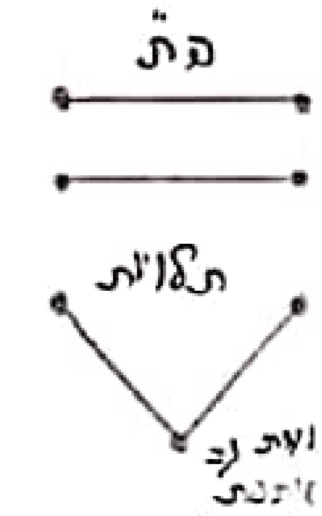
②

נושא 1 - שידוך בגרפים

א) שידוך בגרף



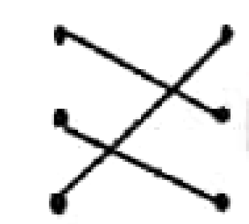
קשתות בלתי-תלויות: שתי קשתות יקראו בלתי-תלויות אם אין להן צומת משותפת.

שידוך בגרף: קבוצה של קשתות בלתי תלויות בגרף G נקראת "שידוך" (matching) ב-G.

נוכל להסתכל על שידוך בגרף הן כקבוצה של קשתות $M\subseteq E(G)$, והן כתת-גרף של G, $(V(M),M)\subseteq G$, כאשר $V(M)$ הם כל הצמתים המופיעים ב-M. נשים לב כי $|V(M)|=2\cdot|M|$.

שידוך מקסימום: שידוך עם מספר קשתות מקסימלי מבין כל השידוכים האפשריים. נסמן מספר הקשתות $\nu(G)$. -האות נו. מתו...

שידוך מושלם: שידוך שבו משתתפים כל הצמתים בגרף. כלומר, מחלקים את כל צמתי הגרף לזוגות כך שבין כל זוג צמתים יש קשת. ניסוח נוסף הוא ש-M הוא גרף-פורש של G.

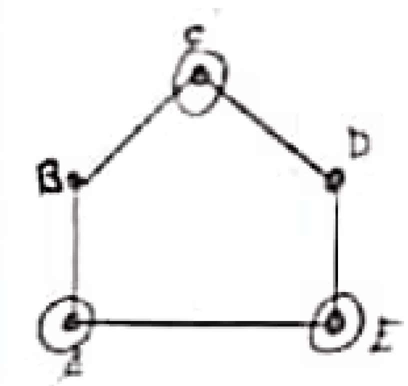

שידוך מושלם

לא בכל גרף קיים שידוך מושלם.

הבעיה המרכזית איתה נרצה להתמודד בפרק זה היא: בהינתן גרף כיצד ניתן למצוא לו שידוך מקסימום? לפתרון בעיה זו יש חשיבות רבה, שכן בעיה זו מתקשרת לבעיות רבות אחרות, למשל "בעית הנישואים הידידים", בה רוצים לשדך בין חברי שתי קבוצות בצורה התואמת להעדפותיהם. האסטרטגיה שלנו תהיה קודם להגדיר מושג חדש VC (Vertex Cover), לאחר מכן נבחן מושג זה ביחד עם שידוך בגרפים דו-צדדיים בלבד, נלמד משפטים, ולבסוף נעביר לפתרון הבעיה בכל סוגי הגרפים.

ב) כיסוי צמתים - VC:

VC: קבוצה של צמתים $C\subseteq V(G)$ תיקרא VC (Vertex Cover) של G, אם לכל קשת ב-G מופיע לפחות צומת אחת מ-C. בניסוח מתמטי: $\forall (u,v)\in E(G): u\in C \text{ or } v\in C$. יכול להיות שגם $u,v\in C$.



VC מינימלי: $\{A,C,E\}$

VC מינימלי: הוא ה-VC עם מספר מינימלי של צמתים. בכל גרף G נסמן את מספר הצמתים ב-VC המינימלי ב-$\tau(G)$. τ - האות טאו tau.

ג) משפטים בגרף דו-צדדי על שידוך

נראה שלושה משפטים מוכרים הקשורים לשידוך ול-VC. ניעזר במשפטים אלו בהמשך כדי למצוא ולהוכיח אלגוריתם למציאת שידוך מקסימלי. בנוסף נראה ששלושת משפטים אלו שקולים כלומר שהם גוררים אחד את השני. המשפטים הם: קניג, הול, ופרובניוס.

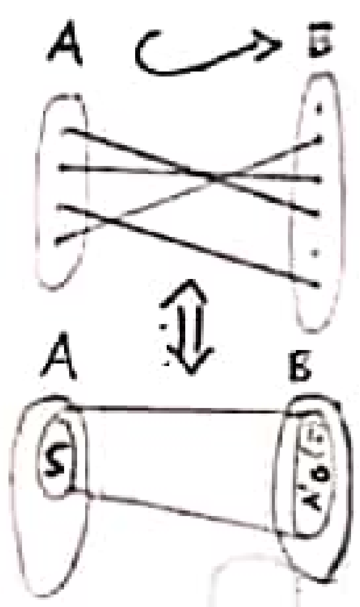
(1) <u>משפט קניג (König)</u>: עבור גרף G דו-צדדי תמיד מתקיים: $\tau(G)=\nu(G)$.

כלומר, מספר הצמתים ב-VC המינימלי של G שווה למספר הקשתות בשידוך המקסימלי של G.

<u>הערה:</u> בכל גרף רגיל תמיד מתקיים: $\tau(G)\geq\nu(G)$, זאת מפני שעבור כל קשת בשידוך חייבת להיות לפחות צומת אחת ב-VC המינימלי.

(2) <u>משפט הול (Hall)</u>: יהי $G=(A\cup B,E)$ גרף דו-צדדי. אזי ניתן לשדך כל צומת מ-A לצומת ב-B ע"י קבוצה זרה של קשתות (נסמן זאת $A\hookrightarrow B$), אם ורק אם מתקיים תנאי הול, האומר שעבור כל תת קבוצה $S\subseteq A$ קבוצת השכנים שלה $N_G(S)$ גדולה ממנה.

