוש שחור וטוש אדום, וכך הלאה...

אם נרצה רק לדעת מהו מספר האפשרויות נוכל להציב $b=r=g=1$.

<u>**הערה**</u>:

אם נשאל שאלה דומה, כאשר בחירת האיברים של הקבוצה עם חזרות ואין הגבלה על מספר הפעמים שאפשר לבחור באיבר, אז במקום לעבוד עם פולינומים, נעבור עם טורי חזקות פורמליים.

קבוצת טורי החזקות הפורמליים מהווה <u>חוג קומוטטיבי</u>.

<u>**הגדרה**</u>:

חוג (Ring) הוא קבוצה R יחד עם 2 פעולות שנקראות <u>חיבור</u> ו<u>כפל</u> כך ש- R סגורה תחת הפעולות וכך שהאקסיומות הבאות מתקיימות:

1. לכל $a,b\in R$ מתקיים: $a+b=b+a$ (חוק הקומוטטיביות של החיבור).
2. לכל $a,b,c\in R$ מתקיים: $(a+b)+c=a+(b+c)$ (חוק האסוציאטיביות של החיבור).
3. קיים $0_R\in R$ כך שלכל $a\in R$ מתקיים: $a+0_R=a$ (קיום איבר ניטרלי לחיבור).
4. לכל $a\in R$ קיים איבר $-a\in R$ כך ש- $a+(-a)=0_R$ (קיום איבר נגדי).
5. לכל $a,b,c\in R$ מתקיים: $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ (חוק האסוציאטיביות של הכפל).
6. לכל $a,b,c\in R$ מתקיים: $a\cdot(b+c)=ab+ac$
7. לכל $a,b,c\in R$ מתקיים: $(b+c)\cdot a=ba+ca$ (חוקי הדיסטריביוטיביות).
8. קיים איבר $1_R\in R$ כך שלכל $a\in R$ מתקיים: $a\cdot 1_R=1_R\cdot a=a$ (קיום איבר יחידה).

אם בנוסף R מקיים את האקסיומה הנוספת:

9. לכל $a,b\in R$ מתקיים: $a\cdot b=b\cdot a$ (חוק הקומוטטיביות של הכפל).

אז R נקרא <u>חוג קומוטטיבי</u>.

<u>**דוגמאות**</u>:

1. המספרים שלמים: $\mathbb{Z}=\{\dots,-3,-2,-,0,1,2,3,\dots\}$, יחד עם פעולות החיבור והכפל הרגילות מהווים חוג קומוטטיבי.

2. המספרים הרציונליים - $\mathbb{Q}$, עם החיבור והכפל הרגילים מהווים חוג קומוטטיבי.

3. המספרים הממשיים - $\mathbb{R}$, עם החיבור והכפל הרגילים מהווים חוג קומוטטיבי.

4. המספרים המרוכבים - $\mathbb{C}$, יחד עם פעולות חיבור וכפל שמוגדרות בשדה $\mathbb{C}$ מהווים חוג קומוטטיבי.

5. יהי $n \in \mathbb{N}$ מספר שלם חיובי, ותהא R קבוצת כל המטריצות מסדר $n \times n$ מעל הממשיים. אם $n \geq 2$ אז R הוא חוג **לא קומוטטיבי** (עם חיבור וכפל מטריצות).

6. יהי $R = \{a\}$ יחידון שמכיל איבר אחד a. נגדיר: $a + a = a$, ו- $a \cdot a = a$. אז R מהווה חוג קומוטטיבי שבו $0_R = a$ (כי $a + a = a$), ו- $1_R = a$ (כי $a \cdot a = a$). בנוסף, האיבר הנגדי של a הוא a (כי $a + a = a = 0_R$).

7. יהי R חוג קומוטטיבי. נסמן ב- $R[x]$ את קבוצת <u>כל הפולינומים</u> מעל R. כלומר:
$$R[x] = \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 | n \in \mathbb{N} \wedge a_i \in R\}$$
נגדיר חיבור וכפל של פולינומים כרגיל. אז $R[x]$ הוא חוג קומוטטיבי.
נשים לב שאם $n = 0$, אז הפולינום $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ הוא פולינום קבוע - a_0, ובפרט, האיבר הניטרלי לחיבור הוא 0, והאיבר הניטרלי לכפל הוא 1.

<u>תוספות</u>:

אפשר להוכיח עוד חוקים על חיבור וכפל שמתקיימים בכל חוג, ואפשר גם להוכיח כמה תוצאות כלליות אחרות מהאקסיומות.

למשל:

<u>טענה</u>:

יהי R חוג, אז האיבר הניטרלי 0_R הוא **יחיד**.

<u>הוכחה</u>:

נניח ש- 0_R ו- $0'_R$ איברים ניטרליים של R. צ"ל: $0_R = 0'_R$.

ידוע ש- $a + 0_R = a$ לכל $a \in R$, לכן בפרט: $0'_R + 0_R = 0'_R$.
ידוע ש- $a + 0'_R = a$ לכל $a \in R$, לכן בפרט: $0_R + 0'_R = 0_R$.
מחוק הקומוטטיביות של החיבור נובע ש- $0'_R + 0_R = 0_R + 0'_R$, ולכן $0_R = 0'_R$.

באופן דומה אפשר להוכיח:

- 1_R הוא יחיד.
- לכל $a \in R$, האיבר הנגדי $(-a)$ הוא יחיד.

נראה דוגמא לטענה נוספת:

<u>טענה</u>:

יהי R חוג כלשהו. אז $a \cdot 0_R = 0_R \cdot a = 0_R$ לכל $a \in R$.

<u>הוכחה</u>:

ידוע כי $0_R + 0_R = 0_R$ ולכן אפשר להכפיל משמאל באיבר כללי $a \in R$, ונקבל:
$a(0_R + 0_R) = a \cdot 0_R$. כעת מדיסטריביוטיביות (מצד שמאל) נקבל:
$a \cdot 0_R + a \cdot 0_R = a \cdot 0_R$, ואז נוסיף את האיבר הנגדי של $a \cdot 0_R$ לשני האגפים,
ונקבל: $a \cdot 0_R = 0_R$.
ההוכחה ש- $0_R \cdot a = 0_R$ באופן דומה.

אפשר גם להוכיח שבכל חוג R מתקיים:

1. $(-1_R)a = -a$.
2. $a(-b) = (-a)b = -(ab)$.
3. $(-a)(-b) = ab$.

<u>הגדרה</u>:

יהי R חוג כלשהו. אפשר להגדיר <u>חיסור</u> ב- R ע"י:

$$a - b = a + (-b)$$

לכל $a, b \in R$.

מהגדרה זו נקבל שבכל חוג קיימות 3 הפעולות – חיבור, חיסור וכפל. אך פעולות החילוק למשל לא תמיד קיימת. למשל ב- $\mathbb{Z}$ אין אפשרות לחלק בכל איבר ששונה מ- 0. גם בחוג הפולינומים אין לנו את האפשרות הזו.

<u>הגדרה</u>:

יהי R חוג כלשהו. איבר $a \in R$ הוא <u>הפיך</u> אם קיים $a^{-1} \in R$ כך ש:

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1_R$$

האיבר a^{-1}, אם הוא קיים, נקרא <u>האיבר ההופכי</u> של a.

<u>הערה</u>:

מהטענה האחרונה בהערה הקודמת נובע ש- 0_R אינו הפיך (חוץ מבחוג $R = \{a\}$ שהגדרנו בדוגמאות.

<u>דוגמאות</u>:

1. האיברים ההפיכים של $\mathbb{Z}$ הם 1 ו- (-1).

2. בחוג הפולינומים $\mathbb{R}[x]$, האיברים ההפיכים הם הפולינומים הקבועים, חוץ מפולינום האפס.

<u>הגדרה</u>:

שדה (Field) הוא חוג קומוטטיבי R שמקיים את שתי האקסיומות הנוספות הבאות:

10. כל $a \neq 0_R$ הוא הפיך.
11. $0_R \neq 1_R$.

<u>דוגמא</u>:

הקבוצות (גם החוגים) הבאות הן שדות: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ ו- Z_p כאשר p הוא מספר ראשוני. (יש צורך בידע מאלגברה לינארית כדי להבין את הדוגמא האחרונה).

<u>החוג של טורי חזקות פורמליים מעל $\mathbb{R}$</u>:

תהי $\mathbb{R}[[x]]$ קבוצת כל הביטויים מהצורה:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

כאשר כל $a_n \in \mathbb{R}$.

- נגדיר <u>שוויון</u> ב- $\mathbb{R}[[x]]$ ע״י:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

אם ורק אם: $a_n = b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

- נגדיר <u>חיבור</u> ב- $\mathbb{R}[[x]]$ ע״י:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

- נגדיר <u>כפל</u> ב- $\mathbb{R}[[x]]$ ע״י:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} (a_k b_{n-k}) x^n \right]$$

<u>למשל</u>:

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots)$$
$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + b_1 a_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots$$

משפט:

הקבוצה $\mathbb{R}[[x]]$ שהגדרנו היא חוג קומוטטיבי.

הוכחה:

אפשר לוודא שחוקי הקומוטטיביות, אסוציאטיביות ודיסטריביוטיביות מתקיימים, אך נשאיר זאת בתור תרגיל לקורא.

האיבר הניטרלי לחיבור הוא: $0 = \sum_{n=0}^{\infty} 0x^n$.

איבר היחידה הוא: $1 = \sum_{n=0}^{\infty} 0x^n + 1$.

האיבר הנגדי של $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הוא: $\sum_{n=0}^{\infty} (-a_n) x^n$.

טענה:

יהיו $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ו- $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, 2 איברים ב- $\mathbb{R}[[x]]$.

אם $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = 0$ אז: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$ או $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0$.

הוכחה:

נניח בשלילה ש- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \neq 0$, וגם ש- $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \neq 0$.

אז, יהי k המספר הטבעי הקטן ביותר כך ש- $a_k \neq 0$, ויהי l המספר הטבעי הקטן ביותר כך ש- $b_l \neq 0$. אז:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + a_{k+2} x^{k+2} + \cdots$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_l x^l + b_{l+1} x^{l+1} + b_{l+2} x^{l+2} + \cdots$$

ולכן המכפלה תיהיה:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = a_k b_l x^{k+l} + (a_k b_{l+1} + a_{k+1} b_l) x^{k+l+1} + \cdots$$

אז המקדם $a_k b_l$ של x^{k+l} הוא שונה מ-0, ולכן:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) \neq 0$$

וזו סתירה.

משפט:

יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{R}[[x]]$.

אז $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הוא הפיך אם ורק אם $a_0 \neq 0$.

הוכחה:

כיוון $\Leftarrow$:

נניח ש- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הפיך, ויהי $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^{-1}$.

ז"א ש- $1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)$, כלומר:

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \cdots = 1$$

ואז $a_0 b_0 = 1$ ולכן $a_0 \neq 0$.

כיוון $\Rightarrow$:

יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{R}[[x]]$ כך ש- $a_0 \neq 0$.

נחשב את המקדמים של $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ כך ש- $1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)$.

אז:

$$\begin{aligned} a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + b_2 a_0)x^2 \\ +(a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0)x^3 + \cdots \\ = 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots \end{aligned}$$

אז $a_0 b_0 = 1$ ולכן $b_0 = \frac{1}{a_0}$.

$a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$, ואז: $a_0 b_1 = -a_1 b_0 = -\frac{a_1}{a_0}$, ולכן: $b_1 = -\frac{a_1}{(a_0)^2}$.

באופן דומה: $a_0 b_2 = -a_1 b_1 - a_2 b_0$, ואז: $b_2 = \frac{-a_1 b_1 - a_2 b_0}{a_0}$, ונוכל להציב את הערכים של b_0 ו- b_1 שמצאנו כדי לקבל את b_2.

■

הערה:

אפשר לחשוב על פולינום כלשהו מעל $\mathbb{R}$ כאיבר של $\mathbb{R}[[x]]$. למשל:

$$5x^3+4x^2-x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-x+4x^2+5x^3+0x^4+0x^5+\cdots$$

__טענה__:

$$(1-x)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

__הוכחה__:

נחשב:

$$(1-x)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n=(1-x)(1+x+x^2+x^3+\cdots)$$
$$=1-x+x-x^2+x^2-x^3+x^3-\cdots=1$$

לכן נוכל לחלק ב- $(1-x)$ ולקבל את הביטוי שבטענה.

__הערה__:

אם טור חזקות פורמלי $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ מתכנס בתחום מסוים לפונקציה $f(x)$ כאשר נחשוב על הטור כטור חזקות במובל הרגיל (למשל טור טיילור), ואם ל- $f(x)$ יש משמעות בחוג $\mathbb{R}[[x]]$, אז המשוואה:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

מתקיימת גם ב- $\mathbb{R}[[x]]$.

__דוגמאות__:

1. $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4$ לכל $|x|<1$.
אותה זהות מתקיימת ב- $\mathbb{R}[[x]]$ כפי שראינו.
2. $\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots$ מתקיימת גם ב- $\mathbb{R}[[x]]$ וגם בטור טיילור.

הכללה של נוסחת הבינום של ניוטון למספרים לא שלמים:

נרצה להכליל את ההגדרה של נוסחת הבינום $(1+x)^n$ לחזקה שהיא מספר ממשי.
ראשית נכליל את ההגדרה של המקדם הבינומי $\binom{n}{r}$.

נניח $r>0$. אז לפי ההגדרה הרגילה של הבינום מתקיים:

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

אם נתבונן על התוצאה האחרונה נשים לב כי אין בה כל הגבלה שמונעת מ- n להיות מספר לא שלם. (לעומת זאת, אם מבטאים את הבינום באמצעות עצרת, אז לא הגדרנו מה זה עצרת של מספר ממשי). זה מוביל אותנו להגדרה הבאה:

הגדרה:

יהי $\alpha\in\mathbb{R}$, ויהי $r\in\mathbb{N}$. נגדיר:

$$\binom{\alpha}{r}=\begin{cases}1 & ,\quad \text{אם } r=0\\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-r+1)}{r!} & ,\quad \text{אם } r>0\end{cases}$$

דוגמא:

לפי ההגדרה הנ"ל:

$$\binom{\frac{2}{3}}{3}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)}{3!}=\frac{\frac{8}{27}}{6}=\frac{4}{27\cdot 3}=\frac{4}{81}$$

משפט: (נוסחת הבינום המוכללת)

יהי $\alpha\in\mathbb{R}$, אז:

$$\forall|x|<1\qquad (1+x)^{\alpha}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}x^r$$

(אם $\alpha\in\mathbb{N}$ זה מתקיים לכל $x\in\mathbb{R}$).

הוכחה:

נחשב את טור המקלורן של $f(x)=(1+x)^{\alpha}$:

$$\begin{aligned}f(x)&=(1+x)^{\alpha}\\ f'(x)&=\alpha(1+x)^{\alpha-1}\\ f''(x)&=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}\\ &\vdots\\ f^{(r)}(x)&=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-r+1)(1+x)^{\alpha-r}\end{aligned}\quad\xRightarrow[x=0]{\text{נציב}}\quad\begin{aligned}f(0)&=1\\ f'(0)&=\alpha\\ f''(0)&=\alpha(\alpha-1)\\ &\vdots\\ f^{(r)}(0)&=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-r+1)\end{aligned}$$

ולכן:

$$f(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{f^{(r)}(0)}{r!}x^r=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}x^r$$

ואפשר להוכיח שהוא מתכנס לכל $|x|<1$.

אם $\alpha\in\mathbb{N}$ אז הסכום **סופי** ולכן יהיה תקף לכל $x\in\mathbb{R}$.

<u>הערה</u>:

יש משמעות ב- $\mathbb{R}[[x]]$ לנוסחה הזאת כאשר $\alpha\in\mathbb{Q}$. למשל $\alpha=\frac{1}{2}$ המשמעות היא ש-

$$\sqrt{1-x}=(1-x)^{\frac{1}{2}}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{r}x^r$$

כלומר, בטורים פורמליים:

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{r}x^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{r}x^r\right)=1-x$$

<u>טענה</u>:

יהיו $r,n\in\mathbb{N}$. אז:

$$\binom{-n}{r}=\begin{cases}1 & ,\quad r=0 \text{ אם}\\ (-1)^r\binom{n+r-1}{r} & ,\quad r>0 \text{ אם}\end{cases}$$

<u>הוכחה</u>:

נחשב לפי ההגדרה המוכללת של המקדם הבינומי:

$$\begin{aligned}\binom{-n}{r}&=\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{r!}\\&=\frac{(-1)^r\cdot n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{r!}\cdot\frac{(n-1)!}{(n-1)!}\\&=(-1)^r\cdot\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}=(-1)^r\binom{n+r-1}{r}\end{aligned}$$

משפט :

יהי $n \in \mathbb{N}$, אז :

$$(1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r$$

(ההגדרה הנ״ל היא עבור החוג $\mathbb{R}[[x]]$. עבור טורי חזקות במובן הרגיל זה מתקיים לכל $|x| < 1$).

הוכחה :

ממשפט הבינום המוכלל :

$$(1-x)^{-n} = \left(1+(-x)\right)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} (-x)^r$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{n+r-1}{r} (-1)^r x^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r$$

נוכל להשתמש בנוסחה הזו כדי לפתור בעיות קומבינטוריות.

דוגמא :

נתונים n טושים מ- n צבעים שונים. נבחר ב- r טושים **עם חזרות**, כאשר **הסדר אינו חשוב**.
נחשב את מספר הדרכים לעשות זאת :

נבנה טור חזקות פורמלי שמתאים לכל צבע. הטור המתאים לכל אחד מהצבעים יהיה :

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$$

ולכן הטור שמתאים לכל n הצבעים ביחד הוא :

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n}$$

ואנחנו יודעים מהמשפט הקודם שזה שווה ל- $\sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r$.

הערה :

אם נקבע את r מראש, אז אפשר לפתור את הבעיה בעזרת פולינומים במקום טורים.
הפולינום שמתאים לכל צבע יהיה :

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^r = \underbrace{\frac{1-x^{r+1}}{1-x}}_{\text{סכום של סדרה הנדסית}}$$

לכן הפולינום שמתאים לכל n הצבעים יהיה:

$$(1+x+x^2+\cdots+x^r)^n=\left(\frac{1-x^{r+1}}{1-x}\right)^n=(1-x^{r+1})^n(1-x)^{-n}$$
$$=\left[1-\overbrace{\binom{n}{1}x^{r+1}+\binom{n}{2}x^{2r+2}-\cdots+(-1)^n\cdot x^{rn+n}}^{\text{כל החזקות של } x \text{ גדולות מ- } r}\right]\cdot\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r}x^r$$

המקדם של x^r במכפלה יהיה $\binom{n+r-1}{r}$.

<u>דוגמא</u>:

בהמשך לדוגמא הקודמת, נוסיף דרישה שעלינו לבחור בכל צבע לפחות פעם אחת.

אז, הטור שמתאים לכל צבע יהיה:

$$x+x^2+x^3+\cdots=x(1+x+x^2+\cdots)=\frac{x}{1-x}$$

והטור שמתאים לכל n הצבעים יהיה:

$$(x+x^2+x^3+\cdots)^n=\left(\frac{x}{1-x}\right)^n=x^n(1-x)^{-n}$$

והתשובה תהיה המקדם של x^r בטור המתאים.
נמשיך לפתח:

$$x^n(1-x)^{-n}=x^n\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k=x^n\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n-1}x^k$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n-1}x^{n+k}$$

כדי למצוא את המקדם של x^r, נציב $r=n+k$, ואז $k=r-n$, והסכום יהיה מ- $r=n$ עד ∞. כלומר, הביטוי יהיה:

$$\sum_{r=n}^{\infty}\binom{n+(r-n)-1}{n-1}x^r=\sum_{r=n}^{\infty}\binom{r-1}{n-1}x^r$$

לכן התשובה היא: $\binom{r-1}{n-1}$.

<u>הגדרה</u> :

נתונה סדרה (סופית או אינסופית) :

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

<u>הפונקציה היוצרת הרגילה</u> של הסדרה היא :

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

כלומר :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

במקרה בו הסדרה היא סופית מאורך n, ניתן לחשוב עליה כעל הסדרה האינסופית הבאה :

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, 0, \ldots$$

<u>דוגמא</u> :

הפונקציה היוצרת של הסדרה : ... ,1,1,1,1 היא :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

<u>דוגמא</u> :

יהי $n \in \mathbb{N}$, הפונקציה היוצרת של הסדרה הסופית :

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$$

היא :

$$\sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} x^r = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r = (1+x)^n$$

(נשים לב כי $\binom{n}{r} = 0$ לכל $r > n$, ולכן המעבר בשוויון הראשון).

<u>דוגמא</u> :

נחלק r עצמים **זהים** ל-3 תאים **מובחנים** כך שיהיו לפחות 2 עצמים בתא מספר 1 , ויהיה מספר אי-זוגי של עצמים בתא מספר 2 (ללא הגבלה על תא מספר 3). נחשב את מספר הדרכים לעשות זאת :

הפונקציה היוצרת הרגילה של תא מספר 1 היא:

$$x^2+x^3+x^4+\cdots=x^2(1+x+x^2+\cdots)=\frac{x^2}{1-x}$$

הפונקציה היוצרת הרגילה של תא מספר 2 היא:

$$x+x^3+x^5+\cdots=x(1+x^2+x^4+\cdots)=\frac{x}{1-x^2}$$

הפונקציה היוצרת הרגילה של תא מספר 3 היא:

$$1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

לכן הפונקציה היוצרת הרגילה שמתאימה לשלושת התאים ביחד היא:

$$F(x)=\frac{x^2}{1-x}\cdot\frac{x}{\underset{\substack{\downarrow\\(1-x)(1+x)}}{(1-x)^2}}\cdot\frac{1}{1-x}=\frac{x^3}{(1-x)^3(1+x)}$$

נפרק את התוצאה האחרונה לשברים חלקיים.

המעלה של המונה היא 3 ושל המכנה היא 4 (אחרי פתיחת סוגריים), ולכן אין צורך לבצע חילוק פולינומים. נוכל למצוא קבועים ממשיים כך ש-

$$F(x)=\frac{x^3}{(1-x)^3(1+x)}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{(1+x)^2}+\frac{C}{(1-x)^3}+\frac{D}{1+x}$$

נכפיל ב- $(1-x)^3(1+x)$ ונקבל:

$$x^3=A(1-x)^2(1+x)+B(1-x)(1+x)+C(1+x)+D(1-x)^3$$

נציב $x=1$:

$$1=C(1+1)\Rightarrow\boxed{C=\tfrac{1}{2}}$$

נציב $x=-1$:

$$-1=D\cdot 2^3\Rightarrow\boxed{D=-\tfrac{1}{8}}$$

נציב $x=0$:

$$0=A+B+C+D=A+B+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{8}=A+B+\tfrac{3}{8}$$

לכן: $\boxed{A+B=-\tfrac{3}{8}}$

נציב $x=2$:

$$8=3A-3B+3C-D$$
$$\Rightarrow 3A-3B+\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{8}=8$$

$$\Rightarrow 3(A-B)=\frac{64}{8}-\frac{12}{8}-\frac{1}{8}=\frac{51}{8}$$

ולכן: $\boxed{A-B=\frac{17}{8}}$.

בסה"כ מ-2 המשוואות האחרונות (מודגשות), נקבל: $2A=\frac{14}{8}$.

לכן בסה"כ: $A=\frac{7}{8}$, $B=-\frac{10}{8}$, $C=\frac{4}{8}$, $D=-\frac{1}{8}$.

נציב בנוסחה $F(x)$:

$$\begin{aligned}F(x)&=\frac{1}{8}\left[\frac{7}{1-x}-\frac{10}{(1-x)^2}+\frac{4}{(1-x)^3}-\frac{1}{1+x}\right]\\&=\frac{1}{8}\left[7\cdot\sum_{r=0}^{\infty}x^r-10\cdot\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+1}{1}x^r+4\cdot\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+2}{2}x^r-\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^rx^r\right]\end{aligned}$$

אז התשובה לשאלה היא המקדם של x^r בסכום זה. לכן התשובה היא:

$$\begin{aligned}\frac{7-10\binom{r+1}{r}+r\binom{r+2}{2}-(-1)^r}{8}&=\frac{7-10(r+1)+4\cdot\frac{(r+2)(r+1)}{2}+(-1)^{r+1}}{8}\\&=\frac{7-10r-10+2r^2+6r+4+(-1)^{r+1}}{8}\\&=\boxed{\frac{2r^2-4r+1+(-1)^{r+1}}{8}}\end{aligned}$$

<u>בדיקה</u>:

עבור $0\le r\le 2$ אנחנו אמורים לקבל 0 כי ע"פ נתוני השאלה, בתא 1 צריכים להיות לפחות 2 עצמים, ובתא 2 צריך להיות מספר אי-זוגי של עצמים. לכן, צריך להיות לנו לכל הפחות 3 עצמים, ועבורם התשובה צריכה להיות 1 (יש רק דרך אחת לחלק 3 עצמים לתאים לפי נתוני השאלה). נציב $0\le r\le 3$ בנוסחה:

$$r=0:\quad \frac{0+1-1}{8}=0 \qquad , \quad r=1:\quad \frac{2-4+1+1}{8}=0$$
$$r=2:\quad \frac{8-8+1-1}{8}=0 \qquad , \quad r=3:\quad \frac{18-12+1+1}{8}=\frac{8}{8}=1$$

<u>אופרטור הסכימה</u>:

נתונים שני הטורים:

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$
$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

הגדרנו כפל ע"י הנוסחה:

$$F(x)G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}(a_kb_{n-k})x^n\right]$$

כלומר:

$$F(x)G(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2$$
$$+(a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0)^{x^3}+\cdots$$

בפרט, אם $b_n=1$ לכל n, אז נקבל:

$$F(x)G(x)=a_0+(a_0+a_1)x+(a_0+a_1+a_2)x^2+(a_0+a_1+a_2+a_3)x^3+\cdots$$

ועבור אותו תנאי נקבל:

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

למעשה הוכחנו את הטענה הבאה:

<u>טענה</u>:

תהי $F(x)$ הפונקציה היוצרת הרגילה של הסדרה $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. אז הפונקציה היוצרת הרגילה של סדרת הסכומים החלקיים $\{a_0+a_1+\cdots+a_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא:

$$\frac{F(x)}{1-x}$$

לכן $\frac{1}{1-x}$ נקרא <u>אופרטור הסכימה</u>.

