אינטגרל מסוים וחישוב שטחים

1) אינטגרל מסוים

פונקציה $f(x)$ המוגדרת ורציפה בקטע $[a,b]$ אם ידוע האינטגרל הלא מסוים של הפונקציה $\int f(x)dx = F(x)+c$
האינטגרל הלא מסוים של הפונקציה $f(x)$ בקטע $[a,b]$ הוא: $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$.
בניגוד לאינטגרל הלא מסוים שהוא משפחה של פונקציות האינטגרל הלא מסוים הוא מספר, לכן
הוא נקרא "מסוים". השימוש באינטגרל המסוים יעיל ביותר לחישוב שטח כלוא בין פונקציה לציר ה-X
כמו שנלמד בהמשך.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)}$$

סימונים

a ו-b נקראים "גבולות האינטגרציה", לפני שחישבנו את האינטגרל של הפונקציה נסמנם
כך: $\int_a^b f(x)$. אך לאחר שמצאנו את הפונקציה הקדומה נסמנה כך: $F(x)\Big|_a^b$

2) תכונות האינטגרל המסוים

(1) $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

(2) $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

(3) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
נק' c יכולה להיות בכל מקום ואפילו מחוץ לתחום $[a,b]$

(4) $$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(5) $$\int_a^b A\cdot f(x) + B\cdot g(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx$$

3) הצבה באינטגרל מסוים

כאשר משתמשים בהצבה באינטגרל מסוים, לא ניתן להשתמש עוד בגבולות האינטגרציה הקודמים $[a,b]$
משום שהם רלוונטים רק לפונקציה של x $(f(x))$ ולא לפונקציה של t $(f(t))$. יש שני שיטות להתמודד
עם בעיה זו:

(1) לפתור את האינטגרל הלא מסוים תחילה ולהציב חזרה את מה שהצבנו ל t. לאחר מכן נחזיר
גבולות האינטגרציה הקודמים.

(2) למצוא את גבולות האינטגרציה החדשים. נעשה זאת על ידי שנציב בערך שהגדרנו ל-t $(t=F(x))$ את גבולות האינטגרציה a ו-b, ונקבל $F(a)$ ו-$F(b)$. לבסוף נציב $\int_{F(a)}^{F(b)} g(t)\,dt$

בשיטה זו אין צורך לחזור חזרה ל-x לאחר שחישבנו את האינטגרל.

דוגמא:

$$\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x}\,dx \Rightarrow \left.\begin{aligned} t&=\ln x\\ dt&=\frac{1}{x}\,dx\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a&=\ln(1)=0\\ b&=\ln(e)=1\end{aligned}$$

$$\int_0^1 t^3\,dt = \frac{t^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{(1)^4}{4}-\frac{0^4}{4}=\frac{1}{4}$$

4) הקשר בין הפונקציה הקדומה לאינטגרל המסוים

בנושא הקודם של האינטגרל הלא מסוים עסקנו בכיצד מוצאים פונקציה קדומה מנגזרתה, ואילו כעת בנושא זה אנו עוסקים במציאת שטח. השאלה היא מה הקשר בין התחומים, ומדוע יש להם שמות זהים וסימונים זהים?!

תשובה לשאלה זו היא מסובכת ואינה תורמת כל כך לפתרון תרגילים ומציאת אינטגרל מסוים ושטח. אמנם נאמר שקשר זה שגילו ניוטון ולייבניץ (בנפרד) הוא חידוש עצום בתחום המתמטיקה ובעיקר בתחום החדו"א ואף נקרא "המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי", המוכיח שכדי למצוא שטח הכלוא בין פונקציה לציר x בתחום $[a,b]$ יש למצוא אינטגרל של הפונקציה, להציב את גבולות האינטגרציה ולהחסיר ביניהם.

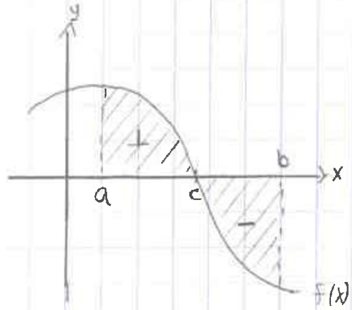
5) חישוב שטחים

כמו שכבר אמרנו משתמשים באינטגרל הלא מסוים לחישוב השטח שבין הפונקציה לציר x מכיוון שיש הבדלים בחישוב בין סוגי השטחים נכיר כל סוג שטח בנפרד.