מוכר גם כמשפט החתונה של הול.



בניסוח מתמטי: $\forall S\subseteq A, |N_G(S)|\geq|S| \iff A\hookrightarrow B$.

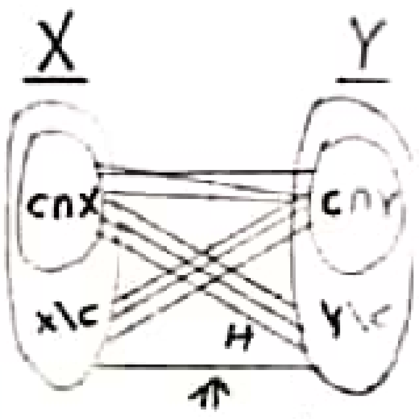
נשים לב כי תנאי הול גם מח"ב $|B|\geq|A|$. $N_G(A)\subseteq B \Rightarrow |B|\geq|N_G(A)|\geq|A|$

(3) <u>משפט פרובניוס (Frobenius)</u>: יהי $G=(A\cup B,E)$ גרף דו-צדדי. אזי ב-G יש שידוך מושלם, כלומר שידוך שמשתתפים בו כל הצמתים ב-G, אם ורק אם מספר הצמתים ב-A ו-B שווים $|A|=|B|$, וגם מתקיים תנאי הול ב-A או B.

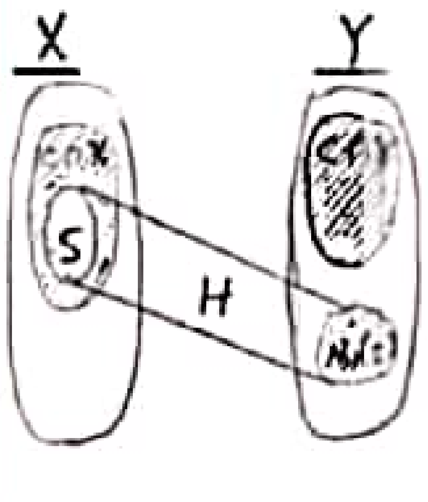
3) <u>הוכחת שקילות כל המשפטים</u>

כדי להוכיח שכל המשפטים שקולים נוכיח שכולם גוררים זה את זה. בפרט נוכיח את המשולש Hall $\Longrightarrow$ Frobenius $\Longrightarrow$ König $\Longrightarrow$ Hall. למרות שאינו נדרש נוכיח Hall $\iff$ König משני הכיוונים.

• <u>Hall $\iff$ König</u>: כיוון 1 - יהי $G=(X\cup Y,E)$ גרף דו-צדדי. נוכיח נכונות של משפט קניג $\tau(G)=\nu(G)$ כאשר נניח נכונות משפט הול. כמו שהערנו לעיל, תמיד מתקיים $\tau(G)\geq\nu(G)$. מספיק להוכיח כי ב-G מתקיים $\tau(G)\leq\nu(G)$, כלומר שהשידוך המקסימלי הוא לפחות כמו ה-VC המינימלי, כדי להוכיח את משפט קניג. נניח כי קבוצת הצמתים C, המחולקת ב-X ו-Y, היא VC מינימלי. יש שלושה סוגי קשתות: $(C\cap X,C\cap Y)$, $(C\cap X,Y\setminus C)$, $(X\setminus C,C\cap Y)$, לא יכול להיות קשת מ-$X\setminus C$ אל $Y\setminus C$ מפני שאז אחת מהצמתים בקשת חייבת להיות ב-C.



כיוון ש-$\tau(G)=|C|=|C\cap X|+|C\cap Y|$, נוכיח כי יש שידוך ב-G הכולל לפחות את כל הצמתים ב-$C\cap X$ וכל הצמתים ב-$C\cap Y$. ההוכחה לשני הקבוצות זהה ולכן נוכיח רק עבור $C\cap X$. אם נוכיח כי $C\cap X$ מקיים את תנאי הול אל $Y\setminus C$, כלומר נתמקד רק בסוג הקשתות $\overbrace{\text{השני}}^{\text{(המסומן ב-H)}}$ ונוודא כי: $\forall S\subseteq C\cap X, |N_H(S)|\geq|S|$, אזי לפי משפט הול אכן יש שידוך הכולל את כל הצמתים ב-$C\cap X$. נניח בשלילה כי תנאי הול לא מתקיים, $\exists S\subseteq C\cap X, |N_H(S)|<|S|$. אזי נסתכל על קבוצת הצמתים $\underbrace{(C\cap X\setminus S)\cup N_H(S)}_{\text{קטן מ-}C\cap X\text{ לפי הנחה בשלילה}}\cup(C\cap Y)$ שמספרם קטן מ-C אך גם כן מהווים VC ב-G, בסתירה למינימליות של C!



לכן תנאי הול מתקיים, יש שידוך שהוא לפחות כמו ה-VC המינימלי, ומשפט קניג מתקיים. ∎

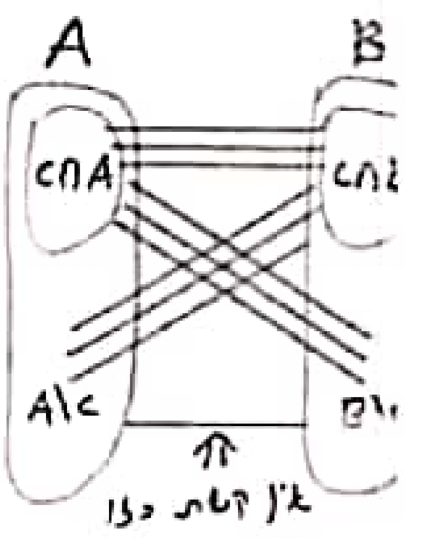
16/3

④

כיוון 2 - יהי $G=(A\cup B,E)$ גרף דו-צדדי. נרצה להוכיח נכונות משפט הול, כלומר שמתקיים: $A\hookrightarrow B \iff \forall S\subseteq A\ |N_G(S)|\ge|S|$, כאשר אנו מניחים נכונות משפט קניג $\tau(G)=\nu(G)$.

