31/10

בס"ד

אינדוקציה

א) הקדמה

אינדוקציה היא שיטה לוגית המאפשרת להוכיח שמשפטים או משוואות מתמטיות נכונות לכל $\mathbb{N}$ טבעי. וכן כמו שראינו בשיעור הראשון מאפשרת להוכיח שאלגוריתם מסוים נכון לכל איטרציה של לולאה. בתהליך ההוכחה של לולאה נדרש בעיקר שלא תמיד מציאותי לבחון כל איטרציה של הלולאה, ובוודאי שלא ניתן לבחון משפט מתמטי בכל n טבעי. האינדוקציה פותרת לנו בעיה זו. בגלל גמישותה של האינדוקציה היא הפכה לאחד מכלי ההוכחה החזקים ביותר.

ב) עקרון הסדר הטוב - W.O.P

לפני שניכנס להסבר על האינדוקציה והוכחתה, נלמד את "עקרון הסדר הטוב" (Well Ordering Principle או בקיצור W.O.P, מכיוון שהוא יעזור לנו בתהליך הבנת האינדוקציה והוכחתה. נתייחס לעקרון הסדר הטוב כאקסיומה מכיוון שלא ניתן להוכיח אותו.

עקרון הסדר הטוב אומר שבכל קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים ($\mathbb{N}$) תמיד יש איבר מינימלי. נשים לב כי עקרון זה לא נכון בכל הקבוצות. בקבוצת השלמים ($\mathbb{Z}$) לדוגמא, גם היא לא חסומה מלמטה היא ממשיכה לרדת עד $-\infty$ ולכן אין איבר מינימלי. וכן לכל קבוצה המוכלת בקבוצת הממשיים ($\mathbb{R}$) שהתחום שלה לא סגור אין איבר מינימלי, משום שכמה שנרדה להתקרב אפשר להתקרב יותר.

ג) אינדוקציה חלשה

יש שני סוגים של אינדוקציה, אינדוקציה חלשה ואינדוקציה חזקה (שמות אחרים: אינדוקציה רגילה ואינדוקציה שלמה). שלבי ההוכחה של טענה מסוימת באינדוקציה חלשה מתחלקת לשלושה שלבים:

(1) בסיס - נוכיח תחילה שהטענה נכונה עבור $n=1$.

(2) צעד - נניח כי הטענה נכונה עבור $n=k$ כלשהו, ואז נוכיח כי הטענה נכונה גם עבור $k+1$.
הנחה זו נקראת "הנחת האינדוקציה" וחייבים להשתמש בה תמיד בכל אינדוקציה.

(3) הוכחה - אם הצלחנו להוכיח את שני השלבים הקודמים, הוכחנו שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

הוכחת אינדוקציה חלשה

כעת נוכיח את השלב השלישי באינדוקציה חלשה. תהי קבוצה S כך שהיא מוכלת ב-$\mathbb{N}$ ($S\subseteq\mathbb{N}$) ואינה קבוצה ריקה ($S\neq\emptyset$). קבוצה S מקיימת את שלבים (1) ו-(2), כלומר $1\in S$ ואם $k\in S$ אז גם $k+1\in S$. נרצה להוכיח שקבוצה S מכילה את כל המספרים הטבעיים, כלומר $\mathbb{N}=S$. נניח בשלילה כי $\mathbb{N}\neq S$ וקיימת קבוצה T שהיא המשלימה של S, $T:=\mathbb{N}/S$. לפי "עקרון הסדר הטוב"

היות ו-T מוכלת ב-N ($T\subseteq N$) ואינה קבוצה ריקה ($T\neq\emptyset$), נובע שיש ב-T איבר מינימלי שנקרא לו a. היות ו-S מקיימת את שלב (1) אז $1<a$, ואז כך $a-1\in N$. מהמינימליות של a בקבוצה T נובע ש-$a-1$ אינו שייך ל-T ($a-1\notin T$), ולכן $a-1$ שייך ל-S ($a-1\in S$). היות והקבוצה S מקיימת גם את שלב (2) שכל שני איברים עוקבים שייכים ל-S. אז גם a שייך ל-S ($a\in S$), וזו סתירה.
מכאן הוכחנו שאם קבוצה מקיימת את שלבים (1) ו-(2) היא מקיימת גם את שלב (3). וזוהי ההוכחה לאינדוקציה חלשה.

ד) אינדוקציה חזקה

שלבי ההוכחה של טענה באינדוקציה חזקה דומה מאוד לאינדוקציה חלשה ומתחלקת לשלושה שלבים:

(1) בסיס - נוכיח תחילה שהטענה נכונה עבור $n=1$.

