17/12 בס"ד

תורות ומודלים

א) הגדרות

תורה- היא קבוצה של פסוקים המפרשים את אותו אוצר מילים. נסמן תורה ב-T.

מודל- מבנה M ייקרא "מודל ל-T" אם מקיים את כל הפסוקים ב-T. נסמן $M \models T$.

תורה עקבית- היא תורה שיש לה מודל אחד לפחות. תורה שאין לה ולו מודל אחד שמקיים אותה נקראת "תורה לא עקבית".

דוגמאות: (1) נתונה תורה $T=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, כאשר:

$$\alpha=\forall x\left(S(x,x)\right)$$
$$\beta=\forall x,y\left(S(x,y)\rightarrow S(y,x)\right)$$
$$\gamma=\forall x,y,z\left[\left(S(x,y)\wedge S(y,z)\right)\rightarrow S(x,z)\right]$$

נשים לב כי שלושת הפסוקים הם שלושת התנאים הנדרשים ליחס שקילות, לכן T היא התורה של יחס שקילות. כל מבנה שהוא יחס שקילות, כמו לדוגמא המבנה $M=\langle\mathbb{N},=\rangle$, מקיים את כל הפסוקים ב-$T$, לכן כל מבנה כזה הוא מודל. לפיכך T היא תורה עקבית.

(2) נתונה תורה $T=\{\alpha,\beta\}$ כאשר: $\beta=\neg S(c)$, $\alpha=\forall x\left(S(x)\right)$.

נשים לב כי שני הפסוקים סותרים אחד את השני עבור הפסוק הראשון מתקיים $S(c)$ ועבור הפסוק השני לא. לכן לא יכול להיות מבנה שמקיים שני פסוקים אלו. כתוצאה מכך ל-T אין מודל ואינה תורה עקבית.

ב) תורה מוכלת

יהי תורה T המוכלת בתוך תורה T^+, כלומר $T\subseteq T^+$. מצד אחד כל פסוק ב-T הוא גם פסוק ב-T^+, אך מצד שני כל מודל של T^+ הוא גם מודל של T, אמנם לא כל מודל של T הוא מודל של T^+. ההיגיון הוא של-T^+ יש פחות מודלים מפני שיש בה יותר פסוקים וכל פסוק היא דרישה אחרת וככל שיש יותר דרישות יש פחות מודלים שיכולים לעמוד בהם.

דוגמא: תהא T תורת הסדר החלקי ויהי $T^+=T\cup\{\alpha\}$ כאשר $\alpha=\forall x,y\left(S(x,y)\cup S(y,x)\right)$, כלומר T^+ היא תורת הסדר הקווי. כל מודל של T^+ הוא גם מודל של T, מפני שכל מבנה שהוא סדר קווי הוא גם סדר חלקי. אמנם לא כל מודל של T הוא מודל של T^+. לדוגמא $M=\langle\{1,2\},\subseteq\rangle$ הוא מודל של T אך לא של T^+, מפני ש-$M\not\models\alpha$ כי עבור $x=\{1\}$ $y=\{2\}$ לא מתקיים: $\{1\}\subseteq\{2\}\cup\{2\}\subseteq\{1\}$.

2) העשרה וצמצום של מבנה

הגדרה: יהי אוצר מילים L ויהי M מבנה שמפרש אותו. אם נוריד סימני קבועים, ש"פ, פונקציות ויחס מ-L נקבל אוצר מילים L^- כך ש- $L^-\subseteq L$. נוריד את הסימנים המתאימים מ-M כדי לקבל מבנה שמפרש את L^-. מבנה זה עולמו כמו של M ומפרש את L^- בלבד. באופן רשמי נסמן מבנה חדש זה $M\restriction L^-$ או $M|L^-$, אך בקיצור נוכל לסמן M^-.

M^- הוא הצמצום של M, ו-M הוא העשרה של M^-.

דוגמאות: נתון אוצר מילים $L=\langle F,S,C\rangle$, ומבנה $M=\langle \mathbb{R},+,<,e\rangle$. M מפרש את L.

נתון אוצר מילים $L^-\langle C\rangle$, אזי $M^-=\langle \mathbb{R},e\rangle$. M^- מפרש את L^- והוא הצמצום של M.