כדי להשתמש באופרטור הסכימה, קודם כל נגדיר את הנגזרת הפורמלית של טור חזקות פורמלי.

<u>הגדרה</u>:

יהי $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{R}[[x]]$.

<u>הנגזרת הפורמלית</u> של הטור היא:

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$$

<u>דוגמא</u>:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$$

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)' = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

אפשר להוכיח שאם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הוא **טור הטיילור** של פונקציה $F(x)$ בתחום מסוים, אז טור הטיילור של $F'(x)$ יהיה $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'$.

למשל, נתבונן בטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ראינו שטור זה הוא הטור של הפונקציה: $F(x) = \frac{1}{1-x}$.

נגזור את הפונקציה, ונראה שהנגזרת שווה לנגזרת של הטור:

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1-x}}\right)' = \frac{-1}{(1-x)^2}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \left(\sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\infty} \boldsymbol{x^n}\right)'$$

אכן ראינו: $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'$.

<u>דוגמא</u>:

נמצא צורה סגורה לסכום:

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

נחשב את הפונקציה היוצרת הרגילה של הסדרה הזאת, שהיא סדרת הסכומים החלקיים של הסדרה $\{n^2\}_{n=0}^{\infty}$, כלומר הסדרה:

$$0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$$

אז נחפש קודם כל את $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$.

ידוע כי:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

נגזור את שני האגפים, ונקבל:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$$

נכפיל ב- x את 2 האגפים:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n$$

שוב נגזור את 2 האגפים, ונקבל:

$$\frac{(1-x)^2 \cdot 1 - x \cdot 2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1-x+2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

נכפיל שוב ב- x:

$$\frac{x+x^2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

עכשיו נפעיל את אופרטור הסכימה:

$$\frac{F(x)}{1-x} = \frac{x+x^2}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} (0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) x^n$$

אז:

$$\frac{x}{(1-x)^4} + \frac{x^2}{(1-x)^4} = x \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^k + x^2 \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+3}{3} x^j$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^{k+1}}_{\text{נסמן } n=k+1 \text{, ואז: } k=n-1} + \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+3}{3} x^{j+2}}_{\text{נסמן } n=j+2 \text{, ואז: } j=n-2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+2}{3} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \binom{n+1}{3} x^n$$

נוכל להתחיל לסכום מ- 0 בשני הסכומים כי $\binom{n+2}{3} = 0$ כאשר $n = 0$ ו- $\binom{n+1}{3} = 0$ כאשר $0 \le n \le 1$. לכן נמשיך את השוויון:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{3} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{3} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3} \right] x^n$$

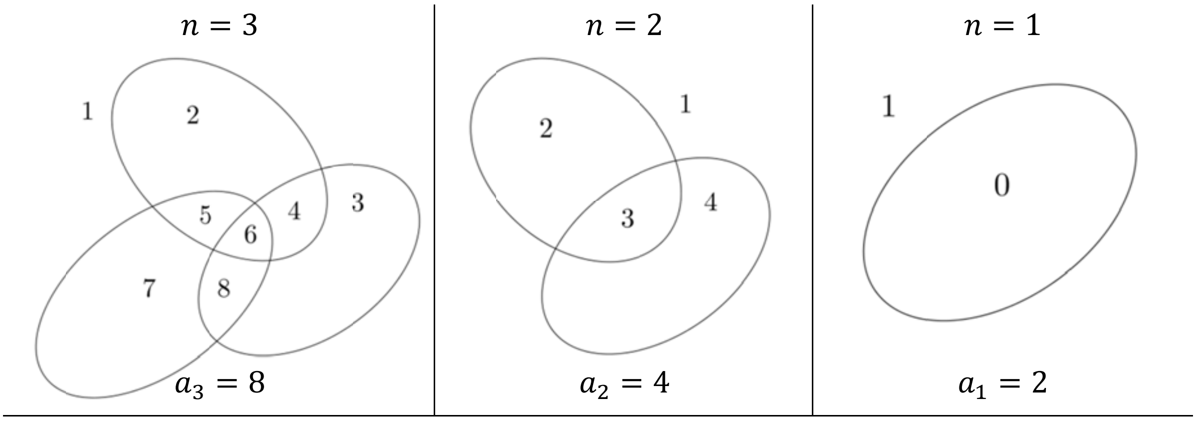
לכן:

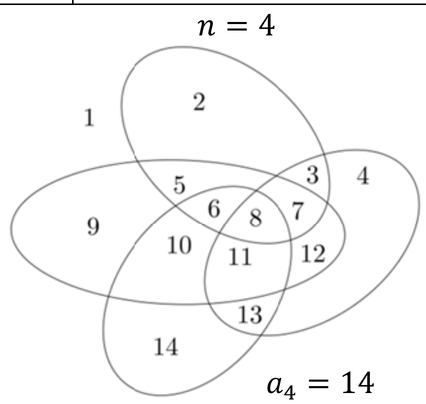
$$\begin{aligned} 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 &= \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)n}{3!} + \frac{(n+1)(n)(n-1)}{3!} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2+n-1)}{6} = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \end{aligned}$$

<u>פונקציות יוצרות ונוסחאות נסיגה</u>:

נצייר n אליפסות במישור כך שכל שתי אליפסות נחתכות בשתי נקודות בדיוק, כך שלא קיימת נקודה במישור שנמצאת על 3 אליפסות או יותר.

נסמן ב- a_n את מספר התחומים במישור שמתקבלים מ- n האליפסות האלה.





נבנה נוסחת נסיגה עבור a_n:

כאשר נוסיף את האליפסה ה- n-ית, יהיו לה $2(n-1)$ נקודות חיתוך עם $n-1$ האליפסות האחרות. הנקודות האלה מחלקות את ההיקף של האליפסה ה- n-ית ל- $2(n-1)$ קשתות. כל קשת מחלקת תחום קיים לשני תחומים. כלומר, כל קשת מוסיפה 1 למספר התחומים.

לכן הנוסחה הרקורסיבית המתאימה היא:

$$\forall n \geq 2 \quad a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$$

כאשר תנאי ההתחלה הוא: $a_1 = 2$.

נוכל לחשב את האיברים הראשונים של הסדרה:

$$\begin{array}{ll} a_1 = 2 & , \quad a_2 = 2 + 2 \cdot 1 = 4 \\ a_3 = 4 + 2 \cdot 2 = 8 & , \quad a_4 = 8 + 3 \cdot 2 = 14 \end{array}$$

הנוסחה שמצאנו:

$$\forall n \geq 2 \quad a_n - a_{n-1} = 2(n-1)$$

היא לינארית אבל לא הומוגנית.

<u>נפתור את הנוסחה באמצעות **פונקציה יוצרת**:</u>

תהי $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הפונקציה היוצרת הרגילה של הסדרה $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

נגדיר את a_0 לפי נוסחת הנסיגה:

$$a_1 = a_0 + 2 \cdot 0 \Rightarrow \boxed{a_0 = 2}$$

נהפוך את נוסחת הנסיגה לנוסחה עבור $F(x)$.

נוסחת הנסיגה היא בעצם קבוצה אינסופית של נוסחאות:

$$\begin{aligned} &a_1 = a_0 + 2(1-1) \\ &a_2 = a_1 + 2(2-1) \\ &a_3 = a_2 + 2(3-1) \\ &\vdots \\ &a_n = a_{n-1} + 2(n-1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

נוכל להכפיל כל נוסחה a_i ב- x^i, ונקבל:

$$\begin{aligned} &a_1 = a_0 x + 2(1-1)x \\ &a_2 = a_1 x^2 + 2(2-1)x^2 \\ &a_3 = a_2 x^3 + 2(3-1)x^3 \\ &\vdots \\ &a_n = a_{n-1} x^n + 2(n-1)x^n \\ &\vdots \end{aligned}$$

נחבר את כל הנוסחאות ביחד ונקבל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n-1)x^n$$

נשים לב:

$$F(x) - a_0 = x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^n$$

$$\Rightarrow F(x) - 2 = xF(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^n$$

לכן:

$$(1-x)F(x) = 2 + 2\sum_{m=1}^{\infty}(m-1)x^m \underset{n=m-1 \text{ נציב}}{\underset{\downarrow}{=}} 2 + 2\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n+1}$$

כעת שוב:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

נגזור:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}$$

נכפיל ב- x^2:

$$\frac{x^2}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n+1}$$

נציב במשוואה שקיבלנו מקודם:

$$(1-x)F(x) = 2 + \frac{2x^2}{(1-x)^2}$$

ולכן:

$$F(x) = \frac{2}{1-x} + \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

אז:

$$F(x) = 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2x^2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}x^k = 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}x^{k+2}$$

נציב $n = k+2$, ואז: $k = n-2$, נקבל:

$$\dots = 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2\cdot\sum_{\underset{n=2}{\underset{\downarrow}{n=0}}}^{\infty}\binom{n}{2}x^n$$

ואז המקדם של x^n הוא הפתרון:

$$a_n = 2 + 2\binom{n}{2} = 2 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 2 + n^2 - n$$

לכן:

$$\boxed{a_n = n^2 - n + 2}$$

<u>בדיקה</u>:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - 1 + 2 = 2 \quad , \quad a_3 = 9 - 3 + 2 = 8 \\ a_2 &= 4 - 2 + 2 = 4 \quad , \quad a_4 = 16 - 4 + 2 = 14 \end{aligned}$$

<u>נוסחאות נסיגה לא לינאריות:</u>

נמצא ונפתור נוסחת נסיגה עבור מספרי קטלן.
ראשית, נוכיח טענה:

<u>טענה</u>:

ב- $\mathbb{R}[[x]]$ מתקיים:

$$\sqrt{1-4x} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1} x^n$$

<u>הוכחה</u>:

מנוסחת הבינום המוכלל:

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

נובע ש:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \cdot (-4)^n \cdot x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\frac{3-2n}{2}\right)}{n!} \cdot (-1)^n \cdot 4^n \cdot x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{2n-3}{2}\right)}{n!} \cdot (-1)^n \cdot 4^n \cdot x^n \end{aligned}$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-3)}{n! \cdot 2^n} \cdot 2^{2n} \cdot x^n$$

$$= 1 - 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-3)}{n!} \cdot 2^{n-1} \cdot x^n$$

$$= 1 - 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-3)}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1)!} \cdot 2^{n-1} \cdot x^n$$

$$= 1 - 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-3)}{n!} \cdot \frac{(1 \cdot 2)(2 \cdot 2)(3 \cdot 2) \cdots [(n-1) \cdot 2]}{(n-1)!} \cdot x^n$$

$$= 1 - 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-3) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n-2)}{n \cdot (n-1)! \cdot (n-1)!} \cdot x^n$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right) \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!} \cdot x^n$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n$$

<u>טענה</u>:

מספר הסדרות הבינאריות המאוזנות מאורך $2n$ כך שמספר האפסים הוא **גדול ממש** ממספר האחדות בכל רישא של הסדרה (חוץ מהסדרה כולה) הוא C_{n-1} (מספר קטלן ה-$n-1$).

<u>הוכחה</u>:

נתונה סדרה כזו. האיבר הראשון חייב להיות 0 והאיבר האחרון חייב להיות 1.
הסדרה $\langle a_2, a_3, \dots, a_{2n-1} \rangle$ תהיה סדרה מאוזנת. (כי בסדרה $\langle a_1, a_2, \dots, a_i \rangle$ כאשר $i < 2n$, מספר האפסים הוא גדול ממש ממספר האחדות, ולכן בסדרה $\langle a_2, a_3, \dots, a_i \rangle$ מספר האפסים הוא גדול או שווה למספר האחדות).

מצד שני, הסדרה $\langle a_2, \dots a_{2n-1} \rangle$ יכולה להיות סדרה מאוזנת כלשהי. אז יש C_{n-1} אפשרויות.

<u>נוסחת נסיגה עבור C_n</u>:

נתונה סדרה מאוזנת מאורך $2n$.
יהי $\langle a_1, a_2, \dots, a_{2k} \rangle$ הרישא הראשון שבו מספר האפסים שווה למספר האחדות.

אז: $1 \le k \le n$.

<u>דוגמא</u>:

בסדרה המאוזנת 001010110101, כאן $k=4$.

אז, נתון k, $1 \le k \le n$.

C_{k-1} אפשרויות כי זה הרישא הראשון שבו מספר האפסים שווה למספר האחדות. לפי הטענה הקודמת, יש C_{k-1} אפשרויות.

סדרה מאוזנת כלשהי מאורך $2(n-k)$

$$\underbrace{\boxed{C_{k-1}}}_{\text{רישא מאורך } 2k}\underbrace{\boxed{C_{n-k}}}_{\text{סיפא מאורך } 2(n-k)}$$

(אם $k=1$ נגדיר $C_0=1$).

לכן, נוסחת הנסיגה עבור C_n היא:

$$(\forall n \ge 2) \quad C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \cdots + C_{n-2} \cdot C_1 + C_{n-1} \cdot C_0$$

כאן:

$$C_0 = 1$$
$$C_1 = 1$$

ונמשיך לחשב:

$$C_2 = C_0 \cdot C_1 + C_1 \cdot C_0 = 1 + 1 = 2$$
$$C_3 = C_0 \cdot C_2 + C_1 \cdot C_1 + C_2 \cdot C_0 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2 + 1 + 2 = 5$$

אפשר לראות שנוסחה זו <u>אינה</u> לינארית.
נראה איך לפתור אותה בעזרת פונקציה יוצרת.

תהי $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ הפי״ר של הסדרה $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$.

אז:

$$[F(x)]^2 = F(x) \cdot F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} \right] x^n$$

נציב $n = n+1$ בנוסחה הרקורסיבית שמצאנו קודם ל- C_n, ונקבל:

$$(\forall n \ge 1) \quad C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \cdots + C_{n-1} C_1 + C_n C_0 = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

לכן קיבלנו:

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$
$$[F(x)]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}\right] x^n$$

נוכל להציב את המשוואה הראשונה בשניה ונקבל:

$$[F(x)]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} x^n$$

ואז, אם נכפיל ב- x את השוויון האחרון, נקבל:

$$x \cdot [F(x)]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} x^{n+1} = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots = F(x) - C_0 = F(x) - 1$$

קיבלנו:

$$x \cdot [F(x)]^2 = F(x) - 1$$

כלומר:

$$\boxed{x \cdot [F(x)]^2 - F(x) + 1 = 0}$$

נוכל לחשוב על $F(x)$ כמשתנה, ועל x, 1 ו- (-1) כקבועים. נפעיל את נוסחת השורשים של פולינום ריבועי על השוויון האחרון, ונקבל:

$$F(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x \cdot 1}}{2x} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

הוכחנו קודם ש: $\sqrt{1-x} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$, ולכן:

$$F(x) = \frac{1 \pm \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1} x^n\right]\right]}{2x}$$

כדי שכל המקדמים יהיו חיוביים,הסימן $\pm$ חייב להיות מינוס, ולכן נקבל:

$$F(x) = \frac{1}{2x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} x^{n-1}$$

אם נציב $m = n - 1$, ואז: $n = m + 1$, נקבל:

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m} x^m$$

ואז קיבלנו:

$$\boxed{C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}}$$

שזו בדיוק הנוסחה שקיבלנו כשעסקנו במספרי קטלן.

תורת הגרפים

הגדרה :

גרף מכוון (directed graph) הוא עצם מהצורה :

$$G = \langle V, E \rangle$$

כאשר V היא קבוצה סופית לא ריקה, ו- E יחס דו-מקומי על V, כך ש- $E \cap Id_V = \emptyset$ (כלומר E אינו מכיל שום זוג מהצורה $\langle v, v \rangle$ כאשר $v \in V$).

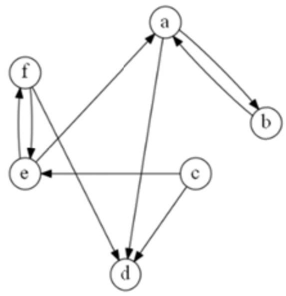
דוגמא :

תהי $V = \{a, b, c, d, e, f\}$, ויהי E היחס :

$$E = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle a, d \rangle, \langle c, d \rangle, \langle c, e \rangle, \langle e, a \rangle, \langle e, f \rangle, \langle f, d \rangle, \langle f, e \rangle\}$$

אפשר לייצג את G באופן הבא :

נייצג את האיברים של V באמצעות נקודות שנקראות קודקודים (vertices), ואת הזוגות הסדורים ב- E ע״י קשתות מכוונות שנקראות צלעות (edges) :



הערה : בציור הגרף אין חשיבות לנקודות החיתוך של הצלעות.

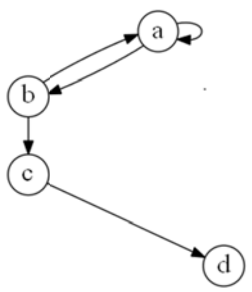
הגדרה :

פסאודו-גרף מכוון הוא עצם מהצורה :

$$G = \langle V, E \rangle$$

כך ש- V קבוצה סופית ולא ריקה, ו- E יחס דו-מקומי כלשהו על V. בפרט ייתכן ש- $\langle v, v \rangle \in E$ כאשר $v \in V$.

דוגמא :



הגדרה:

צלע מהצורה $\langle v, v\rangle$ $(v \in V)$, נקראת <u>לולאה</u> (*loop*).

הגדרה:

גרף <u>לא מכוון</u> (undirected graph) הוא עצם מהצורה:

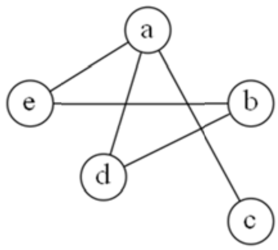
$$G = \langle V, E\rangle$$

כאשר V קבוצה סופית ולא ריקה כלשהי, ו- E קבוצה של תתי-קבוצות של V שמכילות בדיוק שני איברים של V.

אם E מכילה גם יחידונים, אז G נקרא <u>פסאודו-גרף</u>.

דוגמא:

תהי $V = \{a, b, c, d, e\}$ ו- $E = \{\{a, c\}, \{a, d\}, \{b, e\}, \{a, e\}, \{b, d\}\}$. אז הגרף של G נראה כך:



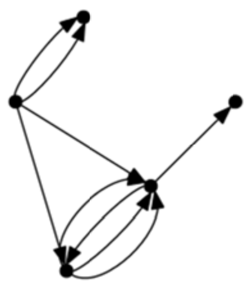
אם נוסיף ל- E גם את $\{b\}$ ו- $\{c\}$ נקבל פסאודו גרף.

הגדרה:

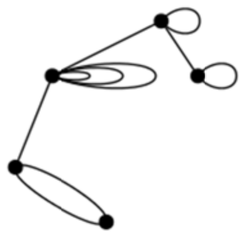
<u>מולטי-גרף</u> (מכוון או לא מכוון) מוגדר כמו גרף, כאשר E מולטי-קבוצה במקום קבוצה. (כלומר, ייתכן שיהיה יותר מצלע אחת בין 2 קודקודים).

דוגמאות:

1. מולטי-גרף מכוון:



2. פסאודו-מולטי גרף לא מכוון:



<u>איזומורפיזם בין גרפים:</u>

<u>הגדרה</u>:

יהיו G ו- G' שני גרפים מכוונים (או שניהם לא מכוונים), כאשר:

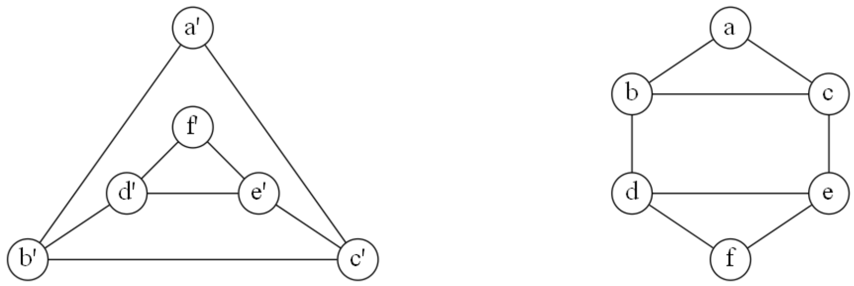
$$G = \langle V, E \rangle$$
$$G' = \langle V', E' \rangle$$

פונקציה $h: V \to V'$ נקראת <u>איזומורפיזם</u> אם:

1. h חח"ע ועל.
2. לכל $v, w \in V$ יש צלע מ- v ל- w ב- G אם ורק אם יש צלע מ- $h(v)$ ל- $h(w)$ ב- G'.

<u>דוגמא</u>:

יהיו G ו- G' הגרפים הבאים:



G' G

נסמן $h(v) = v'$ לכל $v \in V$.

אז h היא איזומפוריזם.

<u>הגדרה</u>:

תהי e צלע בגרף G כך ש- $e = \langle v, w \rangle$ אם G מכוון ו- $e = \{v, w\}$ אם G לא מכוון. אז אומרים ש- e <u>חלה</u> (is incident to) בקודקודים v ו- w.

<u>הגדרה</u>:

יהי G פסאודו גרף מכוון, או פסאודו מולטי-גרף מכוון, ויהי v קודקוד של G. אז:

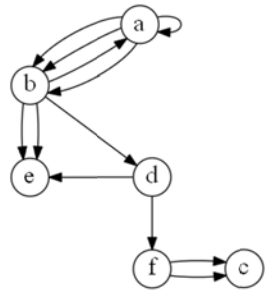
1. $\text{degin}(v)$ (דרגת הכניסה (indegree) של v), היא מספר הצלעות **שנכנסות** ל- v.
   כלומר: $\text{degin}(v) = |\{w \in V | \langle w, v \rangle \in E\}|$.

2. $\text{degout}(v)$ (דרגת היציאה של v), היא מספר הצלעות **שיוצאות** מ- v.
   כלומר: $\text{degout}(v) = |\{w \in V | \langle v, w \rangle \in E\}|$.

3. $\deg(v)$ (הדרגה של v, או הערכיות (valency) של v), היא:
$$\deg(v) = \text{degin}(v) + \text{degout}(v)$$

<u>דוגמא</u>:

יהי G:



נחשב את דרגת הכניסה, דרגת היציאה, והדרגה של כל אחד מקודקודיו:

$$\begin{array}{lll}
\text{degin}(a)=2 & \text{degout}(a)=4 & \deg(a)=6\\
\text{degin}(b)=3 & \text{degout}(b)=4 & \deg(b)=7\\
\text{degin}(c)=2 & \text{degout}(c)=0 & \deg(c)=2\\
\text{degin}(d)=1 & \text{degout}(d)=2 & \deg(d)=3\\
\text{degin}(e)=3 & \text{degout}(e)=0 & \deg(e)=3\\
\text{degin}(f)=1 & \text{degout}(f)=2 & \deg(f)=3
\end{array}$$

<u>טענה</u>:

יהי G פסאודו מולטי-גרף מכוון. אז:

$$\sum_{v\in V}\text{degin}(v)=\sum_{v\in V}\text{degout}(v)=|E|$$

בפרט:

$$\sum_{v\in V}\deg(v)=2\cdot|E|$$

<u>הוכחה</u>:

כל צלע תורמת $+1$ ל- $\sum_{v\in V}\text{degin}(v)$ וגם $+1$ ל- $\sum_{v\in V}\text{degout}(v)$.

<u>הגדרה</u>:

יהי G פסאודו מולטי-גרף לא מכוון, ויהי v קודקוד של G. נגדיר את <u>הדרגה</u> של v באופן הבא:

$\deg(v)$ הוא מספר הצלעות החלות ב- v, כאשר לולאה נספרת פעמיים.

<u>טענה</u>:

יהי G פסאודו מולטי-גרף לא מכוון, אז:

$$\sum_{v\in V}\deg(v)=2\cdot|E|$$

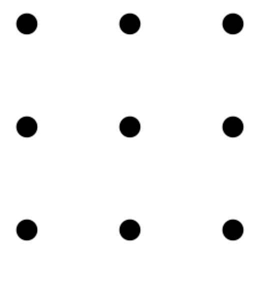
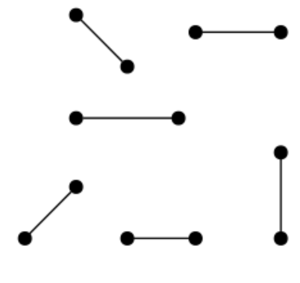
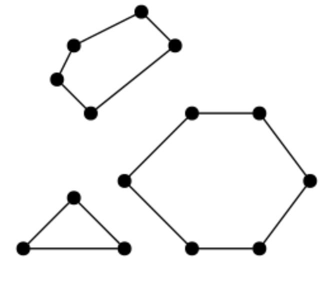
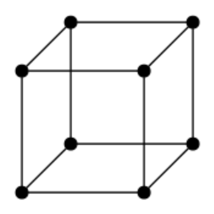
<u>הוכחה</u> :

כל צלע מוסיפה $+2$ לסכום $\sum\limits_{v\in V}\deg(v)$.

<u>הגדרה</u> :

יהי k מספר טבעי. גרף לא מכוון G נקרא <u>k-רגולרי</u> אם $\deg(v)=k$ לכל $v\in V$.

<u>דוגמאות</u> :

0-רגולרי	1-רגולרי	2-רגולרי	3-רגולרי
			

<u>הגדרה</u> :

קודקוד v נקרא <u>קודקוד בודד</u> אם $\deg(v)=0$.

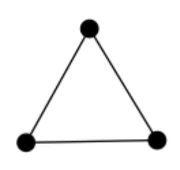
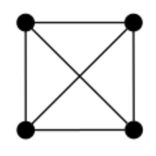
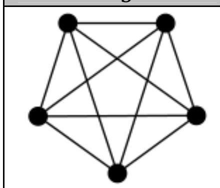
<u>הגדרה</u> :

יהי n מספר שלם וחיובי. <u>הגרף השלם בעל n קודקודים</u> הוא גרף לא מכוון $G=\langle V,E\rangle$ כך ש- $|V|=n$ וכך ש- E מכילה את כל הזוגות $\{v,w\}$ של קודקודים $v,w\in V$ ו- $v\neq w$.