(2) צעד - נניח כי הטענה נכונה עבור כל מספר מ-1 עד n ($1,2,...,n$). ואז נוכיח כי הטענה נכונה גם עבור $n+1$. אינדוקציה חזקה נקראת כך משום שיש בה יותר מידע להתבסס עליו כדי להוכיח את הטענה גם ב-$n+1$.

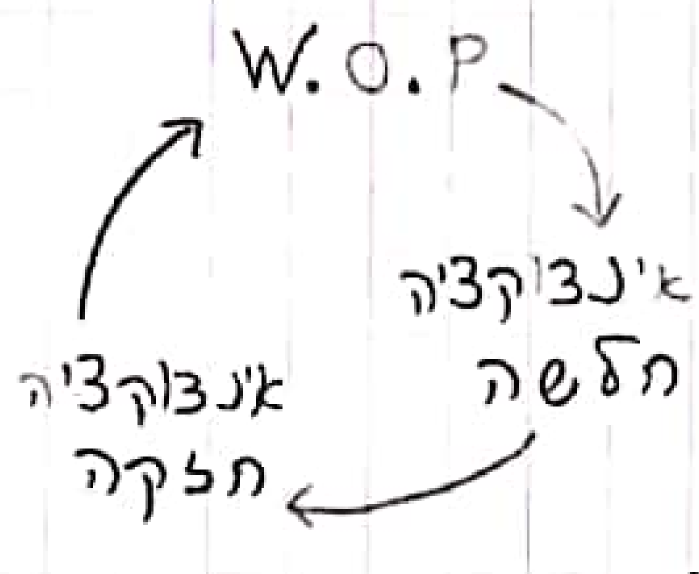
(3) הוכחה - אם הצלחנו להוכיח את שני השלבים הקודמים הוכחנו שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

הוכחת אינדוקציה חזקה

תהי קבוצה S כך שהיא מוכלת ב-N ($S\subseteq N$) ואינה קבוצה ריקה ($S\neq\emptyset$), קבוצה S מקיימת את שלבים (1) ו-(2), כלומר $1\in S$ ואם כל המספרים מ-1 עד n שייכים ל-S, $\{1,2,...,n\}\in S$, אז גם $n+1\in S$.
נשים לב כי קבוצה S גם מקיימת את שלבים (1) ו-(2) באינדוקציה חלשה, ולכן בהסתמך על הוכחת אינדוקציה חלשה הוכחנו גם אינדוקציה חזקה.

ה) אינדוקציה חזקה גוררת W.O.P

נוכיח כי שיטת האינדוקציה החזקה מוכיחה את עקרון הסדר הטוב. נניח בשלילה כי ה-W.O.P שגוי וכי קיימת קבוצה S כך ש-$S\subseteq N$ ו-$S\neq\emptyset$ כך שאין בה איבר מינימלי. קיימת קבוצה נוספת T שהיא המשלימה של S, $N/S=:T$. נרצה להוכיח באינדוקציה חזקה ש-$N=T$, מפני שאם נוכיח זאת בעצם הוכחנו שקבוצה S, שאין בה איבר מינימלי, לא יכולה להתקיים. מכיוון ש-1 הוא איבר מינימלי ב-N חייב להתקיים $1\notin S$ אזי $1\in T$, ולכן T מקיימת את שלב (1). נניח ש-$\{1,2,...,n\}\in T$, היות ו-$\{1,2,...,n\}\notin S$ גם $n+1\notin S$ משום שאחרת $n+1$ היה איבר מינימלי ב-S. לכן הוכחנו ש-$n+1\in S$, שזה שלב (2) באינדוקציה חזקה, ולכן $N=T$. מכאן שכל קבוצה ב-N שאינה ריקה חייבת להיות בה איבר מינימלי, שזהו עקרון הסדר הטוב - W.O.P.



נמצא אם כן בסיכומו של דבר, שה-W.O.P גורר אחריו את אינדוקציה חלשה, שגוררת אחריה אינדוקציה חזקה, שסוגרת את המעגל וגוררת אחריה את W.O.P. ולכן מכיוון שכולם גוררים זה את זה, אין צורך לציין איזה סוג של אינדוקציה אנחנו משתמשים.