אם $A\hookrightarrow B$, כלומר A משתדכת כולה לצמתים ב-B על ידי קבוצה זרה של צלעות, אזי באופן טריוויאלי תנאי הול מתקיים, מפני שעבור כל צומת ב-A יש לפחות שכן אחד ב-B.

אם תנאי הול מתקיים אזי כדי להוכיח $A\hookrightarrow B$ מספיק להוכיח $\tau(G)\ge|A|$, כלומר מספר הצמתים ב-vc המינימלי לפחות מספר הצמתים ב-A. מפני שאז מתקיים: $|A|\underset{\text{נוכיח}}{\le}\tau(G)\underset{\text{קניג}}{=}\nu(G)\underset{\text{צד גרף}}{\le}|A|$, ומכאן $\nu(G)=|A|$. כיוון שהגרף דו-צדדי בוודאי A כולה משתדכת ל-B.



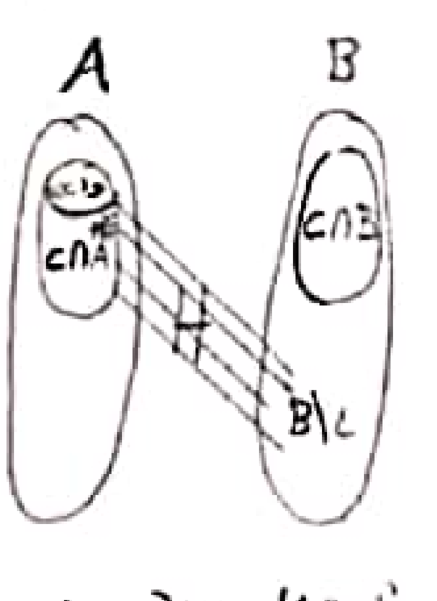
נוכיח $\tau(G)=|A|$. נניח כי קבוצת הצמתים C היא vc מינימלי ומתחלקת ב-A ו-B. יש שלושה סוגי קשתות כמו שמצויר בצד ימין. כיוון שב-$A\setminus C$ יש קשתות רק ל-$B\cap C$, אזי בהכרח $|B\cap C|\ge|N_G(A\setminus C)|$ ומכיוון שתנאי הול מתקיים, ולפיו $|N_G(A\setminus C)|\ge|A\setminus C|$, נובע כי $|B\cap C|\ge|A\setminus C|$.

כעת נשים לב כי מתקיים: $\tau(G)=|C|=|A\cap C|+|B\cap C|\underset{\text{לפי שורה קודמת}}{\ge}|A\cap C|+|A\setminus C|\underset{\text{איחוד קב' זרות}}{=}|A|$ ∴

ומכאן שאכן $\tau(G)\ge|A|$. ולכן A כולה משתדכת ל-B. הוכחנו נכונות משפט הול באמצעות משפט קניג.

- <u>Hall => Frobenius:</u> אם נניח נכונות משפט הול אזי משפט פרובניוס מתקיים באופן טריוויאלי, מפני שאם A כולה משתדכת ל-B (לפי משפט הול) וגם $|A|=|B|$ (תנאי נדרש בפרובניוס), אזי בוודאי שיש שידוך מושלם הכולל את כל הצמתים בגרף, מפני שכל צומת ב-A משתדכת לצומת אחת בדיוק ב-B, ולכן יש זיווג מושלם.
- <u>Frobenius => König:</u> יהי $G=(A\cup B,E)$ גרף דו-צדדי. נניח נכונות משפט פרובניוס ונרצה להוכיח $\tau(G)=\nu(G)$. ההוכחה מאוד דומה ל-Hall=>König שכבר הוכחנו. ידוע כי $\tau(G)\ge\nu(G)$, לכן נוכיח $\tau(G)\le\nu(G)$. נניח שקבוצה C היא כיסוי צמתים (vc) מינימלי. המתחלקת בין A ל-B. לכן $\tau(G)=|C|=|A\cap C|+|B\cap C|$. נוכיח כי יש שידוך ב-G המכסה לפחות את כל הצמתים ב-$A\cap C$ ו-$B\cap C$. לשם כך נראה שבאמצעות משפט פרובניוס ניתן להוכיח ש-$A\cap C$ משתדכת כולה ל-$B\setminus C$*, באופן כזה ניתן להוכיח עבור $B\cap C$. ולכן נוכיח רק עבור $A\cap C$. נתמקד בתת-גרף H המכיל רק את הקשתות $(A\cap C,B\setminus C)$. כדי להפעיל את משפט פרובניוס יש להוכיח שתנאי הול מתקיים ($\forall S\subseteq A\cap C,\ |N_H(S)|\ge|S|$) וגם שגודל הקבוצות שווה. כמו בסעיף קודם ניתן להוכיח שתנאי הול מתקיים מפני שאחרת ניתן למצוא vc קטן יותר מ-C, בסתירה למינימליות של C. כעת כיוון שבהכרח $|A\cap C|\le|B\setminus C|$ (לפי תנאי הול), נוסיף (לרגע) צמתים ל-$A\cap C$ ונחבר אותם בקשתות ל-$B\setminus C$, עד כאשר $|A\cap C^*|=|B\setminus C|$. נמצא שלפי משפט פרובניוס יש שידוך מושלם בין הקבוצות. כעת נתעלם מהצמתים שהוספנו ונקבל ש-$A\cap C$ משתדכת כולה ל-$B\setminus C$. מסקנה $\tau(G)\le\nu(G)$ ומשפט קניג.

ה ציור מעלה.



$|A\cap C^*|$ מייצג את $A\cap C$ עם תוספת הצמתים.

<u>הערה</u>- נוכל להוכיח Frobenius => Hall ע"י שיטה כזו להוספת צמתים מבלי שנוכיח $|A|=|B|$.

