מבוא לקומבינטוריקה ותורת הגרפים

הרצאות

גרסא לא סופית. עודכן לאחרונה: 19/07/2009.

תוכן עניינים

סיכום: בר וינוגרד
מרצה: פרופ' מיכאל קריבלביץ'
אוניברסיטת תל אביב – 2009 – סמסטר ב'
www.barvinograd.com/university
uni@barvinograd.com

הבהרה: הכל סופי אלא אם נאמר אחרת.

1 עקרונות בסיסיים של מניה

1.1 עקרון הסכום

עקרון הסכום (משפט): תהינה A, B קבוצות סופיות זרות, אזי $|A \cup B| = |A| + |B|$.

הוכחה: נניח $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, \dots, b_m\}$. לכן: $A \cup B = \{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n\}$. אז $|A \cup B| = m + n = |A| + |B|$.

מסקנה: תהיינה A, B קבוצות סופיות כאשר $A \subseteq B$ אזי $|B \backslash A| = |B| - |A|$

הוכחה: $B = A \cup (B \backslash A)$ (כאשר הקבוצות זרות זו לזו). לכן לפי עיקרון הסכום מקבלים $|B| = |A| + |B \backslash A|$ ומכאן $|B \backslash A| = |B| - |A|$.

2.1 עקרון הכפל

מכפלה ישרה (הגדרה): תהיינה A, B קבוצות. המכפלה הישרה של A ושל B, המסומנת ב-$A \times B$, מוגדרת באופן הבא:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

דוגמה: $A = \{1,2\}$, $B = \{a, b, c\}$ אז $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$. נשים לב: $|A| = 2$ ו- $|B| = 3$ ולכן $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

עקרון הכפל (משפט): תהיינה A, B קבוצות סופיות, אזי $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

הוכחה: נניח $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, $|A| = m$, ו- $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, $|B| = n$. לכן:

השורה של a_1 היא: $\{(a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_n)\}$

השורה של a_2 היא: $\{(a_2, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_2, b_n)\}$

...

השורה של a_n היא: $\{(a_m, b_1), (a_m, b_2), \dots, (a_m, b_n)\}$

הצגנו את הקבוצה $A \times B$ כטבלה בה יש m שורות (כמספר האיברים ב-A), ובכל שורה יש בדיוק n איברים (כמספר האיברים ב-B). לכן בטבלה הזאת וב-$A \times B$ יש בדיוק $|A| \cdot |B| = m \cdot n$ איברים.

www.barvinograd.com/university
uni@barvinograd.com

3.1 הכללות של עיקרון הכפל ושל עקרון הסכום

עקרון הכפל המוכלל 1 (משפט): תהיינה A, B קבוצות סופיות ותהי $R \subseteq A \times B$ קבוצה (כלומר שהיא יחס בינארי על A, B).

א. אם קיים s טבעי כך שלכל $a \in A$, a משתתף בבדיוק s זוגות מ-R כאיבר ראשון, אז $|R| = |A| \cdot s$
ב. אם קיים t טבעי כך שלכל איבר $b \in B$ משתתף בבדיוק t זוגות מ-R כאיבר שני אז $|R| = t \cdot |B|$

הוכחה: נניח $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, $|A| = m$, $B = \{b_1, \dots b_m\}$, $|B| = m$. בהינתן R, נגדיר מטריצה M עם m שורות ו-n עמודות באופן הבא:

$$\forall_{1 \le i \le m,\ \ 1 \le j \le n}\ (M)_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

מכאן לפי ההגדרה של M, העוצמה של R שווה למספר האחדות ב-M.

א) לפי הנתון, בכל שורה של M יש בדיוק s אחדות, ולכן מספר האחדות הכולל ב-M הוא $|A| \cdot s = m \cdot s$.
ב) לפי הנתון, בכל עמודה של M יש בדיוק t אחדות, ולכן מספר האחדות הכולל ב-M הוא $|B| \cdot t = n \cdot t$

דוגמה: נספור את כמות המספרים האי זוגיים מ-0 עד 99 עם ספרות שונות.

פתרון: נסמן $A = \{1,3,5,7,9\}$ ו-$B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ניתן לזהות כל מס' אי-זוגי x בין 0 לבין 99 עם זוג (a, b) כאשר $a \in A$ ו-$b \in B$ באופן הבא: $x = 10 \cdot b + a$. נסמן ב-R את הזוגות (a, b) עם $a \in A$ ו-$b \in B$ כאשר $a \neq b$. לפי הגדרת R, נובע כי $|R|$ הוא המספר המבוקש. נשים לב כי כל איבר $a \in A$ משתתף בדיוק ב-9 זוגות $(a, b) \in R$ לכן לפי הכללת עיקרון הכפל, $|R| = |A| \cdot 9 = 5 \cdot 9 = 45$

דוגמה: בשיעור משתתפים 20 בנים ומס' בנות. כל בן בקבוצת שיעור מכיר בדיוק 4 בנות וכל בת מכירה בדיוק 5 בנים. מהו מס' הבנות בשיעור?

פתרון: נסמן את קבוצת הבנים ב-B, ואת קבוצת הבנות ב-G. כמו כן, נסמן ב-R את יחס ההיכרות בין הבנים ובין הבנות בכיתה, כלומר $(a, b) \in R$ אם בן a מכיר בת b. לפי עיקרון הכפל:

$$|B| \cdot 4 = |R| = |G| \cdot 5$$

$$80 = 20 \cdot 4 = |G| \cdot 5 \Rightarrow |G| = 6$$

הערה: ביצענו פה ספירה כפולה כדי למצוא את הנעלם.

עקרון החיבור המוכלל (משפט): תהיינה $A_1, \dots, A_n$ קבוצות סופיות זרות בזוגות אזי

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

הוכחה: באינדוקציה על n

הגדרה: תהיינה $A_1, \dots, A_n$ קבוצות הכפלה הישרה של $A_1, \dots, A_n$ המסומנת ב-$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ הוא קבוצה המוגדרת ע"י $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$

עקרון הכפל המוכלל 2 (משפט): תהיינה $A_1, \dots, A_n$ קבוצות סופיות אזי

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

הוכחה: באינדוקציה על n.

דוגמה: תהי A קבוצה של n איברים. נחשב את מספר תתי הקבוצות של A.

פיתרון: נרשום $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ תהי $X \subseteq A$ תת קבוצה, ניתן לאפיין את X ע"י וקטור $\chi_X = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ כאשר $(\chi_X)_i = \begin{cases} 1, & a_i \in X \\ 0, & a_i \notin X \end{cases}$

דוגמה: $A = \{1,2,3,4,5\}$, $X \subseteq A$, $\chi_x = (1,0,0,1,0)$. יתרה מזאת קיימת התאמה חח"ע ועל בין התת-קבוצות של $X \subseteq A$ לבין וקטורים של 0 או 1 באורך n. לכן מספר תתי הקבוצות של A שווה למספר הוקטורים באורך n אשר כל רכיב בהם הוא 0 או 1. נשים לב כי קבוצות הוקטורים הנ"ל היא בעצם $\{0,1\}^n$. לכן, לפי עיקרון הכפל המוכלל ב-$\{0,1\}^n$ יש 2^n איברים, וזאת כמות תתי הקבוצות של A.

4.1 בעיות מניה בסיסיות

סימון: עבור $n \in \mathbb{N}$ נסמן $[n] = \{1,2,3, \dots, n\}$

בעיה בסיסית: A – קבוצה של n איברים. k - פרמטר.

בכמה אופנים ניתן לבחור k איברים מתוך A? על מנת לענות על שאלה זאת, יש לציין:

- האם סדר הבחירה חשוב או לא (האם מדובר בקבוצות או בסדרות)
- האם חזרות מותרות או אסורות

	אסורות חזרות	מותרות חזרות
יש חשיבות לסדר	ב. מספר הסדרות באורך k עם איברים ב-A עם חזרות אסורות	א. מספר הסדרות באורך k עם איברים ב-A
אין חשיבות לסדר	ד. מספר תתי הקבוצות של A בגודל k.	ג. מספר המולטי-קבוצות של A באורך k.

א. **סופרים:** מספר הסדרות באורך k עם איברים ב-A. למעשה, מדובר בקבוצה A^k בה יש $|A|^k = n^k$ איברים

ב. מספר הסדרות באורך k עם איברים ב-A ללא חזרות

תמורה (הגדרה): תהי A קבוצה של n איברים. תמורה π על A היא פונקציה חח"ע ועל: $\pi: A \to A$.

נשים לב: ניתן לזהות כל תמורה π על A עם סדרה באורך n בה כל איבר ב-A מופיע בדיוק פעם אחת.

טענה: תהי A קבוצה בת n איברים. מספר התמורות על A שווה ל-$n!$.

הוכחה: נזהה את התמורה על A עם סדרות באורך n בהן כל איבר מופעי בדיוק פעם אחת. נספור את מספר הסדרות הנ"ל: אם $\vec{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ סדרה כזאת. את האיבר הראשון ϵ_1 ניתן לבחור ב-n אופנים שונים. בהינתן ϵ_1 ניתן לבחור את ϵ_2 ב-$(n-1)$ אופנים. ממשיכים בצורה דומה, ואז מספר הבחירות הכולל הוא: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot = n!$. ולכן מספר התמורות על A גם הוא $n!$. כלומר, מספר הסדרות באורך k בלי חזרות הוא: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

ג. **סופרים:** מספר תתי הקבוצות של k איברים מתוך הקבוצה A בגודל n (נניח $k \leq n$, אחרת יש 0 אפשרויות).

משפט: יהיו $k, n \in \mathbb{N}$ כך ש- $0 \leq k \leq n$. מספר התת-קבוצות בגודל k מתוך הקבוצה A של n איברים הוא: $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

הוכחה: נסמן ב-x את המספר המבוקש. בהינתן קבוצה S של k איברים מתוך $[n]$, ניתן ליצור ממנה $k!$ סדרות שונות באורך k. באופן זה, ניתן לקבל את כל הסדרות באורך k של איברים מתוך $[n]$, וכל סידרה כזאת מתקבלת בדיוק פעם אחת. לכן מספר הסדרות הנ"ל הוא $x \cdot k!$. מצד שני, הוכחנו בסעיף ב' כי מספר הסדרות הנ"ל הוא $\frac{n!}{(n-k)!}$ ולכן $x = \frac{n!}{n!(n-k)!}$.

סימון: עבור $0 \le k \le n$ שלמים, נסמן $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. בנוסף, עבור $n < k$ נסמן $\binom{n}{k} = 0$. עבור $\binom{0}{0} = 1$.

ד. **סופרים:** את מספר תתי הקבוצות הלא סדורות כאשר חזרות מותרות בעלות k איברים מקבוצה בגודל n. כלומר, מספר האופנים לבחור מולטי קבוצה בגודל k מתוך $[n]$.
נשים לב, ניתן לתאר כל מולטי קבוצה כזאת ע"י n-יה $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ כאשר $x_i \ge 0$ שלם ו $x_1 + \cdots + x_n = k$. יתרה מזאת, ההתאמה הזאת היא חח"ע ועל. לכן, למעשה, עלינו לספור את מספר הפיתרונות של המשוואה: $x_1 + \cdots + x_n = k$ בטבעיים.

משפט: מספר הפיתרונות של משוואה $x_1 + \cdots + x_n = k$ בטבעיים שווה ל-$\binom{n+k-1}{k}$.

הוכחה: בהינתן פתרון $(x_1, \dots, x_n)$ למשוואה הנ"ל נוכל לייצגו בצורה הבאה:

$$\overbrace{11\dots1}^{x_1\ times} \mid \overbrace{22\dots2}^{x_2\ times} \mid \dots \mid \overbrace{nn\dots n}^{x_n\ times}$$

כאשר 1 מופיע x_1 פעמים וכך הלאה. קיבלנו רשימה באורך $k + n - 1$ המורכבת מ-k מספרים מתוך $[n]$ ו- $n - 1$ מחיצות. יתרה מזאת, בהינתן מיקום $(n-1)$ במחיצות נוכל לשחזר את הפיתרון בצורה חד משמעית. בהתאם לכך, קיימת התאמה חח"ע ועל בין הפתרונות של המשוואה הנתונה בטבעיים לבין סידור של $n - 1$ מחיצות מתוך רשימה באורך $n - k - 1$. הכמות האחרונה היא מספר האופנים לבחור $n - 1$ מחיצות בתוך קבוצה בגודל $n + k - 1$. ולכן המספר האחרון שווה ל-

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{(n+k-1)-(n-1)} = \binom{n+k-1}{k}$$

דוגמה: נמצא את מספר הפיתרונות של אי-שוויון $x_1 + \cdots + x_n \le k$ (שלמים חיוביים) בטבעיים.
פתרון: עבור פתרון $(x_1, \dots, x_n)$ של אי-השיוויון הנתון, נסמן $y = k - (x_1 + \cdots + x_n)$, אזי:
1) y הוא טבעי.
2) $x_1 + \cdots + x_n + y = k$

כמו כן, בהינתן $y, x_1, \dots, x_n$ כנ"ל $(x_1, \dots, x_n)$ הוא פיתרון טבעי לאי השיוויון הנתון. מכאן, מספר הפיתרונות של אי-השיוויון הנתון שווה למספר הפתרונות של $x_1 + \cdots + x_n + y = k$ בטבעיים והאחרון שווה ל- $\binom{n+1+k-1}{n+1-1} = \binom{n+k}{n}$

2 המקדמים הבינומיים

הבינום של ניוטון (משפט): לכל n טבעי ולכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\cdot y^{n-k}$.

הוכחה:

$$(x+y)^n=\overbrace{(x+y)(x+y)\dots(x+y)}^{n\ times}$$

כשנפתח את המכפלה הנ"ל, כל גורם יהיה מהצורה $x^k\cdot y^{n-k}$ (נבחר מתוך x k סוגריים, y נבחר מתוך $n-k$ סוגריים), לכן $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}C_kx^k\cdot y^{n-k}$. על מנת לקבוע את הערך של המקדם C_k, נשים לב כי הוא שווה למספר האופנים ליצור איבר $x^k\cdot y^{n-k}$, כלומר למספר האופנים לבחור k סוגריים מהם ילקח x. לכן לפי ההגדרה של המקדם הבינומי $\binom{n}{k}$, נובע כי $C_k=\binom{n}{k}$.