<u>סימון</u> : נסמן גרף כזה ב- K_n (על שם המתמטיקאי Kuratowski).

הגרף השלם בעל n קודקודים הוא יחיד עד כדי איזומורפיזם.

<u>דוגמאות</u> :

K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
				

<u>הערה</u> :

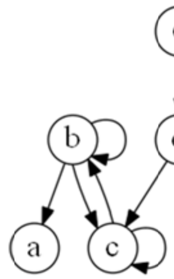
K_n הוא $(n-1)$ רגולרי.

<u>הגדרה</u>:

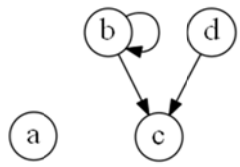
יהי $G = \langle V, E \rangle$ גרף (או פסאודו-גרף) מכוון או לא מכוון. נאמר ש- $H = \langle V', E' \rangle$ הוא תת גרף של G אם $V' \subseteq V$ ו- $E' \subseteq E$.

<u>דוגמא</u>:

יהי G הפסאודו-גרף המכוון הבא:



אז:



הוא תת גרף של G.

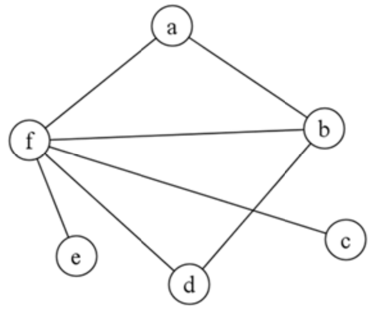
<u>הגדרה</u>:

יהי G גרף לא-מכוון $G = \langle V, E \rangle$.

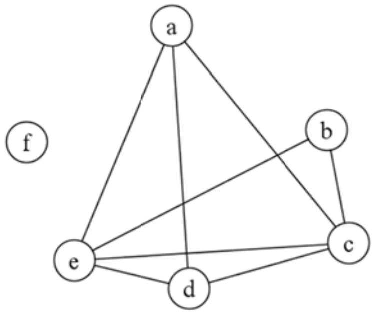
<u>המשלים</u> $\overline{G}$ של G הוא הגרף $\overline{G} = \langle V, \overline{E} \rangle$ שיש לו אותו הקודקודים שיש ב- G, וכך שלכל $v, w \in V$ ($v \neq w$), מתקיים: $\{v, w\} \in \overline{E} \Leftrightarrow \{v, w\} \notin E$.

<u>דוגמא</u>:

יהי G הגרף:



אז $\overline{G}$ יהיה הגרף:



<u>הערה</u>: $\overline{G}$ הוא המשלים ביחס ל- $\overline{K}$.

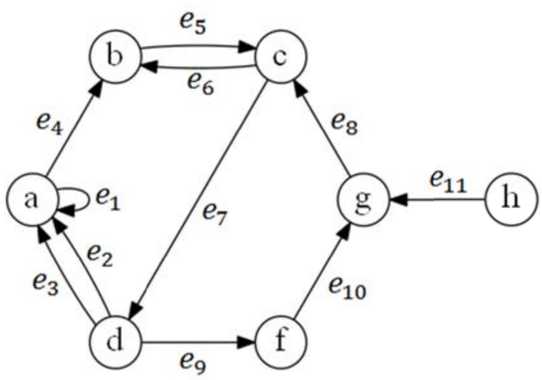
<u>הגדרה</u>:

יהי G פסאודו-מולטיגרף (מכוון או לא מכוון).

1. <u>טיול</u> היא סדרה $\langle v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k \rangle$ $(k \geq 0)$, שבה כל v_i קודקוד, וכל e_j היא צלע מ- v_{j-1} ל- v_j. המספר k נקרא <u>האורך</u> של הטיול. הטיול הוא <u>סגור</u> אם $v_0 = v_k$. (בגרף או בפסאודו-גרף מספיק לרשום: $\langle v_0, v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$).
2. <u>מסלול</u> (או מסילה) הוא טיול שבו כל הצלעות **שונות** זו מזו, כלומר אם $i \neq j$ אז $e_i \neq e_j$.
3. <u>מעגל</u> (circut) הוא מסלול סגור.
4. <u>מסלול פשוט</u> הוא מסלול שבו כל הקודקודים שונים זה מזה, פרט אולי ל- v_0 ו- v_k שיכולים להיות שווים.
5. <u>מעגל פשוט</u> (cycle) הוא מסלול פשוט וסגור. (בגרף לא מכוון האורך המינימלי של מעגל פשוט יהיה 3).

<u>דוגמא</u>:

יהי G הפסאודו-מולטיגרף המכוון הבא:



אז:

- הסדרה: $\langle d, e_3, a, e_4, b, e_5, c, e_6, b, e_5, c, e_7, d, e_2, a\rangle$ היא **טיול** אבל **לא מסלול**, כי e_5 מופיע פעמיים.

- הסדרה: $\langle d, e_9, f, e_{10}, g, e_8, c, e_7, d, e_3, a, e_4, b, e_5, c\rangle$ היא **מסלול** אבל **לא פשוט** כי d מופיע גם באמצע.

- הסדרה $\langle d, e_9, f, e_{10}, g, e_8, c, e_7, d\rangle$ היא **מעגל פשוט**.

<u>הערה</u>:

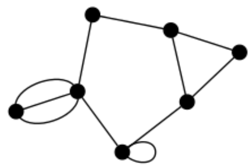
טיול שבו אין קודקוד שמופיע יותר מפעם אחת (אולי חוץ מ- $v_0 = v_k$) יהיה **מסלול** (ולכן מסלול פשוט), משום שאם אין קודקוד שמופיע פעמיים, אז לא ייתכן שקיימת צלע שמופיעה פעמיים. כלומר, ניתן להגדיר "מסלול פשוט" כטיול שבו אין קודקוד שמופיע יותר מפעם אחת, (אולי חוץ מ- $v_0 = v_k$).

<u>הגדרה</u>:

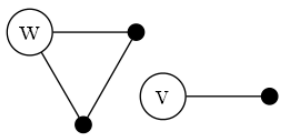
יהי G פסאודו-מולטיגרף **לא מכוון**, ויהיו v, w קודקודים של G. אז:

1. נאמר ש- v <u>קשור</u> ל- w אם קיים מסלול ב- G מ- v ל- w.
2. נאמר ש- G <u>קשיר</u> (connected) אם כל קודקוד v קשור לכל קודקוד w.

<u>דוגמאות</u>:



- זהו גרף קשיר.



- זהו גרף אינו קשיר, כי למשל v אינו קשור ל- w.

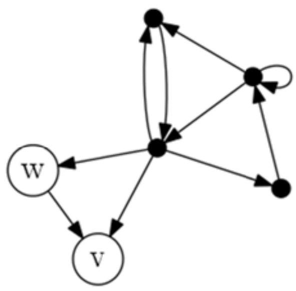
<u>הגדרה</u>:

יהי G פסאודו-מולטיגרף **מכוון**, ויהיו v, w קודקודים של G, אז:

1. נאמר ש- v <u>קשור</u> ל- w אם קיים מסלול ב- G מ- v ל- w.
2. נאמר ש- G <u>קשיר חזק</u> (strongly connected) אם כל קודקוד v קשור לכל קודקוד w.
3. נאמר ש- G <u>קשיר</u> אם הגרף ה**לא מכוון** המתקבל מ- G ע"י החלפת זוגות סדורים בזוגות לא סדורים ב- E הוא קשיר.

<u>דוגמא</u>:

יהא G:



אז G **אינו קשיר חזק**, כי אין טיול מ- v ל- w, אבל G כן **קשיר**.

<u>טענה</u>:

יהי G פסאודו-מולטיגרף מכוון או לא מכוון, ויהיו $v, w \in V$ כך ש- $v \neq w$ ו- v קשור ל- w. אז קיים מסלול **פשוט** מ- v ל- w ב- G.

<u>הוכחה</u>:

מהנתון ש- v קשור ל- w, אז יש לפחות מסלול אחד מ- v ל- w. נתבונן על קבוצת כל המסלולים מ- v ל- w, ונבחר אחד שאורכו **מינימלי**:

$$\langle v = u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, \dots, e_k, u_k = w \rangle$$

<u>נוכיח שהוא מסלול פשוט</u>:

נניח בשלילה שהוא לא מסלול פשוט. אז קיימים i, j כך ש- $u_i = u_j$ ונניח בלי הגבלת הכלליות ש- $i < j$. אז המסלול:

$$\langle v = u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, \dots, e_i, u_i, e_{j+1}, u_{j+1}, \dots, e_k, u_k = w \rangle$$

הוא **קצר יותר** מהמסלול המקורי, וזו סתירה למינימליות של k.
לכן $\langle v = u_0, e_1, u_1, \dots, e_k, u_k = w \rangle$ הוא מסלול פשוט.

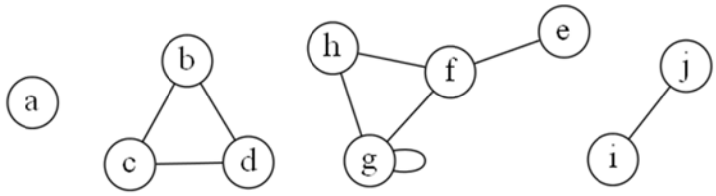
<u>הגדרה</u>:

יהי G פסאודו-מולטיגרף מכוון או לא מכוון. <u>רכיב קשירות</u> (connected component) של G הוא תת-גרף קשיר H של G שהוא **מקסימלי**, במובן שאם K תת-גרף קשיר של G כך ש- $H \subseteq K$, אז $H = K$.

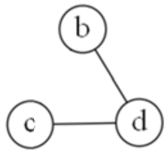
במילים אחרות, אם H תת-גרף קשיר של G, אז אין אפשרות להוסיף עוד קודקודים או צלעות בלי לקלקל את הקשירות.

<u>דוגמא</u>:

יהי G הפסאודו-גרף הבא:

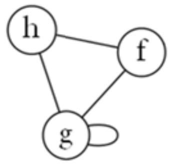


אז, יש ל- G 4 רכיבי קשירות (אלו בדיוק ארבעת תתי-הגרפים הנ"ל), אבל למשל:



אינו רכיב קשירות, כי אפשר להוסיף את הצלע בין c ל- b.

גם תת הגרף:



אינו רכיב קשירות, משום שהוא תת גרף ממש של רכיב קשירות אחר.

הערה:

G קשיר אם יש לו בדיוק רכיב קשירות אחד.

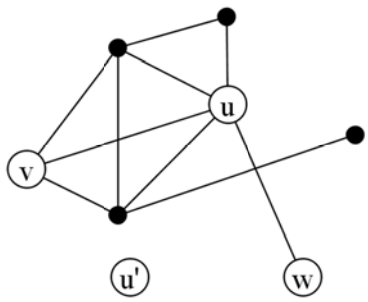
הגדרה:

יהי G גרף (או פסאודו-מולטיגרף) לא מכוון, ויהיו $v, w \in V$. המרחק (distance) המסומן $d(v, w)$ בין v ל- w הוא **האורך** של **הטיול הקצר ביותר** מ- v ל- w (שהוא יהיה מסלול פשוט).

אם v אינו קשור ל- w, נסמן: $d(v, w) = \infty$.

דוגמא:

יהי G:



אז כאן:

$d(v, w) = 2$, לפי המסלול: $\langle v, u, w \rangle$.

$d(v, u') = \infty$.

טענה:

יהי G גרף (או פסאודו-מולטיגרף) לא מכוון. אז:

1. $d(v,w) \geq 0$ לכל $v,w \in V$ ו- $d(v,w) = 0$ $\Leftrightarrow$ $v = w$.
2. $d(v,w) = d(w,v)$ לכל $v,w \in V$.
3. $d(v,w) \leq d(v,u) + d(u,w)$ לכל $u,v,w \in V$ (אי-שוויון המשולש).

הוכחה:

נוכיח את (3):

אם $d(v,u) = \infty$ או $d(u,w) = \infty$ אז זה מתקיים (כאן: $\infty = \infty + k$ לכל $k \in \mathbb{N}$ וגם $\infty = \infty + \infty$).

אז נניח ש- $d(v,u) = k$ ו- $d(u,w) = l$, כאשר $k,l \in \mathbb{N}$. אז יש מסלול $\langle v,\dots,u\rangle$ מאורך k מ- v ל- u, ויש מסלול $\langle u,\dots,w\rangle$ מאורך l מ- u ל- w.

אזי, $\langle v,\dots,u,\dots,w\rangle$ הוא טיול מאורך $k + l$ מ- v ל- w, ולכן: $d(v,w) \leq k + l$.

הגדרה:

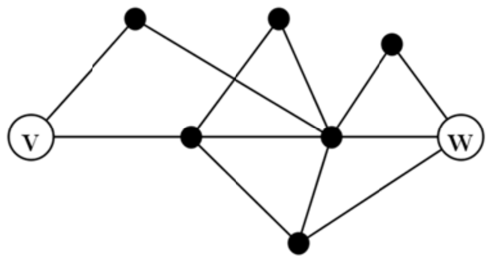
יהי G גרף לא מכוון וקשיר. <u>הקוטר</u> (diameter) של G הוא הערך המקסימלי של $d(v,w)$ כאשר $v,w \in V$.

מסמנים $d(G)$, אך כדי למנוע בלבול נסמן: $\mathrm{diam}(G)$. אז:

$$d(G) = \mathrm{diam}(G) = \max\{d(v,w) | v,w \in V\}$$

דוגמא:

יהי G הגרף:



כאן:

$diam(G) = 3$ כי $d(v,w) = 3$, ואין שני קודקודים ממרחק 4 או יותר אחד מהשני.

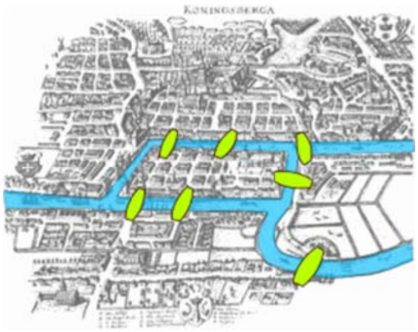
דוגמא:

$\mathrm{diam}(K_1) = 0$ ו- $\mathrm{diam}(K_n) = 1$ לכל $n \geq 2$ (K_n הוא הגרף השלם בעל n קודקודים).

בעיית הגשרים של קניגסברג (Königsberg):

בשנת 1736 התושבים של העיר קניגסברג (היום Kaliningrad) שאלו את המתמטיקאי אוילר (Euler) את השאלה הבאה:

בעיר הזו היו 7 גשרים, בצורה הבאה:



מתוך ויקיפדיה

האם קיים טיול שבו חוצים כל גשר בדיוק פעם אחת?

אוילר הוכיח שלא קיים טיול כזה.
ההוכחה הזאת הייתה התוצאה הראשונה בתורת הגרפים.

לפני שנראה איך אוילר הוכיח זאת, נוכיח טענה שנצטרך בהמשך:

טענה:

יהי G פסאודו-מולטיגרף (מכוון או לא מכוון), ויהי k מספר הקודקודים v של G כך ש-$\deg(v)$ הוא מספר אי-זוגי.

אז k מספר זוגי.

הוכחה:

הוכחנו ש-

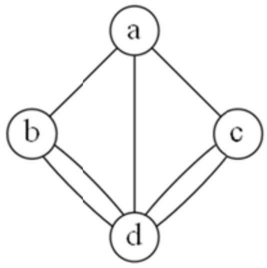
$$\sum_{v\in V}\deg(v)=2\cdot|E|$$

בסכום באגף שמאל יש k מחוברים אי-זוגיים, וכל היתר הם זוגיים. אם נניח בשלילה ש-k אי-זוגי, אז הסכום של k מחוברים אי-זוגיים גם יהיה אי-זוגי.

לכן, $\sum_{v\in V}\deg(v)$ יהיה אי-זוגי (גם אחרי שנוסיף את כל המחוברים הזוגיים), וזה סותר את השוויון: $\sum_{v\in V}\deg(v)=2\cdot|E|$.

נחזור לבעיית הגשרים של קניגסברג:

אוילר בנה מולטיגרף שמתאים לבעיה הזאת:



נשים לב:

$$\deg(a)=3 \quad , \quad \deg(b)=3 \quad , \quad \deg(c)=3 \quad , \quad \deg(d)\ =5$$

<u>הגדרה</u>: (מסלול אוילר)

יהי G פסאודו-מולטיגרף מכוון או לא מכוון. <u>מסלול אוילר</u> ב- G הוא מסלול של כל הצלעות ב- G, וכל צלע מופיעה בדיוק פעם אחת.

<u>משפט</u>: (משפט אוילר)

יהי G פסאודו-מולטיגרף לא מכוון שאין בו קודקוד בודד. אז:

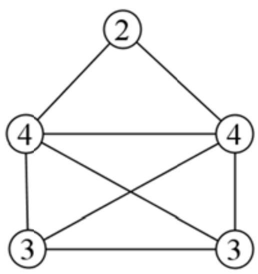
1. יש ב- G <u>מעגל אוילר</u> $\Leftrightarrow$ G קשיר, והדרגות של כל הקודקודים זוגיות.
2. יש ב- G <u>מסלול אוילר</u> שאינו מעגל $\Leftrightarrow$ G קשיר, וקיימים שני קודקודים v ו- w כך ש- $\deg(v)$ ו- $\deg(w)$ אי-זוגיות, ו- $\deg(u)$ זוגית לכל קודקוד u כך ש- $v \neq u$ וגם $u \neq w$.

<u>הערה</u>:

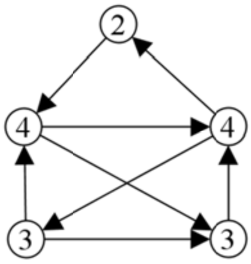
במקרה (2) של המשפט, כל מסלול אוילר מתחיל ב- v ומסתיים ב- w או להיפך.

<u>דוגמא</u>:

נמצא מסלול אוילר בגרף:



כאן המספרים בקודקודים מייצגים את הדרגה של כל קודקוד. קל לראות שהדרגות בקודקודים התחתונים הן אי-זוגיות (3), והדרגות האחרות זוגיות. לכן אנחנו יודעים שקיים מסלול אוילר שאינו מעגל. יתרה מכך, אנחנו יודעים שמסלול אוילר חייב להתחיל באחד מהקודקודים התחתונים ולהסתיים בשני. לכן נוכל (למשל) להתחיל בקודקוד השמאלי וללכת בעקבות החיצים (נתחיל בהליכה מעלה):



<u>הוכחת המשפט</u>:

<u>כיוון $\Leftarrow$ (של 1 ו-2 ביחד)</u>:

נניח ש- $\langle v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k \rangle$ מסלול אוילר (ואם $v_0 = v_k$ אז מעגל אוילר). לכל קודקוד v_i שונה מ- v_0 ומ- v_k, נסמן ב- m_i את מספר הפעמים ש- v_i מופיע במסלול הזה, אז: $\deg(v_i) = 2m_i$.

- אם $v_0 \neq v_k$ ו- v_0 מופיע m_0 פעמים, אז $\deg(v_0) = 2m_0 - 1$ (כי במופע הראשון אנחנו רק יוצאים מ- v_0), וכך גם לגביי v_k.
לכן הדרגות של v_0 ושל v_k יהיו אי-זוגיות, והדרגות של כל הקודקודים האחרים יהיו זוגיות. בנוסף, הקודקודים היחידים שיכולים להיות בעלי דרגות אי-זוגיות הם הקודקוד הראשון והקודוד האחרון במסלול אוילר, לכן כל מסלול אוילר מתחיל ב- v_0 ומסתיים ב- v_k במקרה זה.

- אם $v_0 = v_k$ והוא מופיע m פעמים במסלול (שהוא עכשיו מעגל), אז $\deg(v_0) = 2m - 2$, כלומר מספר זוגי. לכן כל הדרגות יהיו זוגיות.

לבסוף, אם יש ב- G מסלול (או מעגל) אוילר, אז כל קודקוד מופיע במסלול הזה (כי אין קודקוד בודד, ולכן כל קודקוד מחובר לצלע אחת לפחות, והצלע הזאת שייכת למסלול אוילר). אזי כל שני קודקודים של G קשורים לפי חלק מהמסלול, לכן G קשיר.

<u>כיוון $\Rightarrow$ (של 1 ו-2 ביחד)</u>:

נניח בשלילה שקיימת דוגמא נגדית לגרירה הזאת ($\Rightarrow$), או של סעיף (1) או של סעיף (2), כלומר, נניח שקיים פסאודו-מולטיגרף G ללא קודקוד בודד כך ש- G קשיר וכל הדרגות של הקודקודים הן זוגיות (אולי חוץ מ-2 בדיוק), אבל אין ב- G מסלול אוילר או מעגל אוילר.

מבין כל הדוגמאות הנגדיות, ניקח דוגמא נגדית G כך שמספר **הצלעות** ב- G הוא **מינימלי**, ונראה שאנחנו מגיעים לסתירה.

נוכיח כמה טענות על ה- G הזה (בהנחה (בשלילה) שהוא אכן קיים):

א. <u>G אינו מכיל לולאה</u>:

נניח בשלילה ש- e לולאה ב- G. אז יהי $G' = G \setminus \{e\}$ (כלומר, נסיר את e מקבוצת הצלעות). ברור ש- G' עדיין קשיר. בנוסף, אם e חלה בקודקוד u, אז: $\deg_{G'}(u) = \deg_G(u) - 2$. לכן לא שינינו את הזוגיות של אף קודקוד במעבר מ- G ל- G'. ז״א ש- G' מקיים את כל ההנחות של המשפט, ויש ב- G' פחות צלעות מאשר ב- G. לכן G' אינו דוגמא נגדית למשפט, כלומר יש ב- G' מסלול (או מעגל) אוילר.

המסלול הזה מכיל את הקודקוד u, לכן אפשר להוסיף את הצלע e למסלול, והתוצאה תהיה מסלול (או מעגל) אוילר ב- G. זה סותר את ההנחה ש- G דוגמא נגדית. לכן אין לולאה ב- G. ■

ב. <u>יש ב- G שני קודקודים בעלי דרגות אי-זוגיות</u>:

נניח בשלילה שכל הדרגות ב- G הן זוגיות. תהי e צלע כלשהי ב- G (יש לפחות צלע אחת כי אין קודקודים בודדים ב- G), אז e אינה לולאה (הוכחנו זאת), ולכן הצלע e חלה בשני קודקודים שונים v ו- w.

יהי $G' = G \setminus \{e\}$, אז: $\deg_{G'}(v) = \deg_G(v) - 1$ תהיה אי-זוגית, וגם: $\deg_{G'}(w) = \deg_G(w) - 1$ תהיה אי-זוגית ולכל $u \in G'$ אחר: $\deg_{G'}(u) = \deg_G(u)$ תהיה זוגית.

נוכיח כי G' גם קשיר. לשם כך מספיק להראות ש- v קשור ל- w גם ב- G' (כי אז אפשר להחליף כל מופע של e , בטיול במסלול בין v ל- w ב- G').
יהי H_v רכיב הקשירות ב- G' שמכיל את v. אם $w \notin H_v$, אז יש ב-H_v קודקוד אחד **בדיוק** שדרגתו אי-זוגית, וזה סותר את הטענה שמספר הקודקודים בעלי דרגות אי-זוגיות בגרף (במקרה הזה H_v) יהיה זוגי. אז $w \in H_v$, כלומר v קשור ל- w ב- G'.

לכן G' מקיים את ההנחות של משפט אוילר, ויש לו פחות צלעות מאשר יש ל- G.
אז G' אינו יכול להיות דוגמא נגדית למשפט. ז״א שקיים מסלול אוילר ב- G',
והוא יהיה מ- v ל- w (או להפך): $\langle v = u_0, e_1, u_1, \dots, e_k, u_k = w \rangle$.
לכן: $\langle v = u_0, e_1, u_1, \dots, e_k, e_k = w, e, v \rangle$ מעגל אוילר ב- G, בסתירה להנחה ש- G דוגמא נגדית למשפט.

כעת, יהיו v ו- w שני הקודקודים ב- G שהדרגה שלהם אי-זוגית. G קשיר, לכן קיים מסלול (אפילו מסלול פשוט) מ- v ל- w. יהי $\langle v = u_0, e_1, u_1, \dots, e_k, u_k = w \rangle$ המסלול **הארוך ביותר** ב- G מ- v ל- w. (האורך המקסימלי של מסלול הוא מספר הצלעות בגרף, לכן קיים מסלול מאורך מקסימלי).
נוכיח שהמסלול הזה הוא מסלול אוילר (בסתירה להנחה שאין מסלול אוילר ב- G). אם כן, נניח בשלילה שהמסלול הזה אינו מסלול אוילר. יהי G' הגרף המתקבל מ- G ע״י השמטת כל

הצלעות שמופיעות במסלול הזה. אז $\deg_{G'}(v)$ **זוגית**, כי הורדנו מספר אי-זוגי של צלעות (מהמסלול) שחלות ב- v, ו- $\deg_G(v)$ אי-זוגית. גם $\deg_{G'}(w)$ זוגית מסיבה דומה. ולכל קודקוד u אחר, $\deg_G(u)$ זוגית, ואנחנו נוריד מספר **זוגי** של צלעות שחלות ב- u, ולכן $\deg_{G'}(u)$ גם זוגית.

בסה"כ קיבלנו שכל דרגה ב- G' היא זוגית (כולל האפשרות של 0).

G' אינו קשיר באופן כללי, אבל תהי e צלע כלשהי ב- G', ויהי H רכיב הקשירות של G' שמכיל את e, אז נוכיח שאחד (לפחות) מהקודקודים של H שייך למסלול.

יהי u אחד מהקודקודים ש-e חלה בהם. אם u אינו שייך למסלול, נבנה מסלול מ- u ל- v בגרף G (שהוא קשיר). יהי u' הקודקוד הראשון במסלול הזה ששייך למסלול מ- v ל- w. אז הקודקוד u' שייך ל-H.