נתון אוצר מילים $L^+=L\cup\{C_n : n\in\mathbb{N}\}$, אזי נגדיר מבנה M^+ שעולמו $\mathbb{R}$, F^{M^+} היא $+$, S^{M^+} הוא $<$, C^{M^+} הוא e, ולכל $n\in\mathbb{N}$ $C_n^{M^+}=n$. M^+ מפרש את L^+ והוא העשרה של M ו-M^-.

משפט: יהי אוצר מילים L ומבנה M שמפרש אותו, וכן יהי אוצר מילים L^- כך ש-$L^-\subseteq L$ ומבנה M^- צמצום של M שמפרש את L^-. אזי מתקיים:

(1) לכל פסוק α באוצר מילים L^-, $M\models\alpha$ אם ורק אם $M^-\models\alpha$. מפני שביחס לאוצר מילים L^- ל-M ול-M^- יש אותם סימנים, לכן רק מקיימים את אותם הפסוקים ב-L^-.

(2) לכל תורה T באוצר מילים L^-, M מודל ל-T ($M\models T$) אם ורק אם M^- מודל ל-T ($M^-\models T$). מפני שכבר אמרנו שהם מקיימים אותם פסוקים, וכל התורות ב-L^- מורכבות מפסוקים אלו.

דוגמא: נתונים אוצרות מילים $L=\langle C,S,g\rangle$, $L^-=\langle S\rangle$. והפסוקים הבאים:

$\alpha=\exists x,y,z[S(x,y)\wedge S(y,z)]$

$\beta=\exists x\forall y(S(y,x))$

$\gamma=\forall x(S(c,x))$

$\delta=\forall x(S(x,g(x)))$

נתון מבנה שמפרש את L: $M=\langle \mathbb{N},0,<,g^M\rangle$ כאשר $g^M(x)=x+1$.

ומבנה M^- שמפרש את L^- והוא צמצום של M, $M^-=\langle\mathbb{N},<\rangle$.

נקבל את הטבלה הבאה בערכי אמת.

	M	M^-
α	T	T
β	F	F
γ	T	לא מוגדר
δ	T	לא מוגדר

ניתן לראות כי אכן כל הפסוקים ב-L^- (α,β) יש להם אותם ערכי אמת בשני המבנים.

נגדיר $T=\{\alpha,\beta\}$ האם אחד מהמבנים מודל של T? לא. כי $M,M^-\not\models\beta$.

3) תורה של מבנה

יהי M מבנה שמפרש אוצר מילים L. "התורה של M", נסמן $Th(M)$, היא קבוצת כל הפסוקים ב-L שמתקיימים ב-M. $Th(M)$ היא בוודאי תורה עקבית כי M הוא המודל שמקיים אותה.

דוגמא: יהי אוצר מילים $L=\langle c,s,f\rangle$ ומבנה שמפרש את L $M=\langle \mathbb{N},1,<,+\rangle$. התורה $Th(M)$ היא אוסף כל הפסוקים ב-L שמתקיימים ב-M, למשל $\alpha=s(c,f(c,c))$ מתקיים ב-M לכן $\alpha\in Th(M)$.

ה) משפט הקומפקטיות

תהי T תורה אינסופית (עם אינסוף פסוקים), אם לכל תת קבוצה סופית של פסוקים ב-T יש מודל שמקיים אותם, אזי יש מודל שמקיים את T כולה, כלומר T תורה עקבית. אין צורך לדעת להוכיח משפט זה אך נשתמש בו. משפט זה בעצם חוסך מאיתנו למצוא מודל שמקיים כל פסוק ב-T ואומר לנו ישירות אם התורה עקבית או לא.

אלא לבדוק פסוק תרין שאלות לפני ½ כה.

ו) שאלות פתורות על משפט הקומפקטיות

1) האם יש אוצר מילים L ותורה T כך שלכל מבנה M שמפרש את L מתקיים $M\models T$ אם ורק אם M סופי (כלומר שהעולם של M אינו אינסופי)?

תשובה: לא.