6) חישוב שטח פונקציה בתחום חיובי

כאשר הפונקציה בתחום שאנו רוצים לחשב $[a,b]$ נמצאת כולה מעל ציר x, דרך החישוב היא הפשוטה ביותר על ידי שימוש בנוסחה של האינטגרל המסוים $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$. המספר שנקבל כתוצאה מנוסחה זו הוא השטח הכלוא בין הפונקציה לציר X.

7) חישוב שטח פונקציה בתחום שלילי



כמו שכבר אמרנו חישוב השטח באמצעות האינטגרל המסוים נעשה לפי הנוסחה $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$. ניתן לראות מהנוסחה כי השטח תלוי ב $f(x)$, כלומר בערכי הפונקציה y. לכן כאשר הפונקציה עוברת מתחת לציר ה-x בו ערכי y שליליים, גם האינטגרל המסוים יהיה שלילי.

נמצא אם כן, שהאינטגרל המסוים אכן עוזר למצוא שטח, אך אין זהות מוחלטת בין האינטגרל המסוים לשטח. כך לדוגמא, בציור משמאל מבחינה ויזואלית ניתן לראות שהאינטגרל המסוים יהיה שווה בקירוב ל-0 ולא לשטח בין הפונקציה לציר x בתחום $[a,b]$.

כתוצאה מכך, כל עוד לא ברור שהפונקציה נמצאת מעל ציר ה-x בתחום $[a,b]$, עלי למצוא נקודות חיתוך של הפונקציה עם ציר x בתחום $[a,b]$ ולחלק את האינטגרל לחלקים נפרדים לפי נקודות אלו, כאשר כל חלק בערך מוחלט. לבסוף, נחבר בין כל החלקים ונמצא את השטח.

$$\int_a^b F(x)dx = \left|\int_a^c f(x)dx\right| + \left|\int_c^b f(x)dx\right| = \left|F(x)\Big|_a^c\right| + \left|F(x)\Big|_c^b\right| = \left|F(c)-F(a)\right| + \left|F(b)-F(c)\right| = S$$

דוגמא: נחלק את האינטגרל המסוים

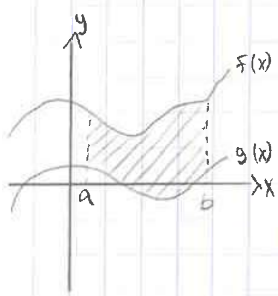
$$\int_{-2}^{2} x^3-4x\,dx \Rightarrow \quad x^3-4x=0 \Rightarrow x(x+2)(x-2)=0 \Rightarrow x=-2,0,2 \Rightarrow$$

לשני תחומים $[-2,0]$ ו-$[0,2]$

$$\int_{-2}^{2} x^3-4x\,dx = \left|\int_{-2}^{0} x^3-4x\,dx\right| + \left|\int_{0}^{2} x^3-4x\,dx\right| = \left|\frac{x^4}{4}-2x^2\Big|_{-2}^{0}\right| + \left|\frac{x^4}{4}-2x^2\Big|_{0}^{2}\right| =$$

$$\left|\left(\frac{(-2)^4}{4}-2\cdot(-2)^2\right)-\left(\frac{0^4}{4}-2\cdot 0^2\right)\right| + \left|\left(\frac{0^4}{4}-2\cdot 0^2\right)-\left(\frac{2^4}{4}-2\cdot 2^2\right)\right| = |-4| + |-4| = 8$$

8) חישוב שטח הכלוא בין שתי פונקציות



בעזרת האינטגרל המסוים אפשר לחשב שטח הכלוא בין שתי פונקציות או אפילו שלוש ויותר. גם במקרים אלו דרך החישוב משתנה בהתאם לסוגי הפונקציות לכן נחלק בין כמה סוגי מקרים:

(1) כשהפונקציות אינן נחתכות ופונקציה $f(x)$ גבוהה מפונקציה $g(x)$ בכל התחום - אפשר לחסר את הפונקציה הגבוהה מהפונקציה הקטנה, נציב באינטגרל המסוים

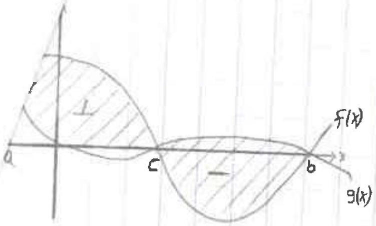
$$\boxed{S = \int_a^b f(x)-g(x)\,dx}$$

* אין זה משנה אם אחת הפונקציות יורדת מתחת לציר ה-x שם השטח שלילי, עדיין נקבל את השטח הכלוא.