23/3

5

נספ'

ה) משפט ברג' (Berge)

הגדרות:

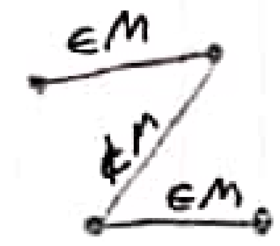
יהי $G=(V,E)$ גרף (לא בהכרח דו-צדדי), ויהי M שידוך כלשהו ב-G. נגדיר:

מסלול מתחלף - מסלול פשוט (לא חוזר על קשת פעמ"פ) שבו כל הקשתות במסלול נמצאות לסירוגין בשידוך M, כלומר יש קשת בשידוך ולאחריה קשת לא בשידוך, כך הלאה במסלול.

מסלול שיפור ל-M - זהו מסלול מתחלף שהצמתים הראשון והאחרון בו אינם משודכים ע"י M.

מסלול שיפור לא חייב לכלול את כל הקשתות ב-M ועדיין להיות מסלול שיפור.

מסלול מתחלף



מסלול שיפור

משפט ברג': יהי G גרף ויהי M שידוך כלשהו ב-G. אזי M הוא שידוך מקסימום* אם ורק אם אין ב-G מסלול שיפור ל-M. במילים אחרות, אם יש מסלול שיפור ל-M אזי M הוא לא שידוך מקסימום.

מקסימום - שידוך בעל מספר גדול ביותר של קשתות

מקסימלי - שידוך שלא ניתן להוסיף לו קשתות נוספות.

הוכחה: כיוון 1 - נניח שקיים מסלול שיפור ונוכיח ש-M הוא לא שידוך מקסימום. נגדיר M' כזה: ל-M אלא שבמסלול השיפור כל הצלעות ששייכות ל-M לא מופיעות ב-M' ואילו כל הצלעות שאינם ב-M כן מופיעות ב-M'. כיוון שבמסלול השיפור יש יותר צלעות שאינן ב-M קיבלנו שידוך גדול יותר.

כיוון 2 - נניח ש-M אינו שידוך מקסימום ונוכיח שיש מסלול שיפור. נניח ש-M' הוא שידוך גדול מ-M: נגדיר $M\Delta M' = (V(G),(M\backslash M')\cup(M'\backslash M))$, כלומר גרף עם כל הצמתים ב-G וכל הצלעות שמופיעות ב-M בלבד או ב-M' בלבד. כיוון ש-$M\Delta M'$ מורכב מאיחוד שני שידוכים הדרגה המקסימלית בכל צומת היא 2. לכן בכל רכיב קשירות יש או מעגל או מסלול פשוט,* שבהם בכל שתי קשתות יש קשת אחת מ-M' והשניה מ-M. כתוצאה מכך, בכל רכיבי הקשירות המעגליים יש מספר שווה של קשתות מ-M ו-M'.

*מסלול פשוט יכול להיות קשת בודדת.

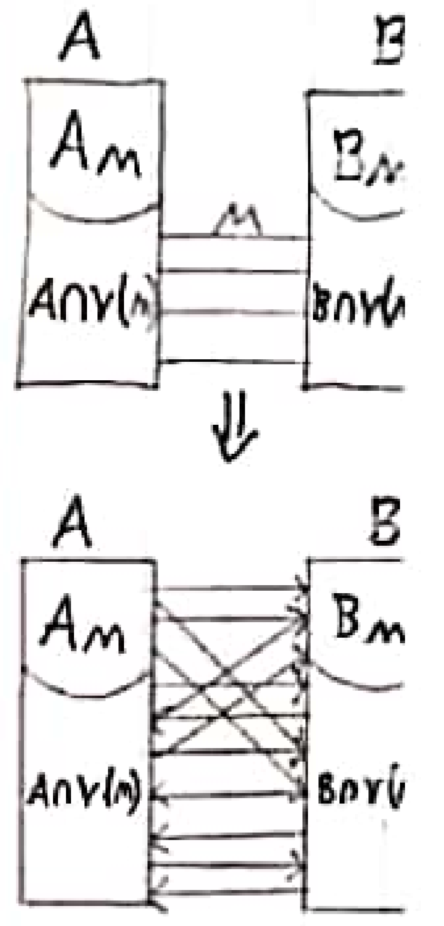
אך מכיוון ש-$|M'|>|M|$ חייב להיות רכיב קשירות אחד שהוא מסלול פשוט ומספר הקשתות מ-M' גדול מ-M. כדי שזה יהיה המסלול הפשוט חייב להתחיל מקשת מ-M' ולסיים בקשת מ-M', ובאמצע הקשתות מתחלפות לסירוגין. מסלול פשוט זה הוא מסלול שיפור ל-M. מ.ש.ל.

ו) השיטה ההונגרית

היא אלגוריתם למציאת שידוך מקסימום בגרף דו-צדדי. האלגוריתם מתבסס על משפט ברג'.

בכל הפעלה של האלגוריתם מתחילים מגרף G ושידוך M כלשהו ב-G. אם M אינו שידוך מקסימום אזי האלגוריתם יחזיר מסלול שיפור ל-M, ונעדכן את M לפי מסלול שיפור זה. אם M הוא שידוך מקסימום האלגוריתם יחזיר ש-M הוא המקסימום.

האלגוריתם משתמש בבניית גרף עזר כמו שנלמד בהמשך.



פעולת האלגוריתם:

1) מתקבל כקלט גרף $G=(A\cup B,E)$ דו-צדדי ושידוך M. בהנחה שהשידוך אינו מושלם, נסמן ב-A_M ו-B_M כל הצמתים ב-A ו-B שאינם משתתפים ב-M. $B_M=B\setminus V(M)$, $A_M:=A\setminus V(M)$.

2) נבנה גרף עזר מכוון שבו כל הצמתים ב-G, וכל הקשתות הן מכוונות באופן הבא:
- אם קשת e שייכת ל-M ($e\in M$) אזי בגרף העזר היא תהיה מכוונת מ-B ל-A.
- אם קשת e אינה שייכת ל-M ($e\notin M$) אזי בגרף העזר היא תהיה מכוונת מ-A ל-B.