ל-H יש פחות צלעות מאשר ב- G ו- H הוא גרף קשיר שבו כל הדרגות זוגיות, לכן H אינו דוגמא נגדית למשפט, כלומר יש ב- H מעגל אוילר. נוסיף את המעגל הזה למסלול מ- v ל- w, וכאשר נגיע לקודקוד ששייך ל-H, זה נותן לנו מסלול מ- v ל-w שהוא ארוך יותר מהמסלול המסימלי, ולכן קיבלנו סתירה.

לכן המסלול מהאורך המקסימלי מ- v ל- w היה מסלול אוילר, כלומר G **אינו** דוגמא נגדית למשפט, ולכן ההנחה בשלילה הייתה מוטעית והמשפט מתקיים.

באופן דומה אפשר להוכיח (אבל לא נעשה זאת):

<u>משפט</u>:

יהי G פסאודו-מולטיגרף מכוון שאין בו קודקוד בודד. אז:

1. יש ב- G מעגל אוילר $\Leftrightarrow$ G קשיר, ולכל קודקוד u ב- G מתקיים:
$$\text{degin}(u) = \text{degout}(u)$$
2. יש ב- G מסלול אוילר שאינו מעגל $\Leftrightarrow$ G קשיר, וקיימים שני קודקודים v ו- w כך ש-
$$\text{degout}(v) = 1 + \text{degin}(v)$$
$$\text{degin}(w) = 1 + \text{degout}(w)$$
ולכל קודקוד u אחר:
$$\text{degin}(u) = \text{degout}(u)$$

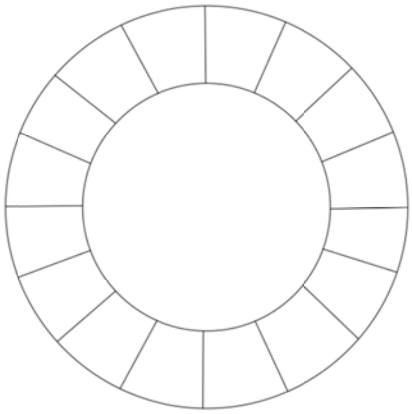
במקרה זה, כל מסלול אוילר מתחיל ב- v ומסתיים ב- w.

<u>הערה</u>:

נשים לב שהתנאי הוא ש- G קשיר, לא ש- G קשיר חזק.

<u>דוגמא</u>:

נתון עיגול שבו יש 16 משבצות בהיקף:



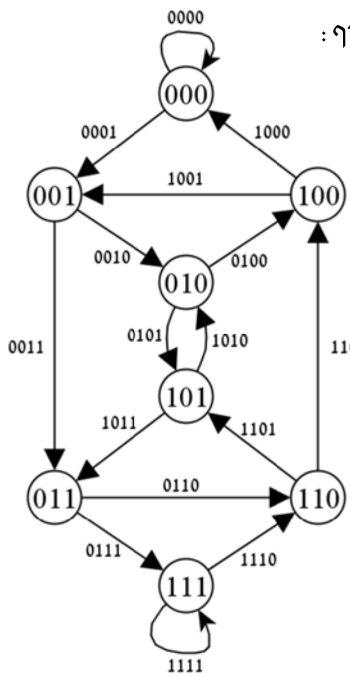
נמלא כל משבצת בספרה בינארית (0 או 1). המטרה היא לעשות זאת בצורה כזו שכל מספר 4-ספרתי מ- 0000 עד 1111 יופיע כרצף של 4 ספרות בעיגול.

אז אפשר לבנות פסאודו-גרף מכוון שמתאים לשאלה הזאת.
הקודקודים של G הם כל המספרים הבינאריים התלת ספרתיים:

$$V = \{000,001,010,011,100,101,110,111\}$$

ומכל קודקוד $\alpha\beta\gamma$ נגדיר צלע מכוונת ל- $\beta\gamma 0$, וצלע מכוונת ל- $\beta\gamma 1$. נסמן את הצלע מ- $\alpha\beta\gamma$ ל- $\beta\gamma\delta$ בסימן $\alpha\beta\gamma\delta$.

כלומר, G הוא הגרף:



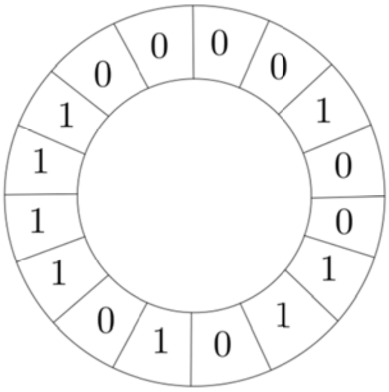
לכל קודקוד ב- G מתקיים ש:

$$\text{degin}(v) = \text{degout}(v) = 2$$

G גם קשיר, ולכן קיים מעגל אוילר ב- G, למשל נלך על הצלעות:

$$0000 \to 0001 \to 0010 \to 0100 \to 1001 \to 0011 \to 0110 \to 1101 \to$$
$$\to 1010 \to 0101 \to 1011 \to 0111 \to 1111 \to 1110 \to 1100 \to 1000$$

וזה מתאים ל:



מסלולי המילטון ומעגלי המילטון:

<u>הגדרה</u>:

יהי G גרף (מכוון או לא מכוון). <u>מסלול המילטון</u> הוא מסלול של כל הקודקודים בגרף G כך שכל קודקוד מופיע **בדיוק** פעם אחת, חוץ אולי מהאפשרות ש- $v_0 = v_k$ (אם $v_0 = v_k$ זה נקרא <u>מעגל המילטון</u>).

מסלול המילטון הוא מסלול פשוט, ומעגל המילטון הוא מעגל פשוט.

<u>הערה</u>:

לולאה אינה יכולה להיות חלק ממסלול המילטון. באופן דומה, אם יש יותר מצלע אחת מקודקוד v ל- w, אז רק אחת מהן יכולה להופיע במסלול (או מעגל) המילטון.

לכן נעבוד כאן עם גרפים ולא עם פסאודו-גרפים או מולטי-גרפים.

<u>הערה</u>:

קיים אלגוריתם פשוט שיחליט אם יש לגרף (או אפילו פסאודו-מולטיגרף) מסלול אוילר או מעגל אוילר, בזמן סביר. כל שצריך לעשות הוא לבדוק ש- G קשיר, ולבדוק מהן הדרגות של כל קודקוד (אם G מכוון, בודקים degin ו- degout).

מצד שני, לא ידוע אם קיים אלגוריתם דומה עבור מסלול (או מעגל) המילטון. יש תנאים הכרחיים, ויש תנאים מספיקים, אבל לא מצאו תנאי הכרחי ומספיק שניתן לבדוק אותו בזמן סביר.

<u>למשל</u>, תנאי הכרחי הוא ש- G יהיה קשיר.

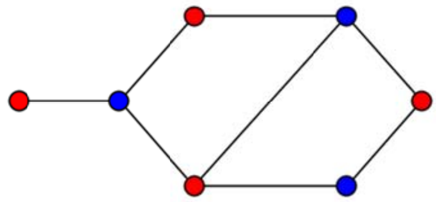
<u>הגדרה</u>:

גרף לא מכוון G נקרא גרף <u>דו-חלקי</u> (או דו-צדדי) (bipartite), אם קיימות שתי קבוצות A ו- B כך ש:

1. $V = A \cup B$.
2. $A \cap B = \emptyset$.
3. לכל $\{v, w\} \in E$, אחד מה- v ו- w שייך ל- A והשני שייך ל- B. (כלומר, אין צלע בין 2 קודקודים מ- A, ואין צלע בין שני קודקודים מ- B).

<u>דוגמא</u>:

יהי G הגרף:



אז, תהי A קבוצת הקודקודים האדומים, ותהי B קבוצת הקודקודים הכחולים.

<u>הערה</u>:

G דו-חלקי אם ורק אם כל רכיב קשירות של G דו-חלקי.

<u>הגדרה</u>:

יהיו m,n מספרים שלמים וחיוביים. הגרף הדו-חלקי השלם $k_{m,n}$ הוא הגרף המוגדר באופן הבא:

$$V = A \cup B$$

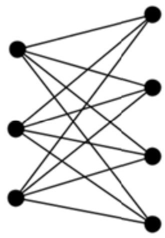
כאשר:

- $|A| = m$.
- $|B| = n$.
- $A \cap B = \emptyset$.
- $E = \{\{v,w\} | w \in B, v \in A\}$.

(כלומר, E מכילה את כל הצלעות האפשריות בין קודקוד של A לקודקוד של B).

<u>דוגמא</u>:

$k_{3,4}$ הוא הגרף:



<u>הערה</u>:

$k_{m,n}$ יחיד עד כדי איזומורפיזם.

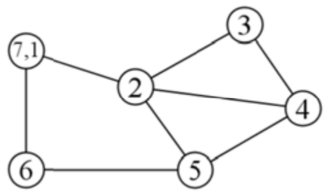
<u>הערה</u>:

בחלק מהספרים שעוסקים בנושא דורשים שבגרף דו-חלקי תהיה צלע אחת לפחות,
כשבספרים אחרים לא דורשים זאת, כלומר הם חושבים על גרף שמכיל n קודקודים בודדים כגרף דו-חלקי.

עם ההגדרות הנ"ל נוכל לשוב ולעסוק במסלולי ומעגלי המילטון.
לפני כן, נשים לב להערה:

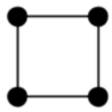
<u>הערה</u>:

אם בגרף G קיים מעגל המילטון, אז יש גם מסלול המילטון שאינו מעגל, למשל, אם נתבונן בגרף:



<u>מעגל הימלטון</u>: $\langle 1,2,\dots,7\rangle$.
<u>מסלול המילטון</u> (שאינו מעגל): $\langle 1,2,\dots,6\rangle$.

הדבר הזה אינו יכול לקרות במעגלי אוילר ומסלולי אוילר, לדוגמא נתבונן בגרף:

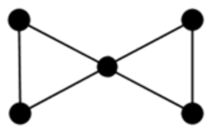


ברור שיש פה מעגל אוילר, אך אין פה מסלול אוילר שאינו מעגל.

כמו כן, הטענה ההפוכה אינה נכונה, כלומר אם יש מסלול המילטון, אז אין בהכרח מעגל המילטון. למשל בגרף:

יש מסלול המילטון אבל אין מעגל המילטון.

ולסיום דוגמא לגרף שבו יש מעגל אוילר, אבל אין מעגל המילטון:



<u>טענה</u>:

יהי G גרף לא מכוון, דו חלקי וקשיר, ונניח ש- $V=A\cup B$, כמו בהגדרה של גרף דו-חלקי. אז:

1. אם יש ב- G מעגל המילטון, אז $|A|=|B|$.
2. אם יש ב- G מסלול המילטון, אז: $\big||A|-|B|\big|\le 1$.

<u>הוכחה</u>:

1. יהי $\langle v_1,v_2,\dots,v_n,v_1\rangle$ **מעגל** המילטון ב- G. נניח בה"כ ש- $v_1\in A$, אז $v_2\in B$, $v_3\in A$, $v_4\in B$ וכו'.. כלומר:

$$(*)\ \forall i \quad \begin{matrix} v_{2i} \in B \\ v_{2i+1} \in A \end{matrix}$$

אבל $v_n \in B$ כי v_n מחובר ל- v_1, ז״א ש- n זוגי, ומהתנאים של $(*)$ נובע ש- $|A| = \frac{n}{2}$ ו- $|B| = \frac{n}{2}$, בפרט: $|A| = |B|$.

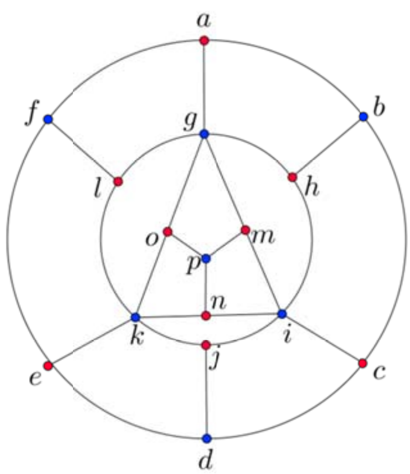
2. יהי $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ **מסלול** המילטון ב- G. אז שוב $(*)$ מתקיים, ואם n זוגי שוב מתקיים ש- $|A| = |B| = \frac{n}{2}$, אבל אם n אי-זוגי, אז: $|A| = |B| + 1$ (ולהפך אם $v_1 \in B$).

<u>הערה</u>:

הטענה הקודמת נותנת תנאים **הכרחיים** לקיום מעגל המילטון או מסלול המילטון.

<u>דוגמא</u>:

יהי G הגרף:



אז הקודקודים סומנו בצבעים כדי להראות שהגרף הוא דו-חלקי. יש 9 קודקודים אדומים, ויש 7 קודקודים כחולים, לכן **אין** מעגל או מסלול המילטון.

<u>הערה</u>:

קיימת הוכחה שניה שבדוגמא אין מסלול המילטון שאינה משתמשת בעובדה ש- G דו-חלקי.

יש ב- G 16 קודקודים ו- 27 צלעות.

יש 3 צלעות שחלות ב- g שלא יופיעו במסלול המילטון.
יש 3 צלעות שחלות ב- i שלא יופיעו במסלול המילטון, והן שונות מהצלעות שחלות ב- g משום ש- g ו- i אינם שכנים.
יש 3 צלעות שחלות ב- k שלא יופיעו במסלול המילטון.
יש 1 צלעות שחלות ב- b שלא יופיעו במסלול המילטון.
יש 1 צלעות שחלות ב- d שלא יופיעו במסלול המילטון.

יש 1 צלעות שחלות ב- f שלא יופיעו במסלול המילטון.

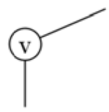
יש 1 צלעות שחלות ב- p שלא יופיעו במסלול המילטון.

בסה״כ יש 13 מהצלעות שלא יופיעו במסלול המילטון, ולכן רק $27-13=14$ צלעות שיכולות להופיע במסלול המילטון. אבל יש 16 קודקודים, ולכן צריך לפחות 15 צלעות במסלול.

מסקנה: אין מסלול המילטון.

<u>טענה/הערה</u>:

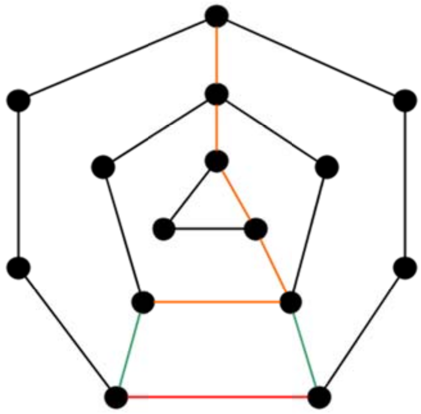
יהי G גרף לא מכוון וקשיר, ויהי v קודקוד כך ש- $\deg v=2$. אם יש ב- G **מעגל** המילטון, אז שתי הצלעות המחוברות ל- v מופיעות במעגל הזה.



הטענה הזו יכולה לעזור בהוכחה **שאין** מעגל המילטון.

<u>דוגמא</u>:

יהי G הגרף:



אז לפי הטענה הקודמת, אם בגרף יש מעגל המילטון, אז הצלעות השחורות חייבות להשתייך למעגל הזה. אבל הצלע האדומה אינה יכולה להשתייך למעגל, ולכן אפשר שהצלעות הירוקות יהיו צלעות במעגל. אך לא נוכל להוסיף צלעות נוספות כדי לקשור את המשולש הפנימי לצלעות הקיימות, מבלי לפגוע בתכונות של מעגל המילטון. לכן אין מעגל המילטון.

<u>טענה</u>:

יהי $n\geq 3$, אז ל- K_n (הגרף השלם) יש מעגל המילטון.

ללא הוכחה.

למעשה אפשר להסתפק בפחות צלעות כדי שיהיה קיים מעגל המילטון. בגרף השלם K_n עבור $n\geq 3$ מתקיים $\deg v=n-1$ לכל v. נראה במשפט הבא שמספיק שיתקיים תנאי יותר חלש מזה כדי להוכיח קיום של מעגל המילטון.

משפט: (משפט Ore)

יהי G גרף לא מכוון על n קודקודים, $n \geq 3$ שבו מתקיים התנאי הבא:

לכל שני קודקודים v ו- w **שאינם שכנים** (כלומר, אין צלע ביניהם):

$$\deg v + \deg w \geq n$$

אז יש ב- G מעגל המילטון (בפרט G קשיר).

משפט זה הוא למעשה הכללה של המשפט הבא:

משפט: (משפט Dirac)

יהי G גרף לא מכוון על n קודקודים, $n \geq 3$, כך שלכל קודקוד v מתקיים: $\deg v \geq \frac{n}{2}$. אז יש ב- G מעגל המילטון.

אם כן, משפט Dirac הוא מסקנה של משפט Ore, כי אם $\deg v \geq \frac{n}{2}$ לכל v, אז $\deg v + \deg w \geq n$ לכל v, w, ולא רק לקודקודים שאינם שכנים.

הוכחה: (משפט Ore)

נניח שקיימת דוגמא נגדית – גרף G בעל n קודקודים עבור n מסוים כך ש- $n \geq 3$. מכל הדוגמאות הנגדיות על n קודקודים, יהי G דוגמא נגדית עם מספר **מקסימלי** של צלעות.

אז G גרף לא-מכוון על n קודקודים כך ש- $\deg v + \deg w \geq n$ לכל v, w שאינם שכנים, אבל **אין** ב- G מעגל המילטון. כמו כן, יש ל- G המספר המקסימלי של צלעות מבין כל הדוגמאות הנגדיות על n קודקודים. נשים לב ש- $G \ncong K_n$ (לא איזומורפיים) כי יש מעגל המילטון ב- K_n. ז״א שקיימים v, w קודקודים של G **שאינם שכנים** ב- G. אז נוסיף צלע e בין v ל- w, ונגדיר:

$$G' = G \cup \{e\}$$

אז G' גרף על n קודקודים, ולכל $u \in V$ מתקיים: $\deg_{G'} u \geq \deg_G u$. ז״א שהתנאי שסכום הדרגות של שני קודקודים שאינם שכנים הוא תמיד גדול או שווה ל-n, מתקיים גם ב- G'. אבל G' **אינו** דוגמא נגדית למשפט, כי יש לו יותר צלעות מאשר יש ל- G.

לכן קיים מעגל המילטון ב- G', והוא מכיל את הצלע e (אחרת הוא היה מעגל המילטון ב- G).

נבחר במעגל המילטון ב- G':

$$\langle v = u_0, u_1, \dots, u_{n-1} = w, v \rangle$$

אז:

$$\langle v = u_0, u_1, \dots, u_{n-1} = w \rangle$$

הוא **מסלול** המילטון ב- G.

נראה שיש בעצם **מעגל** המילטון ב- G, וזאת תהיה סתירה.

נתבונן במסלול המילטון ב- G שמצאנו:

$$\langle v = u_0, u_1, \dots, u_{n-1} = w \rangle$$

אז v ו- w אינם שכנים. נסמן $\deg v = k$, אז יש ל- v k שכנים ב- G שהם: $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}$
כאשר: $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_k < n-1$.
אז k הקודקודים: $u_{i_1-1}, u_{i_2-1}, \dots, u_{i_k-1}$ **אינם** שכנים של w, כי אם קיים j כך ש- u_{i_j-1} שכן של w, אז:

$$\langle v = u_0, u_1, \dots, u_{i_j-1}, u_{n-1} = w, u_{n-2}, \dots, u_{i_j}, u_0 = v \rangle$$

הוא **מעגל** המילטון ב- G.

אז מבין $n-1$ הקודקודים ששונים מ- w, יש לפחות k שאינם שכנים של w, אזי:

$$\begin{aligned} &\deg w \leq n - 1 - k \\ &\deg v = k \end{aligned}$$

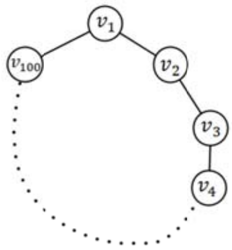
ואם נחבר נקבל:

$$\deg v + \deg w \leq n - 1$$

בסתירה להנחת המשפט.
לכן, **לא קיימת** דוגמא נגדית למשפט, והמשפט נכון.

<u>הערה</u>:

התנאי במשפט הוא מספיק אבל לא הכרחי. למשל בגרף:



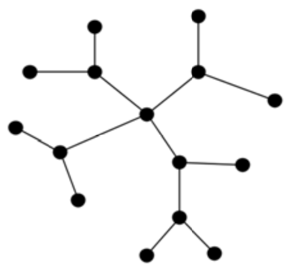
מתקיים שלכל $1 \leq i \leq 100$, $\deg v_i = 2$, אבל יש מעגל המילטון.

<u>עצים:</u>

<u>הגדרה</u>:

<u>עץ</u> (tree) הוא גרף לא מכוון וקשיר, כך שאין בו מעגל פשוט.

<u>דוגמא</u>:



הגדרה:

יער (forest), הוא גרף לא מכוון שאין בו מעגל פשוט.

ז"א שאם G הוא **יער**, אז כל רכיב קשירות של G הוא עץ. כמו כן, ייתכן ש- G עצמו הוא עץ – אין הנחה שיש יותר מרכיב קשירות אחד.

דוגמא:

טענה:

יהי G גרף (מכוון או לא מכוון) שיש בו מעגל. אז יש ב- G מעגל פשוט.

מהטענה הנ"ל נוכל להסיק שאם T הוא עץ, אז אין מעגלים בכלל ב- T.

הוכחה:

נניח שיש מעגל ב- G. יהי $\langle v_0, v_1, v_2, \dots, v_k = v_0 \rangle$ מעגל ב- G מאורך מינימלי. נוכיח שהוא מעגל פשוט. אם לא, אז קיימים i, j כך ש- $i < j$ ו- $v_i = v_j$ (בנוסף לזוג $v_0 = v_k$), אבל אז:

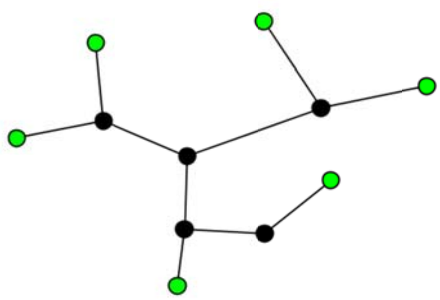
$$\langle v_0, v_1, \dots, v_i, v_{j+1}, \dots, v_k = v_0 \rangle$$

מעגל **קצר** יותר ממעגל מאורך k, וזו סתירה.

הגדרה:

יהי T עץ. קודקוד v של T כך ש- $\deg v = 1$ נקרא עלה.

דוגמא:



כאן הקודקודים הירוקים הם עלים.

טענה:

יהי T עץ על n קודקודים, $n \geq 2$. אז יש ל-T **לפחות** שני עלים.

הוכחה:

יש ב- T לפחות צלע אחת כי T קשיר, ויש לפחות שני קודקודים. ז"א שיש ב- T מסלול פשוט מאורך 1.

יהי k האורך **המקסימלי** של מסלול פשוט ב- T, אז $k \le n$, ולמעשה אפשר להוכיח ש- $k \le n-1$.

$$\langle v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k \rangle$$

אז $v_k \neq v_0$, כי אחרת זה מעגל פשוט. נוכיח כי v_0 ו- v_k הם עלים.
ברור ש- $\deg v_0 \ge 1$ כי v_0 מחובר ל- v_1. נניח שיש קודקוד נוסף u שמחובר ל- v_0.

- אם $u = v_i$ עבור $i \ge 2$, אז קיים **מעגל** ב- T, וזוהי סתירה.
- אם u אינו שייך למסלול, אז $\langle u, v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k \rangle$ הוא מסלול פשוט ארוך יותר מהמסלול מאורך מקסימלי – שוב סתירה.

אז v_0 עלה, ובאופן דומה v_k עלה. $v_k \neq v_0$, ולכן יש **לפחות** שני עלים.

טענה:

יהי T עץ על n קודקודים, $n \ge 2$. יהי u עלה של T, ויהי $T \setminus \{u\}$ הגרף המתקבל ע"י השמטת u והצלע שחלה ב- u.

אז $T \setminus \{u\}$ הוא גם עץ.

הוכחה:

ברור שאין ב- $T \setminus \{u\}$ מעגל. נראה ש- $T \setminus \{u\}$ קשיר: יהיו $v, w \in T \setminus \{u\}$, אז v קשור ל- w ב- T כי T קשיר, ואז קיים מסלול פשוט:
$$\langle v = v_0, v_1, \dots, v_k = w \rangle$$
ב- T. לא ייתכן ש- u מופיע במסלול הזה כי $u \neq v$, $u \neq w$, ו- $u \neq v_i$ לכל i כך ש: $1 \le i \le k-1$, כי $\deg v_i \ge 2$ לכל $1 \le i \le k-1$, אז v קשור ל- w גם ב- $T \setminus \{u\}$.

משפט:

יהי T עץ על n קודקודים. אז ל- T יש $n-1$ צלעות.

הוכחה:

נוכיח באינדוקציה על n.

- אם $n = 1$, אז T הוא קודקוד בודד, ומספר הצלעות הוא 0.
- כעת, יהי T עץ על n קודקודים, $n \ge 2$. יהי u עלה של T. אז $T \setminus \{u\}$ הוא עץ על $n-1$ קודקודים, ולכן לפי הנחת האינדוקציה יש ל- $T \setminus \{u\}$, $n-2$ צלעות, ואז ל- T יש $n-1$ צלעות.

טענה:

יהי G גרף לא מכוון וקשיר. תהי e צלע ששייכת למעגל ב- G, ויהי $G' = G \setminus \{e\}$ הגרף המתקבל מ- G ע"י השמטת הצלע e. אז G' גם קשיר.

הוכחה:

יהיו v ו- w שני קודקודים ש- e חלה בהם. יהי $\langle v = u_0, u_1, u_2, \dots u_k = w, v \rangle$ מעגל שמכיל את e (כאן e מופיעה כצלע אחרונה). נוכיח כי G' קשיר.