1) תרגילים

(1) הוכח: $\forall n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$

בסיס - $\sum_{i=1}^{1}(2i-1)=2\cdot1-1=1 \Rightarrow 1^2=1$ ✓

צעד - נניח שהטענה מתקיימת עבור כל מספר עד k, כלומר שמתקיים $\sum_{i=1}^{k}(2i-1)=k^2$

נוכיח עבור k+1. $\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)=\sum_{i=1}^{k}(2i-1)+2(k+1)-1=k^2+2k+1 \Rightarrow (k+1)^2=k^2+2k+1$ ✓ ס"מנו

(2) הוכח: $\forall n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $\sum_{i=1}^{n}2^i \le 2^{n+1}$

בסיס - $\sum_{i=1}^{1}2^1 \le 2^{1+1} \Rightarrow 2 \le 4$ ✓

צעד - נניח שמתקיים $\sum_{i=1}^{k}2^i \le 2^{k+1}$

נוכיח עבור k+1

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{k+1}2^i=\sum_{i=1}^{k}2^i+2^{k+1}\\ 2^{k+2}=2^{k+1}+2^{k+1}\end{array}\right\} \sum_{i=1}^{k}2^i+\cancel{2^{k+1}} \le \cancel{2^{k+1}}+2^{k+1} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k}2^i \le 2^{k+1}$$ ✓

זוהי ההנחה שלנו

(3) הוכח $n! \ge 2^n$

נמצא בסיס - $1! \ge 2^1$ ✗, $2! \ge 2^2$ ✗, $3! \ge 3^2$ ✗, $4! \ge 4^2$ ✓

מצאנו בסיס עבור $n=4$.

צעד - נניח שהטענה מתקיימת עבור $k \ge 4$: $k! \ge 2^k$

נוכיח עבור k+1. נשים לב שכתוצאה מההנחה מתקיים: $(k+1)!=k!\cdot(k+1) \ge 2^k(k+1)$

מכיוון ש-$k \ge 4$ גם מתקיים: $2^k(k+1) \ge 2^k\cdot 2=2^{k+1}$

מכאן שהטענה מתקיימת גם עבור k+1. וס"מנו. $(k+1)! \ge 2^{k+1}$ ✓

(4) תרגיל זה נועד שלפעמים לא נצליח להוכיח טענה באינדוקציה, אך כן נצליח להוכיח טענה חזקה יותר שכוללת את מה שרצינו להוכיח, ואז בוודאי שגם הוכחנו את הטענה.

הוכח: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ מתקיים: $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2} \le 2$

בסיס - $\sum_{i=1}^{1}\frac{1}{i^2}=1 \le 2$ ✓

צעד - נניח שמתקיים: $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i^2} \le 2$

נוכיח עבור k+1: $\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i^2}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i^2}+\frac{1}{(k+1)^2} \le 2+\frac{1}{(k+1)^2} \Rightarrow$ לא ניתן לפשט ולהוכיח טענה, על כן ננסה להוכיח טענה יותר חזקה.

7/11 בס״ד

נסיון 2: נוכיח $\forall n\in\mathbb{Z}^+$ שמתקיים: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \le 2-\frac{1}{n}$

בסיס - $\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{1^2} \le 2-\frac{1}{1} \Rightarrow 1\le 1$ ✓

צעד - נניח שמתקיים: $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2}\le 2-\frac{1}{k}$

נוכיח עבור $k+1$: $\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i^2} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\le 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$

אם נצליח להוכיח ס״מת׳: $2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\le 2-\frac{1}{k+1} \Rightarrow \frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{k+1}\le\frac{1}{k}$

$\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{k+1}{(k+1)^2}\le\frac{1}{k} \Rightarrow \frac{k+2}{(k+1)^2}\le\frac{1}{k} \,/\cdot \underbrace{k(k+1)^2}_{\text{תמיד חיובי}} \Rightarrow k(k+2)\le(k+1)^2 \Rightarrow k^2+2k\le k^2+2k+1$ ✓
מ.ש.ל

מסקנה: מכך שהוכחנו $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\le 2-\frac{1}{n}$ גם הוכחנו את הטענה $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\le 2$.

5) סדרת פיבונאצ׳י היא סדרה רקורסיבית. נסמן איבר כללי F_n. סדרת פיבונאצ׳י מוגדרת באופן הבא: $F_1=1, F_2=1, F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$. האיברים הראשונים: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...