מסקנה: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

הוכחה: נציב $x=y=1$ בנוסחת הבינום ונקבל

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\cdot 1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

זהות פסקל (משפט): $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$

הוכחה אלגברית: קל

הוכחה קומבינטורית: נסמן ב-F_n את משפחת תתי הקבוצות של $[n]$ בגודל k. הוכחנו ש-$|F_k|=\binom{n}{k}$. נסמן.

$F^{'}=\{X\subseteq[n]\mid |X|=k,\ n\in X\}$

$F^{''}=\{x\subseteq[n]\mid |X|=k,\ n\notin X\}$

נשים לב ש-$F_k=F^{'}\cup F^{''}$, $F^{'}\cap F=\phi$ מכאן $|F^{'}|+|F^{''}|=|F_k|=\binom{n}{k}$, אבל $|F^{'}|=\binom{n-1}{k-1}$ (יש לבחור את $k-1$ האיברים הנותרים מתוך $[n-1]$). כמובן $|F^{''}|=\binom{n-1}{k}$ (יש לבחור קבוצה בגודל k מתוך קבוצה $[n-1]$). מכאן $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$.

1.2 אונימודלית של המקדמים הבינומיים

נסתכל על הסדרה $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ כאשר $a_k=\binom{n}{k}$.

סדרה אונימודלית (הגדרה): סדרה $\{b_k\}_{k=0}^{n}$ נקראת אונימודלית (עולה) אם קיים מספר טבעי $0\le k_0\le n$ כך ש $b_1\le b_2\le\dots\le b_{k_0}$ וכן $b_{k_0}\ge b_{k_0+1}\ge\dots\ge b_n$.

טענה:

א) אם n זוגי אז $\binom{n}{0}<\binom{n}{1}<\dots<\binom{n}{\frac{n}{2}-1}<\binom{n}{\frac{n}{2}}>\binom{n}{\frac{n}{2}+1}>\dots>\binom{n}{n}$

ב) אם n אי זוגי אז $\binom{n}{0}<\binom{n}{1}<\dots<\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}=\binom{n}{\lceil\frac{n}{2}\rceil}>\dots>\binom{n}{n}$

הוכחה: $a_k=\binom{n}{k}$. נסתכל על המנה של 2 איברים העוקבים בסדרה:

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k-1)!}} = \frac{n-k-1}{k} \Rightarrow \left[a_k > a_{k-1} \Leftrightarrow \frac{n-k+1}{k} > 1\right]$$

ולכן

$$\frac{n-k+1}{k} > 1 \Rightarrow$$

$$(1)\ \ n > 2k-1 \Leftrightarrow a_k > a_{k-1}$$

$$(2)\ \ n = 2k-1 \Leftrightarrow a_k = a_{k-1}$$

$$(3)\ \ n < 2k-1 \Leftrightarrow a_k < a_{k-1}$$

בדיקה המקרה של n זוגי ושל n אי זוגי נותנת את אותן תוצאות.

2.2 הוכחת זהויות קומבינטוריות

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

הוכחה: ישיר מהגדרות

2. $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$

הוכחה: לפי הבינום של ניוטון עם $y = 1$ מקבלים $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n$. נסתכל על השוויון הנ"ל כשיוויון בין שתי פונקציות של משתנה x, ונגזור אותן לפי x. נקבל:

$$n \cdot (x+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} \cdot k \cdot x^{k-1}$$

נציב $x = 1$ ונקבל:

$$n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k}$$

הוכחה אלטרנטיבית:

$$\begin{aligned} k\binom{n}{k} &= k \cdot \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!} \\ &= n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(n-1)!} \\ &= n \cdot \binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$

לכן:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} n \cdot \binom{n-1}{k-1} \\ &= n \cdot \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} \\ &= n \cdot \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} \\ &= n \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

הוכחה קומבינטורית: ניתן לפרש איבר $k\cdot\binom{n}{k}$ כמספר האופנים לבחור קבוצה $S\subseteq[n]$ של k איברים ולאחר מכן לבחור $s\in S$. לכן, אגף שמאל סופר את מספר הזוגות $\{(S,s)|S\subseteq[n],s\in S\}$. אותה כמות ניתן לספור בדרך אחרת: קודם נבחר $s\in[n]$ ואז נבחר $S\subseteq[n]$ כך ש $s\in S$. את $s\in[n]$ ניתן לבחור ב-n אופנים, ואחרי שהוא נבחר ניתן לבחור את $S\subseteq[n]$ אשר מכילה אותה ב-2^{n-1} אופנים. לכן המספר הכולל של הזוגות (S,s) כנ"ל הוא $n\cdot 2^{n-1}$. לכן, $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1}$.

3. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$

הוכחה קומבינטורית:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}$$
$$=\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots\right)-\left(\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots\right)$$

הסכום $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots$ סופר את מספר הקבוצות במשפחה F_1 של תתי קבוצות של $[n]$ בעוצמה זוגית.
הסכום $\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots$ סופר את מספר הקבוצות במשפחה F_2 של תתי קבוצות של $[n]$ בעוצמה אי-זוגית. לכן, די להראות שהעוצמה של F_1 היא העוצמה של F_2. נגדיר את ההתאמה $\varphi: F_1\to F_2$ באופן הבא: לכל קבוצה $T\in F_1$ נגדיר $\varphi(T)=\begin{cases}T\cup\{n\} & n\notin T\\ T\backslash\{n\} & n\in T\end{cases}$ (לדוגמה, אם $n=5$ אז $T(\{1,2,3\})=\{1,2,3,5\}$ ו-$T(\{2,3,5\})=\{2,3\}$). נשים לב שלכל $T\in F_1$ מתקיים: $|\varphi(T)|=|T|+1$ או $|\varphi(T)|=|T|-1$. ובשני המקרים שונה מזו של $|T|$. לכן φ מעבירה קבוצות זוגיות אל קבוצות אי-זוגיות ומכאן, אכן, $\varphi: F_1\to F_2$. כמוכן, קל לראות ש- φ היא חח"ע ועל ולכן $|F_1|=|F_2|$, כרצוי.

3.2 מספרי קטלן

סדרה מאוזנת (הגדרה): סדרה $\{a_i\}_{i=1}^{2n}$ של ±1 נקראת מאוזנת אם $\sum_{i=1}^{k}a_i\ge 0$ לכל $1\le k\le 2n$. ז"א כל הסכומים החלקיים של הסדרה הם אי-שליליים.

שאלה: מהו מספר הסדרות המאוזנות $\{a_i\}_{i=0}^{2n}$ כאשר $a_i\in\{1,-1\}$ ו- $\sum_{i=1}^{2n}a_i=0$?

הוכחה: נסמן ב-S_n את משפחת הסדרות של n אחדות ושל n מינוס אחדות. נסמן $|S_n|=s_n$. נשים לב $s_n=\binom{2n}{n}$. כמו כן, נסמן ב-B_n את משפחת הסדרות המאוזנות באורך $2n$ ונסמן $|B_n|=b_n$. כמו כן, נסמן $U_n=S_n\backslash B_n$ את הסדרות הלא מאוזנות באורך $2n$ ונסמן $|U_n|=u_n$. כיוון ש $S_n=B_n\uplus U_n$ מתקיים $b_n=s_n-u_n=\binom{2n}{n}-u_n$. תהי $\bar{a}=\{a_i\}_{i=1}^{2n}$ סדרה לא מאוזנת אז לפי ההגדרה קיים $1\le k\le 2n$ כך ש $\sum_{i=1}^{k}a_i<0$. נסמן k_0 את ה-k-הראשון עבורו זה מתקיים. כעת, נגדיר סדרה חדשה $\bar{a}'=\{a_i'\}_{i=1}^{2n}$ באופן הבא: $a_i'=\begin{cases}-a_i, & 1\le i\le k_0\\ a_i, & k_0+1\le i\le 2n\end{cases}$ (בהמשך נקרא לפעולה זו פעולת ההיפוך).

אז מתקיים

$$(1)\ \sum_{i=1}^{k_0}a_i=-1,\ \sum_{i=k_0+1}^{2n}a_i=1$$

נחשב

$$(2)\ \sum_{i=1}^{2n} a_i{}' = \sum_{i=1}^{k_0} a_i^{'} + \sum_{i=k_0+1}^{2n} a_i^{'} =$$

$$\sum_{i=1}^{k_0}(-a_i) + \sum_{i=k_0+1}^{2n} a_i =$$

$$-\sum_{i=1}^{k_0} a_i + \sum_{i=k_0+1}^{2n} a_i =$$

ומ-(1) נקבל

$$1 + 1 = 2$$

נוכיח כי הפעולה הנ"ל הופכת סדרות לא מאוזנות לסדרות לעיל היא חח"ע ועל. בהינתן סדרה $\bar{a}^{'} = \{a_i^{'}\}_{i=1}^{2n}$ כנ"ל נגדיר k_0 להיות המקום הראשון בו הסכום החלקי $\sum_{i=1}^{k} a_i^{'} > 0$ (מקום זה קיים כי הסכום הכולל הוא 2). נגדיר עתה סדרה: $\bar{a} = \{a_i\}_{i=1}^{2n}$ ע"י $\bar{a}_i = \begin{cases} -a_i^{'}, & 1 \le i \le k_0 \\ a_i, & k_0 + 1 \le i \le 2n \end{cases}$ וקיבלנו סידרה לא מאוזנת ובה k_0 המקום הראשון עם סכום חלקי שלילי. לכן נפעיל את פעולת ההיפוך על $\bar{a}$ שקיבלנו ונקבל את $\bar{a}^{'}$ בחזרה ולכן ההתאמה היא אכן חח"ע ועל. אז הראינו שקבוצת הסדרות הלא מאוזנות באורך $2n$ היא שווה עוצמה לסדרת הסדרות באורך $2n$ עם $n+1$ מינוס אחדות אבל עוצמת הקבוצה השנייה היא $\binom{2n}{n+1}$ ו-$\binom{2n}{n}$ $= s_n$ אז מכאן $u_n = \binom{2n}{n+1}$.

$$b_n = s_n - u_n =$$

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} =$$

$$\frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(2n-n-1)!} =$$

$$\frac{(2n)!}{n!(n-1)!}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$\frac{(2n)!}{n!(n-1)!} \cdot \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{2n!}{n!n!} =$$

$$\frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$$

הגדרה: המספר $C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$ נקרא מספר קטלן (Catalan) ו- $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ - סדרת מספרי קטלן.

4.2 הכללות של המקדמים הבינומיים

1.4.2 מעל $\mathbb{R}$

ראינו $\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & 0 \le k \le n \\ 0, & k > n \ge 1 \end{cases}$ כאשר $n, k \in \mathbb{N}$.

הגדרה: $x \in \mathbb{R}$ ו-k טבעי: $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$. נשים לב שאם $x = n \in \mathbb{N}$ נקבל את הגדרת המקדם הבינומי הרגיל.

דוגמה: הוכח כי $\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n}{4^n} \cdot \binom{2n}{n}$.

פיתרון:

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} =$$

$$\frac{(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} =$$

$$\frac{(-1)^n}{n!2^n}\cdot\left(1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)\right) =$$

$$\frac{(-1)^n}{n!2^n}\cdot\frac{(2n)!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)} =$$

$$\frac{(-1)^n}{(n!2^n)}\cdot\frac{(2n)!}{2^n(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n)} =$$

$$\frac{(-1)^n}{4^n}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}$$

טענה: עבור $\alpha\in\mathbb{R}$ קיים $|x|<1$ כך ש $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$.

הוכחה: אם $\alpha = n\in\mathbb{N}$ נקבל $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}\cdot x^k$. נזכור כי $\binom{n}{k} = 0$ עבור $k>n$ ולכן למעשה $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. המשך

2.4.2 המקדמים המולטינומים

מספר הסדרות של 0,1 עם a אפסים ו-b אחדות הוא $\binom{a+b}{a}$.

דוגמה: נחשב את מספר המילים באורך $a+b+c$ מעל א"ב $\{0,1,2\}$. כאשר 0 מופיעה a פעמים, 1 מופיעה b פעמים, 2 מופיעה c פעמים.

פיתרון: ל-0 $\binom{a+b+c}{a}$ אופנים. נשארו $b+c$ מקומות. אז ל-1 נקבל $\binom{b+c}{b}$ ומה שנשאר זה 2 אבל אין עוד אופציות אז הפיתרון הוא

$$\binom{a+b+c}{a}\binom{b+c}{b} = \frac{(a+b+c)!}{a!\,(b+c)!}\cdot\frac{(b+c)!}{b!\,c!} = \frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!}$$

משפט: יהי $n = n_1+n_2+\cdots+n_k$ מספר המילים מעל א"ב $\{1,2,\ldots,k\}$ באורך n בהן האות i מופיעה n_i פעמים הוא $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$

הוכחה: באינדוקציה על k.

נוסחת המולטינום (הגדרה): אם $n_1,\ldots n_k\geq 0$ שלמים כך ש-$\sum_{i=1}^{n}n_i = n$ אז $\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k} := \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$

משפט: לכל $x_1,\dots,x_k$ ממשיים לכל n טבעי מתקיים,

$$(x_1+\cdots+x_k)^n=\sum_{\substack{n=n_1+\cdots+n_k\\ n_1,\dots,n_k\in\mathbb{N}}}\binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_k}x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot x_k^{n_k}$$

הוכחה: שתי אפשרויות:

- באינדוקציה על n. או,
- כל מחבר בתוצאה מתקבל ע"י בחירה של x_i כלשהו בכל אחד מ-n הסוגריים ולכן מהצורה $x_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot x_k^{n_k}$ כאשר $n=n_1+\cdots+n_k$. כמו כן, המקדם של $x_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot x_k^{n_k}$ הוא מספר האופנים להרכיב מילה באורך n באותיות $\{1,\dots,k\}$ שבה האות i מופיעה n_i פעמים. במספר הזה שווה לפי הגדרה ל- $\binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_k}$.

3 עקרון שובך היונים (דירכלה)

משפט: אם מכניסים $n+1$ יונים ל-n שובכים אז יש לפחות שובך אחד עם לפחות שתי יונים.