אז, יהיו x, y שני קודקודים שונים ב- G'. נתון ש- G קשיר, לכן קיים מסלול פשוט מ- x ל- y ב- G:

$$\langle x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_m = y \rangle$$

- אם e **אינה מופיעה** במסלול הזה, אז הוא מסלול ב- G' ולכן x קשור ל- y ב- G.
- אם e **מופיעה** במסלול, אז נניח ש- e היא הצלע בין x_i ל- x_{i+1} עבור i מסוים, אז נניח בה"כ $v = x_i$ ו- $w = x_{i+1}$, ואז:

$$\langle x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_i = v = u_0, u_1, u_2, \dots, u_k = w = x_{i+1}, \dots, x_m = y \rangle$$

מהווה טיול מ- x ל- y ב- G'. לכן x קשור ל- y ב- G'.

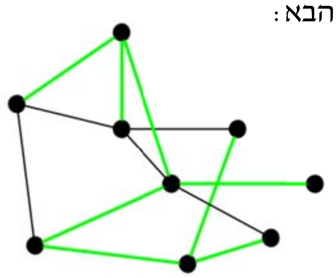
משפט:

יהי G גרף קשיר על n קודקודים. אז קיים תת-גרף T של G על אותם n הקודקודים, כך ש- T הוא עץ.

T נקרא עץ פורש (spanning tree) של G.

דוגמא:

יהא G הגרף הקשיר הבא:



אז הצלעות הירוקות הן תת גרף של G ומהוות עץ.

הוכחה:

יהי T תת-גרף קשיר של G על כל n הקודקודים של G, כך שמספר הצלעות ב- T מינימלי. אז T קשיר, ונניח בשלילה ש- T אינו עץ, ז"א שיש ב- T מעגל. תהי e צלע כלשהי במעגל ב- T, ויהי $T' = T \setminus \{e\}$ הגרף המתקבל מ- T ע"י השמטת הצלע e. מהטענה הקודמת נובע ש- T' עדיין קשיר, בסתירה למינימליות של מספר הצלעות ב- T. אז אין ב- T מעגלים ולכן T עץ.

מסקנה:

יהי G גרף קשיר על n קודקודים. אז:

$|E(G)| \geq n-1$, ומתקיים ש- $|E(G)| = n-1$ אס"ם G הוא עץ.

(כלומר, מספר הצלעות ב- G הוא לפחות $n-1$, ויהיה שווה ל- $n-1$ אם ורק אם G הוא עץ).

הוכחה:

יהי T עץ פורש של G. אז $|E(T)| = n-1$ (משפט שהוכחנו), לכן $|E(G)| \geq n-1$, ואם $|E(G)| = n-1$, אז $G = T$.

מסקנה:

יהי G גרף על n קודקודים. אז התנאים הבאים שקולים:

1. G עץ.
2. G קשיר, וכל תת-גרף ממש של G על אותם קודקודים $V(G)$, אינו קשיר.
3. G קשיר, ו- $|E(G)| = n-1$.

טענה:

יהי G יער על n קודקודים כך שיש ל- G, k רכיבי קשירות. אז:

$$|E(G)| = n-k$$

הוכחה:

יהיו $T_1, T_2, \dots, T_k$ רכיבי הקשירות של G, כאשר כל אחד מהם הוא עץ.

מהמסקנה שהוכחנו קודם:

$$\begin{gathered} |E(T_1)| = |V(T_1)| - 1 \\ |E(T_2)| = |V(T_2)| - 1 \\ \vdots \\ |E(T_k)| = |V(T_k)| - 1 \end{gathered}$$

ואם נחבר הכל ביחד נקבל:

$$|E(G)| = |V(G)| - k = n - k$$

מסקנה:

יהי G גרף על n קודקודים כך שאין ב- G מעגל פשוט (ואז אין מעגל בכלל). אז:

$|E(G)| \leq n-1$, ו- $|E(G)| = n-1$ אס"ם G הוא עץ.

הוכחה:

G יער, לכן $|E(G)| = n - k$, כאשר k הוא מספר רכיבי הקשירות של G. לכן
$|E(G)| = n - k \leq n - 1$, ויש שוויון אם ורק אם $k = 1 \Leftrightarrow G$ עץ.

מסקנה:

יהי G גרף על n קודקודים. אז התנאים הבאים שקולים:

1. G הוא עץ.
2. אין ב- G מעגלים, וכל גרף שמתקבל מ- G ע"י הוספת צלע יכיל מעגל.

הוכחה:

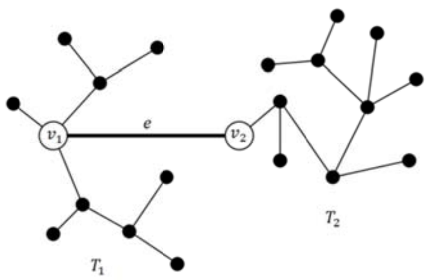
$1 \Leftarrow 2$:

נניח ש- G עץ, ויהי G' הגרף שמתקבל מ- G ע"י הוספת צלע. אז G' קשיר, ו-
$|E(G')| = |V(G')| = n$. לכן G' אינו עץ (כי יש לו יותר מידי צלעות), ואז יש מעגל ב- G'.

$2 \Leftarrow 1$:

נניח שאין ב- G מעגלים, כלומר ש- G הוא יער עם k רכיבי קשירות, וכן שכל גרף המתקבל מ- G ע"י הוספת צלע מכיל מעגל. אז אם $k = 1$ אז G הוא עץ וסיימנו. נניח בשלילה ש- $k > 1$ (כלומר ש- G הוא לא עץ), ויהיו T_1 ו- T_2 שני רכיבי קשירות של G, ויהיו $v_1 \in T_1$, ו- $v_2 \in T_2$ קודקודים. נוסיף צלע e מ- v_1 ל- v_2, ויהי $G' = G \cup \{e\}$. אז גם ב- G' אין מעגלים (יש להוכיח זאת), בסתירה להנחה על G.

המחשה:



מסקנה:

יהי G גרף קשיר על n קודקודים כך ש- $|E(G)| \geq n$, אז יש ב- G מעגל פשוט.

עצים וקומבינטוריקה:

לפני שנתחיל לעבוד עם עצים, נכליל את זהות פסקל:

טענה: (זהות פסקל המוכללת)

יהיו $q_1, q_2, \dots, q_k$ מספרים שלמים חיוביים, ויהי $n = q_1 + q_2 + \dots + q_k$. אז:

$$\binom{n}{q_1, q_2, \dots, q_k} = \binom{n-1}{q_1 - 1, q_2, \dots, q_k} + \binom{n-1}{q_1, q_2 - 1, q_3, \dots, q_k} + \dots + \binom{n-1}{q_1, q_2, \dots, q_{k-1}, q_k - 1}$$

הוכחה:

נזכר:

$$\binom{n}{q_1, q_2, \dots, q_k} = \frac{n!}{q_1!\, q_2! \cdots q_k!}$$

ביטוי זה שווה למספר הסדרות מאורך n של איברים מהקבוצה $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ שבהן c_1 מופיע q_1 פעמים, c_2 מופיע q_2 פעמים, וכו'... , ו- c_k מופיע q_k פעמים.

לכל סדרה כזאת, האיבר הראשון הוא אחד מתוך $c_1, c_2, \dots, c_k$.

- מספר הסדרות שמתחילות ב- c_1 הוא: $\binom{n-1}{q_1-1, q_2, \dots, q_k}$, שזה מספר הדרכים להשלים את הסדרה לאחר שבחרנו את האיבר הראשון.
- מספר הסדרות שמתחילות ב- c_2 הוא: $\binom{n-1}{q_1, q_2-1, q_3, \dots, q_k}$.
- וכו'....
- מספר הסדרות שמתחילות ב- c_k הוא: $\binom{n-1}{q_2, q_2, \dots, q_k-1}$.

ואלו כל האפשרויות שקיימות.

דוגמא:

נרצה למצוא את כל המילים מאורך 6 שאפשר לבנות מהאותיות במילה BANANA, אז אנחנו יודעים שהמספר הזה הוא:

$$\frac{6!}{1!\,3!\,2!}$$

- אם סדרה מתחילה ב- B, אז נשאר להשלים את הסדרה עם האותיות AAANN, יש לכך $\frac{5!}{0!3!2!}$ אפשרויות.
- אם סדרה מתחילה ב- A, אז נשאר להשלים את הסדרה עם האותיות AABNN, יש לכך $\frac{5!}{1!2!2!}$ אפשרויות.
- אם סדרה מתחילה ב- N, אז נשאר להשלים את הסדרה עם האותיות AAABN, יש לכך $\frac{5!}{1!3!1!}$ אפשרויות.

הגדרה:

עץ מתויג הוא עץ T על הקודקודים $\{1,2,3,..,n\}$.

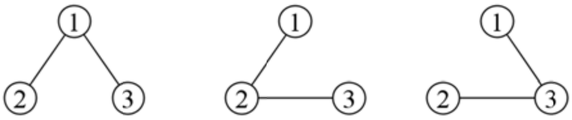
משפט: (משפט Cayley)

יהי n מספר שלם חיובי. אז מספר העצים המתויגים על n קודקודים הוא n^{n-2}.

דוגמאות:

- עבור $n = 1$: $1^{1-2} = 1^{-1} = 1$ 1

- עבור $n = 2$: $2^{2-2} = 2^0 = 1$ 
- עבור $n = 3$: $3^{3-2} = 3^1 = 3$



(אבל רק אחד עד כדי איזומורפיזם)

- עבור $n = 4$: $4^{4-2} = 4^2 = 16$.

וכו׳...

לפני ההוכחה נוכיח כמה טענות שיעזרו לנו בהמשך:

> **<u>טענה</u>**:
>
> יהי $n \geq 2$. אז יש עץ מתויג על n קודקודים כך שלכל קודקוד i, $1 \leq i \leq n$, מתקיים $\deg(i) = d_i$ אם ורק אם כל $d_i \geq 1$ ו- $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2n - 2$.

<u>הוכחת הטענה</u>:

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>:

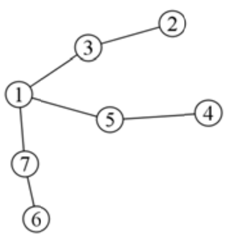
אם קיים עץ T כזה, אז $\deg(i) \geq 1$ לכל קודקוד i (כי T קשיר, ולכן אין קודקוד בודד), ו-

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(i) = 2|E| = 2(n-1) = 2n-2$$

למשל קיים עץ על 7 הקודקודים $\{1,2,\dots,7\}$ כך ש-

$$\deg(1) = 3 \quad , \quad \deg(2) = 1 \quad , \quad \deg(3) = 2 \quad , \quad \deg(4) = 1$$
$$\deg(5) = 2 \quad , \quad \deg(6) = 1 \quad , \quad \deg(7) = 2$$

למשל:



<u>כיוון $\Rightarrow$</u>:

נוכיח באינדוקציה על n.

אם $n = 2$, אז האפשרות היחידה היא $d_1 = d_2 = 1$, והעץ הוא: 

כעת, יהי $n \geq 3$, ונניח שהטענה נכונה עבור $n-1$, נוכיח עבור n. תהי $\langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$ סדרה של n מספרים שלמים חיוביים כך ש- $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2n-2$. אז קיים i כך ש- $d_i = 1$, כי אחרת, אם $d_i \geq 2$ לכל i אז:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \geq \underbrace{2+2+\cdots+2}_{\text{פעמים } n} = 2n$$

והנחנו שהסכום הוא $2n-2$. (למעשה יש לפחות שני d_i ששווים ל- 1). אז נניח בה"כ ש- $d_1 = 1$.

באופן דומה, יש j כך ש- $d_j \geq 2$, כי אחרת $d_j = 1$ לכל j, ואז:

$$\sum_{j=1}^{n} d_j = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{פעמים } n} = n < 2n-2$$

כי הנחנו ש- $n \geq 3$. אז נניח בה"כ ש- $d_2 \geq 2$.

כעת, מהנחת האינדוקציה, יש עץ T על הקודקודים $\{2,3,\dots,n\}$ כך ש- $\deg(2) = d_2 - 1 \geq 1$, $\deg(3) = d_3$, … , $\deg(n) = d_n$.

נוסיף את הקודקוד 1, וצלע בין הקודקודים 1 ו- 2. הגרף המתקבל הוא עץ (יש להוכיח) שמקיים את הטענה.

זה מסיים את האינדוקציה.

<u>טענה</u>:

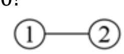
יהי $n \geq 2$. מספר העצים המתויגים על n קודקודים כך שסדרת הדרגות היא: $\langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$, כאשר $d_i \geq 1$ לכל i, ו- $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$,

הוא:

$$\binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_n-1} = \frac{(n-2)!}{(d_1-1)!\,(d_2-1)!\cdots(d_n-1)!}$$

<u>הוכחה</u>:

נוכיח באינדוקציה על n.

- אם $n=2$, אז $d_1 = d_2 = 1$, ו- $\binom{n-2}{d_1-1, d_2-1} = \frac{0!}{0!0!} = 1$.
  יש באמת רק עץ אחד כזה: 

- כעת, יהי $n \geq 3$ ונניח שהטענה נכונה עבור $n-1$, נראה נכונות עבור n. אז שוב, קיים i כך ש- $d_i = 1$, ונניח בה"כ ש- $d_n = 1$. לכל עץ מתויג T על n קודקודים עם סדרת הדרגות הנתונה: $\langle d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, d_n = 1 \rangle$, הקודקוד n הוא **עלה**, והוא מחובר לקודקוד j מסוים, $1 \leq j \leq n-1$. j אינו עלה, כי $n \geq 3$, ולכן: $d_j \geq 2$.

נסיר את n ואת הצלע בין n ל- j מהעץ. סדרת הדרגות המתקבלת עבור העץ T' על $1, \dots, n-1$ היא: $\langle d_1, d_2, \dots, d_{j-1}, d_j - 1, d_{j+1}, \dots, d_{n-1} \rangle$.

אז, מהנחת האינדוקציה, מספר האפשרויות עבור T' הוא:

$$\binom{(n-1)-2}{d_1 - 1\,,\ d_2 - 1\,, \dots,\ d_{j-1} - 1\,,\ d_j - 2\,,\ d_{j+1} - 1\,,\ \dots\ ,\ d_{n-1} - 1}$$

יש לבנות את הסכום עבור כל האפשרויות עבור j, $1 \le j \le n-1$, ולכן מספר העצים על n קודקודים עם סדרת הדרגות: $\langle d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, d_n = 1 \rangle$ הוא:

$$\binom{n-3}{d_1 - 2\,,\ d_2 - 1\,, \dots,\ d_{n-1} - 1\,, \underbrace{d_n - 1}_{=0}} + \binom{n-3}{d_1 - 1\,,\ d_2 - 2\,, \dots,\ d_{n-1} - 1\,, \underbrace{d_n - 1}_{=0}} + \cdots + \binom{n-3}{d_1 - 1\,,\ d_2 - 1\,, \dots,\ d_{n-1} - 2\,, \underbrace{d_n - 1}_{=0}}$$

ולפי זהות פסקל המוכללות, זה שווה ל:

$$\binom{n-2}{d_1 - 1\,, d_2 - 1\,, \dots, d_n - 1}$$

וזה מסיים את האינדוקציה.

<u>**נחזור להוכחת משפט קיילי**</u>:

מספר העצים המתויגים על n קודקודים, $n \ge 2$ הוא:

$$\sum_{\substack{d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2n-2 \\ \forall\, d_i \ge 1}} \binom{n-2}{d_1 - 1\,, d_2 - 1, \dots, d_n - 1}$$

נציב: $q_i = d_i - 1$ לכל $1 \le i \le n$, אז:

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n - n = (2n-2) - n = n - 2$$

ולכן, נקבל שמספר העצים כנ"ל הוא:

$$\sum_{\substack{q_1+q_2+\cdots+q_n=n-2 \\ \forall\, q_i\geq 0}} \binom{n-2}{q_1, q_2, \dots, q_n} = \Big(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{פעמים } n}\Big)^{n-2}$$

זה בדיוק הנוסחה של המקדמים המולטי-נומיאליים:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n = \sum_{\substack{q_1+q_2+\cdots+q_t=n \\ \forall\, q_i\geq 0}} \binom{n}{q_1\,, q_2\,, q_3\,, \dots\,, q_k} x_1^{q_1} x_2^{q_2}\cdot \dots \cdot x_k^{q_k}$$

כאשר $k=n$, והחזקה היא $n-2$, וכל $x_i=1$.

אפשר להשתמש במשפט קיילי כדי לענות על שאלות דומות.

דוגמא:

נמצא את מספר העצים המתויגים על n קודקודים, $n\geq 2$, שבהם קיימת צלע מקודקוד 1 לקודקוד 2.

אז, נסמן ב- x את מספר העצים שמכילים צלע בין 1 ל- 2. אז נתונים שני קודקודים i ו- j כלשהם. מספר העצים שמכילים צלע בין i ל- j הוא גם x.

תהי S קבוצת כל הזוגות הסדורים מהצורה $\langle T, e\rangle$, כאשר T עץ מתויג על $n\geq 2$ קודקודים, ו- e צלע ב- T. נחשב את $|S|$ ב- 2 דרכים שונות:

<u>דרך 1</u>: ממשפט קיילי, יש n^{n-2} אפשרויות עבור T. לכל T יש $n-1$ אפשרויות עבור צלע e ששייכת ל-T. אז: $|S|=n^{n-2}(n-1)$.

<u>דרך 2</u>: יש $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ אפשרויות עבור e (זוג כלשהו של קודקודים). לכל בחירה של e מספר העצים שמכילים את e הוא x. לכן: $|S|=\binom{n}{2}x$.

אזי קיבלנו: $\frac{n(n-1)}{2}x=|S|=n^{n-2}(n-1)$, ולכן: $x=2n^{n-3}$.

משפחות של גרפים לא מכוונים:

1. K_n הוא הגרף השלם על n קודקודים.
כאן $|V(K_n)|=n$, ו- $|E(K_n)|=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ (כל זוג לא סדור של קודקודים מהווה צלע).

K_n הוא $(n-1)$-רגולרי, כלומר $\deg(v)=n-1$ לכל קודקוד v.

2. לכל $n\geq 3$, C_n הוא מעגל פשוט באורך n (n-cycle).
כאן $|V(C_n)|=n$, ו- $|E(C_n)|=n$.

C_n הוא 2-רגולרי.

3. לכל $n \geq 1$, Q_n הוא הגרף הבא (n-cube):

$$V(Q_n) = \text{קבוצת כל הסדרות הבינאריות מאורך } n$$

ואז:

$$|V(Q_n)| = 2^n$$

ויש צלע בין $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ לבין $\langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ אם קיים אינדקס i אחד ויחיד כך ש-$a_i \neq b_i$.

Q_n הוא n-רגולרי. אז:

$$2 \cdot |E(Q_n)| = \sum_{i=1}^{2^n} \deg(v_i) = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{\text{פעמים } 2^n} = n \cdot 2^n$$

ולכן:

$$|E(Q_n)| = n \cdot 2^{n-1}$$

אפשר להוכיח גם ש- Q_n הוא דו-חלקי.

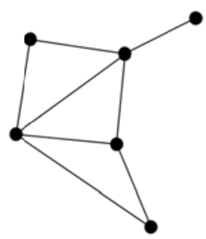
<u>גרפים מישוריים:</u>

<u>הגדרה</u>:

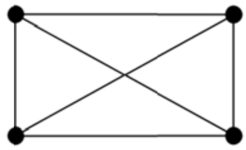
גרף (או פסאודו-מולטי גרף) G מכוון או לא מכוון, נקרא <u>גרף מישורי</u> אם קיים ייצוג של הגרף במישור כך שאין נקודות חיתוך בין הצלעות, חוץ מנקודות הקצה של הצלעות.

<u>דוגמאות</u>:

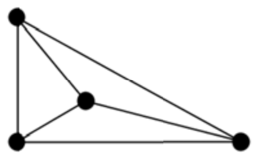
1. הגרף הבא הוא מישורי:



2. הגרף K_4:



הוא מישורי, כי יש לו הייצוג:



<u>הערות</u> :

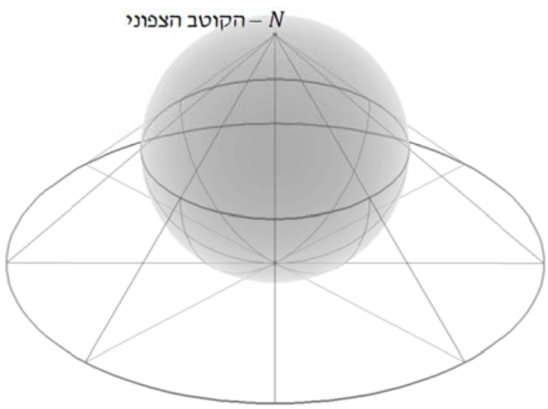
1. לולאות וצלעות כפולות **אינן** משפיעות על היותו של גרף או מולטי-גרף כלשהו מישורי או לא מישורי. לכן נוכל לעבוד בגרפים ולא בפסאודו-גרפים או מולטי-גרפים.

2. באופן דומה, נראה שאפשר לעבוד בגרפים שאפשר לשכן במשטח של כדור :

נוכיח שהם בדיוק גרפים מישוריים :

- אם גרף G הוא מישורי, אז אפשר לצייר אותו על רצפה – שהיא למעשה חלק מכדור הארץ העגול.
- מצד שני, יהי G גרף שנמצא על (המשטח של) כדור. אז אפשר להטיל את כל הנקודות שנמצאות על הכדור (חוץ מאחת מהן) על המישור. הטלה זו נקראת <u>הטלה סטריאוגרפית</u>.

נטיל את כל הנקודות שנמצאות על הכדור ושונות מ- N, על המישור באופן הבא :



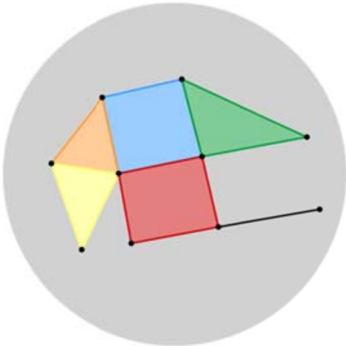
מתוך <u>ויקיפדיה</u>

לכל $P \neq N$ על הכדור, נבנה את הקרן $\overrightarrow{NP}$. תהי P' נקודת החיתוך בין הקרן לבין המישור. הפונקציה ששולחת P ל- P' היא חח״ע ועל (לא נוכיח זאת).

יהי G (ייצוג של) גרף מישורי. אז G מחלק את המישור לתחומים שנקראים <u>פאות</u> (faces).
שתי נקודות במישור שייכות לאותה הפאה אם אפשר להגיע מאחת לשניה מבלי לחצות צלע של הגרף G. יש בדיוק פאה אחת שהיא **אינסופית**.

<u>דוגמא</u> :

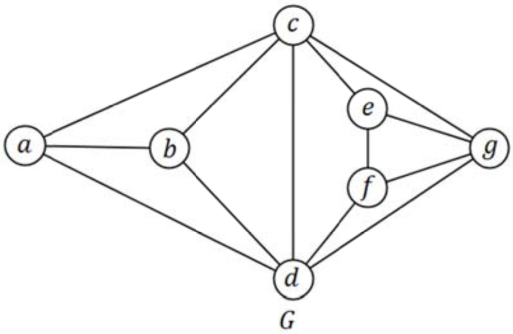
בגרף הבא, כל צבע הוא פאה:

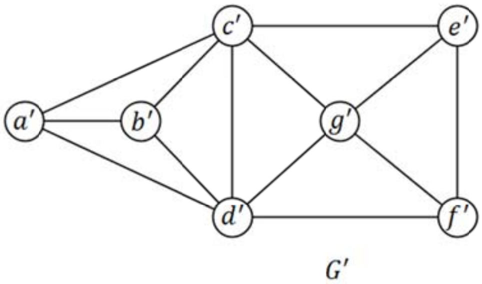


לעומת זאת, **בכדור** כל הפאות הן סופיות.
הפאה האינסופית תהיה ההיטל של הפאה בכדור שמכילה את הקוטב הצפוני. נשים לב שככל שמתקרבים לקוטב הצפוני, ההיטל נהיה יותר ויותר ארוך, ולכן זה מתיישב אם הטענה הזו.

<u>הערה</u>:

נניח ש- G ו- G' גרפים מישוריים איזומורפיים, למשל:





נסתכל על הפאות בשני הגרפים:

ב- G יש 6 משולשים, ושני מרובעים (כולל הפאה האינסופית).
ב- G' יש 7 משולשים ומחומש אחד (הפאה האינסופית).

לכן לא נוכל באופן אוטומטי להרחיב איזומורפיזם של גרפים לאיזומורפיזם בין פאות.
כלומר, הפאות תלויות בייצוג של הגרף, ולא רק בגרף עצמו.

מצד שני, **מספר הפאות** שווה 8 גם ב- G, וגם ב- G'.

<u>משפט</u>: (נוסחת אויילר)

יהי G (ייצוג של) גרף מישורי במישור או בכדור. נסמן ב- v את מספר הקודקודים של G, נסמן ב- e את מספר הצלעות של G, ונסמן ב- f את מספר הפאות של G.

נניח בנוסף ש- G קשיר. אז:

$$v - e + f = 2$$

(בפרט, מספר הפאות איננו תלוי בייצוג הספציפי של G).

<u>הוכחה</u>:

יהי G גרף מישורי וקשיר על v קודקודים, ונסתכל על ייצוג כלשהו של G במישור.
נוכיח באינדוקציה על e שהנוסחה מתקיימת.

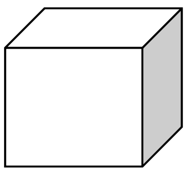
- בסיס האינדוקציה: $e = v - 1$, כי הוכחנו שכל גרף קשיר על v קודקודים, מכיל לפחות $v - 1$ צלעות, משום שיש לו עץ פורש. אז G הוא עץ, ולכן אין בו מעגלים. אזי יש רק פאה אחת – שהיא הפאה האינסופית. לכן במקרה זה: $v = v$, $e = v - 1$, ו-$f = 1$, ואכן: $v - e + f = 2$.