הוכחה: נניח בשלילה כי קיימת תורה T כזאת. נגדיר אינסוף פסוקים מהצורה "יש לפחות n איברים"$=\alpha_n$ כאשר $n\in\mathbb{N}$, כלומר $\alpha_n=\exists x_1,x_2,\dots,x_n\left(\bigwedge_{1\le i<j\le n} x_i\neq x_j\right)$. נגדיר תורה חדשה $T^1=T\cup\{\alpha_n:n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}\}$. אם נוכיח כי T^1 עקבית כלומר שיש מודל M^1 ל-T^1, אז M^1 הוא גם מודל ל-T, ומכיוון שהעולם של M^1 אינסופי, אז סתרנו את הטענה. לפי משפט הקומפקטיות כדי להוכיח ש-T^1 עקבית מספיק להוכיח שלכל תת הקבוצה סופית של פסוקים T^-, כך ש-$T^-\subseteq T^1$, היא עקבית.

תהי T^- תת הקבוצה סופית של T^1, אזי כל פסוק α ששייך לפי הגדרת T^1 הוא או $\alpha\in T$ או $\alpha\in\{\alpha_n:n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}\}$. לפי ההנחה בשלילה המודל של T הוא סופי, וכן מכיוון ש-T^- סופית אזי לקבוצת הפסוקים $\{\alpha_n:n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}\}$ יש אינדקס n סופי. נגדיר n^* גדול משני מספרים סופיים אלו.

נגדיר מבנה M^1 שהעולם שלו הוא $\{1,2,\dots,n^*\}$. נוסיף סימנים של הפונק' אישיים ל-L כך ש-M^1 יפרש את L עם תוספת הפונק' הא"ש"ים. נמצא ש-M^1 הוא העשרה של M, ולפי משפט 2 ממעל ג' מתקיים $M^1\models T$. נוכיח כי $M^1\models T^-$. יהי פסוק $\alpha\in T^-$, צ"ל $M^1\models\alpha$. נחלק לשני מקרים:

1) אם $\alpha\in T$ אזי מכיוון ש-$M^1\models T$ אז מתקיים $M^1\models\alpha$.

2) אם $\alpha\notin T$ אז יש $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$\alpha=\alpha_n$. מכיוון שהגדרנו "יש לפחות n איברים"$=\alpha_n$, וגם $n<n^*$, אזי $M^1\models\alpha$.

נמצא כי יש מודל ל-T^- לכן היא עקבית, וגם T^1 עקבית, לכן ל-T יש מודל אינסופי. סתירה! מ.ש.ל.

2) נתון אוצר מילים $L=\langle s,f,g\rangle$, ומבנה שמפרש את L $M=\langle \mathbb{N},\le,+,*\rangle$, ותורה של M $T=Th(M)$.

האם יש ל-T מודל שהעוצמה של העולם שלו לפחות כמו עוצמת הממשיים $|\mathbb{R}|$?

תשובה: כן.

הוכחה: נגדיר אוצר מילים $L^+=L\cup\langle c_i : i\in\mathbb{R}\rangle$ ותורה ב-L^+ כך: $T^+=T\cup\{c_i\neq c_j : i,j\in\mathbb{R}, i\neq j\}$.

אם נוכיח כי T^+ עקבית סיימנו. מכאן שאז ל-T^+ יש מודל M^+, ומכיוון ש-$T\subseteq T^+$ מתקיים $M^+\models T$,

ומכיוון שהעוצמה של M^+ היא לפחות $|\mathbb{R}|$ (נוכיח מיד) הוכחנו את הטענה.

מדוע עוצמה של העולם של M^+ לפחות $|\mathbb{R}|$? נגדיר פונקציה $f:\mathbb{R}\to M^+$ כך $f(i)=c_i^{M^+}$. נוכיח כי f חח"ע. יהיו $i_1,i_2\in\mathbb{R}$, נניח כי $f(i_1)=f(i_2)$, צ"ל $i_1=i_2$. לפי ההנחה מתקיים $c_{i_1}^{M^+}=c_{i_2}^{M^+}$, ולפי הגדרת T^+ $c_{i_1}^{M^+}\neq c_{i_2}^{M^+}$ אם $i_1\neq i_2$, לכן כדי שההנחה תתקיים ח"ב להיות $i_1=i_2$. מ.ש.ל.