הוכחה: אם בכל שובך לכל היותר יונה אחת אז $n+1$ = מספר היונים ≥ מספר השובכים = n סתירה.

ניסוח נוסף: אם f פונקציה $f:[n+1]\to[n]$ אז f לא חח"ע.

דוגמה: תהי $X\subseteq[2n]$ בת $n+1$ איברים שונים. הוכיחו שיש שניים שמתחלקים ללא שארית.

הוכחה: לכל מספר טבעי k ניתן לרשום כך: $k=2^l\cdot b$ כאשר b אי זוגי ו- $l\geq 0$. נסמן $X=\{x_1,x_2,\dots,x_{n+1}\}$. נסיק גם $x_i=2^{l_i}\cdot b_i$, כאשר b_i אי זוגי. בקבוצה $[2n]$ יש n מספרים אי זוגיים. אבל, יש לנו $n+1$ b_i-ים. לכן, מעיקרון שובך היונים יש איזשהם $i\neq j$ כך ש $b_i=b_j$. כעת, נניח בה"כ $x_i>x_j$ אז $\frac{x_i}{x_j}=\frac{2^{l_i}\cdot b_i}{2^{l_j}\cdot b_j}=2^{l_i-l_j}\in\mathbb{N}$.

תרגיל: הוכיחו כי בסדרה: $7,77,777,7777,\dots$ יש מספר שמתחלק ב-2009.

הוכחה: נראה שיש מספר כזה כבר ב-2009 האיברים הראשונים. הביט באיברי הסדרה מודולו 2009 (השארית בחלוקה ב-2009). אם יש איבר שמשאיר שארית 0 בחלוקה ב-2009 אז סיימנו. אחרת, יש שני איברים של הסדרה ששווים מודולו 2009. בגלל עקרון שובך היונים (ע.ש.ה) יש 2008 שובכים, השאריות האפשריות 1..2008 ויש 2009 יונים., סדרת השאריות - השאריות שמתקבלות מהסדרה. כלומר, יש x_i,x_j שונים כך ש- $x_i=c_i\cdot 2009+r$ ו- $x_j=c_j\cdot 2009+r$. בה"כ נניח $x_i>x_j$ $(i>j)$ אז $x_i-x_j=(c_i-c_j)2009$.

$$x_i-x_j=\overbrace{7\ldots7}^{i-j}\overbrace{0\ldots0}^{j}=\overbrace{7\ldots7}^{i-j}\cdot 10^j$$

10^j זר ל-2009, לכן $x_{i-j}=\overbrace{7\ldots7}^{i-j}$ מתחלק ב-2009.

משפט Erdös-Szekers: לכל סדרה של n^2+1 ממשיים שונים אז או שיש תת סדרה מונוטונית עולה ממש באורך $n+1$ או שיש תת סדרה מונוטונית יורדת ממש באורך $n+1$.

הוכחה: נסמן את אברי הסדרה ב- $x_1, x_2, \dots, x_s$ ‏($s = n^2+1$). לכל $1 \le i \le s$ נסמן ב-p_i את אורך תת הסדרה המאקסימאלית המונוטונית עולה עד לנקודה i. בדומה, נסמן ב-q_i את אורך תת הסדרה המונוטונית יורדת הארוכה ביותר עד המקום ה-i.

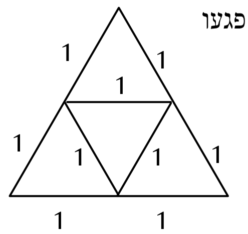
לדוגמה, $(8,3,7,6,\mathbf{9},1,12,4)$ אז עבור $i=5$: $p_5 = 3,\ q_5 = 1$.

אם עבור i מסויים $p_i \ge n+1$ או $q_i \ge n+1$ אז סיימנו. נניח בשלילה שאין q_i או p_i כאלה אז לכל i $1 \le p_i, q_i \le n$. כמה ערכים אפשריים יש ל (p_i, q_i)? n^2 מעיקרון הכפל. יש לנו $s = n^2+1$ זוגות $(p_1,q_1), (p_2,q_2), (p_3,q_3) \dots$. מעיקרון שובך היונים יש $j \ne i$ כך ש $p_i = p_j$ וגם $q_i = q_j$. נניח בה"כ ש $i > j$, נניח גם $x_i > x_j$ אז יש סידרה מונוטונית עולה באורך p_j המסתיימת ב-x_j. אם נוסיף לה את x_i, נקבל סדרה מונוטונית עולה המסיימת ב-x_i באורך $p_i + 1 = p_j + 1$. וקיבלנו סתירה. לכן קיימת סדרה מונוטונית באורך $n+1$.

האם משפט ארקש-סקרש הדוק? כן. לדוגמה הסדרה $(7,8,9,4,5,6,1,2,3)$ בעלת $9 = 3^2$ איברים אין סדרה עולה או יורדת באורך 4. כלומר, חייבים לדרוש שהסדרה תהיה באורך n^2+1.

תרגיל: תחרות שח עם n מתמודדים. כל אחד משחק משחק אחד וכל אחד משחק משחק אחד מול כל יריב הראו שבכל רגע נתון, יש שני אנשים שהשלימו אותו מספר משחקים.

פיתרון: ניתן להתבונן על השאלה כגרף. כאשר מחברים שני צמתים בקשת אם השחקנים שיחקו. מחפשים שני צמתים שדרגתם זהה. מהן הדרגות האפשריות? $0,1,2,\dots,n-1$. אז יש n דרגות אפשריות. אבל אם יש צומת מדרגה 0 אז אין צומת מדרגה $n-1$. לכן במצב כזה יש $n-1$ דרגות אפשריות ו- n צמתים אז מעיקרון שובך היונים יש שני צמתים עם אותה דרגה. אם אין צומת מדרגה 0 אז באופן דומה.



תרגיל: צלף יורה s חיצים למטרה מצורת משולש שווה צלעות עם אורך צלע 2 (כל החיצים פגעו במטרה). הראו שיש שניים שמרחקם אחד מהשני הוא לכל היותר מטר אחד.

פתרון: מעיקרון שובך היונים יש שני חצים שפגעו באותו משולש וסיימנו.

עקרון שובך היונים המוכלל:

- אם מכניסים $n-k+1$ יונים ל-k שובכים אז יש לפחות שובך אחד עם $n+1$ יונים.
- $f: [nk+1] \to [k] \Rightarrow \exists_{x \in [k]} |f^{-1}(\{x\})| \ge n+1$

4 עקרון ההכלה וההדחה

בעיה: בהינתן קבוצות $A_1, \dots, A_n$ וגודליהן וגודלי כל החיתוכים שלהם. כלומר, ידוע

$$|A_1 \cap \dots \cap A_n|, \dots, |A_1|, \dots, |A_n|, |A_{n-1} \cap A_n|, \dots, |A_1 \cap A_2|$$

איך מחשבים את גודל האיחוד $A_1 \cup \dots \cup A_n$? נחשב עבור $n=2$:

טענה: $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$.

הוכחה: נשווה את שני האגפים של השוויון הנ"ל. יהי $x_1 \in A_1 \cup A_2$ תורם 1 לאגף שמאל. לאגף ימין יש מספר אופציות:

(1) אם $x_1 \in A_1 \backslash A_2$ אז x_1 תורם 1 באגף ימין.
(2) אם $x_1 \in A_2 \backslash A_1$ אז x_1 תורם 2 באגף ימין.

(3) אם $x_1 \notin A_2\backslash A_1$ וגם $x_1 \notin A_1\backslash A_2$ אז x_1 כלומר $x \in A_1 \cap A_2$ אז x_1 תורם 1 ל-$|A_1|$ ותורם 1 ל-$|A_2|$ ותורם -1 ל-$|A_1 \cap A_2|$ ובסה"כ 1.

אז בסה"כ האגפים שווים.

עבור $n = 3$ נקבל

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

עקרון ההכלה וההדחה (משפט): תהיינה $A_1, \dots, A_n$ קבוצות סופיות אזי

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = \sum_{\phi \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

הוכחה: יהיה $x \in A_1 \cup \dots \cup A_n$. אז x תורם בדיוק 1 לאגף שמאל. נחשב את התרומה של x לאגף ימין. נניח כי x שייך לבדיוק t קבוצות כאשר $1 \leq t \leq n$.

עבור הגורמים $|A_i|$ נקבל ש-x תורם $\binom{t}{1} = t$.

עבור הגורמים $|A_i \cap A_j|$ נקבל ש-x תורם $\binom{t}{2}$ –

עבור חיתוך של 3 קבוצות x תורם $\binom{t}{3}$

ממשיכים באותה צורה ומקבלים שעבור חיתוך של t קבוצות x תורם $(-1)^{t-1} = (-1)^{t-1}\binom{t}{t}$.

לכן התרומה של x היא סה"כ: $\sum_{i=1}^{t}\binom{t}{i} \cdot (-1)^{i-1}$.

כבר ראינו זהות דומה שמתחילה ב-0 ולא ב-1 ($\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$) אז

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{t}\binom{t}{i} \cdot (-1)^{i-1} &= 1 - 1 - \sum_{i=1}^{t}\binom{t}{i} \cdot (-1)^{i} \\ &= 1 - 1 - \left[\left(\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i} \cdot (-1)^{i}\right) - 1\right] \\ &= 1\end{aligned}$$

מכאן ש-x תורם 1 בדיוק לאגף ימין (ללא תלות ב-t) ולכן שני האגפים שווים.

הצורה המשלימה של עקרון ההכלה וההדחה (מסקנה): תהיינה $A_1, \dots, A_n \subseteq S$ תת קבוצות סופיות של קבוצה סופית S. אזי $|S\backslash(A_1 \cup \dots \cup A_n)| = |S| - \sum_{\phi \neq I \subseteq [n]}(-1)^{|I|-1}\left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$ כי $\overline{A_i} = S\backslash A_i$ אז,

$$S\backslash(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}$$

דוגמה: נחשב את מספר הפיתרונות של משוואה $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ מעל השלמים עם האילוצים

$1 \leq x_1 \leq 2$

$-2 \leq x_2 \leq 4$

$2 \leq x_3 \leq 4$

פיתרון: נזכור כי מספר הפיתרונות בטבעיים של משוואה $y_1 + y_2 + \cdots + y_k = k$ הוא $\binom{n+k-1}{n-1}$.

(1) החלפת משתנים:

$y_1 = x_1 - 1$

$y_2 = x_2 + 2$

$y_3 = x_3 - 2$

המשוואה החדשה היא $(y_1+1) + (y_2-2) + (y_3+2) = 9$ או

$$\wedge \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 8 (*) \\ 0 \leq y_1 \leq 1 \\ 0 \leq y_2 \leq 6 \\ 0 \leq y_3 \leq 2 \end{cases}$$

(2) נסמן ב-S את קבוצת הפיתרונות של $(*)$ בטבעיים אז $|S| = \binom{10}{2} = 45$ ללא האילוצים. נשתמש בעיקרון ההכלה וההדחה על מנת להדיח את הפיתרונות שלא עומדים באילוצים. נסמן:
A_1 - קבוצת הפיתרנות של $(*)$ בטבעיים כאשר $y_1 \geq 2$
A_2 - קבוצת הפיתרנות של $(*)$ בטבעיים כאשר $y_2 \geq 7$
A_3 - קבוצת הפיתרנות של $(*)$ בטבעיים כאשר $y_3 \geq 3$
עלינו לחשב את $|S \backslash (A_1 \cup A_2 \cup A_3)|$. לפי עיקרון ההכלה וההדחה:

$|S \backslash (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| =$

$|S| - |A_1| - |A_2| - |A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_3|$

$A_1 = \{(y_1, y_2, y_3) | y_1 + y_2 + y_3 = 8, y_1 \geq 2\}$

נחליף משתנים

$z_1 = y_1 - 2$
$z_2 = y_2$
$z_3 = y_3$

נקבל

$z_1 + z_2 + z_3 = 6$

כלומר $|A_1| = \binom{3+6-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$. נבצע פעולות דומות עבור A_2, A_3 ונקבל $|A_2| = 3$,
$|A_3| = 2$.
נחשב את $|A_1 \cap A_3|$.

$A_1 \cap A_3 = \{(y_1, y_2, y_3) | y_1 + y_2 + y_3 = 8, y_1 \geq 2, y_3 \geq 3\}$

נקבל באופן דומה: $|A_1 \cap A_2| = 0$, $|A_2 \cap A_3| = 0$, $|A_1 \cup A_3| = 10$ ולכן גם $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$. ולכן

$|S \backslash (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = 3$

1.4 פונקצית $\varphi(n)$ של אוילר $(Euler)$

טענה: יהיו $1 \le x \le n$ מספרים שלמים אז קיימים בדיוק $\left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor$ מספרים שלמים בין 1 לבין n אשר מתחלקים ב-x.

הוכחה: הכפולות של x בתוך הקבוצה $[n]$ הן $x, 2x, 3x, \dots, kx$ כאשר $kx \le n$ ולכן $k = \left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor$.

דוגמה: כמה מספרים שלמים בין 1 לבין 600 לא מתחלקים ב-3,5 או ב-7?

פיתרון: נגדיר $S = [600]$ ו-

$A_1 = \{x | \ x \in S, 3|x\}$

$\mathrm{A}_2 = \{x | \ x \in S, 7|x\}$

$A_3 = \{x | x \in S, 5|x\}$

עלינו לחשב $|S \backslash (A_1 \cup A_2 \cup A_3)|$ ומתקיים

$|S| = \ 600, \ \ |A_2| = \ \left\lfloor \frac{600}{3} \right\rfloor = 200, \ \ |A_2| = \ \left\lfloor \frac{600}{5} \right\rfloor = 120, \ \ |A_3| = \ \left\lfloor \frac{600}{7} \right\rfloor = 85$

$|A_1 \cap A_2| = \{x \in S | \ 3|x \wedge 5|x\} = \{x \in S | \ 15|x\} \Rightarrow |A_1 \cap A_2| \ = \left\lfloor \frac{600}{15} \right\rfloor = 40$

ובאופן דומה נקבל $|A_1 \cap A_3| = \ 28, \ \ |A_2 \cap A_3| = \ 17, \ \ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 5$. מכאן התשובה היא

$$600 - (200 + 120 + 85) + (40 + 28 + 17) - 5 = 275$$

הגדרה: פונקציות אוילר $\varphi(n)$ מוגדרת באופן הבא:

$$\begin{cases} \varphi(1) = 1 \\ \varphi(n) = |\{m \mid 1 \le m \le n, \ \ \gcd(m, n) = 1\}| \end{cases}$$

כלומר, לכל n, $\varphi(n)$ היא עוצמת קבוצת כל המספרים שאין להם גורמים משותפים עם n פרט ל-1 בין 1 ל-n.