בגרף העזר קשתות מ-B ל-A יכולים להיות רק מ-$B\cap V(M)$ אל $A\cap V(M)$. מ-A ל-B כל האפשרויות.

3) נחפש מסלול בגרף עזר שמתחיל ב-A_M ונגמר ב-B_M (באמצעות DFS או אלגוריתמים אחרים).
- אם קיים מסלול כזה אזי הוא מסלול שיפור ל-M, מפני שבהכרח מתחיל ונגמר בקשתות שאינן שייכות ל-M, וגם הקשתות בו מתחלפות לסירוגין מקשת ב-M לשאינה ב-M.
  לכן נחזיר מסלול שיפור זה, וגם נשנה את M כך שנוריד ממנו כל הקשתות השייכות ל-M במסלול שיפור ונוסיף לו את כל הקשתות שאינן ב-M במסלול שיפור.
- אם אין מסלול כזה אזי לפי משפט ברז', M הוא מקסימלי.

סיבוכיות:

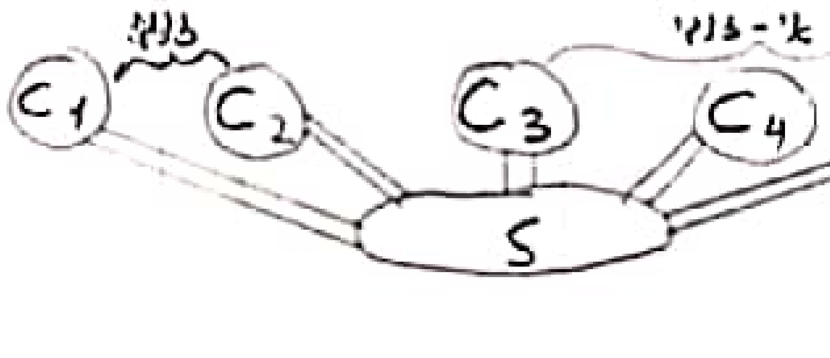
סיבוכיות השיטה ההונגרית היא $O(|V|\cdot|E|)$. זאת מפני שבכל הפעלה של האלגוריתם מבצעים $|E|$ פעולות שהם מעבר כל הקשתות ומציאת מסלול שיפור. במקרה הגרוע נתחיל מ-M קבוצה ריקה, ובכל פעם נחבר צלע אחת בלבד ל-M, עד ש-M שידוך מושלם. לכן סיבוכיות $O(M\cdot|E|)$.

ט) משפט טאט (Tutte)

בגרף דו-צדדי ראינו מהם התנאים הנדרשים כדי שיהיה בו שידוך מושלם לפי משפט פרוביניוס. אך מהם התנאים הנדרשים בגרף רגיל כדי שיהיה בו שידוך מושלם.
לפני שנענה על כך נבחן כיצד נראה גרף שהורידו ממנו צמתים.

הורדת קבוצת צמתים מגרף

יהי $G=(V,E)$ גרף. ויהי $S\subseteq V$ קבוצת צמתים. אם נוריד מ-G את S גם נצטרך להוריד את כל הקשתות ל-S. פעולה זו יכולה להיווצרות של רכיבי קשירות חדשים שב-G הן מחוברים דרך S, אך כעת הם רכיבי קשירות בפני עצמם. נחלק את רכיבים הקשירות שנוצרו לכאלו עם מספר זוגי של צמתים לכאלו עם מספר אי-זוגי של צמתים.



נסמן את מספר רכיבי הקשירות האי-זוגיים ב-$C_o(G-S)$.

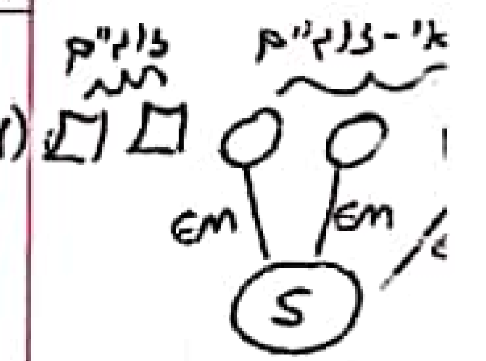
23/3

7

משפט טאט: יהי $G=(V,E)$ גרף. ב-G יש שידוך מושלם אם ורק אם לכל $S\subseteq V(G)$ מתקיים שמספר רכיבי הקשירות האי-זוגיים שנוצרים בגרף $G-S$ גדולים ממספר הצמתים ב-S.

$$\nu(G)=v(G) \iff \forall S\subseteq V(G)\quad C_o(G-S)\le |S|$$

הוכחה:

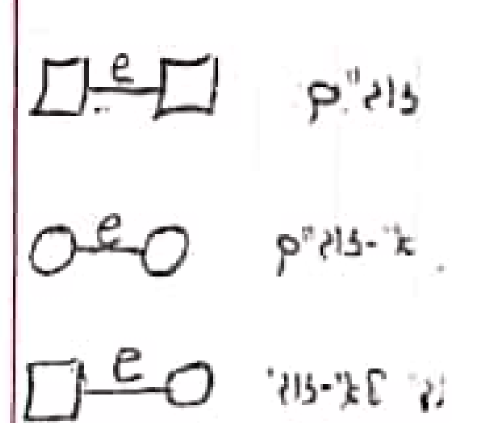


(1) כיוון 1 - נניח שב-G יש שידוך מושלם M, נוכיח שמתקיים תנאי טאט. לכל אחד מרכיבי הקשירות האי-זוגיים יש לפחות קשת אחת אל S ב-M, שהרי M שידוך מושלם וכל הצמתים תלויים להשתדך. המסקנה היא שאם יש $S\subseteq V(G)$ כך שמספר רכיבי הקשירות האי-זוגיים גדול מ-$|S|$ לא יכול להיות שידוך מושלם.

(2) כיוון 2 - נניח שמתקיים תנאי טאט, נוכיח שיש שידוך מושלם.