נוכיח כי T^+ עקבית באמצעות משפט הקומפקטיות. תהי T^- תת קבוצה סופית של T^+, צ"ל T^- עקבית. מכיוון ש-T^- תורה סופית מספר הפסוקים בקבוצה $\{c_i\neq c_j : i,j\in\mathbb{R}, i\neq j\}$ הוא סופי נרשום את כל ה-c_iים שמופיעים ב-T^-: $c_{i_1},c_{i_2},\dots,c_{i_{n^*}}$. נגדיר מבנה M^* המפרש את L^+ כך: $c_{i_1}^{M^*}=1, c_{i_2}^{M^*}=2,\dots,c_{i_{n^*}}^{M^*}=n^*$. נוכיח כי $M^*\models T^-$. יהי $\alpha\in T^-$ צ"ל $M^*\models\alpha$. נחלק למקרים:

(1) אם $\alpha\in T$, אזי מכיוון ש-M^* הרחבה של M, לפי משפט (2) ממ"ן ג' $M^*\models T$ ולכן $M^*\models\alpha$.

(2) אם $\alpha\notin T$, אזי הוא מהצורה $\{c_i\neq c_j : i,j\in\mathbb{R}, i\neq j\}$. מבנה M^* יפרש אותו $i\neq j$, ניתן כי לפי הגדרת α זה אכן מתקיים, לכן $M^*\models\alpha$.

נמצא כי T^- עקבית, ולפי משפט הקומפקטיות T^+ עקבית והמודל שלה M^+ שעוצמתו לפחות $|\mathbb{R}|$. מכיוון ש-$T\subseteq T^+$ אזי $M^+\models T$ והוכחנו את הטענה.

21/12 בס"ד

1

3) שאלה: נתון מבנה $M=\langle N,<,+,\cdot,1\rangle$ (עשיר) $T_0=Th(M)$.

א) האם יש מודל לתורה $T_0\cup\{\exists x\forall y(S(x,y)\vee x<y)\}$?

תשובה: כן, M. $M\models T$ וגם הפסוק הנוסף מתקיים ב-M כי אפשר לבחור $x=0$.

ב) האם יש מודל לתורה $T_0\cup\{\exists x\forall y(S(x,y)\vee x=y)\}$?

תשובה: לא.

הוכחה: נניח בשלילה שיש מודל כזה, M'. נקרא לפסוק הנוסף α לדיבור.
במודל M מתקיים $M\models\neg\alpha$ אזי $\neg\alpha\in T_0$. ומכיוון ש-$M'\models T_0$ אזי $M'\models\neg\alpha$
אבל הנחנו $M'\models\alpha$. סתירה! לכן לא ניתן להניח שקיים מודל כזה.

ג) נסמן $\bar n=\underbrace{1+1+\dots+1}_{n\text{ פעמים}}$, או באופן יותר פורמלי (לפי הכתיב הזה אז) העולם למבנה $\bar n=F(F(c,c),c,\dots,c)$. לדוגמא $\bar 3=F(F(c,c),c)$. האם יש מודל לתורה $T=T_0\cup\{\bar n<d : n\in N\}$? (קבוע חדש)

פתרון שנכשל: נגדיר מבנה M' שהוא העשרה של M, ואיבר העולם שלו כולל פירוש ל-d. נניח שיש n טבעי כך ש-$M'\not\models\bar n<d$. $d^{M'}$ הוא מספר ב-N. נסמן $k=d^{M}$, נניח $M'\not\models\bar k<d$. הפסוק $\bar k<d$ מתפרש ב-M' כך $k<k$, ולכן זה לא מתקיים. מ.ש.ל.

פתרון שעובד: לפי משפט הקומפקטיות, מספיק להוכיח שכל תת תורה סופית של T היא עקבית. תהי $T^-\subseteq T$ סופית. אזי $T^-\cap\{\bar n<d: n\in N\}$ סופית, לכן יש n^* טבעי כך שלכל $\alpha\in T^-$, אם α היא מהצורה $\bar n<d$ אז $n^*>n$.

נגדיר מבנה M^- שהוא העשרה של M, ו-d מתפרש בו כ-n^* במילים אחרות $M^-=\langle N,<,+,\cdot,1,n^*\rangle$. נוכיח ש-$M^-\models T^-$. ואז נוכל להסיק ש-$T^-$ עקבית משום לפי משפט הקומפקטיות T עקבית.

יהי $\alpha\in T^-$, נראה $M^-\models\alpha$.