משפט אוילר: יהי n שלם חיובי ויהיו $p_1, \dots, p_k$ כל המחלקים החיוביים של n אז

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

הוכחה: נגדיר

$S = [n]$

$A_i = \{x | \ 1 \le x \le n, \ \ p_i | x\}$

לכן $\varphi(n) = \left|S \backslash \cup_{i=1}^{k} A_i\right|$ מעיקרון ההכלה וההדחה. לכל $1 \le i \le n$ מתקיים $|A_i| = \ \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor = \frac{n}{p_i}$ לכן, לכל $i \ne j$ מתקיים $\left|A_i \cap A_j\right| = \left\lfloor \frac{n}{p_i \cdot p_j} \right\rfloor = \frac{n}{p_i \cdot p_j}$. באופן כללי לכל $\phi \ne I \subseteq [k]$ מתקיים

$$\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = \frac{n}{\prod_{i\in I} p_i}$$

לכן, לפי עקרון ההכלה וההדחה

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= |S| - \sum_{\phi\neq I\subseteq[n]} (-1)^{|I|-1}\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| \\
&= n - \left(\frac{n}{p_1}+\frac{n}{p_2}+\cdots+\frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1p_2}+\frac{n}{p_1p_3}+\cdots\frac{n}{p_{k-1}p_k}\right) - \cdots + (-1)^k\left(\frac{n}{p_1\cdot\ldots\cdot p_k}\right) \\
&= n\left(1-\frac{1}{p_1}-\cdots-\frac{1}{p_n}+\frac{1}{p_1p_2}+\cdots+\frac{1}{p_{k-1}p_k}+\cdots+(-1)^k\cdot\frac{n}{p_1\cdot\ldots\cdot p_k}\right) \\
&= n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)
\end{aligned}$$

2.4 תמורות ללא נקודות שבת

תמורה (הגדרה): $f:[n]\to[n]$ נקראית תמורה אם f חח"ע ועל.

סימון: S_n קבוצת כל התמורות על n איברים.

נקודת שבת (הגדרה): $i\in[n]$ נקראית נקודת שבת של $\sigma\in S_n$ אם $\sigma = i$.

דוגמה: $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$, כאן 4 היא נקודת שבת של σ.

תרגיל: מהו מספר התמורות על n איברים ללא נקודות שבת?

פיתרון: עבור $1\le i\le n$ נסמן $A_i=\{\sigma\in S_n|\sigma(i)=i\}\subseteq S_n$. לכן, יש לחשב את העוצמה של $S\backslash(A_1\cup\ldots\cup A_n)$. נשים לב שעבור $1\le i\le n$ מתקיים $|A_i|=(n-1)!$ כי מסדרים את כל האיברים מחדש פרט ל-i. כמו כן,

$$A_1\cap A_2=\{\sigma\in S_n|\,\sigma(1)=1,\sigma(2)=2\}$$

ולכן $|A_1\cap A_2|=(n-2)!$. באופן כללי יותר, לכל $\phi\neq I\subseteq[n]$ נקבל $\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right|=(n-|I|)!$. לכן, לפי עיקרון ההכלה וההדחה מקבלים

$$\begin{aligned}
|S\backslash(A_1\cup\ldots\cup A_n)| &= n! - \sum_{\phi\neq I\subseteq[n]}(-1)^{|I|-1}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right| \\
&= n! - \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{i-1}(n-i)! \\
&= n! - \sum_{i=1}^{n}\frac{n!}{i!\,(n-i)!}(-1)^{i-1}(n-i)! \\
&= n! - \sum_{i=1}^{n}\frac{n!}{i!}(-1)^{i-1} \\
&= n!\left[1-\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{i!}\right]
\end{aligned}$$

$$= n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{i!}$$

הערה: נזכור כי $e^x = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$ (טור טיילור סביב 0) נציב $x = -1$ ונקבל $\frac{1}{e} = e^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!}$. אז עבור n מספיק גדול התשובה היא בערך $\frac{n!}{e}$.

בעיה זו נקראת גם "בעיית הכובעים". n גברים במסיבה מניחים את הכובע בכניסה כשמגיעים. כולם עוזבים בו זמנית כאשר כל אחד לוקח כובע באופן אקראי. השאלה היא כמה צורות יש לגברים לקחת את הכובעים שלהם כאשר אף אחד לא מקבל את הכובע שלו חזרה.

5 הערכות אסימפטוטיות

1.5 קצב גידול של פונקציות

דוגמא:

$f_1(n) = \log_2 n$	$f_2(n) = n$	$f_3(n) = n^2$	$f_4(n) = 2^n$
1	2	4	4
2	4	16	16
3	8	64	256
4	16	256	65536
5	32	1024	4294967296

ניתן להסיק: $f_1 \ll f_2 \ll f_3 \ll f_4$

סימונים: תהיינה $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ ו-$\{g(n)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות של מספרים אי-שליליים כך $f(n), g(n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

- נכתוב $f = O(g)$ אם קיים $c > 0$ כך ש $\forall_n\ f(n) \le c\cdot g(n)$
- נכתוב $f = \Omega(g)$ אם קיים $c > 0$ כך ש $\forall_n\ f(n) \ge c\cdot g(n)$
- נכתוב $f = \Theta(g)$ אם קיימים קבועים c_1, c_2 כך ש $\forall_n\ c_1\cdot g(n) \le f(n) \le c_2\cdot g(n)$
- נכתוב $f = o(g)$ אם $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

דוגמאות:

(1) אם $0 \le a \le b$ אז $n^a = O(n^b)$
(2) אם $0 < a < b$ אז $n^a = o(n^b)$
(3) לכל $c > 0$, $a > 1$ מתקיים $n^c = o(a^n)$
(4) לכל $a > 0$ ולכל $c > 0$ מתקיים $(\log n)^c = o(n^a)$
(5) **הטור ההרמוני:**
(א) $h(n) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$. לכל k שלם וחיובי נסמן $g_k = [2^{k-1}, 2^k)$ ומתקיים $|g_k| = 2^{k-1}$.
נתבונן בסכום

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}\cdot|g_k| \le \sum_{i\in g_k}\frac{1}{i} \le \frac{1}{2^{k-1}}\cdot|g_k| = 1$$

.

לכן

$$h(n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\le\sum_{k=1}^{\lfloor\log_2 n\rfloor+1}\sum_{i\in g_k}\frac{1}{i}\le\lfloor\log_2 n\rfloor+1$$

כמו כן

$$h(n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\ge\sum_{k=1}^{\lfloor\log_2 n\rfloor}\sum_{i\in g_k}\frac{1}{i}\ge\frac{1}{2}\lfloor\log_2 n\rfloor$$

אז

$$\frac{1}{2}\lfloor\log_2 n\rfloor\le h(n)\le\ \lfloor\log_2 n\rfloor+1$$

אז

$$h(n)=\Theta(\log_2 n)$$

(6) $f(n)=\ \sum_{i=1}^{n}i^3$

$$f(n)=\sum_{i=1}^{n}i^3\le n\cdot n^3=n^4$$

$$f(n)=\sum_{i=1}^{n}i^3\ge\sum_{i=\frac{n}{2}}^{n}i^3\ge\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^3=\frac{n^4}{2^4}=\frac{1}{6}n^4$$

אז

$$f(n)=\Theta(n^4)$$

באופן כללי $f(n)=\sum_{i=1}^{n}i^k$ מקיים $f(n)=\Theta\left(n^{k+1}\right)$.

קירוב על ידי שימוש באינטגרל (משפט): תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ פונקציה רציפה.

(1) אם f מונוטונית לא יורדת אז

$$\int_{m-1}^{n}f(x)dx\le\sum_{i=m}^{n}f(i)\le\int_{m}^{n+1}f(x)dx$$

(2) אם f מונוטונית לא עולה אז

$$\int_{m-1}^{n}f(x)dx\ge\sum_{i=m}^{n}f(i)\ge\int_{m}^{n+1}f(x)dx$$

הוכחה: נסמן $f(k)$ הוא שטח המלבן בגובה k ורוחב 1. כלומר, בחלוקה לקטעים באורך 1 שטח המלבן מתחת לגרף. אז $f(i)=f(k)$.

(1) מלבנים מתחת לגרף אז

$$\sum_{i=m}^{n}f(i)\le\int_{m}^{n+1}f(x)dx$$

ו f לא יורדת אז

$$\int_{m-1}^{n} f(x)dx \le \sum_{i=m}^{n} f(i)$$

החסרנו שטח בגודל $\int_{n}^{n+1} f(x)dx$ והוספנו שטח בגודל $\int_{m-1}^{m} f(x)dx$.

(2) באותו אופן אם ניקח את הפונקציה f ונסובב אותה סביב מרכז הקטע $[m,n]$ נקבל את מקרה (1). נשנה חזרה את כיווני אי השוויון ונקבל את (2).

דוגמה: הטור ההרמוני

פיתרון: נגדיר $f(x) = \frac{1}{x}$ ואז $h(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i)$

$$h(n) \le \int_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(x)\,|_{1}^{n+1} = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$$

$$h(n) \ge \int_{1}^{n} f(x)dx = \ln(x)|_{1}^{n} = \ln(n)$$

אז

$$\ln(n) \le h(n) \le \ln(n+1)$$

דוגמה: $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i^3$

פיתרון:

$$\int_{0}^{n} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\bigg|_{0}^{n} = \frac{n^4}{4} \le \sum_{i=1}^{n} i^3 \le \int_{1}^{n+1} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\bigg|_{1}^{n+1} = \frac{(n+1)^4}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{n^4}{4} \le \sum_{i=1}^{n} i^3 \le \frac{(n+1)^4 - 1}{4}$$

ולכן

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^4}{4} + O(n^3)$$

2.5 הערכה אסימפטוטית ל-!N

המטרה: למצוא פונקציה "יותר מפורשת" $f(n)$ כך ש $n! = \big(1+o(1)\big)f(n)$.

צעד ראשון: נשים לב $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$ ולכן

$$\ln(n!) = \ln(1\cdot 2\cdot \ldots\cdot n) = \sum_{i=1}^{n}\ln(i)$$

לכן

$$\ln(n!) = \sum_{i=1}^{n}\ln(i) \le \int_1^{n+1}\ln(x)\,dx = (x\ln(x)-\mathrm{x})|_2^{n+1}$$
$$= (n+1)\ln(n+1) - (n+1)+1$$
$$= (n+1)\cdot\ln(\mathrm{n}+1) - n$$

ולכן

$$n! \le e^{(n+1)\ln(n+1)n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$$

באופן דומה,

$$\ln(n!) = \sum_{i=1}^{n}\ln(i) \ge \int_1^{n}\ln(x)\,dx = (x\ln x - x)|_1^n$$
$$= n\ln(n) - n + 1$$

ולכן

$$n! \ge e^{nln(n)-n-1} = \frac{n^n}{e^n}\cdot e = e\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

בסה"כ

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$$

.

נוסחת סטירלינג (Stirling): $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$ ובאופן שקול

$$n! = \big(1+o(1)\big)\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

טענה: לכל $x \geq 0$ מתקיים $1 + x \leq e^x$.

הוכחה: נתבונן ב- $f(x) = e^x - x - 1$ ונוכיח $f(x) \geq 0$ לכל $x \geq 0$.

$$f'(x) = e^x - 1, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f''(0) = e^x, f''(0) = 1 > 0$$

מכאן $x = 0$ היא נקודת מינימום, $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$ מכאן ש $f(x) \geq 0$ לכל x.

טענה: לכל $1 \leq k < n$ קיים $\binom{n}{k} \geq \left(\frac{n}{k}\right)^k$

הוכחה: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{1}$ (נשים לב ש $\frac{n}{k}$ השבר הקטן ביותר מבין כולם) ולכן $\binom{n}{k} \geq \left(\frac{n}{k}\right)^k$.

טענה: לכל $1 \leq k < n$ מתקיים: $\binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$

הוכחה: נוכיח טענה יותר חזקה, $\binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$. לכל $x \geq 0$ מתקיים

$$(1 + x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \geq \sum_{i=1}^{k} \binom{n}{i} x^i$$

נחלק את שני האגפים ב- x^k ונקבל

$$\frac{(1 + x)^n}{x^k} \geq \frac{\binom{n}{0}}{x^k} + \frac{\binom{n}{1}}{x^{k-1}} + \cdots + \binom{n}{k}$$

אם בנוסף נניח כי $x \leq 1$ אז נובע

$$\frac{(1 + x)^n}{x^k} \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k}$$

נבחר $x = \frac{k}{n}$, נקבל

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k} < \frac{\left(1+\frac{k}{n}\right)^n}{\left(\frac{k}{n}\right)^k} = \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^k$$

ובגלל ש$1 + x \leq e^x$ אז

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \left(e^{\frac{k}{n}}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^k = \left(\frac{en}{k}\right)^k.$$

אם $0 \leq k \leq 2$ אז

המקדם האמצעי: $\binom{n}{\frac{n}{2}}$

$$\binom{n}{\frac{n}{2}} \le \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{\frac{n}{2}} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

כמו כן, הוכחנו כי $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ הוא הגדול ביותר מבין המקדמים הבינומיים $\binom{n}{k}$ כאשר $0 \le k \le n$.

לכן,

$$\binom{n}{\frac{n}{2}} \ge \frac{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}}{n+1} = \frac{2^n}{n+1}$$

כלומר

$$\frac{2^n}{n+1} \le \binom{n}{\frac{n}{2}} \le 2^n$$

מסטירלינג נקבל קירוב יותר מדויק:

$$\binom{n}{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!} = \big(1+o(1)\big) \cdot \frac{\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\sqrt{\frac{2\pi n}{2}}\cdot\left(\frac{\frac{n}{2}}{e}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2} = \big(1+o(1)\big)\cdot\frac{2^n}{\sqrt{\frac{2\pi n}{2}}}$$

6 נוסחאות נסיגה

דוגמא: נסמן ב- $g(n)$ את מספר הסדרות באורך n מעל א"ב $\{0,1,2\}$ בהן אין איברים עוקבים שווים. נחשב את $g(n)$.