הוכח: $\forall n\in\mathbb{Z}^+$ $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{(n+2)}-1$

בסיס - $\sum_{i=1}^{1} F_1 = F_3-1 \Rightarrow 1=2-1=1$ ✓

צעד - נניח שמתקיים: $\sum_{i=1}^{k} F_i = F_{(k+2)}-1$

נוכיח עבור $k+1$: $\sum_{i=1}^{k+1} F_i = \sum_{i=1}^{k} F_i + F_{(k+1)} = (F_{(k+1)}+F_{(k+2)})-1 = F_{(k+3)}-1$ ✓
מ.ש.ל

6) הוכח $\forall n\ge 3$ $F_n>a^{n-2}$, $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (יחס הזהב)

בסיס עבור 3 - $F_3=2>\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1=1.618$ ✓

צעד - נניח שעבור $3\le k<n$ מתקיים: $F_k\ge a^{k-2}$

נוכיח עבור $k+1$: נשים לב שמתקיים: $F_{k+1}=F_k+F_{k-1}>a^{k-2}+a^{k-3}$

אם נוכיח ס״מת׳: $a^{k-2}+a^{k-3}\ge a^{k-1}$

נשים לב כי: $a^{k-2}+a^{k-3}=(a+1)\cdot a^{k-3}$

תכונה של יחס הזהב היא: $a^2=a+1 \Rightarrow a^{k-2}+a^{k-3}=a^2\cdot a^{k-3}=a^{k-1}$ ✓
מ.ש.ל

Scanned with CamScanner

ט) <u>תיקון לסעיף ג' באינדוקציה חזקה</u>

בסעיף ג' אמרנו שאינדוקציה חלשה גוררת אינדוקציה חזקה. אלא שלמעשה הם גוררות זו את זו, אינדוקציה חזקה $\Leftrightarrow$ אינדוקציה חלשה. נסמן את שלבים (1) ו-(2) באינדוקציה חלשה כך: (I.1) ו-(I.2) ובאינדוקציה חזקה (S.1) ו-(S.2). נחלק את ההוכחה לשני חלקים:

<u>אינדוקציה חזקה גוררת אינדוקציה חלשה</u> - תהי קבוצה S כך ש-$S\subseteq\mathbb{N}$ ומקיימת (I.1) ו-(I.2), יש להוכיח $\mathbb{N}=S$. הקבוצה S מכיוון שמתקיים (I.1) גם מתקיים (S.1), כי (I.1)=(S.1). בנוסף מכיוון שב-S מתקיים (I.2), שאומר שאם $n\in S$ אזי גם $n+1\in S$, גם (S.2) מתקיים ב-S, שהרי אם די ב-$n\in S$ כדי להוכיח $n+1\in S$ אז בוודאי שגם אם $1,2,\dots,n\in S$ גם $n+1\in S$. נמצא שקבוצה S מקיימת (S.1) ו-(S.2), לכן לפי עקרון אינדוקציה חזקה $S=\mathbb{N}$. ומכאן הוכחנו שאם קבוצה מקיימת את (I.1) ו-(I.2) אזי היא שווה ל-$\mathbb{N}$, שזהו עקרון אינדוקציה חלשה.

<u>אינדוקציה חלשה גוררת אינדוקציה חזקה</u> - תהי קבוצה S כך ש-$S\subseteq\mathbb{N}$ ומקיימת (S.1) ו-(S.2), יש להוכיח $\mathbb{N}=S$. מכיוון שמתקיים (S.1) גם מתקיים (I.1) כי (S.1)=(I.1). אמנם קיום של (S.2) אינו גורר (I.2), כי אלו (S.1) האומר שאם $1,2,\dots,n\in S$ גם $n+1\in S$ הוא רק כאשר גם $1,2,\dots,n-1\in S$, ולא די ב-$n\in S$ לבדו להוכיח ש-$n+1\in S$. לכן נגדיר קבוצה חדשה $Q=\{n\in\mathbb{N}: k\in S\ \forall k<n\}\cup\{1\}$, כלומר Q היא כל האיברים שיש ב-S ועוד האיבר הבא לאחר מכן. נוכיח קודם ש-$\mathbb{N}=Q$ באמצעות אינדוקציה חלשה. מכיוון ש-$1\in Q$, Q מקיימת (I.1). ומכיוון ש-$1,2,\dots,n-1\in S$ אזי לפי (S.2) גם $n\in S$, ולכן לפי הגדרת Q $n+1\in Q$, נמצא ש-Q מקיימת גם את (I.2). לכן לפי אינדוקציה חלשה $Q=\mathbb{N}$.

כעת ניתן להוכיח ש-$\mathbb{N}=S$. לפי הגדרת Q היא קבוצת כל האיברים $\{1,2,\dots,n\}$ והוכחנו $Q=\mathbb{N}$, ואילו קבוצה S היא קבוצת כל האיברים $\{1,2,\dots,n-1\}$. לפי (S.2) אם $1,2,\dots,n-1\in S$ אזי גם $n\in S$ מה שאומר שגם $S=\mathbb{N}$. ומכאן הוכחנו שאם קבוצה מקיימת (S.1) ו-(S.2) אזי היא שווה ל-$\mathbb{N}$, שזהו עקרון אינדוקציה חזקה.