- כעת, יהי $e \geq v$, ונניח שהנוסחה תקפה עבור גרף מישורי קשיר כלשהו על v קודקודים, ו-$e - 1$ צלעות. G אינו עץ, לכן יש בו מעגל פשוט.
תהי ϵ צלע כלשהי ששייכת למעגל הזה, ויהי $G' = G \setminus \{\epsilon\}$ הגרף המתקבל מ-G על-ידי השמטת הצלע הזו. הצלע ϵ גובלת בשתי פאות שונות ב-G, שיהפכו לפאה אחת לאחר שנסיר את ϵ. אז:
$$v' = v$$
$$e' = e - 1$$
$$f' = f - 1$$
ואז מהנחת האינדוקציה:
$$v' - e' + f' = 2$$
ולכן:
$$v - (e - 1) + (f - 1) = 2$$
$$\Rightarrow v - e + f = 2$$

זה מסיים את האינדוקציה.

__הערה__:

הנוסחה הזו גם תקפה לגביי פאונים, למשל קוביה:



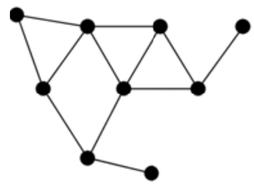
כאן: $v = 8$, $e = 12$, $f = 6$, ובסה״כ: $v - e + f = 2$.

__משפט__:

יהי G גרף מישורי וקשיר על v קודקודים, כאשר $v \geq 3$. אז מספר הצלעות e של G מקיים את אי-השוויון:
$$e \leq 3v - 6$$

__הוכחה__:

נתון (ייצוג של G) במישור, למשל:



יהי G' הגרף המתקבל מ- G ע״י הוספת צלעות מכל קודקוד מדרגה 1 לקודקוד אחר, כך ש- G' עדיין מישורי. אם אי-השוויון $e \le 3v-6$ יתקיים ב- G', אז בטוח הוא יתקיים ב- G (כי יש ב- G מספר צלעות שקטן או שווה למספר הצלעות ב- G').

לכן נניח שב- G עצמו אין קודקוד מדרגה 1.
במקרה זה, השפה של כל פאה (הצלעות שתוחמות אותה) תהיה מעגל פשוט באורך לפחות 3.
ז״א ש- $2e \ge 3f$, כי ספרנו כל צלע פעמיים (ואם כל פאה היא משולש יתקיים השוויון).

לכן: $f \le \frac{2}{3}e$, ולכן:

$$2 = v - e + f \le v - e + \frac{2}{3}e = v - \frac{1}{3}e$$
$$\Rightarrow 2 \le v - \frac{1}{3}e$$
$$\Rightarrow 6 \le 3v - e$$
$$\Rightarrow e + 6 \le 3v$$

ולסיום זה גורר ש:

$$e \le 3v - 6$$

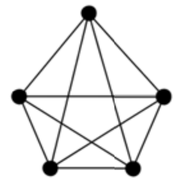
כפי שרצינו.

מסקנה:

אם G גרף קשיר על $v \ge 3$ קודקודים, ו- $e > 3v-6$, אז G אינו מישורי.

דוגמא:

K_5 אינו מישורי:



זה מכיוון ש- $v=5$, $e=\binom{5}{2}=10$, ו- $3v-6=15-6=9$, ולכן: $e>3v-6$.

טענה:

יהי G גרף. אז התנאים הבאים שקולים:

1. G מישורי.
2. כל רכיב קשירות של G מישורי.
3. כל תת-גרף של G מישורי.

למשל, אפשר להראות ש- K_n אינו מישורי לכל $n \geq 5$, משום ש- K_5 תת-גרף לא מישורי של K_n.
מצד שני, K_n כן מישורי לכל $1 \leq n \leq 4$.

<u>משפט</u>:

יהי G גרף מישורי קשיר על $v \geq 3$ קודקודים שאין בו משולשים (כלומר, אין מעגל פשוט באורך 3). אז:

$$e \leq 2v - 4$$

<u>הוכחה</u>:

שוב אפשר להניח שאין קודקוד מדרגה 1. הפעם לכל פאה יש לפחות 4 צלעות שגובלות איתה, ולכן $2e \geq 4f$ (שוב ספרנו כל צלע פעמיים). אז:

$$f \leq \frac{1}{2}e$$

ולכן:

$$2 = v - e + f \leq v - e + \frac{1}{2}e = v - \frac{1}{2}e$$
$$\Rightarrow 2 \leq v - \frac{1}{2}e$$
$$\Rightarrow 4 \leq 2v - e$$

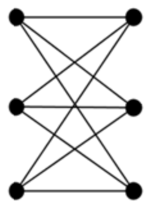
ולבסוף:

$$e \leq 2v - 4$$

כפי שרצינו.

<u>דוגמא</u>:

הגרף $K_{3,3}$ אינו מישורי:



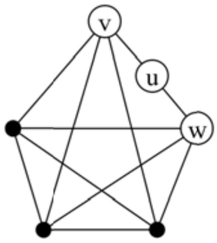
כאן: $v = 6$, $e = 9$.
אז מתקיים: $e \leq 3v - 6$, כי $9 \leq 18 - 6 = 12$, אבל: $K_{3,3}$ דו-חלקי, ולכן אין בו משולש.

אז $e \leq 2v - 4$ תנאי הכרחי לכך ש- $K_{3,3}$ יהיה מישורי, אבל $2v - 4 = 2 \cdot 6 - 4 = 8$, ו- $e = 9$. אז: $e > 2v - 4$, ולכן $K_{3,3}$ אינו מישורי.

<u>הערה</u>:

הוכחנו כי K_5 אינו מישורי.
אם היינו מחליפים אחת מהצלעות בשתי צלעות שחלות בקודקוד **חדש** מדרגה 2, הגרף

המתקבל עדיין לא היה מישורי. למשל:



אז בהוספת הקודקוד u, החלפנו את הצלע $\{v,w\}$ בשתי הצלעות: $\{v,u\}$, ו- $\{u,w\}$ וגם כעת הגרף אינו מישורי.

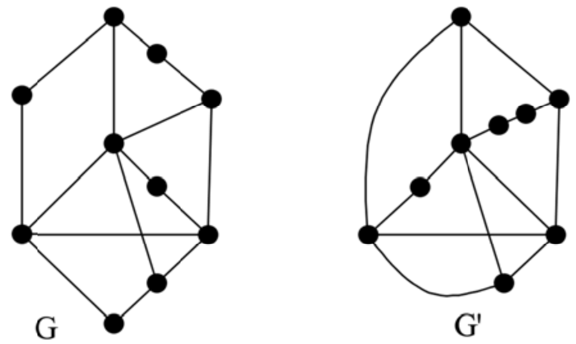
<u>הגדרה</u>:

יהיו G ו- G' גרפים לא מכוונים. נאמר ש- G <u>הומיאומורפי</u> (homeomorphic) ל- G', אם קיימת סדרה סופית:

$$G = H_0, H_1, H_2, \dots, H_k = G'$$

של גרפים כך שכל H_{i+1} מתקבל מ- H_i ע״י החלפת צלע בשתי צלעות וקודקוד חדש מדרגה 2, או להפך.

<u>דוגמא</u>:



<u>הערה</u>:

הומיאומורפיזם הוא יחס שקילות.

<u>משפט</u>:

אם G ו- G' **הם** גרפים הומיאומורפיים, אז G מישורי $\Leftrightarrow$ G' מישורי.

ללא הוכחה.

<u>משפט</u>: (משפט Kuratowski)

יהי G גרף לא-מכוון. G מישורי אס״ם **אין** ל- G תת-גרף הומיאומורפי ל- K_5 או ל- $K_{3,3}$.

<u>במילים אחרות</u>: G אינו מישורי אס״ם **יש** ל- G תת-גרף הומיאומורפי ל- K_5 או ל- $K_{3,3}$.

<u>הוכחה</u>:

את הכיוון $\Leftarrow$ לא נוכיח.

הכיוון $\Rightarrow$ הוא מיידי – אם יש ל- G תת-גרף הומיאומורפי ל- K_5 או ל- $K_{3,3}$, כלומר תת-גרף לא מישורי, אז גם G לא יהיה מישורי.

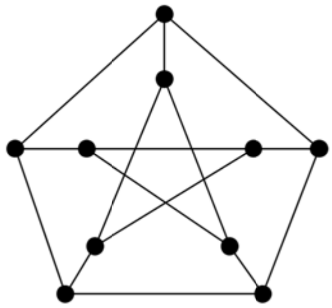
דוגמא:

יהי G גרף **כך** ש- $|E(G)| \leq 8$, אז G מישורי. זה מכיוון שלא ייתכן שיש ל- G תת-גרף הומיאומורפי ל- K_5, כי לתת-גרף כזה היו לפחות 10 צלעות.

גם אין ל- G תת-גרף הומיאומורפי ל- $K_{3,3}$, כי יש ל- $K_{3,3}$ 9 צלעות.

דוגמא:

גרף פיטרסן (Petersen), הוא הגרף G הבא:

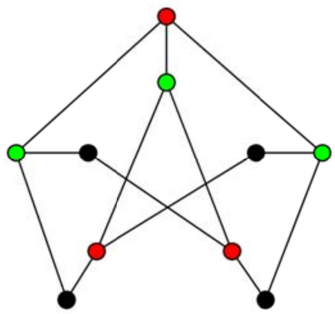


כאן: $v = 10$, ו- $e = 15$, ולכן אי השוויון: $e \leq 3v - 6$ מתקיים. אז ייתכן שהגרף הוא מישורי וייתכן שלא.

נשים לב שאין משולש בגרף הזה, אז אם הוא מישורי, צריך להתקיים ש- $e \leq 2v - 4$, כלומר ש- $15 \leq 20 - 4 = 16$. אבל זה עדיין לא מוכיח דבר.

נחפש ב- G תת-גרף הומיאומורפי ל- K_5, או ל- $K_{3,3}$:

- לא ייתכן שיש תת-גרף הומיאומורפי ל- K_5, משום שאין ב- G קודקודים מדרגה 4 או יותר.
- אז נחפש תת-גרף הומיאומורפי ל- $K_{3,3}$, ואכן תת-הגרף הבא הוא הומיאומורפי ל- $K_{3,3}$:



לכן G **אינו** מישורי.

הערה:

בדוגמא הספציפית הזאת, יש עוד הוכחה ש- G אינו מישורי. ההוכחה מבוססת על העובדה שאין ב- G משולש, וגם אין מרובע, כלומר אין מעגל פשוט מאורך 4. לכן, אם G היה מישורי, הוא היה מקיים אי-שוויון חזק יותר מ- $e \leq 2v - 4$, ומסתבר ש- G אינו מקיים אותו.

<u>טענה</u>:

יהי G גרף לא מכוון על n קודקודים, כאשר $n \leq 7$. אז לפחות אחד מ- G, ו- $\overline{G}$ הוא מישורי.

<u>הוכחה</u>:

נניח קודם ש- $n \leq 6$, ויהי G גרף על n קודקודים. אז:

$$|E(G)| + \left|E\left(\overline{G}\right)\right| = |E(K_n)| \leq |E(K_6)| = \binom{6}{2} = 15$$

כלומר, קיבלנו: $|E(G)| + \left|E\left(\overline{G}\right)\right| \leq 15$, ולכן לאחד (לפחות) מ- G, ו- $\overline{G}$ יש 7 צלעות לכל היותר (כי אחרת שניהם היו לפחות 8 ואז השוויון היה שקרי), ואז הוא מישורי.

כעת, יהי $n = 7$, ונניח בשלילה ש- G ו- $\overline{G}$, שניהם אינם מישוריים. אז לפי משפט קורטובסקי ישנם 3 מקרים:

<u>מקרה 1</u>:

יש ל- G תת-גרף H_1 הומיאומורפי ל- K_5, ויש גם ל- $\overline{G}$ תת-גרף H_2 הומיאומורפי ל- K_5. אז יש ל- H_1 5 קודקודים בעלי דרגה 4, ויש גם ל- H_2 5 קודקודים בעלי דרגה 4.

אבל G מכיל רק 7 קודקודים, ולכן אם קיים קודקוד u כך ש- $\deg_{H_1}(u) = 4$, וגם $\deg_{H_2}(u) = 4$. אז $\deg_G(u) \geq 4$, וגם $\deg_{\overline{G}}(u) \geq 4$, ואז: $\deg_{K_7}(u) \geq 8$, וכמובן שזה לא נכון. קיבלנו סתירה.

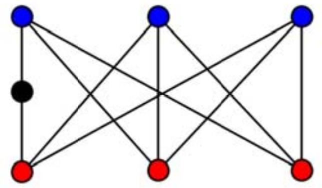
<u>מקרה 2</u>:

יש ל- G תת-גרף H_1 הומיאומורפי ל- K_5, ויש ל- $\overline{G}$ תת-גרף H_2 הומיאומורפי ל- $K_{3,3}$. אז ל- H_1 יש 5 קודקודים בעלי דרגה 4, ויש ל- H_2 6 קודקודים בעלי דרגה 3.

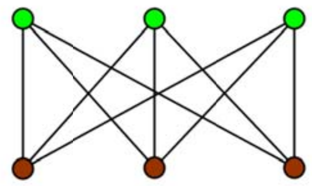
אבל G מכיל רק 7 קודקודים, לכן אם קיים קודקוד u, כך ש- $\deg_{H_1}(u) = 4$, וגם $\deg_{H_2}(u) = 3$. אז: $\deg_G(u) \geq 4$, וגם $\deg_{\overline{G}}(u) \geq 3$, ואז: $\deg_{K_7}(u) \geq 7$, וזו שוב סתירה.

<u>מקרה 3</u>:

יש ל- G תת-גרף H_1 הומיאומורפי ל- $K_{3,3}$, ויש גם ל- $\overline{G}$ תת-גרף H_2 הומיאומורפי ל- $K_{3,3}$. אז יש ל- H_1 3 קודקודים (נניח כחולים) מדרגה 3, ו- 3 קודקודים (נניח אדומים) מדרגה 3, ואולי קודקוד נוסף (נניח שחור) מדרגה 2, כך שאין צלעות (או זוג צלעות + הקודקוד מדרגה 2) בין 2 קודקודים מאותו הצבע:



באופן **דומה**, H_2 נראה כך:



אז יש לפחות 5 קודקודים שהם צבעוניים גם ב- G וגם ב- $\overline{G}$. (החיתוך בין שתי תת-קבוצות בנות 6 איברים של קבוצה בת 7 איברים מכיל לפחות 5 איברים).

$$6 \le |A \cup B| \le 7$$

אז יש 3 מהם שמקבלים אותו הצבע (נגיד כחול) ב- H_1, ואז יש 2 מהם שמקבלים אותו הצבע גם ב- H_2 (נגיד ירוק), ואז יש קודקודים u, v ששניהם כחולים ב- H_1 וירוקים ב- H_2.

אז: $H_1(u) = 3$, ו- $H_2(U) = 3$, ולכן ב- K_7:

$$\deg_{K_7}(u) \ge \deg_{H_1}(u) + \deg_{H_2}(u) + 1 = 7$$

כי הצלע $\{u, v\}$ אינה שייכת לא ל- H_1 וגם לא ל- H_2. זאת סתירה. ■

קיימת גם טענה הפוכה:

<u>**טענה**</u>:

יהי G גרף על n קודקודים, כאשר $n \ge 11$. אז לפחות אחד מ- G ו- $\overline{G}$ **אינו** מישורי.

<u>**הוכחה**</u>:

נוכיח עבור $n = 11$.

$|V(G)| = \left|V\left(\overline{G}\right)\right| = 11$, לכן אם שניהם מישוריים, אז:

$$|E(G)| \le 3 \cdot 11 - 6 = 27$$
$$\left|E\left(\overline{G}\right)\right| \le 27$$

ואז:

$$|E(K_{11})| = |E(G)| + \left|E\left(\overline{G}\right)\right| \le 54$$

אבל:

$$|E(K_{11})| = \binom{11}{2} = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

לכן קיבלנו: $54 \le |E(K_{11})| = 55$, וזו כמובן סתירה.

אם $n > 11$, הפער יהיה עוד יותר גדול.

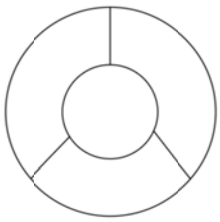
צביעת מפות:

באמצע המאה ה-19, קרטוגרף אנגלי בשם פרנסיס גאטרי (Francis Guthrie) שם לב שכדי לצבוע את המדינות במפה בצבעים שונים, כך שאין 2 מדינות שכנות בעלות אותו הצבע, אפשר להסתפק ב-4 צבעים בלבד.

אחיו היה מתמטיקאי, והוא שאל את המתמטיקאים הגדולים באותה תקופה אם הם מכירים הוכחה של התוצאה הזאת. לא חל, הרבה זמן, ומתמטיקאי בשם אלפרד קמפ (Kempe), הוכיח את המשפט שארבעה צבעים מספיקים.

כ-11 שנים מאוחר יותר, עוד מתמטיקאי בשם היווד (Heawood) מצא שגיאה בהוכחה של קמפ. הוא שיפר את ההוכחה מספיק כדי להוכיח ש- 5 צבעים מספיקים.

מצד שני, צריך לפחות 4 צבעים. למשל במפה הבאה, אי אפשר להסתפק בפחות מ-4:



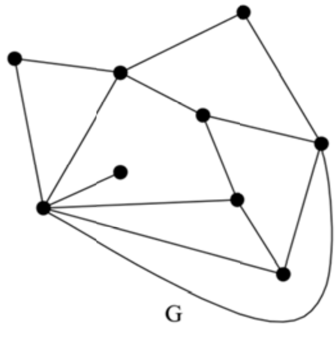
ב- 1976, שני אנשי מחשב אמריקאים וולפגאנג האקן (Haken) וקנת אפל (Appel) הוכיחו בעזרת מחשב שאם יש דוגמא נגדית, אז היא חייבת להכיל אחד מ- 1936 גרפים מסוימים. כל אחד מהמקרים של אותם גרפים נבדק והוביל לסתירה, כלומר הוא לא מהווה דוגמא נגדית.

לכן הטענה המקורית שכל מפה אפשר לצבוע ב- 4 צבעים בלבד, ככל הנראה נכונה.

<u>הערה</u>:

במקום לצבוע מפה (כלומר, לצבוע את הפאות של גוף מישורי), קל יותר לצבוע קודקודים. כדי לעשות זאת, נגדיר את <u>הגרף הדואלי</u> של (ייצוג של) גרף מישורי.

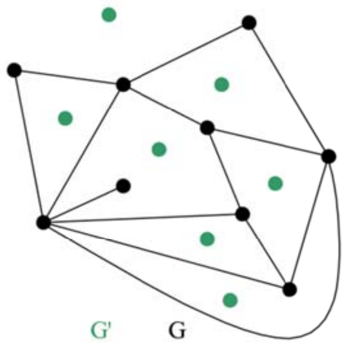
נתון ייצוג של גרף מישורי G, למשל:



G

נבנה גרף (למעשה פסאודו-מולטיגרף באופן כללי) דואלי G' באופן הבא:

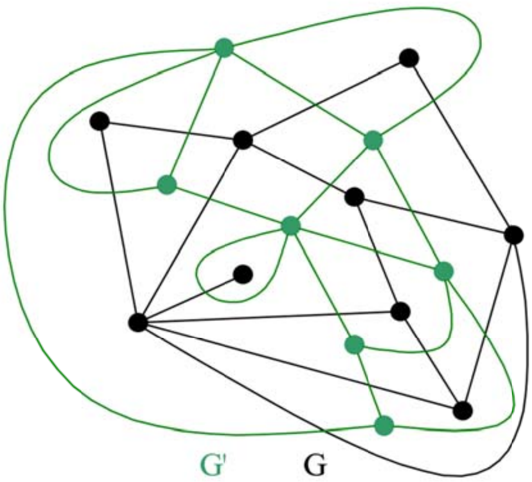
1. בכל פאה (כולל הפאה האינסופית) של G נשים קודקוד של G':



אז מתקיים:

$$|V(G')| = |F(G)|$$

2. לכל צלע ב- G שגובלת בין שתי פאות או בין פאה לעצמה, נעביר צלע ב- G' שמחברת בין שני הקודקודים ב- G' שמתאימים לפאות האלה (או מקודקוד של G' לעצמו אם הצלע גובלת רק בפאה אחת כפי שנראה), כך שהצלע החדשה חותכת את הצלע מ- G בנקודה אחת:



לפי בניה זו מתקיים:

$$|E(G')| = |E(G)|$$

<u>משפט</u>:

הגרף G' שהתקבל הוא גם (פסאודו-מולטי) גרף מישורי.

אז, מכיוון ש-

$$|V(G')| - |E(G')| + |F(G')| = |V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$$

(אם G קשיר), אז: $|F(G')| = |V(G)|$.

<u>הערה</u>:

יש לולאה ב- G' אס"ם יש קודקוד מדרגה 1 ב- G.
יש צלע כפולה ב- G' אס"ם יש קודקוד מדרגה 2 ב- G.

לכן, מהערה הנ"ל, אם $\deg(v) \geq 3$ לכל v ב- G, אז G' יהיה גרף בלי לולאות ובלי צלעות כפולות.

צביעת **הפאות** של G מתאימה לצביעת **הקודקודים** של G' כך שאין שני קודקודים שכנים מאותו הצבע. למעשה, צביעת קודקודים אינו דבר שמוגבל רק לגרפים מישוריים, כפי שמשתמע מההגדרה הבאה:

הגדרה:

יהי G גרף לא מכוון כלשהו. צביעת הקודקודים של G ב- k צבעים, היא פונקציה:

$$f: V(G) \to \{1,2, \dots, k\}$$

כך שלכל שני קודקודים $v, w \in V(G)$ שהם שכנים ב- G, מתקיים: $f(v) \neq f(w)$.

נאמר ש- f היא k-צביעה (k-coloring) של G.
נאמר ש- G הוא k-צביע (k-colorable), אם קיימת k-צביעה של G.

סימון: נסמן ב- $\chi(G)$ את המספר הכרומטי (chromatic number) של G, שהוא הערך **המינימלי** של k כך ש- G הוא k-צביע.

טענה:

יהי G גרף מישורי. אז קיים קודקוד u של G כך ש- $\deg(u) \leq 5$.

הוכחה:

אפשר להניח ש- G קשיר, אחרת נטפל בכל רכיב קשירות בנפרד.

ברור שהטענה נכונה לכל G כך ש- $|V(G)| \leq 6$, לכן נניח ש- $|V(G)| \geq 7$. אז G מישורי, ויש לפחות 3 קודקודים, ולכן: $|E(G)| \leq 3|V(G)|$.

נניח בשלילה ש- $\deg(u) \geq 6$ לכל $u \in V(G)$, אז:

$$2|E(G)| = \sum_{u\in V} \deg(u) \geq \sum_{u \in V} 6 = 6 \cdot |V(G)|$$

מצד שני:

$$2|E(G)| \leq 6|V(G)| - 12$$

לכן קיבלנו:

$$6|V(G)| - 12 \geq 6|V(G)|$$

ולכן סתירה.

משפט:

יהי G גרף מישורי. אז $\chi(G) \leq 6$.

הוכחה:

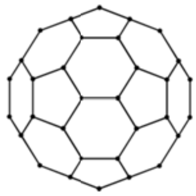
שוב, אפשר להניח ש- G קשיר. נניח בשלילה שיש דוגמא נגדית, ונבחר בדוגמא נגדית G שמכילה את המספר המינימאלי של קודקודים. אז ברור ש- $|V(G)| \geq 7$, ומהטענה הקודמת נובע שקיים קודקוד u כך ש- $\deg(u) \leq 5$.

יהי $G' = G \setminus \{u\}$ הגרף המתקבל מ- G על-ידי הסרת הקודקוד u וכל הצלעות החלות ב- u. מהמינימאליות של G נובע ש- $\chi(G') \leq 6$.
נצבע את G ב- 6 צבעים (או פחות), ונחזיר את u ואת הצלעות שחלות ב- u. יש ל- u חמישה שכנים לכל היותר, ואפילו אם כולם קיבלו צבעים שונים, נשאר צבע אחד לפחות עבור u.
אז: $\chi(G) \leq 6$, בסתירה להנחה ש- G דוגמא נגדית למשפט. ■

הערה:

אם היינו יכולים שבגרף מישורי ש תמיד קודקוד u כך ש- $\deg(u) \leq 4$, אז היינו יכולים להוכיח באופן דומה ש- $\chi(G) \leq 5$ לכל גרף מישורי G.

אבל זה אינו נכון, למשל בגרף דואלי לגרף של כדורגל:



בגרף הדואלי: $\deg(u) = 5$ או $\deg(u) = 6$ לכל קודקוד u.

משפט: (משפט Heawood)

יהי G גרף מישורי. אז $\chi(6) \leq 5$.

הוכחה:

בדומה להוכחה של המשפט הקודם, אפשר להניח ש- G קשיר. ושוב, נניח שקיימת דוגמא נגדית. נבחר בדוגמא נגדית G עם המספר המינימאלי של קודקודים. אז $|V(G)| \geq 6$.

יהי u קודקוד כך ש- $\deg(u) \leq 5$, ויהי $G' = G \setminus \{u\}$. אז $\chi(G') \leq 5$ בגלל המינימאליות של G. נצבע את הקודקודים של G' ב- 5 צבעים או פחות.

- אם $\deg(u) \leq 4$, או אם $\deg(u) = 5$, ויש ל- u שני שכנים שקיבלו אותו הצבע, אז נשאר צבע אחד עבור u, ולכן $\chi(G) \leq 5$, וקיבלנו סתירה.

- אז נניח ש- $\deg(u) = 5$, וכל השכנים של u קיבלו צבעים **שונים**. נניח גם שכל הפאות ב- G הן משולשים – תמיד אפשר להוסיף צלעות כך שזה יתקיים, והגרף המתקבל עדיין יהיה דוגמא נגדית למשפט.