מקרה א': $\alpha\in T_0$, אנו יודעים ש-$M\models T_0$ ו-M^- העשרה של M לכן $M^-\models T_0\Rightarrow M^-\models\alpha$

מקרה ב': $\alpha\in\{\bar n<d:n\in N\}\setminus T_0$ אז יש n טבעי כך ש-$\alpha=\bar n<d$. α מתפרש ב-M^- כך $n<n^*$. אבל בחרנו n^* כך ש-$n<n^*$ מ.ש.ל.

3) האם יש מודל ל-T_d שעוצמתו לפחות $|\mathbb{R}|$?

<u>תשובה:</u> כן

הוכחה: נגדיר L^+ כך $\langle 1, \cdot, 1\rangle$ יופיע ב-L ונוסיף קבוע אישי c_a כנגד כל a ממשי. נגדיר $T^+ = T \cup \{c_a \neq c_b : a,b\in\mathbb{R},\ a\neq b\}$. מספיק להוכיח ש-$T^+$ עקבית. (עכשיו נפרט בהוכחה).

תהי T^- תת-קבוצה סופית של T^+. אז $\{c_a : c_a$ מופיע ב-$T^-\}$ סופית. נרשום את כולם כך: $c_{a_0}, c_{a_1}, \dots, c_{a_n}$. נגדיר העשרה M^- ל-M, כך ש-M^- מפרש את L^+ באופן הבא:

$$c_a = \begin{cases} i & a=a_i,\ 0\le i\le n \\ H & \text{אחרת} \end{cases}$$

דוגמא: נניח שמשתמשים ב-T^- רק ב-$c_{\frac12}, c_3, c_{\sqrt2}$.
$c_{a_0}=c_{\frac12}$
$a_0=\frac12,\ a_2=3,\ a_3=\sqrt2$

נוכיח $M^- \models T^-$. יהי $\alpha\in T^-$. צ"ל: $M^-\models\alpha$.

מקרה א': $\alpha\in T_0$. אז $M\models T_0$ ולכן $M\models\alpha$. M^- העשרה של M ולכן $M^-\models\alpha$.

מקרה ב': $\alpha\notin T_0$ לכן α מהצורה $c_a\neq c_b$ כאשר a,b ממשיים שונים.

יש $0\le i\le n$ כך ש- $a=a_i$; יש $0\le j\le n$ כך ש- $b=a_j$; $i\neq j$ כי $a\neq b$. מספיק $c_a\neq c_b$ מתפרש ב-M כ-$i\neq j$. אכן $i\neq j$. מכיוון שכל $T^-\subseteq T^+$ סופית היא עקבית, לפי משפט הקומפקטיות T^+ עקבית.

נוכיח שעוצמת מודל של T^+ - א לפחות $|\mathbb{R}|$. נגדיר $f:\mathbb{R}\to M^+$ כך $f(a)=c_a^{M^+}$. צ"ל f חח"ע. יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ נניח $f(a)=f(b)$ (1). צ"ל $a=b$.

לכן (1) $c_a^{M^+}=c_b^{M^+}$. נניח בשלילה $a\neq b$ (2) לכן $(c_a\neq c_b)\in T^+$ (3).

לכן (3) $M^+\models c_a\neq c_b$, כלומר $c_a^{M^+}\neq c_b^{M^+}$ סתירה לנתון. לכן $a=b$.

24/12 סט"ס

שאלה האם יש תורה T שיש לה מודל שעוצמתו $\aleph_0$ וגם אין לה מודל שעוצמתו לפחות $|A|$?

תשובה לא

הוכחה: נניח בשלילה שיש T תורה כזאת. נגדיר L^+ כך: ב-L^+ אותם כל הסימנים שב-T ונוסיף קבוע אישי c_a כנגד כל a ב-A.

נגדיר $T^+ = T \cup \{c_a \neq c_b : a \neq b,\ a,b \in A\}$ מספיק להוכיח ש-T^+ עקבית.

(מדוע? כי אם M^+ מודל ל-T^+ אז $\begin{cases} F: A \to M^+ \\ F(a) = c_a^{M^+} \end{cases}$ חח"ע.)

תהי $T' \subseteq T^+$ סופית. ההמשך כמו השאלה הקודמת.