- למה 1: אם גרף G מקיים את תנאי טאט, אזי אם נוסיף קשת e (שאינה ב-G) לגרף, $G'=G+e$, תנאי טאט עדיין יתקיים.

הוכחה: החשש הוא שהוספת e לאיפשהו ב-$G-S$ יוסיף רכיב קשירות אי-זוגי כך שתנאי טאט לא יתקיים. נראה שאין מה לחשוש לכך. אם נוסיף את e בין רכיב קשירות זוגי לזוגי או בין רכיב קשירות אי-זוגי לאי-זוגי, אזי מספר רכיבי הקשירות רק ירד ולא יעלה. מרכיב קשירות זוגי לאי-זוגי יווצר רכיב קשירות אי-זוגי אך בסה"כ מספר רכיבי הקשירות האי-זוגיים לא ישתנה. כל מקום אחר להוסיף את e לא ישנה את רכיבי הקשירות. לכן הטענה נכונה.



- למה 2: לגרף G שמקיים את תנאי טאט יש מספר זוגי של צמתים.

הוכחה: תנאי טאט נכון לכל $S\subseteq V(G)$, כולל $S=\emptyset$. לכן בגרף G המקיים תנאי טאט נשים לב כי ב-$G-\emptyset=G$ אין רכיבי קשירות אי-זוגיים, אלא כולם זוגיים ב-G. לכן גם מספר הצמתים זוגי.

<u>נחזור להוכחה.</u> נניח בשלילה שהטענה לא נכונה, וקיים גרף שמקיים תנאי טאט ואין בו שידוך מושלם. לפי למה 1 נוכל להוסיף צלעות לגרף זה ועדיין עם קיום תנאי טאט. כמה צלעות נוסיף? עד שנגיע למצב שבגרף החדש כל הוספה של צלע תגרום לכך שבגרף זה יש שידוך מושלם. נקרא לגרף זה גרף SNF (Saturated Non-Factorisable). אם דוגמא נגדית נוכל להגיע ל-SNF שהרי בגרף המלא יש שידוך מושלם, נרצה להוכיח כי לא קיים גרף SNF המקיים את תנאי טאט שהוא גם זוגי (לפי למה 2), מפני שאם נוכיח זאת אזי לא קיימת דוגמא נגדית, שהרי מכל דוגמא נגדית ניתן להגיע לגרף זה. לשם כך נצטרך קודם להסביר ולהוכיח כיצד נראה גרף SNF זוגי.

כיוון ש-G זוגי ... כל.. צומת שאין ... שידוך נבחר צומת ... שאין לה שידוך.

בס"ד

23/3

8

כיצד נראה גרף SMF זוגי: גרף G כזה מורכב $G=S\cup G_1\cup G_2\cup\ldots\cup G_k$, כאשר:

1) כל G_i כאשר $i\in[k]$ הוא קליקה בגודל אי-זוגי, כלומר רכיב קשירות שלם.

2) מספר רכיבי הקשירות הוא $k=|S|+2$.

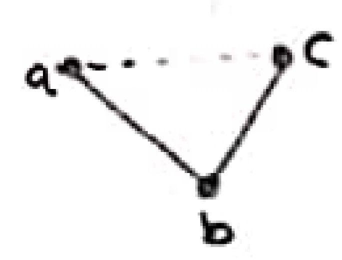
3) כל $v\in S$ הוא שכן של כל הצמתים בגרף.

נוכיח כל תכונות אלו בהמשך, אך כבר עתה ניתן לראות שמספר רכיבי הקשירות האי-זוגיים הוא $C_o(G-S)=k=|S|+2>|S|$. ולכן בוודאי תנאי טאט* לא מתקיים. ואם כן לא קיים גרף SMF זוגי שמקיים תנאי טאט, ולכן לא קיימת דוגמא נגדית. נמשיך בהוכחת תכונות SMF.

*$\forall S\subseteq V(G)$
$C_o(G-S)\le|S|$

הוכחת תכונות גרף SMF זוגי:

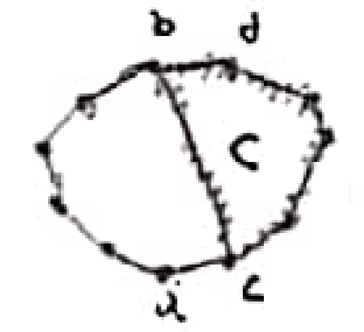
1) נניח בשלילה שהטענה לא נכונה. אזי ישנו רכיב קשירות שבו יש קשתות $(a,b),(b,c)\in E(G)$ אך אין קשת $(a,c)\notin E(G)$. ניקח צומת כלשהי d שאינה סמוכה ל-b, $(b,d)\notin E(G)$. נסתכל על הגרף $G+(a,c)$ שלפי הגדרת SMF יש שידוך מושלם M_{ac}. ועל גרף אחר $G+(b,d)$ שגם בו יש שידוך מושלם M_{bd}.



כעת נבחן את הגרף $M_{ac}\Delta M_{bd}$, שבו כל הצמתים ב-G וכל הצלעות שמופיעות ב-M_{ac} בלבד או ב-M_{bd} בלבד, אך לא בשניהם. בגרף זה כיוון שהוא שילוב שני שידוכים מושלמים כל צלע היא חלק ממעגל*, בפרט (a,c) ו-(b,d). נסמן C_{ac},C_{bd}. אם $C_{ab}\neq C_{bd}$, אזי הגרף $M_{ac}\Delta C_{ac}$ היא שידוך מושלם ב-G* ללא (a,c), בסתירה לכך ש-G SMF. אם $C_{ab}=C_{bd}$ אותו מעגל, אזי ישנו מסלול מ-a ל-b או מ-c ל-b $\underbrace{\text{שבייחד}}$ (שעובר ב-d) אם (a,b) או (b,c) יצור מעגל C. כעת בגרף $M_{bd}\Delta C$ יש שידוך מושלם ב-G ללא (b,d), בסתירה לכך ש-G SMF. לכן כל G_i כאשר $i\in[k]$ היא קליקה.