מכיוון שכל הפאות משולשים, אז 5 השכנים של u נמצאים במעגל פשוט:

$$\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1 \rangle$$

נניח שהצבע ש- v_i מקבל ב- G' הוא i. אז, יהי H_{13} תת-הגרף של G' שמכיל את כל הקודקודים של G' שקיבלו את הצבע 1 או 3 **יחד** עם הצלעות ביניהם. נבחין בין 2 מקרים:

<u>מקרה 1</u>:

v_1 ו- v_3 שייכים לרכיבי קשירות שונים של H_{13}. נחליף את הצבעים ברכיב הקשירות שמכיל את v_3 – נהפוך את 1 ל- 3 ולהפך.

אז יש ל- u, 2 שכנים מצבע 1 (כי v_1 עדיין יהיה בצבע 1), אז נצבע את u בצבע 3. לכן $\chi(G) \leq 5$, וזו סתירה.

<u>מקרה 2</u>:

v_1 ו- v_3 שייכים לאותו רכיב קשירות של G'. אז יש **מסלול פשוט** ב- H_{13} מ- v_1 ל- v_3, אז:

$$\langle v_1, \dots, v_3, u, v_1 \rangle$$

הוא מעגל פשוט ב- G.

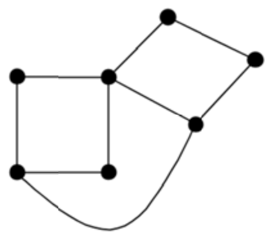
אז v_2 נמצא בתוך המעגל, ו- v_4 מחוץ למעגל (או להפך). אם נגדיר את H_{24} כמו שהגדרנו את H_{13}, אז v_2 ו- v_4 שייכים לרכיבי קשירות שונים של H_{24}. בכך חזרנו למקרה 1, עם הצבעים 2 ו- 4. לכן שוב סתירה.

■

<u>גרפים דו-חלקיים:</u>

<u>טענה</u>:

גרף G הוא דו-חלקי $\Leftrightarrow \chi(G) = 2$. (כאן אנחנו מניחים שיש ל- G לפחות צלע אחת).



ההגדרה גם קשורה למושג של מעגל פשוט.
ראשית נוכיח:

<u>טענה</u>:

יהי G גרף לא מכוון, אם ל- G יש טיול סגור מאורך אי-זוגי, אז יש ל- G מעגל פשוט מאורך אי-זוגי.

<u>הוכחה</u>:

מכל הטיולים הסגורים מאורך אי-זוגי, נבחר באחד: $\langle v_0, v_1, v_2, \dots, v_k = v_0 \rangle$, כך שאורכו k הוא אי-זוגי ומינימלי. נוכיח שטיול זה הוא מעגל פשוט.

נניח בשלילה שיש קודקודים $v_i = v_j$ כאשר $i < j$ בנוסף לזוג $v_0 = v_k$. (כלומר $i > 0$ או $j < k$ או שניהם). אז:

<u>מקרה 1</u>: האורך של $\langle v_i, v_{i+1}, \dots, v_j = v_i \rangle$ הוא אי-זוגי. אבל אז אורכו קטן מ- k, בסתירה למינימליות של k.

<u>מקרה 2</u>: האורך של $\langle v_i, v_{i+1}, \dots, v_j = v_i \rangle$ הוא זוגי, אבל אז אורכו של $\langle v_0, \dots, v_{i-1}, v_i = v_j, v_{j+1}, \dots, v_k \rangle$ אי-זוגי, ושוב זאת סתירה למינימליות של k.

הגענו בשני המקרים לסתירה ולכן ההנחה בשלילה לא נכונה.

<u>טענה</u>:

יהי G גרף לא מכוון. אז G דו-חלקי $\Leftrightarrow$ אין ב- G מעגל פשוט מאורך אי-זוגי.

<u>הוכחה</u>:

נניח בה"כ ש- G קשיר, כי אחרת נוכיח את הטענה בכל רכיב קשירות באופן נפרד.

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>:

נניח ש- G דו-חלקי, ויהיו $A, B \subseteq V$ כך ש- $V = A \cup B$, ו- $A \cap B = \emptyset$, ואין צלע בין שני קודקודים של A, וגם אין צלע בין שני קודקודים של B.

יהי $\langle v_0, v_1, v_2, \dots, v_k = v_0 \rangle$ עגל פשוט ב- G, ונניח בה"כ ש- $v_0 \in A$. אז $v_1 \in B$, $v_2 \in A$, $v_3 \in B$, וכו'... , כלומר $v_i \in A \Leftrightarrow i$ זוגי, ו- $v_i \in B \Leftrightarrow i$ אי-זוגי.
אבל $v_k = v_0 \in A$, ולכן k זוגי, כאשר הוא האורך של המעגל.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>:

נניח שאין ב- G מעגל פשוט מאורך אי-זוגי (ונזכור גם ש- G קשיר).
יהי u קודקוד כלשהו של G. נגדיר $A, B \subseteq V$ באופן הבא:

$$A = \{v \in V | \text{קיים מסלול פשוט מאורך זוגי מ- } u \text{ ל- } v\}$$
$$B = \{v \in V | \text{לא קיים מסלול פשוט מאורך זוגי מ- } u \text{ ל- } v\}$$

אבל ברור ש- $V = A \cup B$, וגם $A \cap B \neq \emptyset$. נשאר להראות שאין שני שכנים ב- A, וגם אין שני שכנים ב- B:

לגבי A, נניח בשלילה ש- $v, w \in A$ הם שכנים. יהיו:

$$\langle u = v_0, v_1, \dots, v_{2k} = v \rangle$$

$$\langle u = w_0, w_1, \dots, w_{2l} = w \rangle$$

מסלולים פשוטים מ- u ל- v ול- w בהתאמה. אז:

$$\langle u = v_0, \dots, v_{2k} = v, w = w_{2l}, w_{2l-1}, \dots, w_1, w_0 = u \rangle$$

הוא טיול סגור מאורך $2k + 2l + 1$ אי-זוגי.

מהטענה שהוכחנו, יש מעגל פשוט ב- G מאורך אי-זוגי, וזו סתירה.

ההוכחה עבור B דומה. ■

צביעת צלעות ותורת רמזי:

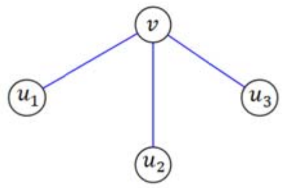
נפתח בשאלה:

במסיבה יש קבוצה של 6 אנשים. הוכח שיש 3 מהם שמכירים זה את זה, או שיש 3 מהם שאינם מכירים זה את זה. (כאן אנחנו מניחים שהכרות היא יחס סימטרי).

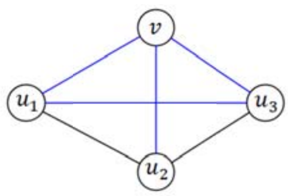
פתרון:

נחשוב על 6 האנשים כקודקודים של הגרף K_6. לכל 2 קודקודים שונים v ו- w, נצבע את הצלע בין v ל- w בכחול אם v ו- w מכירים זה את זה, ונצבע אותה באדום אם v ו- w אינם מכירים זה את זה. צ״ל שקיים משולש כחול או משולש אדום.

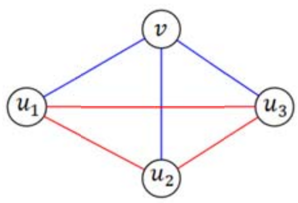
יהי v קודקוד כלשהו. יש 5 צלעות שחלות ב- v, ולכן חייבות להיות לפחות 3 צלעות מאותו הצבע. בה״כ נניח שיש לפחות 3 צלעות כחולות שחלות ב- v. אז יהיו u_1, u_2, u_3 שלושה קודקודים שמחוברים ל- v ע״י צלע כחולה.



נתבונן בצלעות בין הקודקודים u_1, u_2, u_3. אם אחת הצלעות היא כחולה, אזי יש משולש כחול, לדוגמא:



ואם כל הצלעות אדומות, אז יש משולש אדום:



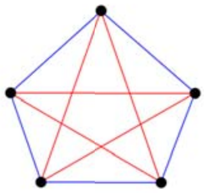
■

הגדרה:

יהיו s,t מספרים שלמים חיוביים. נגדיר את $R(s,t)$ (Ramsey Number) להיות המספר <u>הקטן ביותר</u> R כך שאם נצבע את הצלעות של הגרף השלם K_R בשני צבעים (למשל כחול ואדום), אז יהיה תת-גרף K_s שבו כל הצלעות כחולות, ויהיה תת-גרף K_t שבו כל הצלעות אדומות.

אז למשל, בשאלה שאיתה פתחנו הראנו ש- $R(3,3) \le 6$.

כדי להראות ש- $R(3,3) = 6$, עלינו להראות ש- $R(3,3) > 5$. כלומר, שאפשר לצבוע את הצלעות של K_5 בשני צבעים כך שאין משולש שכל צלעותיו הן מאותו הצבע. ואכן, יש צביעה כזאת:



ואז $\mathrm{R}(3,3) = 6$.

טענה:

יהיו s,t מספרים שלמים חיוביים. אז:

1. $R(s,t) = R(t,s)$ (בתנאי שהם קיימים בכלל).
2. $R(1,t) = 1$.
3. $R(2,t) = t$.

הוכחה:

נוכיח את 2 ו-3:

2. יש K_1 כך שכל הצלעות בו הן כחולות באופן ריק.
3. אם $t = 1$, זה שוב סעיף (2), ואם $t \ge 2$, ונצבע את הצלעות של K_t, אז או שיש צלע כחולה, ואז K_2 כחולה, או שכל הצלעות אדומות, ולכן יש K_t אדום.

המשפט הבא מוכיח ש- $R(s,t)$ **תמיד** קיים:

משפט: (משפט Erdős–Szekeres)

יהיו s,t מספרים שלמים חיוביים, אז:

$$R(s,t) \le \binom{s+t-2}{s-1} = \binom{s+t-2}{t-1}$$

הערה:

כאשר $s = \mathbf{t} = 3$, נקבל ש- $R(3,3) \leq \binom{4}{2} = 6$, וכאן יש שוויון.

<u>הוכחה</u>:

נוכיח באינדוקציה על הסכום $s + t$:

<u>בסיס</u>:
כאשר $\mathrm{s} = 1$ או $t = 1$, נקבל $R(s,t) = 1$, ו- $\binom{s+t-2}{0} = \binom{s+t-2}{s-1} = 1$, ואז יש שוויון.

<u>מעבר</u>:
נניח ש- $s \geq 2$, וגם $t \geq 2$, ונסמן:

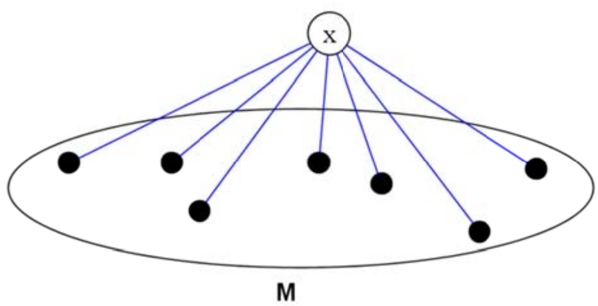
$$P = \binom{s+t-2}{s-1}$$
$$A = \binom{s+t-3}{s-2}$$
$$B = \binom{s+t-3}{s-1}$$

ואז $P = A + B$ לפי זהות פסקל.

נצבע את הצלעות של K_P בשני הצבעים – כחול ואדום. צ"ל שיש תת-גרף K_s כחול, או תת גרף K_t אדום.

יהי x קודקוד כלשהו של K_P, אז $\deg(x) = P - 1$. לכן או שיש A צלעות כחולות שחלות ב- x, או שיש B צלעות אדומות שחלות ב- x. כי אם היו $A - 1$ צלעות כחולות לכל היותר שחלות ב- x, והיו $B - 1$ צלעות אדומות לכל היותר שחלות ב- x אז:
$$P - 1 = \deg(x) \leq (\mathrm{A} - 1) + (\mathrm{B} - 1) = \mathrm{A} + \mathrm{B} - 2 = \mathrm{P} - 2$$
וזו סתירה.

נניח בה"כ שיש A צלעות כחולות שחלות ב- x. תהא M קבוצת כל השכנים של x שמחוברים ל- x ע"י צלע כחולה:



אז $|M| \geq A$.

מהנחת האינדוקציה:

$$R(s-1,t) \leq \binom{(s-1)+t-2}{(s-1)-1} = \binom{s+t-3}{s-2} = A \leq |M|$$

כי הסכום $s-1+t$ הוא קטן מ- $s+t$.

אז $|M| \geq R(s-1,t)$, כלומר יש ל- M תת-גרף K_{s-1} כחול או תת-גרף K_t אדום.

- אם יש ב- M תת-גרף כחול K_{s-1}, אז נוסיף לזה את x ואת כל הצלעות הכחולות מ- x לקודקודים של K_{s-1}. התוצאה תהיה K_s כחול.
- אחרת, יש גם ל- G תת-גרף K_t אדום.

בכל מקרה $R(s,t) \leq P$. ■

<u>נספח: חסמים על מספרי רמזי</u>:

s \ t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		2	3	4	5	6	7	8	9	10
3			6	7	14	18	23	28	36	$40-43$
4				18	25	$36-41$	$49-61$	$56-84$	$73-115$	$92-149$
5					$43-49$	$58-87$	$80-43$	$101-216$	$126-316$	$144-442$
6						$102-165$	$113-298$	$132-495$	$169-780$	$179-1171$
7							$205-540$	$217-1031$	$241-1713$	$289-2826$
8								$282-1870$	$317-3583$	$331-6090$
9									$565-6588$	$581-12677$
10										$798-23556$

למשל: $36 \leq R(4,6) \leq 41$.

כדי לחשב את $R(5,5)$ יש להסתכל על K_n שיש בו $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ צלעות. מספר הדרכים לצבוע אותן בשני צבעים הוא $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

למשל אם $n=36$, מספר הדרכים לצבוע את K_{36} הוא $2^{630} = 2^{\binom{36}{2}}$.

<u>הערה</u>:

אפשר גם לצבוע צלעות ביותר משני צבעים. הערך היחיד שידוע עבור 3 צבעים הוא $R(3,3,3)=17$.

הסתברות

<u>הגדרה</u>:

<u>מרחב הסתברות בדיד</u> הוא עצם מהצורה: $\langle \Omega, Pr \rangle$, כאשר Ω קבוצה סופית לא ריקה, ו- Pr (עבור Probability) היא פונקציה מ- Ω ל- $\mathbb{R}$, כך ש- $\Pr(x) \geq 0$ לכל $x \in \Omega$, וכך ש- $\sum_{x \in \Omega} \Pr(x) = 1$. (לכן $0 \leq \Pr(x) \leq 1$ לכל $x \in \Omega$).

Ω נקראת <u>מרחב מדגם</u>.

<u>דוגמא</u>:

תהי $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, ונגדיר $\Pr(x) = \frac{1}{6}$ לכל $x \in \Omega$.
זה מתאים להטלת קוביה הוגנת.

<u>דוגמא</u>:

תהי $\Omega = \{H, T\}$ $\binom{H = \text{heads}}{T = \text{tails}}$, ותהי Pr הפונקציה: $\Pr(T) = \Pr(H) = \frac{1}{2}$.
זה מתאים להטלת מטבע.

<u>הגדרה</u>:

יהי $\langle \Omega, Pr \rangle$ מרחב הסתברות בדיד כך ש- $|\Omega| = k$, וכך ש- $\Pr(x) = \frac{1}{k}$ לכל $x \in \Omega$. אז Pr נקראת <u>התפלגות אחידה</u>.

בשתי הדוגמאות הנ"ל, ההתפלגות היא אחידה.

<u>הגדרה</u>:

יהי $\langle \Omega, Pr \rangle$ מרחב הסתברות בדיד. תת קבוצה $W \subseteq \Omega$ נקראת <u>מאורע</u> (event).

אם W הוא יחידון, כלומר $W = \{x\}$ עבור $x \in \Omega$, אז W נקרא <u>מאורע בסיסי</u>.

<u>הגדרה</u>:

נרחיב את ההגדרה של Pr לתת-קבוצות של Ω ע"י.
תהי $W \subseteq \Omega$, אז:

$$\Pr(W) = \sum_{x \in W} \Pr(x)$$

<u>דוגמא</u>:

נטיל מטבע הוגן פעמיים. נחשב את ההסתברות שנקבל את התוצאה H **לפחות** פעם אחת:

נגדיר $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$ עם התפלגות אחידה. יהי W המאורע שלפחות אחת מהתוצאות תהיה H. אז:

$$W = \{HH, HT, TH\}$$

ו-

$$\Pr(W) = \Pr(HH) + \Pr(HT) + \Pr(TH) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

<u>דוגמא</u>:

נטיל שתי קוביות הוגנות. נחשב את ההסתברות לקבל "דאבל":

אז:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \dots, \langle 6,6\rangle\}$$

ולכן:

$$|\Omega| = 36$$

Pr התפלגות אחידה, ו- $W = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 6,6\rangle\}$, ואז:

$$\Pr(W) = \frac{|W|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

<u>הגדרה</u>:

שני מאורעות $A, B \subseteq \Omega$ נקראים <u>מארועות זרים</u> אם $A \cap B = \emptyset$.

<u>טענה</u>:

אם A ו- B **מאורעות זרים** ב- $\langle \Omega, Pr\rangle$, אז:

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$

<u>הוכחה</u>:

$$\Pr(A \cup B) = \sum_{x \in A \cup B} \Pr(x) = \sum_{x \in A} \Pr(x) + \sum_{x \in B} \Pr(x) = \Pr(A) + \Pr(B)$$

<u>משפט</u>:

יהיו $A_1, A_2, \dots, A_n$ **מאורעות זרים** בזוגות ב- $\langle \Omega, Pr\rangle$ (כלומר, $A_i \cap A_j = \emptyset$ לכל $i \neq j$),
אז:

$$\Pr(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i)$$

ובאופן כללי יותר אפשר לנסח את הטענה מעלה כך:

<u>טענה</u>:

אם A ו- B מאורעות **כלשהן** ב- $\langle\Omega, Pr\rangle$, אז:

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

<u>הוכחה</u>:

נוכל לכתוב: $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$, כאשר $A \setminus B$ ו- B קבוצות זרות. לכן:

$$(1) \qquad \Pr(A \cup B) = \Pr\big((A \setminus B) \cup B\big) = \Pr(A \setminus B) + \Pr(B) = \Pr\big(A \setminus (A \cap B)\big) + \Pr(B)$$

וידוע גם ש- $A \setminus (A \cap B)$ ו- $A \cap B$ הן קבוצות זרות, ולכן:

$$\Pr(A \cap B) + \Pr\big(A \setminus (A \cap B)\big) = \Pr(A)$$

ולכן:

$$(2) \qquad \Pr\big(A \setminus (A \cap B)\big) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B)$$

נציב את (2) בתוצאה האחרונה של (1) ונקבל:

$$\Pr\big(A \setminus (A \cap B)\big) + \Pr(B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B) + \Pr(B)$$

ולכן בסה"כ קיבלנו:

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

כנדרש.

וננסח גם את המשפט באופן כללי:

<u>משפט</u>: (עקרון ההכלה וההדחה למאורעות)

יהיו $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ מאורעות ב- $\langle\Omega, Pr\rangle$. אז:

$$\Pr(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{1 \le i \le n} \Pr(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} \Pr\big(A_i \cap A_j\big) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} \Pr\big(A_i \cap A_j \cap A_k\big) - \cdots + (-1)^n \cdot \Pr(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

<u>הוכחה</u>:

כמו ההוכחה של עיקרון ההכלה וההדחה עבור עוצמות, כאשר נחליף את סימן העוצמה – "$|\,|$", ב- "Pr".

טענה:

יהיו $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \Omega$ מאורעות. אז:

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i)$$

ואם המאורעות זרים בזוגות, אז יש שוויון.

הוכחה:

כמו בהוכחה על עוצמות.

המשלים של מאורע:

הגדרה:

יהי A מאורע ב- $\langle \Omega, Pr \rangle$, כלומר $A \subseteq \Omega$. המשלים (Complement) של A, שמסומן ע״י A^c (או $\overline{A}$ או $-A$), הוא המאורע:

$$A^c = \Omega \setminus A$$

טענה:

יהי A מאורע ב- $\langle \Omega, Pr \rangle$. אז:

$$\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$$

הוכחה:

A ו- A^c מאורעות זרים כך ש- $A \cup A^c = \Omega$. אז:

$$1 = \underbrace{\Pr(\Omega)}_{\sum_{x \in \Omega} \Pr(x)} = \Pr(A) + \Pr(A^c)$$

דוגמא:

נתונה קבוצה של n אנשים. נחשב את ההסתברות שיש לשניים (או יותר) מהם אותו יום הולדת:

תהי B קבוצת כל התאריכים בשנה (נניח שכל שנה היא בת 365 ימים), אז:

$$\Omega = B^n = \underbrace{B \times B \times \dots \times B}_{n \text{ פעמים}}$$

ואז: $|\Omega| = 365^n$.

יהי A המאורע **שיש** לפחות שני אנשים עם אותו יום הולדת. אז A^c הוא המאורע **שאין** שני אנשים עם אותו יום הולדת.

נניח ש- Pr התפלגות אחידה, אז:

$$\Pr(A^c) = \frac{|A^c|}{|\Omega|}$$

נחשב:

$$|A^c| = 365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1) = P(365, n)$$

ואז:

$$\Pr(A^c) = \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n}$$

ולכן:

$$\boxed{\Pr(A) = 1 - \Pr(A^c) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (366 - n)}{365^n}}$$

<u>שאלה</u>:

מהו הערך הראשון של n כך ש- $\Pr(A) \geq \frac{1}{2}$?

<u>תשובה</u>:

$n = 23$. כלומר מספיקים רק 23 אנשים כדי שההסתברות שלפחות 2 מהם נולדו באותו יום בשנה, יהיה $\frac{1}{2}$.

<u>הסתברות מותנה (Conditional Probibility):</u>

כאשר יש לנו אינפורמציה נוספת, זה יכול להשפיע על ההסתברות שמאורע מסוים יתרחש.

<u>דוגמא</u>:

נטיל שתי קוביות. נחשב את ההסתברות שהסכום אי-זוגי, בהינתן שהסכום הוא גדול או שווה ל- 10:

יהי $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$, ואז: $|\Omega| = 36$.

נניח ש- Pr התפלגות אחידה, ואז $\Pr(x) = \frac{1}{36}$ לכל $x \in \Omega$.

יהי A המאורע שהסכום אי-זוגי, אז:

$$A = \left\{ \begin{matrix} \langle 1,2 \rangle, & \langle 1,4 \rangle, & \langle 1,6 \rangle, & \langle 2,1 \rangle, & \langle 2,3 \rangle, & \langle 2,5 \rangle, & \langle 3,2 \rangle, & \langle 3,4 \rangle, & \langle 3,6 \rangle, \\ \langle 4,1 \rangle, & \langle 4,3 \rangle, & \langle 4,5 \rangle, & \langle 5,2 \rangle, & \langle 5,4 \rangle, & \langle 5,6 \rangle, & \langle 6,1 \rangle, & \langle 6,3 \rangle, & \langle 6,5 \rangle \end{matrix} \right\}$$

לכן:

$$\Pr(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

יהי B המאורע שהסכום גדול או שווה ל- 10, אז:

$$B = \{\langle 4,6 \rangle \quad , \quad \langle 5,5 \rangle \quad , \quad \langle 5,6 \rangle \quad , \quad \langle 6,4 \rangle \quad , \quad \langle 6,5 \rangle \quad , \quad \langle 6,6 \rangle\}$$

ואז:

$$\Pr(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

כאשר נתון ש- B התרחש, אז ההסתברות ש- A יתרחש תיהיה $\frac{1}{3}$ (כלומר $\frac{2}{6}$).
אנחנו חושבים על B כמרחב ההסתברות עם התפלגות אחידה עליו. אז ההסתברות ש- A יתרחש בהינתן ש- B התרחש, היא $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.

<u>באופן כללי</u>:

אם $X \subseteq \Omega$ מאורע, כך ש- $\Pr(X) > 0$, ואם $Y \subseteq \Omega$ מאורע כלשהו אחר, אפשר לחשוב על ההסתברות ש- Y יתרחש, בהינתן ש- X התרחש, בדרך הבאה:

נגדיר מרחב הסתברות $\langle X, Pr' \rangle$, כאשר לכל $x \in X$, $Pr'(x) = \frac{\Pr(x)}{\Pr(X)}$.

<u>בדוגמא הקודמת</u>, הגדרנו מרחב $\langle B, Pr' \rangle$, $\Pr(B) = \frac{1}{6}$, כך שלכל $x \in \Omega$:

$$Pr'(x) = \frac{\left(\frac{1}{36}\right)}{\left(\frac{1}{6}\right)} = \frac{1}{6}$$

<u>המשך</u>:

אז $Pr'(x) \geq 0$ לכל $x \in X$, ו:

$$\sum_{x \in X} Pr'(x) = \sum_{x \in X} \frac{\Pr(x)}{\Pr(X)} = \frac{\Pr(X)}{\Pr(X)} = 1$$

ואז ההסתברות ש- Y יתרחש, בהינתן ש- X התרחש היא: $Pr'(X \cap Y)$, כלומר:

$$Pr'(X \cap Y) = \frac{\Pr(X \cap Y)}{\Pr(X)}$$

<u>הגדרה</u>:

יהיו X ו- Y מאורעות כלשהן, כך ש- $\Pr(X) > 0$. <u>ההסבתרות המותנה</u> של Y בהינתן X, מוגדרת ע״י:

$$\Pr(Y|X) = \frac{\Pr(Y \cap X)}{\Pr(X)}$$

<u>דוגמא</u>:

בדוגמא הקודמת:

$$A \cap B = \{\langle 5,6 \rangle \quad , \quad \langle 6,5 \rangle\}$$
$$\Pr(A \cap B) = \frac{2}{36}$$

$$\Pr(B) = \frac{6}{36}$$

ולכן:

$$\Pr(A|B) = \frac{\left(\frac{2}{36}\right)}{\left(\frac{6}{36}\right)} = \frac{1}{3}$$

<u>דוגמא</u>:

יהי A המאורע בדוגמא הקודמת (הסכום אי-זוגי), ויהי C המאורע שהמספר בקוביה הראשונה הוא זוגי. נחשב את $\Pr(A|C)$.