פיתרון: $g(1) = 3$, $g(2) = 6$. נטען שלכל $n \ge 2$ מתקיים $g(n) = 2 \cdot g(n-1)$. אינטואיטיבית זה נכון כי מוסיפים עוד איבר לסדרה, הוא לא יכול להיות האיבר האחרון בדרה הקודמת אז נשארות שתי אופציות אז כופלים ב-2. לכל סדרה חוקית $a_1, \ldots, a_{n-1}$ יש בדיוק שתי דרכים להרחיבה לסדרה באורך n. זאת, ע"י בחירה של $a_n \ne a_{n-1}$ ויש סה"כ שתי בחירות כאלו.

קיבלנו $g(1) = 3$ ו- $g(n) = 2 \cdot g(n-1)$ עבור $n \ge 2$. הנוסחא השנייה נקראת נוסחת נסיגה (נסוגים אחורה כדי לחשב את האיבר הבא). ויש לנו הגדרה חד משמעית של $g(n)$. כעת נרצה לפתור את נוסחת הנסיגה כלומר לקבל נוסחא ישירה ללא רקורסיה. די ברור מנוסחת הנסיגה ש: $g(n) = 3 \cdot 2^{n-1}$. צריך להוכיח את זה.

נוכיח את הנוסחא הישירה באמצעות אינדוקציה על n. עבור *n=1*, $g(1) = 3$ כרצוי. נניח עבור $n-1$ שמתקיים $g(n-1) = 2^{n-2} \cdot 3$ ונוכיח עבור n.

$$g(n) = 2 \cdot g(n-1) \cdot 3 = 2^{n-1} \cdot 3$$

כרצוי.

סדרת פיבונצ'י (Fibonacci): נגדיר סדרה $\{F(n)\}_{n=0}^{\infty}$ ע"י $F(0)=F(1)=1$ ו-$F(n)=F(n-1)+F(n-2)$ כאשר $n\geq 2$.

$$\{F(n)\}_{i=0}^{\infty}=(1,1,2,3,5,8,13,\dots)$$

ננסה לכתוב נוסחא מפורשת עבור סידרת פיבונצ'י. ניתן הערכה ראשונית לקצה הגידול של סדרת פיבונצ'י. $\{F(n)\}$ היא סדרה לא יורדת.

$$F(n)=F(n-1)+F(n-2)\leq 2F(n-1)\leq 4F(n-2)\leq\cdots\leq 2^n$$

$$\mathrm{F}(n)=F(n-1)+F(n-2)\geq 2F(n-2)\geq 4F(n-4)\geq\cdots\geq 2^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}$$

מגדלי האנוי (*Hanoi*): שלוש מוטות מאונכים לקרקע. על מוט מספר אחד מושחלות n טבעות בגדלים שונים. צריך להעביר את הטבעות למוט אחר ובתהליך אסור בשום מקרה שטבעת גדולה תהיה מונחת על טבעת קטנה.

פיתרון עבור $n=3$:

(1) Ring 1 => Bar 3
(2) Ring 2 => Bar 2
(3) Ring 1 => Bar 2
(4) Ring 3 => Bar 3
(5) Ring 1 => Bar 1
(6) Ring 2 => Bar 3
(7) Ring 1 => Bar 3

כל פעולה כזאת שעשינו היא פעולה אלמנטארית במערכת הזו.

נסמן ב-$h(n)$ את מספר הפעולות המינימאלי הנחוץ בכדי להעביר n הטבעות.

ראינו: $h(1)=1,\ h(3)\leq 7$.

משפט: לכל $n\geq 1$, מתקיים $h(n)=2^n-1$.

הוכחה: נוכיח תחילה את החסם העליון, ע"י תיאור של האלגוריתם שמבצע את המשימה ב-2^n-1 פעולות. נוכיח כי $h(n)\geq 2h(n-1)+1$. האלגוריתם:

(1) נעביר את *n-1* הטבעות הקטנות ממוט 1 אל מוט 2. ניתן לעשות זאת ב-$h(n-1)$ פעולות.
(2) נעביר את הטבעת ה-n ממוט 1 למוט 3.
(3) נעביר את הטבעות $1,\dots,n-1$ ממוט 2 למוט 3 וזאת אנחנו עושים ב-$h(n-1)$ פעולות.

אז $h(n)\leq 2\cdot h(n-1)+1$.

נוכיח את החסם התחתון: $h(n)\geq 2\cdot h(n-1)+1$. נניח שיש אלגוריתם אופטימאלי ונסתכל על הרגע בו טבעת n עוברת למוט מספר 3. ברגע זה

(1) מוט 3 ריק

(2) על מוט 2 מסודרות טבעות $1,\dots,n-1$

(3) על מוט 1 מונחת רק טבעת n.

לפי אינדוקציה על מנת להעביר את $n-1$ הטבעות הקטנות למוט 2 נחוצות לפחות $h(n-1)$ פעולות. פעולה 3 לפי אינדוקציה לוקחת לפחות $h(n-1)$ פעולות. לכן החסם התחתון הוא $2\cdot h(n-1)+1$. אז הראינו עד כה

$$h(1)=1,\ h(n)=2\cdot h(n-1)+1$$

וקל לראות ולהוכיח פורמאלית ש $h(n) = 2^n - 1$.

מטרה: למצוא נוסחא כללית וישירה לאיבר הכללי אשר נתונה ע"י נוסחת נסיגה

1.6 שיטות לפיתרון של נוסחת נסיגה

1. החלפת משתנים

דוגמא: $\{h(n)\}_{n=1}^{\infty} = (1,3,7,15,31,63,\dots)$ או $h(n) = 2h(n-1) + 1$

פיתרון: נגדיר סדרה חדשה $\{g(n)\}_{n=1}^{\infty}$ ע"י $g(n) = h(n) + 1$ אז $\{g(n)\}_{n=1}^{\infty} = (2,4,8,16,32,64,\dots)$.

$$g(n) - 1 = h(n) = 2h(n-1) + 1 = 2(g(n-1) - 1) + 1 = 2g(n-1) - 1$$

ולכן קיים $n \geq 2$, $g(n) = 2g(n-1)$ ועבור $n = 1$ נגדיר $g(1) = 2$.

אז הפיתרון: $g(n) = 2^n$. ולכן $h(n) = g(n) - 1 = 2^n - 1$.

2. הצבה חוזרת

דוגמא: $h(1) = 1,\ h(n) = 2h(n-1) + 1$.

פיתרון:

$$\begin{aligned} h(n) &= 2h(n-1) + 1 \\ &= 2(2h(n-2) + 1) + 1 \\ &= 4h(n-2) + 3 \\ &= 4(2h(n-3) + 1) + 3 \\ &= 8(h(n-3) + 7 \end{aligned}$$

ניתן לנחש כי

$$h(n) = 2^k h(n-k) + \left(2^k - 1\right)$$

נציב $k = n - 1$ ונקבל

$$h(n) = 2^{n-1} h(1) + 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1$$

לכן, הניחוש הוא

$$n \geq 1\,, h(n) = 2^n - 1$$

נוודא כי הניחוש הנ"ל אכן פותר את נוסחת הנסיגה. באינדוקציה על n. עבור $n = 1$

$$h(1) = 2^1 - 1 = 1$$

צעד האינדוקציה:

$$h(n) = 2h(n-1) + 1 = 2 \cdot (2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1$$

2.6 נוסחאות נסיגה ליניאריות

נוסחת נסיגה ליניארית (הגדרה):

$$f(n)=c_1f(n-1)+c_2f(n-2)+\cdots+c_rf(n-2)+g(n)$$

כאשר $c_r\neq 0$ נקראת נוסחת נסיגה ליניארית מסדר r.

לדוגמה סידרת פיבונצ'י היא ליניארית ומסדר 2

נוסחא נסיגה ליניארית הומוגנית (הגדרה): נוסחא נסיגה ליניארית כאשר $g(n)=0$

פיתרון נוסחת נסיגה (הגדרה): סדרה $\{h(n)\}_{n=0}^{\infty}$ פותרת את נוסחת הנסיגה

$$f(n)=g(n)+\sum_{i=1}^{r}c_if(n-i)$$

אם

$$f(n)=g(n)+\sum_{i=1}^{r}c_ih(n-i)$$

תנאי התחלה (הגדרה): בהינתן נוסחא ליניארית מסדר r, כלומר r-ית מספרים

$\big(f(0),f(1),f(2),\dots,f(r-1)\big)$ נקראת תנאי התחלה עבור סדרה.

הערה: בהינתן נוסחת נסיגה מסדר r קביעת תנאי התחלה קובעת חד-משמעית את הסדרה.

משפט: תהי $f(n)=\sum_{i=1}^{r}c_if(n-i)$ (*) נוסחת נסיגה ליניארית הומוגנית מסדר r, אז קבוצה W של כל הפתרונות של (*) הוא תת מרחב ליניארי כאשר $\dim W=r$.

הוכחה:

(1) W הוא תת-מרחב של מרחב הסדרות. יש לוודא ש

א) $W\neq\phi$

ב) לכל $\bar a,\bar b\in W$ מתקיים $\bar a+\bar b\in W$.

ג) לכל $\bar a\in W$ ולכל $\lambda\in\mathbb{R}$ מתקיים $\lambda\bar a\in W$.

תרגיל.

(2) נוכיח $\dim(W)\geq r$. לכל $0\leq i\leq r-1$ נגדיר תנאי התחלה מספר i באופן הבא:

$$\overbrace{(0,\dots0,1,0,\dots,0)}^{r}$$

כאשר 1 במיקום ה-i.

עתה, עבור $0\leq i\leq r-1$ נציב תנאי התחלה מספר i ונקבל את הפיתרון

$$\overline{u^i}=\left(\overbrace{0,\dots0,1,0,\dots,0}^{r},c_i,\dots\right)$$

לדוגמה: $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$
תנאי התחלה 0: $(1,0)$ אז $\overline{u^0}=(1,0,1,1,2,\dots)$
תנאי התחלה 1: $(0,1)$ אז $\overline{u^1}=(0,1,1,2,\dots)$

קיבלנו r וקטורים $\overline{u^0},\dots,\overline{u^{r-1}}$ שהם פתרונות של נוסחא (*) ל-r תנאי התחלה שונים ולכן הם כולם שייכים ל-W. נשים לב, ב-r הקורדינאטות הראשונות הווקטורים נראים כך:

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_{r\times r}$$

וכיוון שקיבלנו את מטריצת היחידה נובע כי הווקטורים $\overline{u^0},\dots,\overline{u^{r-1}}$ הם בלתי תלויים ליניארית.

(3) נוכיח ש-$\left\{\overline{u^0},\dots,\overline{u^{r-1}}\right\}$ פורשת את W. יהי $\bar{x}=\{x(n)\}_{n=1}^{\infty}$ אז נגדיר $\bar{y}=\sum_{i=0}^{r}x(i)\overline{u^i}$. נראה ש-$\bar{y}$ פיתרון של (*). כיוון ש-W תת מרחב ו-$\overline{u^0},\dots,\overline{u^{r-1}}\in W$ גם $y\in W$ כצירוף ליניארי של וקטורים בתת המרחב. נשים לב, לכל $0\le i\le r-1$ מתקיים $y(i)=x(i)\overline{u^i}(i)=x(i)$. לכן, $\bar{x},\bar{y}$ מזדהים על r קואורדינאטות ראשונות. כיוון ש - $\bar{x}$ ו-$\bar{y}$ הם פתרונות של נוסחת נסיגה מסדר r, שניהם נקבעים באופן יחיד ע"י תנאי התחלה $\{x_i\}_{i=0}^{r-1}$ וגם $\bar{y}=\bar{x}$. קבלנו ש $\bar{x}$ כלשהו הוא צירוף ליניארי של $\left\{\overline{u^0},\dots,\overline{u^{r-1}}\right\}$. לכן $\left\{\overline{u^0},\dots,\overline{u^{r-1}}\right\}$ היא קבוצה הפורשת את W.

הערה: נשים לב כי וקטור $\overline{u^i}$ עדיין מוגדר ע"י נוסחת נסיגה ולא ע"י נוסחא ישירה.

פולינום אופייני (הגדרה): בהינתן נוסחת נסיגה הומוגנית $f(n)=\sum_{i=1}^{r}c_ih(n-i)$ מסדר r. הפולינום

$$P(x)=x^r-c_1x^{r-1}-c_2x^{r-2}-\cdots-c_{r-1}x-c_r=x^r-\sum_{i=1}^{r}c_ix^{r-i}$$

נקרא הפולינום האופייני של נוסחת הנסיגה $f(n)$.

לדוגמה: $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$ הפולינום האופייני שלו הוא $P(x)=x^2-x-1$.

משפט: תהי $f(n)=\sum_{i=1}^{r}c_ih(n-i)$ נוסחת נסיגה מסדר r. נניח כי $\lambda\in\mathbb{R}$ הוא שורש של הפולינום האופייני $P(\lambda)$ של הנוסחא. אזי הסדרה $\bar{x}=(1,\lambda,\lambda^2,\dots)$ המוגדרת ע"י $x(n)=\lambda^n, n\ge 0$ היא פיתרון של נוסחת הנסיגה.

הוכחה: כיוון ש-λ הוא שורש של $P(x)$ מתקיים $\lambda^r=c_1\lambda^{r-1}+c_2\lambda^{r-2}+\cdots+c_{r-1}\lambda+c_r$. לכן סדרה $\bar{x}$ מקיימת

$$\begin{aligned}x(r)&=\lambda^r\\&=c_1\lambda^{r-1}+c_2\lambda^{r-2}+\cdots+c_{r-1}\lambda+c_r\\&=c_1x(r-1)+c_2x(r-2)+\cdots+c_{r-1}x(1)+x(0)\end{aligned}$$

לכן $x(r)$ מקיים את נוסחת הנסיגה הנתונה. כמו כן, לכל $n>r$ מתקיים

$$\begin{aligned}\lambda^n&=\lambda^{n-r}\lambda^r=\\&=\lambda^{n-r}(c_1\lambda^{r-1}+c_2\lambda^{r-2}+\cdots+c_{r-1}\lambda+c_r)\\&=c_1\lambda^{n-1}+c_2\lambda^{n-2}+\cdots+c_{r-1}\lambda^{n-r+1}+c_rc^{n-r}\\&=c_1x(n-1)+c_2x(n-2)+\cdots+c_rx(n-r)\end{aligned}$$

ולכן גם איבר $x(n)$ עבור $n>r$ מקיים את נוסחת הנסיגה. הוכחנו כי סדרה $\bar{x}$ מקיימת את נוסחת הנסיגה, ולכן $\bar{x}$ הוא פיתרון שלה.