שהרי לא יכול להיות שני צלעות סמוכות באותו שידוך. אם נשארה צלע. משני צמתים שלה חייבים לצאת צלעות נוספות מהשידוך השני. כך אפשר להמשיך עד שמתקבל מעגל.

*כי מעגל מכסה את כל הצמתים שלו בצמ"ם. גם נוריד צלעות זוגיים נקבל בו שידוך מושלם.



נותר להוכיח שכל $|G_i|$ אי-זוגי. נניח בשלילה שיש $|G_i|$ זוגי. אזי נוכל להוסיף צלע ולחבר בין G_i ל-G_j כלשהו ועדיין מספר רכיבי הקשירות האי-זוגיים לא ישתנה, כך שתנאי טאט עדיין לא מתקיים. ומכאן שאין שידוך מושלם ב-G, בסתירה לכך ש-G SMF.

2) משפט טאט לא מתקיים לכן $k\geq|S|+1$, אם $k>|S|+2$, אזי נוכל לחבר שני רכיבי קשירות אי-זוגיים ובכך להפחית את מספרם ב-1. אך עדיין תנאי טאט לא יתקיים לכן ב-G אין שידוך מושלם בסתירה להיותו SMF*. אם $k=|S|+1$ נבחן שני מקרים:

*נשארנו עם:
$k=|S|+1$
$k=|S|+2$

- אם $|S|$ זוגי - מספר הרכיבים אי-זוגי, ומכיוון שכל רכיב מכיל מס' אי-זוגי נקבל ש-G אי-זוגי. סתירה.
- אם $|S|$ אי-זוגי - מספר הרכיבים זוגי, ומכיוון שכל רכיב מכיל מס' אי-זוגי נקבל ש-G אי-זוגי. סתירה.

מסקנה $k=|S|+2$.

ח) שידוך יציב - אלגוריתם Gale-Shapley

<u>הגדרת הבעיה:</u> נתון גרף דו-צדדי מלא, $G=(X\cup Y,E)$, כך ש- $n=|X|=|Y|$, ועוד נתון שלכל $x\in X$ ישנו וקטור P_x בגודל n המדרג עדיפות על כל צומת ב-Y. וכן ההיפך, לכל $y\in Y$ ישנו וקטור P_y בגודל n המדרג עדיפות על כל צומת ב-X. נסמן $P_u(v)$ את המיקום של v בסדר העדיפות של u. אם $P_u(v)=1$, אזי u הכי מעדיף את v. מטרתנו למצוא שידוך מושלם בגרף שהוא יציב. שידוך לא יציב הוא שידוך שבו קיימים בשידוך הזוגות $(x_1,y_2),(x_2,y_1)$, כך ש-$P_{x_1}(y_1)>P_{x_1}(y_2)$ וגם $P_{y_1}(x_1)>P_{y_1}(x_2)$. כלומר x_1 ו-y_1 מעדיפים אחד את השני על פני השידוך הנוכחי שלהם.

בעיית השידוך היציב יכולה להתאים להמון בעיות מציאותיות, הדוגמה הנפוצה היא גברים ונשים.

<u>אלגוריתם Gale-Shapley:</u> הצליחו להוכיח שתמיד קיים שידוך יציב, וניתן למצוא אותו באמצעות האלגוריתם הזה:

נסתכל על X קבוצת הגברים ו-Y קבוצת הנשים.

- כל עוד X ו-Y לא קבוצות ריקות
- כל $x\in X$ מנסה להשתדך ל-$y\in Y$ עם העדיפות הכי גבוהה אצלו שלא דחתה אותו עד שלב זה.
- לכל $y\in Y$ נחלק בין שני מקרים:
  - אם קיבלה יותר מהצעה אחת, תבחר את זאת עם העדיפות הגבוהה ותדחה את השאר.
  - אם קיבלה הצעה אחת, נקבע שידוך בין x ל-y ונמחק אותם מ-X ו-Y.
- החזר את השידוך שהתקבל.

<u>הוכחת האלגוריתם:</u> נוכיח קודם שהאלגוריתם עוצר ולאחר מכן שהשידוך יציב. קודם כמה משפטי עזר:

משפט עזר 1: לכל $x\in X$ קיימת $y\in Y$ כך ש-y לא דחתה את x. נניח בשלילה שכולן דחו את x, מכך משמע שכל $y\in Y$ כבר משודכת, אחרת מישהי לא הייתה דוחה את x. אבל מכיוון $|X|=|Y|=n$ יש $y\in Y$ שמשודכת עם x ולכן לא דחתה אותו. סתירה.

משפט עזר 2: כל $y\in Y$ תקבל אי פעם הצעה. נניח בשלילה שלא וישנה $y\in Y$ שלא תקבל הצעה לעולם. אזי בכל איטרציה n גברים מציעים לכל היותר ל-$(n-1)$ נשים ולכן בהכרח יש לפחות דחיה אחת. יש $n(n-1)$ דחיות, כל אישה דוחה כל גבר פעם אחת. לכן באיטרציה ה-$n(n-1)+1$ נקבל אותה מ"פ בעמ"ם. סתירה!

משפט עזר 3: כל $y\in Y$ שקיבלה הצעה מעדיפות i תשתדך לעדיפות לפחות i. נשים לב כי אם i הציע הוא ימשיך להציע כל עוד לא תדחה אותו, אם תדחה אותו זה כי קיבלה הצעה טובה יותר.

<u>הוכחה שהאלגוריתם עוצר:</u> ממשפטים 1 ו-2: כל $x\in X$ ישתדך וכן כל $y\in Y$ תקבל הצעה ולכן לבסוף תשתדך.*

*כתוצאה מכך נקבל ש-X ו-Y ריקים ולכן האלגוריתם יעצור.

<u>הוכחה שהשידוך יציב:</u> נניח שלא. אזי קיימים $(x_1,y_2),(x_2,y_1)$, כך ש-x_1 ו-y_1 מעדיפים יותר אחד את השני. אזי x_1 הציע ל-y_1 לפני y_2. לפי משפט 3, y_2 משודכת לעדיפות גבוהה מ-x_1. סתירה!