אז:

$$C = \{2,4,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$A \cap C = \begin{Bmatrix} \langle 2,1 \rangle & , & \langle 2,3 \rangle & , & \langle 2,5 \rangle & , & \langle 4,1 \rangle & , & \langle 4,3 \rangle \\ & \langle 4,5 \rangle & , & \langle 6,1 \rangle & , & \langle 6,3 \rangle & , & \langle 6,5 \rangle & \end{Bmatrix}$$

ולכן:

$$\Pr(A|C) = \frac{\Pr(A \cap C)}{\Pr(C)} = \frac{\left(\frac{9}{36}\right)}{\left(\frac{18}{36}\right)} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

ראינו גם ש- $\Pr(A) = \frac{1}{2}$, כלומר $\Pr(A|C) = \Pr(A)$. האינפורמציה ש- C התרחש אינה משנה את ההסתברות ש- A יתרחש.

<u>הגדרה</u>:

שני מאורעות X ו- Y נקראים <u>בלתי-תלויים</u> אם:

$$\Pr(X \cap Y) = \Pr(X) \cdot \Pr(Y)$$

<u>הערה</u>:

אם $\Pr(X) > 0$, אז:

$$\Pr(Y|X) = \frac{\Pr(X \cap Y)}{\Pr(X)} = \frac{\Pr(X) \cdot \Pr(Y)}{\Pr(X)} = \Pr(Y)$$

לכן:

$$\Pr(Y|X) = \Pr(Y)$$

<u>הערה</u>:

נשים לב ליתרונות בהגדרה הנ"ל:

1. אין צורך להניח ש- $\Pr(X) > 0$.

2. ההגדרה סימטרית – אפשר לראות מכאן שאם $\Pr(X) > 0$, $\Pr(Y) > 0$ ו-$\Pr(Y|X) = \Pr(Y)$, אז X ו- Y בלתי-תלויים, ולכן: $\Pr(X|Y) = \Pr(X)$.

משפט:

יהיו X, Y מאורעות בעלי הסתברות חיובית. אז התנאים הבאים שקולים:

1. X ו- Y הם בלתי תלויים.
2. $\Pr(Y|X) = \Pr(Y)$.
3. $\Pr(X|Y) = \Pr(X)$.

דוגמא:

במשפחה מסוימת יש 2 ילדים, ונתון שלפחות אחד מהם הוא בן. מה ההסתברות ששניהם בנים?

אז, יהי Ω מרחב המדגם:

$$\Omega = \{BB, BG, GB, GG\}$$
$$X = \{BB, BG, GB\}$$
$$Y = \{BB\}$$

(כאן $B = \text{boy}$, ו- $G = \text{girl}$).

ואז:

$$\Pr(Y|X) = \frac{\Pr(X \cap Y)}{\Pr(X)} = \frac{\Pr(BB)}{\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{3}$$

משתנים מקריים:

נתחיל בדוגמא:

נטיל שתי קוביות – אחת כחולה ואחת אדומה. התוצאה של "דאבל" מזכה את השחקן ברווח של 21 שקלים, וכל תוצאה אחרת גורמת להפסד של 3 שקלים.

מהו הרווח, או ההפסד, הצפוי לשחקן?

אינטואיטיבית, אם נשחק 36 פעמים, ונקבל כל תוצאה בדיוק פעם אחת, אז הרווח סה"כ יהיה:

$$21 \cdot 6 - 3 \cdot 30 = 126 - 90 = 36$$

ולכן הרווח הממוצע לכל זריקה יהיה 1 ₪.

נרצה למצוא כלים לפתור את השאלה בצורה לא אינטואיטיבית.

הגדרה:

משתנה מקרי (random variable), הוא פונקציה:

$$f\colon \Omega \to \mathbb{R}$$

דוגמא:

בדוגמא שאיתה פתחנו, למשל:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$$

ו-

$$f(\langle 1,1\rangle) = f(\langle 2,2\rangle) = \cdots = f(\langle 6,6\rangle) = 21$$

ו-

$f(\langle m,n\rangle) = -3$ לכל $\langle m,n\rangle \in \Omega$ כך ש- $m \neq n$.

הערה:

בדרך כלל משתמשים באותיות גדולות X, Y, וכו׳... עבור משתנים מקריים.

הגדרה:

יהי f משתנה מקרי. התוחלת (expectation) של f, שמסומנת ב- $E[f]$, היא המספר:

$$E[f] = \sum_{x\in\Omega} (\Pr(x) \cdot \Pr(x))$$

דוגמא:

בדוגמא הקודמת:

$$\begin{aligned} E[f] &= \Pr(\langle 1,1\rangle) \cdot f(\langle 1,1\rangle) + \Pr(\langle 1,2\rangle) \cdot f(\langle 1,2\rangle) + \cdots + \Pr(\langle 6,6\rangle) \cdot f(\langle 6,6\rangle) \\ &= \frac{1}{36} \cdot 21 + \frac{1}{36} \cdot (-3) + \frac{1}{36} \cdot (-3) + \cdots + \frac{1}{36} \cdot 21 \\ &= 6 \cdot \frac{1}{36} \cdot 21 + 30 \cdot \frac{1}{36} \cdot (-3) \\ &= \frac{36}{36} = \boxed{+1} \end{aligned}$$

הגדרה:

יהי $A \subseteq \Omega$ מאורע כלשהו. הפונקציה המציינת של A היא המשתנה המקרי $f_A\colon \Omega \to \mathbb{R}$ שמוגדרת ע״י:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \text{ אם} \\ 0 & , \quad x \notin A \text{ אם} \end{cases}$$

טענה:

$$E[f_A] = \Pr(A)$$

<u>הוכחה</u>:

$$\begin{aligned}E[f_A] &= \sum_{x\in\Omega}\big(\Pr(x)\cdot \mathrm{f_A}(x)\big)\\ &= \sum_{x\in A}\big(\Pr(x)\cdot f_A(x)\big) + \sum_{x\in A^c}\big(\Pr(x)\cdot f_A(x)\big)\\ &= \sum_{x\in A}(\Pr(x)\cdot 1) + \sum_{x\in A^c}(\Pr(x)\cdot 0)\\ &= \sum_{x\in A}\Pr(x) = \Pr(A)\end{aligned}$$

<u>הגדרה</u>:

יהי f משתנה מקרי. f נקראת <u>משתנה מקרי מציין</u> אם $\{0,1\} \subseteq Rng(f)$, כלומר אם $f:\Omega\to\{0,1\}$.

(אם $A=\{x\in\Omega|f(x)=1\}$, אז $f=f_A$)

<u>טענה</u>:

יהי f משתנה מקרי כך ש- $f(x)=c$ עבור כל $x\in\Omega$. אז:

$$E[f]=c$$

<u>הוכחה</u>:

$$E[f]=\sum_{x\in\Omega}\big(\Pr(x)\cdot f(x)\big)=\sum_{x\in\Omega}(\Pr(x)\cdot c)=c\cdot\sum_{x\in\Omega}\Pr(x)=c\cdot 1=c$$

<u>הגדרה</u>:

יהיו f,g משתנים מקריים על $\langle\Omega,Pr\rangle$, ויהי $a\in\mathbb{R}$.

1. נגדיר $af:\Omega\to\mathbb{R}$, ע"י:

$$\forall x\in\Omega \quad (af)(x)=a\cdot f(x)$$

2. נגדיר $f+g:\Omega\to\mathbb{R}$, ע"י:

$$\forall x\in\Omega \quad (f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

(גם af ו- $f+g$ הם משתנים מקריים)

<u>משפט</u>:

יהיו f,g משתנים מקריים על $\langle\Omega,Pr\rangle$, ויהי $a\in\mathbb{R}$. אז:

1. $E[af]=a\cdot E[f]$.
2. $E[f+g]=E[f]+E[g]$.

<u>הוכחה</u>:

1. נסמן $h = a \cdot f$, אז:

$$E[h] = \sum_{x \in \Omega} \big(\Pr(x) \cdot h(x)\big) = \sum_{x \in \Omega} \big(\Pr(x) \cdot a \cdot f(x)\big)$$
$$= a \cdot \sum_{x \in \Omega} \big(\Pr(x) \cdot f(x)\big) = a \cdot E[f]$$

2. נסמן $h = f + g$, אז:

$$E[f+g] = E[h] = \sum_{x \in \Omega} \big(\Pr(x) \cdot h(x)\big) = \sum_{x \in \Omega} (\Pr(x) \cdot [f(x) + g(x)])$$
$$= \sum_{x \in \Omega} \big(\Pr(x)\, f(x) + \Pr(x)\, g(x)\big) = \sum_{x \in \Omega} \big(\Pr(x)\, f(x)\big) + \sum_{x \in \Omega} \big(\Pr(x)\, g(x)\big)$$
$$= E[f] + E[g]$$

<u>מסקנה</u>:

$$E[f-g] = E[f] - E[g]$$

<u>דוגמא</u>:

כשעסקנו בקומבינטוריקה, חישבנו את ההסתברות שתמורה של $\{1,2,\dots,n\}$ תהיה בלבול.
ראינו שההסתברות לכך היא בערך $\frac{1}{e}$ אם n אינו קטן מאד.

מכך ניתן להסיק שההסתברות ש**תהיה** לפחות נקודת שבת אחת לתמורה של $\{1,2,\dots,n\}$ היא בערך $1-\frac{1}{e}$.

<u>שאלה</u>:

יהי n מספר שלם חיובי. יהי Ω המרחב שמכיל את כל התמורות של $\{1,2,\dots,n\}$:

$$\Omega = \left\{\pi \,\middle|\, \pi: \{1,2,\dots,n\} \xrightarrow[\text{על}]{1-1} \{1,2,\dots,n\}\right\}$$

אז: $|\Omega| = n!$.

כמו כן, נניח ש- Pr התפלגות אחידה. נגדיר משתנה מקרי f על Ω באופן הבא:

$$\forall \pi \in \Omega \qquad f(\pi) = |\{i \in \{1,2,\dots,n\}: \pi(i) = i\}|$$

כלומר $f(\pi)$ מחזירה את מספר נקודות השבת של π.

מהו $E[f]$?

<u>דוגמא לשאלה</u>:

אם $n=6$ ו- $\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4\end{pmatrix}$, אז $f(\pi)=2$.

<u>פתרון השאלה</u>:

לכל $1 \le i \le n$, נגדיר <u>פונקציה מציינת</u> $f_i: \Omega \to \{0,1\}$, בדרך הבאה:

$$f_i(\pi)=\begin{cases}1 & , \quad \pi(i)=i\\ 0 & , \quad \pi(i)\neq i\end{cases}$$

אז

$$f=f_1+f_2+f_3+\cdots+f_n$$

<u>בדוגמא הקודמת</u> (הדוגמא לשאלה):

$$f_1(\pi)=0 \quad , \quad f_2(\pi)=0 \quad , \quad f_3(\pi)=1 \quad , \quad f_4(\pi)=0 \quad , \quad f_5(\pi)=1 \quad , \quad f_6(\pi)=0$$

ובסה"כ: $f(\pi)=2$.

לכן:

$$E[f]=\sum_{i=1}^{n}E[f_i]$$

כעת נקבע את i, $1 \le i \le n$:

$$E[f_i]=\sum_{\pi\in\Omega}\big(\Pr(\pi)\cdot f_i(\pi)\big)$$

כאן $\Pr(\pi)=\frac{1}{n!}$, לכל $\pi \in \Omega$.

נחשב את מספר התמורות π כך ש- $\pi(i)=i$, כלומר כך ש- $f_i(\pi)=1$.
יש $(n-1)!$ תמורות כאלה, ולכן: $E[f_i]=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$ (כי יש $(n-1)!$ מחוברים שבהם $f_i(\pi)=1$, ואז $\Pr(\pi)\cdot f_i(\pi)=\frac{1}{n!}$).

ואז:

$$E[f]=\sum_{i=1}^{n}E[f_i]=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}=1$$

<u>הגדרה</u>:

יהי f משתנה מציין: $f:\Omega\to\{0,1\}$.
נסמן ב- A_f את המאורע:

$$A_f=\{x\in\Omega|f(x)=1\}$$

אז ראינו כבר ש- $E[f]=\Pr(A_f)$.

<u>הרחבה להגדרה</u>:

באופן דומה, נתון משתנה מקרי f, אז לכל $a\in\mathbb{R}$, אפשר להגדיר את המאורע:

$$\{x\in\Omega|f(x)=a\}$$

נשתמש בסימן $(f=a)$ עבור המאורע הזה. אז:

$$\Pr(f=a)=\sum_{\substack{x\in\Omega\\ f(x)=a}}\Pr(x)$$

כמובן, יש רק מספר סופי של ערכים של a כך ש- $\Pr(f=a)\neq 0$.

באופן דומה, נסמן ב- $(f\geq a)$ את המאורע:

$$\{x\in\Omega|f(x)\geq a\}$$

ובדומה עבור $f\leq a$, וכו'...

<u>התפלגות של משתנה מקרי f על $\langle\Omega,Pr\rangle$:</u>

ההתפלגות של משתנה מקרי f על $\langle\Omega,Pr\rangle$ זהו בעצם גרף של נקודות מהצורה: $\langle a,\Pr(f=a)\rangle$.
נראה דוגמא:

<u>דוגמא</u>:

נטיל שתי קוביות. יהי f המשתנה המקרי המוגדר ע"י $f(\langle i,j\rangle)=i+j$, ויהי:
$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}\times\{1,2,3,4,5,6\}$, עם התפלגות אחידה.

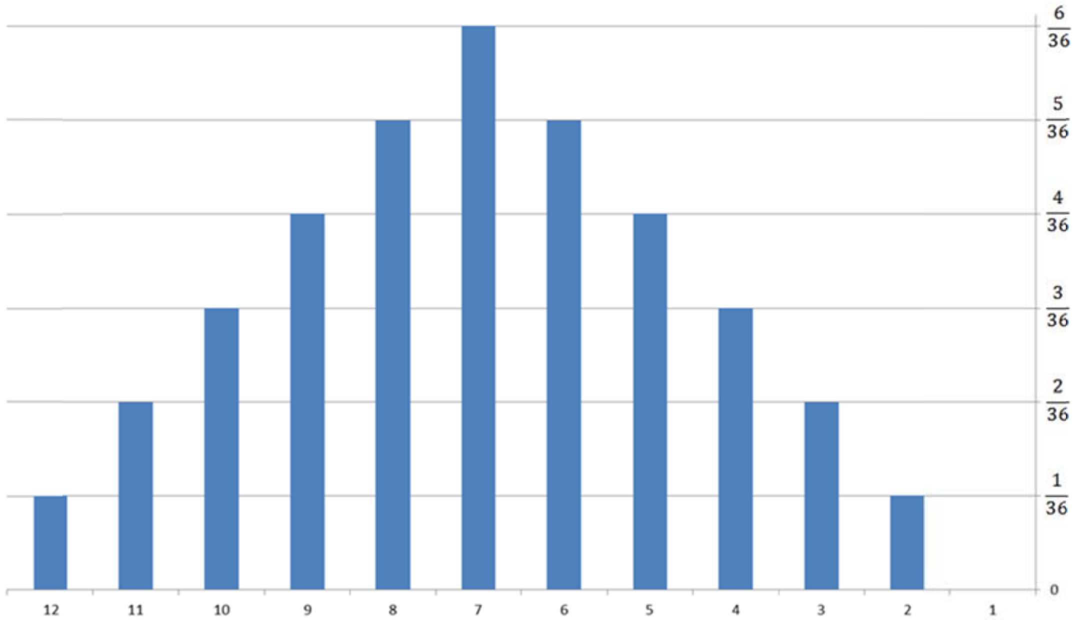
אז f מקבל את כל הערכים מבין 2 עד 12:

$$\Pr(f=2)=\tfrac{1}{36}\quad,\quad\Pr(f=3)=\tfrac{2}{36}\quad,\quad\Pr(f=4)=\tfrac{3}{36}\quad,\quad\Pr(f=5)=\tfrac{4}{36}$$

$$\Pr(f=6)=\tfrac{5}{36}\quad,\quad\Pr(f=7)=\tfrac{6}{36}\quad,\quad\Pr(f=8)=\tfrac{5}{36}\quad,\quad\Pr(f=9)=\tfrac{4}{36}$$

$$\Pr(f=10)=\tfrac{3}{36}\quad,\quad\Pr(f=11)=\tfrac{2}{36}\quad,\quad\Pr(f=12)=\tfrac{1}{36}$$

אז ההתפלגות של f היא:



במקרים רבים, ההתפלגות של f נותנת מספיק אינפורמציה ואין צורך לדעת מהי הפונקציה הספציפית f (כלומר, מהם האיברים מ- Ω של המאורע $(f=a)$).

משפט:

יהי f משתנה מקרי על $\langle \Omega, Pr \rangle$, אז:

$$E[f]=\sum_{a\in\mathbb{R}}(a\cdot \Pr(f=a))$$

(זה סכום סופי, כי $\Pr(f=a)\neq 0$ רק עבור מספר סופי של מספרים ממשיים $a\in\mathbb{R}$.
כלומר, $E[f]=\sum_{a\in Rng(f)}(a\cdot \Pr(f=a))$).

הוכחה:

$$E[f]=\sum_{x\in\Omega}(f(x)\cdot \Pr(x))=\sum_{a\in\mathbb{R}}\left(\sum_{\substack{x\in\Omega\\ f(x)=a}}(a\cdot \Pr(x))\right)=\sum_{a\in\mathbb{R}}(a\cdot \Pr(f=a))$$

בדוגמא הקודמת:

$$E[f]=2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+\cdots+12\cdot\frac{1}{36}=7$$

סימון:

יהיו f ו- g משתנים מקריים על $\langle \Omega, Pr \rangle$, ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$. נסמן ב- $(f=a,g=b)$ את המאורע:

$\{x\in\Omega | f(x)=a$ וגם $g(x)=b\}$

<u>הגדרה</u>:

שני משתנים מקריים f ו- g על $\langle \Omega, Pr \rangle$ הם <u>בלתי תלויים</u> אם שני המאורעות $(f = a)$ ו- $(g = b)$ הם מאורעות בלתי תלויים.

בפרט, החיתוך שלהם הוא המאורע $(f = a, g = b)$, ולכן f ו- g בלתי-תלויים אס״ם $\Pr(f = a, g = b) = \Pr(f = a) \cdot \Pr(g = b)$. (בדיוק כמו בהגדרה של מאורעות בלתי תלויים - $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$).

<u>דוגמא</u>:

נטיל שתי קוביות, אחת אדומה ואחת כחולה. אז: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$ ו- Pr התפלגות אחידה.

לכל $x \in \Omega$, יהי $f(x)$ המספר על הקוביה האדומה, ויהי $g(x)$ המספר על הקוביה הכחולה:

$$f(\langle i,j \rangle) = i$$
$$g(\langle i,j \rangle) = j$$

אז לכל $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{1,2,3,4,5,6\}$:

$$\Pr(b = a, g = b) = \Pr(f = a) \cdot \Pr(g = b) = 0$$

ואם $\langle a, b \rangle \in \{1,2,3,4,5,6\}^2$, אז:

$$\Pr(f = a, g = b) = \Pr(\langle a, b \rangle) = \frac{1}{36}$$
$$\Pr(f = a) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$
$$\Pr(g = b) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$
$$\Pr(f = a, g = b) = \Pr(f = a) \cdot \Pr(g = b)$$

<u>טענה</u>:

יהיו f, g משתנים בלתי תלויים על $\langle \Omega, Pr \rangle$, אז:

$$E[f \cdot g] = E[f] \cdot E[g]$$

<u>הערה</u>:

ראינו ש- $E[f + g] = E[f] + E[g]$, גם אם f ו- g **תלויים**, אבל במכפלה זה אינו מתקיים באופן כללי.

<u>הוכחה</u>:

נניח ש- f ו- g בלתי תלויים. אז:

$$E[f\cdot g]=\sum_{x\in\Omega}(f(x)\cdot g(x)\cdot \Pr(x))=\sum_{a,b\in\mathbb{R}}(a\cdot b\cdot \Pr(f=a,g=b))$$

אבל הנחנו ש- f ו- g בלתי תלויים, ולכן:

$$\begin{aligned}\sum_{a,b\in\mathbb{R}}(a\cdot b\cdot \Pr(f=a,g=b)) &= \sum_{a,b\in\mathbb{R}}(a\cdot b\cdot \Pr(f=a)\cdot \Pr(g=b))\\ &=\sum_{a\in\mathbb{R}}\left(\sum_{b\in\mathbb{R}}(a\cdot b\cdot \Pr(f=a)\cdot \Pr(g=b))\right)\\ &=\sum_{a\in\mathbb{R}}(a\cdot \Pr(f=a))\cdot\sum_{b\in\mathbb{R}}(b\cdot \Pr(g=b))\\ &=E[f]\cdot E[g]\end{aligned}$$

<u>דוגמא</u>:

נטיל שתי קוביות, ועבור כל הטלה נקבל מספר שקלים ששווה ל**מכפלה** של שתי התוצאות.
נחשב את התוחלת של הרווח:

אז זוהי מכפלה של שני משתנים מקריים שווים f ו- g, כאשר:

$$\forall\langle i,j\rangle\in\Omega \qquad \begin{aligned}f(\langle i,j\rangle)&=i\\ g(\langle i,j\rangle)&=j\end{aligned}$$

אפשר להראות ש-

$$E[f]=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=21\cdot\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$

וגם $E[g]=\frac{7}{2}$, ואז:

$$E[fg]=\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49}{4}=12\frac{1}{4}$$

<u>יישום מושג התוחלת בבעיה קומבינטורית:</u>

<u>משפט</u>:

יהי $t\geq 3$ מספר טבעי. אז:

$$R(t,t)\geq 2^{\frac{t}{2}}$$

(מספר רמזי $R(t,t)$)

למשל, זה אומר ש- $R(6,6)\geq 2^3=8$

<u>הוכחה</u>:

נוכיח שלכל $t \geq 3$, אם $n \leq 2^{\frac{t}{2}}$, אז קיימת צביעה של הצלעות של הגרף K_n בשני צבעים – כחול ואדום, כך שאין K_t כחול, ואין K_t אדום.

אז, יהי $t \geq 3$, ו- $n \leq 2^{\frac{t}{2}}$. נסמן ב- Ω את מרחב ההסתברות הבדיד שמכיל את כל הצביעות של K_n. אז:

$$|E(K_n)| = \binom{n}{2}$$

ולכן:

$$|\Omega| = 2^{\binom{n}{2}}$$

תהי Pr ההתפלגות האחידה על Ω, יהי S תת-קבוצה של $V(K_n)$ כך ש- $|S| = t$, ויהי H_S תת-הגרף השלם של K_n שקודקודיו הם S (אז $H_S \cong K_t$).

יש ל- H_S $\binom{t}{2}$ צלעות, ולכן יש $2^{\binom{t}{2}}$ צביעות של H_S. כל צביעה של K_n משרה צביעה של H_S. נצמצם את הצביעה של K_n ל- H_S.

נחלק את כל האיברים של Ω (כלומר כל הצביעות של K_n) ל- $2^{\binom{t}{2}}$ ״תאים״. שתי צביעות של K_n שייכות לאותו התא אם יש להן אותו הצמצום ל- H_S.

כל תא מכיל בדיוק אותו מספר של צביעות של K_n, שהוא $2^{\left(\binom{n}{2}-\binom{t}{2}\right)} = \frac{2^{\binom{n}{2}}}{2^{\binom{t}{2}}}$, ויש 2 תאים שמתאימים לצביעה של H_S ע״י צבע אחד – הצביע של H_S שבה כל צלע כחולה, והצביעה של H_S שבה כל צלע אדומה.

לכן, נתונה S (מעוצמה t), ההסתברות שכל הצלעות של H_S יהיו מאותו צבע היא: $\frac{2}{2^{\binom{t}{2}}}$, ולכן:

$\Pr(\text{חד-גוני } S) = \frac{2}{2^{\binom{t}{2}}}$ לכל $S \subseteq V(K_n)$ כך ש- $|S| = t$.

אז, ההסתברות ש**קיימת** $S \subseteq V(K_n)$ כך ש- $|S| = t$, ו- H_S חד-גוני , היא **קטנה או שווה** ל-

$$\sum_{\substack{S \subseteq V(K_n) \\ |S|=t}} \frac{2}{2^{\binom{t}{2}}} = \binom{n}{t} \cdot \frac{2}{2^{\binom{t}{2}}}$$

נוכיח שאם $n \leq 2^{\frac{t}{2}}$, אז $\binom{n}{t} \cdot \frac{2}{2^{\binom{t}{2}}}$ קטן מ- 1:

$$\binom{n}{t}\cdot\frac{2}{2^{\binom{t}{2}}}=\frac{n!}{t!\,(n-t)!}\cdot\frac{2}{2^{\binom{t}{2}}}=\frac{n(n-1)\cdots(n-t+1)}{t!}\cdot\frac{2}{2^{\binom{t}{2}}}$$

$$<\frac{n^t}{t!}\cdot\frac{2}{2^{\binom{t}{2}}}\le\frac{\left(2^{\frac{t}{2}}\right)^t}{t!}\cdot\frac{2}{2^{\binom{t}{2}}}=\frac{2}{t!}\cdot 2^{\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t(t-1)}{2}\right)}=\frac{2}{t!}\cdot 2^{\frac{t}{2}}<1$$

האי-שוויון האחרון נובע כי $t\ge 3$, ואפשר להוכיח שהוא נכון באינדוקציה.

אז יש הסתברות חיובית, שקיימת צביעה של K_n כך שאין תת-גרף K_t כחול או אדום.

$$R(t,t)>n\ge 2^{\binom{t}{2}}$$

■