(2) כשהפונקציות אינן נחתכות אך לא ידוע מי יותר גבוהה - נשתמש באותה נוסחה רק בערך מוחלט. במצב זה לא משנה איזה פונקציה מחסירים מהפונקציה השניה.

$$\boxed{S = \left|\int_a^b f(x)-g(x)\,dx\right|}$$

(9) חישוב שטח הכלוא בין שתי פונקציות נחתכות



כשהפונקציות נחתכות, לא ניתן לעשות אינטגרל מסו"ם כמו במקרה שהם לא נחתכות, משום שיצא לנו שטח אחד חיובי ואחד שלילי. כך לדוגמא: בציור משמאל ניתן לראות באופן ויזואלי שהאינטגרל המסו"ם יהיה שווה בקירוב לאפס ולא יתן את השטח.

כדי לפתור בעיה זו, יש למצוא נקודות חיתוך בין הפונקציות בתחום $[a,b]$ ולחלק את האינטגרל המסו"ם לחלקים נפרדים לפי נקודות אלו, כאשר כל חלק בערך מוחלט. לבסוף, נחבר בין כל החלקים ונמצא את השטח

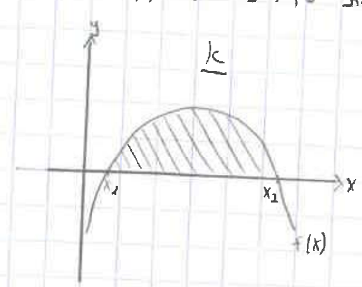
$$\int_a^b f(x)-g(x)\,dx = \left|\int_a^c f(x)-g(x)\,dx\right| + \left|\int_c^b f(x)-g(x)\,dx\right| = \left|F(x)\Big|_a^c\right| + \left|F(x)\Big|_c^b\right| = |F(c)-F(a)| + |F(b)-F(c)| = S$$

הערות חשובות

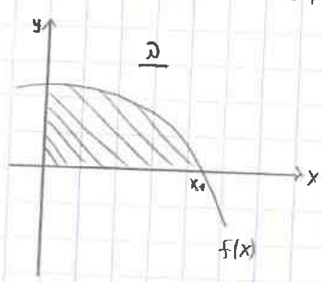
(1) אם אחת הפונקציות אינה מוגדרת או שמקיימת $y=0$ בחלק מהתחום המבוקש $[a,b]$, כשרוצה למצוא את השטח בתחום זה (S_1), לא נחסיר באינטגרל את הפונקציות כמו אלא נציב $g(x)=0$ ונקבל $S_1=\int_a^c f(x)-0\,dx$

(2) אם לא מצוינים גבולות אינטגרציה אלא מבקשים למצוא את השטח הכלוא בין פונקציה מסו"מת (או כמה פונקציות) לציר ה-x, נציב $y=0$ למציאת נקודות החיתוך עם ציר ה-x, והם יהיו גבולות האינטגרציה (ציור א'). אם ביקשו את השטח הכלוא בין הפונקציה לציר y ועוד נקודה x_1, גבולות האינטגרציה יהיו $[0,x_1]$ (ציור ב'). אם ביקשו את השטח הכלוא בין הפונקציה לציר y בלבד, נציב $x=0$, נמצא את נקודות החיתוך, נמיר את הפונקציה להיות פונקציה של y ונמצא את השטח (ציור ג').

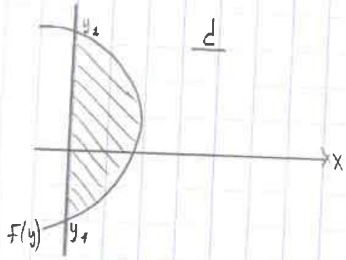
א



ב



ג



(10) אינטגרל מסוים של פונקציות סימטריות

(1) פונקציה אי זוגית- אם $f(x)$ היא פונקציה אי זוגית, אז מתקיים:

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0}$$

$\int \sqrt[3]{\sin(x^3)}\,dx = 0$

מציאת שטח תעשה כמו בפונקציה זוגית.

(2) פונקציה זוגית- אם $f(x)$ היא פונקציה זוגית, אז מתקיים:

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\cdot\int_0^a f(x)\,dx}$$

דוגמא:

$$\frac{1}{x^2+1}\,dx = 2\cdot\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = 2\cdot\arctan x\Big|_0^1 = 2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \pi$$