הערה: להבדיל מ-$\overline{u^i}$ של המשפט הקודם, הווקטור $\bar{x}$ הוגדר ע"י נוסחא ישירה של האיבר הכללי $x(n)=\lambda^n$.

משפט: תהי $f(n) = \sum_{i=1}^{r} c_i h(n-i)$ נוסחת נסיגה מסדר r. נניח כי לפולינום האופייני $P(x)$ שלה קיימים r שורשים שונים $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. אז הפיתרון הכללי של הנוסחא הוא:

$$n \geq 0, \qquad f(n) = \sum_{i=1}^{r} a_i \lambda_i^n$$

כאשר $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ כמו כן, לכל תנאי התחלה $\big(f(0), f(1), \dots, f(r-1)\big)$ קיימת בחירה יחידה של המקדמים $a_1, \dots a_r$.

הוכחה: נגדיר r וקטורים (סדרות למעשה) $\overline{x^1}, \dots, \overline{x^r}$ באופן הבא

$$\overline{x^i} = (1, \lambda_i, \lambda_i^2, \dots, \lambda_i^r, \dots)$$

לפי משפט קודם קיבלנו r פיתרונות של הנוסחא. נוכיח כי הקבוצה $\left\{\overline{x^1}, \dots, \overline{x^r}\right\}$ היא בת"ל. נסתכל על r הקורדינטות הראשונות של $\overline{x^1}, \dots, \overline{x^r}$ נקבל מטריצה:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{r-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \lambda_r^2 & & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}$$

מטריצה זו נקראת מטריצת *Vandermonde* והדטרמיננטה שלה:

$$\det(M) = \prod_{i<j} \left(\lambda_i - \lambda_j\right)$$

כיוון שהנחנו שיש r שורשים שונים לפולינום האופייני (השורות של M) נובע כי $\det(M) \neq 0$. לכן, השורות של M הן בת"ל ומכאן $\overline{x^1}, \dots, \overline{x^r}$ הם בת"ל. כיוון שהמימד של מרחב הפיתרונות W של הנוסחא הוא r ו-$\overline{x^1}, \dots, \overline{x^r} \in W$ נובע כי $\left\{\overline{x^1}, \dots, \overline{x^r}\right\}$ הוא בסיס ל-W. מכאן הפיתרון הכללי של הנוסחא, כלומר הווקטור הכללי של W הוא:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{r} a_i \overline{x^i}$$

עבור $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ קבועים. כמוכן, כל קביעת תנאי התחלה $\big(f(0), \dots, f(r-1)\big)$ קובעת חד-משמעית את הפיתרון $\bar{x}$ וכל פתרון $\bar{x}$ הוא צירוף ליניארי של $\overline{x^1}, \dots, \overline{x^r}$.

איך מוצאים את המקדמים $\boldsymbol{a_1, \dots, a_r}$? בהינתן תנאי התחלה $f(0), \dots, f(r-1)$. נרשום $\bar{x} = \sum_{i=1}^{r} a_i \overline{x^i}$ את תנאי ההתחלה ונקבל:

$$\forall_{0 \leq i \leq r-1}\, f(i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda^i a_r$$

קבלנו מערכת משוואות ליניארית עם r משוואות (כמספר תנאיי ההתחלה) ו-r משתנים $a_1, \dots, a_r$. למערכת קיים פיתרון יחיד כי מטריצת המקדמים שלה היא מטריצת *Vandermonde* (המשוחלפת).

דוגמא: סדרת פיבונצ'י

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2);\;\; f(0) = 1;\;\; f(1) = 1$$

פיתרון: הפולינום האופייני של הנוסחא הוא $P(x) = x^2 - x - 1$. השורשים של $P(x)$ הם $\lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

לכן הפיתרון הכללי הוא $f(n) = a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n$. נשתמש בתנאי ההתחלה למצוא את a_1, a_2. נקבל

$$f(0) = 1 = a_1\lambda_1^0 + a_2\lambda_2^0 = a_1 + a_2$$
$$f(1) = 1 = a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2$$

קבלנו מערכת ליניארית בשתי משתנים. פותרים את המערכת ומקבלים $a_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}, a_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$.

לכן, הפיתרון לשאלה היא הסדרה $I = \{f(n)\}_{n=0}^{\infty}$ המוגדרת ע"י

$$f(n) = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

הערה: הנוסחא תמיד נותנת מספר שלם.

שורשים מרובים לפולינום אופייני (משפט): תהי $f(n) = \sum_{i=1}^{r} c_i f(n-i)\,, c_r \neq 0$. נניח כי $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ כל השורשים השונים של הפולינום האופייני $P(x) = \sum_{i=0}^{r} \lambda^{r-i} \cdot c_i$ עם ריבויים אלגבריים $S_1, \dots, S_k$ כאשר $\sum_{i=1}^{k} S_i = r$. אזי תת המרחב של הפתרונות נפרש על ידי הסדרות הבאות שהן מהוות בסיסו. לכל i הסדרות הבאות

$$(\{\lambda_i^n\}_{n=0}^{\infty}, \{n\cdot\lambda_i^n\}_{n=0}^{\infty}, \dots, \{n^{S_1-1}\cdot\lambda_i^n\}_{n=0}^{\infty})$$

כך שכל שורש תורם S_i סדרות לבסיס תת המרחב המבוקש.

הוכחה: תרגיל. צריך לבדוק שאכן כל הסדרות האלו הן פיתרון וגם שהקבוצה הזו היא בת"ל.

1.2.6 נוסחאות נסיגה ליניאריות לא הומוגניות

משפט: תהי $f(n)$ משוואת נסיגה ליניארית לא הומוגנית

$$(**) f(n) = g(n) + \sum_{i=1}^{r} c_i f(n-i)$$

ותהי המשוואה ההומוגנית המתאימה

$$(*)\; f(n) = \sum_{i=1}^{r} c_i f(n-i)$$

המשוואה ההומוגנית המתאימה. נניח כי סדרה $\bar{a} = \{a(n)\}_{n=0}^{\infty}$ פותרת את $(**)$ אז סדרה $\bar{b} = \{b(n)\}_{n=0}^{\infty}$ פותרת את $(**)$ אמ"מ הסדרה $\bar{h} = \bar{a} - \bar{b}$ המוגדרת ע"י $h(n) = a(n) - b(n)$ היא פיתרון של $(*)$.

הוכחה:

(1) **כיוון ראשון:** $\bar{b}$ פותרת את $(**)$ ויש להוכיח כי $\bar{h}$ פותרת את $(*)$. נתון $\bar{a}, \bar{b}$ פותרת את $(**)$ ולכן

$$a(n) = c_1 a(n-1) + \cdots + c_r a(n-r) + g(n)$$
$$b(n) = c_1 b(n-1) + \cdots + c_r b(n-r) + g(n)$$
$$a(n) - b(n) = c_1\big(a(n) - b(n)\big) + \cdots + c_r\big(a(n-r) - b(n-r)\big)$$

כלומר

$$h(n) = c_1 h(n-1) + \cdots + c_r(n-r)$$

ולכן $\bar{h} = \{h(n)\}_{n=0}^{\infty}$ הוא פיתרון של המשוואה ההומוגנית $(*)$

(2) **כיוון שני:** נתון $h = \{h(n)\}_{n=0}^{\infty}$ פותרת את $(*)$ ונתון $\bar{a}$ פותרת את $(**)$. אז יש להוכיח $\bar{b} = \bar{a} - \bar{h}$.

$$a(n) = c_1 a(n-1) + \cdots + c_r a(n-r) + g(n)$$
$$h(n) = c_1 h(n-1) + \cdots + c_r h(n-r)$$

נחסיר את המשוואות ונקבל

$$b(n) = c_1 b(n-1) + \cdots + c_r b(n-r) + g(n)$$

ולכן גם $\bar{b}$ פותרת את $(**)$.

מסקנה: הפיתרון הכללי של משוואת נסיגה לא הומוגנית הוא פתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית + פיתרון כללי של המשוואה ההומוגנית המתאימה.

דוגמה: סדרה $\bar{h} = \{h(n)\}_{n=0}^{\infty}$ המוגדרת ע"י $h(n) = 2h(n-1) + 1,\ h(0) = 0$.

פיתרון: נסתכל תחילה על משוואת נסיגה לא הומוגנית $h(n) = 2h(n-1) + 1$. נשים לב הסדרה $\bar{b} = (-1, -1, \ldots)$ פותרת את המשוואה. המשוואה ההומוגנית המתאימה היא $h(n) = 2h(n-1)$. הפולינום האופייני הוא $p(x) = x - 2$. השורש של $p(x)$ הוא $\lambda = 2$ ולכן הפתרון הכללי של הנוסחא ההומוגנית הוא $h(n) = a \cdot 2^n$. לכן, ממשפט קודם, הפיתרון הכללי של המשוואה הלא הומוגנית הוא $h(n) = a \cdot 2^n - 1$.
לפי תנאי התחלה $h(0) = 0 = a \cdot 2^n - 1$ אז $a = 1$ אז $h(n) = 2^n - 1$.

אלגוריתם לפיתרון נוסחאות נסיגה לא הומוגניות (מהתרגול):

תהי $f(n)$ נוסחת נסיגה לא הומוגנית:

$$f(n) = c_1 f(n-1) + c_2 f(n-2) + \cdots + c_r f(n-r) + p_1(n) \cdot \delta_1^n + \cdots p_s(n) \cdot \delta_s^n$$

$$f(1) = a_1, f(2) = a_2, \ldots, f(r) = a_r$$

הפולינום האופייני הוא $x^r - c_1 x^{r-1} - \cdots - c_r$

1. מוצאים את הפולינום האופייני. מוצאים את שורשי הפולינום האופייני את ריבויים. לכל שורש α נסמן את ריבויו ב-$m(\alpha)$. אם α אינו שורש של הפולינום האופייני אז $m(\alpha) = 0$.
2. לכל איבר לא הומוגני מהצורה $p_i(n)\delta_i^n$ מתאימים איבר בפתרון $q_i(n) n^{m(\delta_i)} \delta_i^n$ ודרגת q_i כדרגת p_i. מוצאים את q_i על ידי הצבה בנוסחת הרקורסיה. נסמן
$$q_i(n) = \sum_{i=0}^{\deg(p_i)} b_i x^i$$
ונמצא את $\{b_i\}_{i=0}^{\deg(p_i)}$ מקדמי q_i, על ידי הצבה בנוסחת הנסיגה באופן הבא:
$$q_i(n) \cdot n^{m(\delta_i)} \cdot \delta_i^n = \sum_{j=1}^{r} c_j \cdot q_i(n-j) \cdot (n-j)^{m(\delta_i)} \cdot \delta_i^{n-j} + \sum_{i=1}^{s} p_i(n)\delta_i^n$$
נשווה את מקדמי הפולינום אחרי פיתוח ונקבל את $\{b_i\}_{i=0}^{\deg(p_i)}$.

3. צורת הפתרון היא

$$f(n) = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=0}^{m(\lambda_i)-1} a_{ij}\, n^j \lambda_i^n\right) + \sum_{i=1}^{s} q_i(n) n^{m(\delta_i)} \delta_i^n$$

k מספר השורשים השונים, λ_i הוא השורש ה-i. את a_{ij} מוצאים מתנאי ההתחלה ע"י הצבה.

הוכחה: הובא ללא הוכחה

7 פונקציות יוצרות

דוגמא: סדרת פיבונצ'י

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2);\ \ f(0) = 1;\ \ f(1) = 1$$

נגדיר פונקציה $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$. אז

$$\begin{aligned}
F(x) &= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} f(n)x^n = \\
&= 1 + k + \sum_{n=2}^{\infty}\big(f(n-1) + f(n-2)\big)x^n \\
&= 1 + k + \sum_{n=2}^{\infty} f(n-1)x^n + \sum_{n=2}^{\infty} f(n-2)x^n \\
&= 1 + x + x\sum_{n=2}^{\infty} f(n-1)x^{n-1} + x^2\sum_{n=2}^{\infty} f(n-2)x^{n-2} \\
&= 1 + x + x(F(x) - 1) + x^2F(x) \\
&= 1 + xF(x) + x^2F(x)
\end{aligned}$$

קיבלנו $F(x) = 1 + xF(x) + x^2F(x)$ ולכן, $F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$. נפתח את $F(x)$ לטור מקלורן (טור טיילור מסביב ל-0). השורשים של $1 - x - x^2$ הם $\lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. ולכן

$$\begin{aligned}
F(X) &= \frac{1}{1 - x - x^2} \\
&= \frac{1}{x\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1 + \lambda_2 x} - \frac{1}{1 - \lambda_1 x}\right)
\end{aligned}$$

נזכור $\frac{1}{1-kx} = 1 + kx + k^2x^2 + \cdots$ אז

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda_2 k)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_1 k)^n\right) \\
&= \frac{1}{x\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}[(-\lambda_2)^n - (-\lambda_1)^n]x^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}[(-\lambda_2)^n - (-\lambda_1)^n]x^{n+1}
\end{aligned}$$

מכאן:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}$$

פונקציה יוצרת (הגדרה): תהי $\bar{a} = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרה. הפונקציה $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ נקראת הפונקציה היוצרת של $\bar{a}$.

משפט: נניח כי עבור סדרה $\bar{a} = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ קיים קבוע $k > 0$ כך ש $|a_n| \le k^n$ עבור כל n. אז הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס בקטע $\left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$. יתרה מזאת, לפונקציה $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ יש נגזרות מכל סדר ב-$x = 0$ וכן $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

הוכחה: חדו"א 2

דוגמאות:

(1) $\bar{a} = (0, \dots, 0, \frac{1}{k}, 0, \dots)$ שונה מ-0 במקום ה-k. אז הפונקציה המתאימה היא $f(x) = x^k$.

(2) $\bar{a} = (1,1,1, \dots)$ אז $f(x) = \frac{1}{1-x}$

באופן כללי אם יש פונקציה $f(x) = \frac{1}{1-kx}$ אז הוא מתאים לסדרה $\bar{a} = (1, k, k^2, k^3, \dots)$

(3) תזכורת: עבור $\alpha \in \mathbb{R}$ ו-$n \in \mathbb{N}$ נסמן $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \dots \cdot(\alpha-n+1)}{n!}$

אז $(1+\alpha)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ לכן, אם $\bar{a} = \left\{\binom{\alpha}{n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ אז $f(x) = (1+x)^\alpha$ היא הפונקציה היוצרת של $\bar{a}$.

1.7 פעולות

הסדרות $\bar{a}, \bar{b}$ והפונקציות היוצרות שלהן $f(x), g(x)$ בהתאמה.

(1) **סכום:** מתקיים שעבור הסדרה $\bar{a} + \bar{b}$ היא $(f+g)(x)$

(2) **כפל בסקלר:** $\alpha \cdot \bar{a}$ והפונקציה היוצרת שלה $\alpha f(x)$

(3) **הזזה ימינה:** $\bar{a}' = (0, \dots, 0, a_0, a_1, \dots)$ הזזה ב-k צעדים אז הפונקציה המתאימה $f'(x) = x^k f(x)$

(4) **הזזה שמאלה:**

דוגמה: $\bar{a} = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ והפונקציה היוצרת $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. נסתכל על

$$\begin{aligned} f(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \\ &= x^3 \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^{n-3} \\ &= x^3 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+3} x^n \end{aligned}$$

ולכן $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+3}x^n = \frac{(f(x)-a_0-a_1x-a_2x^2)}{x^3}$

ולכן הפונקציה היוצרת של הסדרה $(a_3, a_4, \dots)$ היא $\frac{(f(x)-a_0-a_1x-a_2x^2)}{x^3}$

(5) **החלפת x ב-αx**

אם f פונקציה יוצרת של $\bar{a}$ אז $f(\alpha x)$ יוצרת את הסדרה $c_n = \alpha^n a_n$

(6) **החלפת x ב-x^k:** אם f פונקציה יוצרת של $\bar{a}$ אז $f(x^k)$ יוצרת את b_n כאשר $b_{nk} = a_n$ ואם $k \nmid m$ אז $b_m = 0$.

דוגמה: נמצא פונקציה יוצרת של הסדרה a_n המוגדרת ע"י $a_n = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

$$a_n = (1,1,2,2,4,4,8,8,\dots)$$

אז $\frac{1}{1-2x}$ יוצרת את $(1,2,4,8,\dots)$. אז אנחנו רוצים לרווח את הסדרה. ונציב x^2 ונקבל $\frac{1}{1-2x^2}$ שיוצרת את $(1,0,2,0,4,0,\dots)$. מהזזה ימינה $\frac{x}{1-2x^2}$ יוצרת את $(0,1,0,2,0,4,\dots)$. מסכום $\frac{1+x}{1-2x^2}$ יוצרת את המבוקש.

(7) **גזירה:** אם f יוצרת את $\bar{a} = (a_n)$ אז f' יוצרת את הסדרה $\bar{b} = (a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$.

דוגמה: נמצא פונקציה יוצרת עבור הסדרה $\bar{e} = (e_n); e_n = n^2$. יודעים $\frac{1}{1-x}$ יוצרת את $(1,1,1,1,\dots)$ ואז $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2$ יוצרת את $a_n = (1,2,3,4,\dots)$ אז $a_n = n+1$. $\frac{x}{(1-x)^2}$ יוצרת את $\bar{b}$ עבור $b_n = n$ אז $\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'$ יוצרת את $(n+1)b_{n+1} = (n+1)^2$ נזיז מקום אחד ימינה ונקבל $\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$ יוצרת את n^2

(8) **אינטגרציה:** אם $f(x)$ יוצרת את $\bar{a}$ אז $\int_0^x f(t)dt$ יוצרת את $\bar{b}$ כאשר $b_0 = 0$ ו-$b_n = \frac{a_{n-1}}{n}$

(9) **כפל:** אם f, g יוצרות את $\bar{a}, \bar{b}$ בהתאמה אז המכפלה $f \cdot g$ יוצרת את הסדרה c כאשר $c_n = a_n \cdot b_0 + a_{n-1}b_1 + \cdots + a_0 b_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$

הוכחה:

$$f \cdot g = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m \cdot x^m\right)$$
$$= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots)$$

(01) **סכימה:** אם f פונקציה יוצרת את $\bar{a}$ אז $\frac{f}{1-x}$ יוצרת את $\bar{c}$ כאשר $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$

הוכחה: מקרה פרטי של (9) עם $\bar{a} = (1,1,1,\dots)$

דוגמה: מצאו את $\sum_{k=1}^{n} k^2$. נמצא פונקציה יוצרת.

פיתרון: מצאנו את הפונקציה היוצרת של $a_n = n^2$ אז מ-(10) $\frac{1}{1-x} \cdot \frac{x+x^2}{(1-x)^3} = \frac{x+x^2}{(1-x)^4}$ יוצרת את $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

מהו המקדם של x^n בפיתוח לטור של הפונקציה היוצרת? נשים לב ש$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ ו-$\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3}$ ו- $\left(\frac{2}{(1-x)^3}\right)' = \frac{6}{(1-x)^4}$ לכן,

$$\frac{1}{(1-x)^4}=\frac{1}{6}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'''$$
$$=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$
$$=\frac{1}{6}\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$
$$=\frac{1}{6}\sum_{m=0}^{\infty}(m+3)(m+2)(m+1)x^m$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+3}{3}x^m$$

לכן

$$g(x)=\frac{x+x^2}{(1-x)^4}$$
$$=x\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{3}x^n+x^2\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{3}x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{3}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{3}x^{n+2}$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}\binom{m+2}{3}x^m+\sum_{m=2}^{\infty}\binom{m+1}{3}x^m$$

כלומר המקדם של x^n הוא $\binom{n+1}{3}+\binom{n+2}{3}$ ונפתח

$$\frac{(n+2)(n+1)n}{6}+\frac{(n+1)n(n-1)}{6}=\frac{(n+1)n(2n+1)}{6}$$

2.7 שימושים

טענה: $S_1,\dots,S_k\subseteq\mathbb{N}\cup\{0\}$ קבוצות אזי $\prod_{i=1}^{k}\sum_{n\in S_i}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ כאשר a_n הוא מספר הדרכים לקבל את n כסכום $s_1+s_2+\cdots+s_k$ כאשר $s_i\in S_i$.

הוכחה: נובע מהשוואת המקדם של x^n בשני האגפים. קומבינטוריקה על הכפל והסכום.

לדוגמה $S_1=\{0,1,2\},S_2=\mathbb{N}_{even}\cup\{0\},S_3=(1,7,10)$.

$$(1+x+x^2)(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)(x+x^7+x^{10})$$

דוגמה: נוכיח כי $\left(\frac{1}{1-x}\right)^k=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}$.

פיתרון: $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$. אם נסמן $S_i=\mathbb{N}\cup\{0\}$ לכל $1\le i\le k$ אז נקבל

$$\prod_{i=1}^{k}\sum_{n\in S_i}x^n=\left(\frac{1}{1-x}\right)^k=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

כאשר a_n הוא מספר הדרכים לקבל את n כסכום של $s_1+s_2+\cdots+s_k$ לכל $a_n=\binom{n+k-1}{k-1}$.

דוגמה: מצאו את מספר הפיתרונות של המשוואה $x_1+x_2+x_3=9$ כאשר $1\le x_1\le 2$, $-2\le x_2\le 4$, $2\le x_3\le 4$. נסמן

$$y_1=x_1-1, y_2=x_2+2\ , y_3=x_3-2$$

נמצא את מספר הפתרונות בשלמים למשוואה $y_1+y_2+y_3=8$ כאשר $0\le y_1\le 1, 0\le y_2\le 6, 0\le y_3\le 2$. נסמן:

$$S_1=\{0,1\}, S_2=\{0,1,2,\dots,6\}, S_3=\{0,1,2\}$$

ונחפש את המקדם של x^8 ב-

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x+x^2+\cdots+x^6)(1+x+x^2) &= (1+x)\left(\frac{1-x^7}{1-x}\right)\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right)\\ &= \frac{1}{(1-x)^2}(1+x)(1-x^7)(1-x^3)\\ &= \frac{1}{(1-x)^2}(1+x)(1-x^3-x^7+x^{10})\end{aligned}$$

ומתרגיל קודם נקבל

$$\begin{aligned}&= (1+x)(1-x^3-x^7+x^{10})\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{1}x^n\right)\\ &= (1+x-x^3-x^4-x^7-x^8+\cdots)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\right)\\ &= 9+8-6-5-2-1\\ &= 3\end{aligned}$$

8 תורת הגרפים

גרף (הגדרה): גרף הוא $G = (V, E)$ זוג סדור. כאשר V הינה קבוצה הנקראת קבוצת הקודקודים ו-E היא קבוצת הזוגות של איברי V.

הערות:

(1) אם $(u, v) \in E(G)$ צלע של גרף G ועבור $u = v$ הצלע תקרא לולאה.
(2) אם בין u ל-v מחברות בגרף G יותר מצלע אחת, נאמר כי ב-G יש צלע כפולה בין u ל-v.
(3) אם צלעות של G הן זוגות סדורים, אז G נקרא גרף מכוון.
(4) אם צלעות G הן צלעות לא סדורים, אז G נקרא גרף לא מכוון.

מכאן והלאה, נדון רק בגרפים לא מכוונים, ללא לולאות, ללא צלעות כפולות בלבד וכאשר $|V|$ סופי.

איזומורפיזם של גרפים (הגדרה): יהיו $G_1 = (V_1, E_1),\ G_2 = (V_2, E_2)$ גרפים. הפונקציה $\varphi: V_1 \to V_2$ נקראת איזומורפיזם אם

(1) φ חח"ע ועל V_2
(2) לכל $u, v \in V_1$ מתקיים $(u, v) \in E_1 \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E_2$

גרפים איזומורפיים (הגדרה): גרפים G_1, G_2 נקראים איזומורפיים אם קיים איזומורפיזם φ בין G_1 לבין G_2.

טענה: יחס האיזומורפיזם על גרפים הוא יחס שקילות.

הוכחה: מיידי.

הגדרה: מחלקת שקילות תחת יחס איזומורפיזם של גרפים נקראת גרף לא מסומן. כלומר, גרף ללא שמות של קודקודים.

טענה: נסמן ב-$f(n)$ את מספר הגרפים הלא מסומנים על n קודקודים אזי $\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} \le f(n) \le 2^{\binom{n}{2}}$.

הוכחה: נשים לב כי גרף G עם קבוצת קודקודים $[n]$ מתואר על ידי $\binom{n}{2}$ זוגות של צלעות אפשריות לכן יש סה"כ $2^{\binom{n}{2}}$ גרפים מסומנים על n קודקודים לכן $f(n) \le 2^{\binom{n}{2}}$. בהינתן גרף $G = (V, E)$ על n קודקודים יש בדיוק $n!$ פונקציות $\varphi: V \to V$ חח"ע ועל V. לכן נקבל לכל היותר $n!$ גרפים על n קודקודים שאיזומורפיים ל-G (כולל זהות). לכן, $2^{\binom{n}{2}}$ גרפים מסומנים על n קודקודים מחולקים למחלקות שקילות (לפי איזומורפיזם) כך שבכל מחלקת שקילות יש לכל היותר $n!$ גרפים. לכל מספר מחלקות השקילות הוא לפחות $\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$

מסקנה: $f(n) = 2^{\binom{n}{2}(1-o(1))}$

הוכחה: $f(n) \le 2^{\binom{n}{2}}$

$$f(n) \ge \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} = 2^{\binom{n}{2} - \ln(n!)} = 2^{\binom{n}{2}(1-o(1))}$$

תת גרף (הגדרה): גרף $H = (U, F)$ הוא תת גרף של גרף $G = (V, E)$ אם $U \subseteq V$ ו-$F \subseteq E$.

תת גרף פורש (הגדרה): אם $H = (U, F)$ הוא תת-גרף של $G = (V, E)$ אבל $U = V$ נאמר ש-H תת-גרף פורש של G.

גרף נפרש (הגדרה): יהי $G = (V, E)$ גרף ותהי $0 \neq V_0 \subseteq V$ קבוצת קודקודים בתוך G. הגרף הנפרש ע"י V_0 המסומן ע"י $G[V_0]$ הוא תת גרף של G המוגדר ע"י $V(G[V_0]) = V_0$ ו-$E(G[V_0]) = \{e \in E(G) | e \cap V_0 = 2\}$.

1.8 דרגות

דרגה (הגדרה): יהי $G = (V, E)$ גרף. הדרגה של קודקוד $v \in V(G)$, המסומנת ב-$d_G(v)$ מוגדרת ע"י $d_G(v) = |\{e \in E(G) | v \in e\}|$.

טענה: לכל גרף $G = (V, E)$ מתקיים $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$

הוכחה: בספירה באגף שמאל כל צלע $(u, v) = e \in E(G)$ נספרת בדיוק פעמיים כל צלע (פעם אחת עבור u ופעם אחת עבור v) ולכן הסכום שווה ל-$2|E|$.

מסקנה: בכל גרף $G = (V, E)$ יש מספר זוגי של קודקודים מדרגה אי זוגית (כי אחרת היינו מקבלים שהסכום אי זוגי).

גרף d-רגולרי (הגדרה): גרף $G = (V, E)$ נקרא d-רגולרי אם $d_G(v) = d$ לכל $v \in V(G)$

דוגמה: האם קיים גרף 5 רגולרי על 13 קודקודים? לא, סכום הדרגות אי-זוגי אז לא יתכן.

2.8 הילוכים , מסלולים ומעגלים

הילוך (הגדרה): יהי $G = (V, E)$ גרף. סדרת קודקודים $W = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ נקראת הילוך ב-G אם $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ לכל $0 \leq i \leq k - 1$. האורך של הילוך כזה הוא k.

מסלול (הגדרה): יהי $G = (V, E)$ גרף. הילוך p בו כל קודקוד מופיע פעם אחת נקרא מסלול.

טענה: יהי W הילוך בגרף $G = (V, E)$ המחבר בין u לבין v. אז W מכיל מסלול p המחבר בין u לבין v.

הוכחה: באינדוקציה על האורך של W (נסמנו ב-l).

(1) עבור $l = 0$: במקרה כזה $W = (v_0)$. אז ניתן לקחת $P = W$.
(2) צעד האינדוקציה: נניח שיש $W = (v_0, v_1, \dots, v_l)$ אם ב-W אף קודקוד לא חוזר על עצמו אז סיימנו. אחרת ב-W קיים קודקוד v_i אשר חוזר על עצמו. נסלק מ-W את כל הצלעות בין 2 הופעות סמוכות של v_i, נקבל הילוך W' אשר עדיין מחבר בין u לבין v והוא יותר קצר מ-W. לכן לפי הנחת האינדוקציה, $W \subseteq W'$ מכיל מסלול p המחבר בין u לבין v.

3.8 גרפים קשירים ורכיבי קשירות

גרף קשיר (הגדרה): גרף $G = (V, E)$ נקרא גרף קשיר אם לכל $u, v \in V$, גרף G מכיל מסלול p המחבר בין u לבין v.

יחס קשירות (הגדרה): יהי $G = (V, E)$ גרף. יחס קשירות R על G מוגדר באופן הבא: אם $u, v \in V$ אז $(u, v) \in R$ אם G מכיל מסלול המחבר בין u לבין v.

טענה: לכל גרף $G = (V, E)$ יחס הקשירות R על G הוא יחס שקילות:

הוכחה:

(1) **רפלקסיביות:** יש לוודא $(v, v) \in R$ לכל $v \in V$. כי אפשר לבחור $W = \{v\}$.

(2) **סימטריות:** אם $(u,v) \in R$ אז $(v,u) \in R$ מסלול p המחבר בין u ל-v מחבר גם בין v ל-u (הגרף שלנו אינו מכוון).

(3) **טרנזיטיביות:** יש אם $(u,v),(v,w) \in R$ אז גם $(u,w) \in R$. כיוון ש-$(u,v) \in R$ גרף G מכיל מסלול p_1 המחבר בין u לבין v... משתמשים בטענה שקיים מסלול גם לשרשור של המסלולים (מרפלקסיביות)

רכיב קשירות (הגדרה): יהי $G=(V,E)$ גרף. אם קבוצה $V_0 \subseteq V$ היא מחלקת שקילות של G לפי יחס קשירות, אז V_0 נקרא רכיב קשירות.

מעגל (הגדרה): יהי $G=(V,E)$ גרף. הילוך $W=(v_0,\dots,v_k)$ ב-G נקרא מעגל אם $k \geq 3$ וגם $v_0=v_k$ וכל שאר הקודקודים שונים מ-v_0 ושונים זה מזה.

מעגל זוגי ואי זוגי (הגדרה): מעגל C בגרף G נקרא זוגי אם הוא האורך זוגי אם הוא באורך זוגי ונקרא אי זוגי אחרת.

4.8 גרפים דו-צדדים

גרף דו-צדדי (הגדרה): גרף $G=(V,E)$ נקרא גרף דו צדדי אם קיימת חלוקה של $V=A \cup B$ כך ש

(1) $A \cap B = \phi$

(2) $\forall_{e \in E(G)} |e \cap V(A)| = |e \cap V(B)| = 1$

מרחק (הגדרה): בהינתן גרף $G=(V,E)$ ו-$u,v \in V(G)$ אז המרחק בין u ל-v המסומן ב-$dist(u,v)$ הוא האורך המינימאלי של מסלול ב-G אשר מחבר בין u ל-v. אם ב-G אין מסלול המחבר בין u ל-v אז נסמן $dist(u,v)=\infty$.

משפט: גרף $G=(V,E)$ הוא דו-צדדי אמ"מ G אינו מכיל מעגלים אי-זוגיים

הוכחה:

(1) נתון G דו צדדי. צ"ל ש-G אינו מכיל מעגלים אי-זוגיים.
כיוון ש-G דו צדדי קיימת חלוקה $V = A \uplus B$ כך ש-$|e \cap A| = |e \cap B| = 1$ לכל $e \in E(G)$. נניח בשלילה כי G מכיל מעגל $C=(v_1,v_2,\dots,v_{2k+1},v_1)$ באורך $2k+1$. בלי הגבלת הכלליות נניח כי $v_2 \in A$. לכן, כיוון ש-G דו צדדי נובע כי $v_1 \in B$ ואז $v_3 \in B$ ולבסוף $v_{2k+1} \in B$. אבל אז $v_{2k+1}, v_1 \in A$ ו-$\{v_1,v_{2k+1}\} \in E(G)$. סתירה.

(2) נתון G אינו מכיל מעגלים אי-זוגיים וצריך להוכיח ש-G דו צדדי.
נוכל להניח כי גרף G הוא גרף קשיר. אם $c_1,\dots,c_t$ הם רכיבי הקשירות של G ו- c_i הוא גרף דו צדדי עם חלוקה $A_i \uplus B_i$ המוגדרת ע"י $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_t$ ו-$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_t$ היא חלוקה דו-צדדית של G. נניח אם כן כי G הוא גרף קשיר ללא מעגלים אי-זוגיים. נבחר קודקוד שרירותי $V_0 \in V$ ולכל $i \geq 0$ נגדיר $V_i = \{u \in V \mid dist(V_0,u)=i\}$. נשים לב, אם $(u,v) \in E(G)$, $u \in V_i$, $v \in V_j$ אז $|i-j| \leq 1$. נגדיר חלוקה של $V = A \cup B$ באופן הבא:

$$A = \{V_0\} \cup V_2 \cup V_4 \cup \dots$$

$$B = V_1 \cup V_3 \cup V_5 \cup \dots$$

כיוון ש-G הוא גרף קשיר, נובע כי $V = A \uplus B$ (ברור כי $A \cap B = \phi$).

כיוון ששמנו לב כי אין צלע בין V_i,V_j כאשר $|i-j| \geq 2$ נותר לבדוק כי לכל $i \geq 0$ הקבוצה V_i לא מכילה אף צלע. נניח בשלילה כי שכבה V_i מכילה צלע $\{u,v\} \in E(G)$ ויהי P_w מסלול באורך i מ-w ל-V_0. יהי $v^* \in V_j$ הקודקוד הראשון בו P_u,P_w נפגשים (יתכן $j=0$, $v^*=V_0$). קיבלנו שני

מסלולים באורך $i-j$, הראשון מ-u אל v^* והשני מ-w אל v^*. שני המסלולים האלה, ביחד עם צלע $\{u,w\}$ סוגרים מעגל C באורך $2(i-j)+1$ ולכן C הוא מעגל אי-זוגי וקיבלנו סתירה.

1.4.8 משפט הול לגרפים דו-צדדיים

זיווג (הגדרה): בניתן גרף $G=(V,E)$ קבוצת צלעות $M\subseteq E$ נקראית זיווג ב-G אם $e_1\cap e_2=\phi$ לכל $e_1,e_2\in M$.

הרוויה (הגדרה): בהינתן גרף דו-צדדי $G=(A\cup B,E)$ זיווג $M\subseteq E$ **מרווה** את צד A אם $|M|=|A|$.

מטרתנו למצוא תנאי מספיק והכרחי לקיום של זיווג מרווה צד נתון בגרף דו צדדי.

סימון: יהי $G=(A\cup B,E)$ גרף דו צדדי ותהי $A_0\subseteq A$. הסביבה של A_0 ב-G המסומנת ב-$N(A_0)$ מוגדרת ע"י

$$N(A_0)=\{b\in B\mid \exists_{e\in E}(b\in e\wedge\ e\backslash\{b\}\in A_0)\}$$

.

תנאי הול ($\boldsymbol{Hall}$): עבור צד A בגרף דו-צדדי $G=(A\cup B,E)$ לכל $A_0\subseteq A$ מתקיים $|N(A_0)|\geq|A_0|$.

משפט הול: יהי $G=(A\cup B,E)$ גרף דו צדדי. ב-G קיים זיווג M בגודל $|M|\geq|A|$ (כלומר זיווג שמרווה את A) אמ"מ תנאי הול מתקיים עבור צד A.

הוכחה:

(1) נתון שב-G קיים זיווג M המרווה את A וצריך להוכיח שתנאי הול מתקיים עבור צד A. נניח כי $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ ו-$M=\{\{a_1,b_1\},\dots,\{a_n,b_n\}\}$. כיוון ש-$M$ זיווג מתקיים $\forall_{1\leq i\neq j\leq n} b_i\neq b_j$.
נניח $A_0\subseteq A$. נגדיר $B_0=\{b_i|\ a_i\in A_0\}$ אז $|B_0|=|A_0|$ ו-$B_0\subseteq N(A_0)$ ולכן $|N(A_0)|\geq|B_0|=|A_0|$.

(2) נתון שתנאי הול מתקיים עבור A וצריך להוכיח שקיים ב-G זיווג M המרווה את A. ההוכחה באינדוקציה על $|A|$.
בסיס האינדוקציה: $|A|=1$.
נניח $A=\{a_1\}$ כיוון שתנאי הול מתקיים עבור $|A|$, נובע כי לקודקוד a_1 יש שכן b_1 בצד B. לכן צלע $e=\{a_1,b_1\}$ היא הזיווג הרצוי.
צעד האינדוקציה:
נניח שתנאי הול מתקיים עבור $|A|=n$ ונראה שהיא מתקיים עבור $|A|=n+1$
מקרה ראשון: לכל $\phi\neq A_1\subseteq A$ מתקיים $|N(A_1)|\geq|A_1|+1$. במקרה כזה, נבחר קודקוד $a_1\in A_1$ שרירותית. אחרי זה, נבחר קודקוד $b_1\in B$ עבורו $\{a_1,b_1\}\in E$. נסלק את a_1,b_1 ונקבל גרף חדש G' עם צדדים A',B'. נשים לב כי תנאי הול מתקיים עבור A' בגרף G' כי לכל $A_0\subseteq A$ מתקיים

$$|N_{G'}(A_0)|\geq|N_G(A_0)|-1\geq|A_0|+1-1=|A_0|$$

ולכן לפי הנחת האינדוקציה ב-G' קיים זיווג M' בגודל $|M'|=|A'|=|A|-1$. נוסיף ל-M' את הצלע $\{a_1,b_1\}$ ונקבל זיווג M בגודל $|M|=|M'|+1=|A|$.

מקרה שני: קיימת קבוצה $\phi\neq A_0\subseteq A$ כך ש- $|N(A_0)|=|A_0|$. נגדיר $B_1=N_G(A_1)$ נגדיר $A_2=A\backslash A_1,\ B_2=B\backslash B_1,\ G_1=G(A_1\cup B_1),\ G_2=(A_2\cup B_2)$. נשים לב, קבוצות הקודקודים של G_1,G_2 זרות זו לזו. נמצא זיווג M_1 בגודל $|M_1|=|A_1|$ ב-G_1 ונמצא זיווג M_2 בגודל $|M_2|=|A_2|$ ב-G_2 ואז קבוצה $M=M_1\cup M_2$ היא זיווג ב-G בגודל $|A|=|M_1|+|M_2|=|M|$.

גרף G_1: נשים לב כי לכל $X \subseteq A_1$ ו- $N_{G_1}(X) = N_G(X)$. כיוון שתנאי הול מתקיים ב-G עבור A נובע כי $|N_G(X)| \geq |X|$ ולכן גם $\left|N_{G_1}(X)\right| \geq |X|$ ואז תנאי הול מתקיים גם עבור A_1 ב-G_1. מכאן, לפי הנחת האינדוקציה, ב-G_1 קיים זיווג M_1 בגודל $|A_1| = |M_1|$.
גרף G_2: תהי $\phi \neq X \subseteq A_2$. $N_G(A_1 \cup X) = N_G(A_1) \cup N_G(X)$. נפריד בצורה מלאכותית

$$N_G(A_1 \cup X) = N_G(A_1) \cup \left(N_G(X) \backslash N_G(A_1)\right)$$

נשים לב כי

$$N_{G_2} = N_G(X) \backslash B_1 = N_G(A_1)$$

ולכן

$$N_G(A_1 \cup X) = N_G(A_1) \uplus N_{G_2}(X)$$

כלומר

$$|N_G(A_1 \cup X)| = |N_G(A_1)| + \left|N_{G_2}(X)\right|$$

ולכן לפי תנאי הול עבור G

$$|N_G(A_1 \cup X)| = |N_G(A_1)| + \left|N_{G_2}(X)\right| \geq |A_1 \cup X| = |A_1| + |X|$$

ומכאן $\left|N_{G_2}(X)\right| \geq X$

לכן, תנאי הול מתקיים עבוד צד A_2 ב-G_2 ולפי אינדוקציה ב-G_2 קיים זיווג M_2 בגודל $|A_2| = |M_2|$.
נסמן $M = M_1 \cup M_2$. כיוון של-G_1 ו-G_2 קודקודים זרים, M הוא זיווג בגודל

$$|M| = |M_1| + |M_2| = |A_1| + |A_2| = |A|$$

וסיימנו.

1.1.4.8 משפט הול ומערכות נציגים

שאלה: בהינתן קבוצות $S_1, S_2, \dots, S_n$ (לאו דווקא זרות). האם קיימת בחירת נציגים $\{a_i \in S_i\}_{i=1}^{n}$ כך שלכל $1 \leq i \neq j \leq n$ מתקיים $a_i \neq a_j$? אם בחירה כזאת קיימת, נאמר כי ל-$\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ קיימת **מערכת נציגים שונים (מנ"ש)**.

משפט: למשפחת קבוצות $\{S_1, \dots, S_n\}$ קיימת מנ"ש אמ"מ לכל קבוצת אינדקסים $\phi \neq I \subseteq [n]$ מתקיים $|\bigcup_{i \in I} S_i| \geq |I|$.

הוכחה: תרגיל.