הסל

ט) כיסויים וקבוצות בלתי תלויות

עד כה דיברנו על שידוך והדגמנו על כיסוי צמתים. נסדר את ההגדרות של כיסויים וקבוצות בת"ל על צמתים וקשתות ונציג משפטים חשובים ביניהם. הכיסוי מחפש מינימום והקבוצות בת"ל מקסימום.

כיסויים

(1) כיסוי צמתים (Vertex Cover): היא קבוצת צמתים שבה כל קשת בגרף שייכת לפחות לצומת אחת מהקבוצה. כיסוי צמתי מינימלי מסומן ב- τ (טאו) והוא שייך ל- NPC, למעט בגרף דו"צ.

(2) כיסוי קשתות (Edge Cover): קבוצת קשתות כך שכל צומת בגרף שייכת לפחות לקשת אחת מהקבוצה. כיסוי קשתות מינימלי מסומן ב- ρ (רו). במטלה 4 אלגוריתם פולינומי המוצא כיסוי קשתות מינימלי.

קבוצות בלתי תלויות

(1) צמתים בת"ל (Independent Set): קבוצת צמתים שלא מכילה זוג צמתים שכנים. קבוצה בלתי תלויה מקסימלית מסומנת ב- α, וגם כן שייכת ל- NPC.

(2) קשתות בת"ל - שידוך (Matching): קבוצת קשתות שלא מכילה זוג קשתות עם צומת משותפת. שידוך מקסימלי מסומן ב- ν (נו). ראינו את השיטה ההונגרית שמוצאת שידוך מקסימלי בגרף דו"צ. עבור גרף רגיל ישנו אלגוריתם Hopcroft-Karp. עבור גרף ממושקל ישנו אלגוריתם Edmonds blossom.

י) משפט Gallai

משפט: לכל גרף G שאין בו צמתים מבודדים מתקיים: $\nu(G)+\rho(G)=v(G)$. כלומר מספר הצמתים שווה למספר הקשתות בכיסוי קשתות המינימלי ועוד מספר הקשתות בשידוך המקסימלי.

משפט דומה: $\alpha(G)+\tau(G)=v(G)$ הוכחה טריוויאלית. שניהם ב- NPC

הוכחה: כיוון 1 - נוכיח $\nu(G)+\rho(G)\geq v(G)$. בכיסוי קשתות מינימלי אין מעגלים או מסלולים באורך גדול מ-2, שבמקרים אלו יכולנו להוריד קשתות ועדיין לקבל כיסוי תקין. לכן, ניתן להסתכל על כיסוי קשתות מינימלי כאל קבוצת כוכבים, כלומר צומת וקשתות היוצאות ממנו. הכוכבים אינם חולקים קשת משותפת עם כוכב אחר. נסמן ב-S את מספר הכוכבים. נשים לב כי $v(G)=\rho(G)+S$, שהרי כל קשת שיוצאת מהכוכב מוסיפה צומת נוספת לכיסוי, מלבד צומת הכוכב. עוד נשים לב כי שידוך אפשרי הוא לבחור קשת מכל כוכב, מאחר והכוכבים זרים. לכן השידוך המקסימלי מקיים $\nu(G)\geq S$: בשילוב עם משוואה קודמת לכן נקבל $\nu(G)+\rho(G)\geq v(G)$.

כיוון 2 - נוכיח $\nu(G)+\rho(G)\leq v(G)$. ניקח שידוך מקסימלי. כל קשת תופסת שני צמתים. נסמן ב-U את כל הצמתים שלא מכסה השידוך המקסימלי. כיסוי קשתות אפשרי הוא כל הקשתות בשידוך המקסימלי ועוד קשת עבור כל צומת ב-U. מכאן נקבל: $\rho(G)\leq |U|+\nu(G)=v(G)-2\cdot\nu(G)+\nu(G) \Rightarrow \nu(G)+\rho(G)\leq v(G)$ לפי הגדרת גבולים.

$|U|=v(G)-2\cdot\nu(G)$

שידוך שברי - Fractional Matching

<u>הגדרה:</u> שידוך שברי בגרף G מוגדר פונקציה $F:E(G)\to[0,1]$ הנותנת לכל צלע $e\in E(G)$ משקל $0\le F(e)\le 1$ כך שלכל $u\in V(G)$ סכום המשקלים של כל הצלעות השייכות ל-u קטן או שווה ל-1.

$$\forall u\in V(G)\ \sum_{e\in E_u} F(e)\le 1\ ,\ E_u=\{e\in E(G): u\in e\}.$$

נגדיר גודל השידוך F כסכום משקל כל הצלעות $\sum_{e\in E(G)} F(e)$. נסמן גודל שידוך שברי מקסימלי $\nu_F(G)=\max\sum_{e\in E(G)}F(e)$.

השידוך השברי המקסימלי הוא תוצאת בעיית ה-LP של שידוך מקסימלי ב-IP. מתקיים $\nu_F(G)\ge\nu(G)$ שהרי ה-LP שוקל יותר אפשרויות.

<u>טענות:</u>

(1) מתקיים: $\nu_F(G)\le\frac{v(G)}{2}$.

הוכחה: עבור כל $u\in V(G)$ האילוץ הוא $\sum_{e\in E_u}F(e)\le 1$. אם נסכום את כל האילוצים עבור כל הצמתים נקבל:

$$\sum_{u\in V(G)}\sum_{e\in E_u}F(e)\le v(G)\underset{\text{עוברים על כל קשת פעמיים}}{\Rightarrow} 2\sum_{e\in E(G)}F(e)\le v(G)\Rightarrow 2\cdot\nu_F(G)\le v(G)\Rightarrow \nu_F(G)\le\frac{v(G)}{2}$$

(2) בגרף דו-צדדי מתקיים: $\nu_F(G)=\nu(G)$.

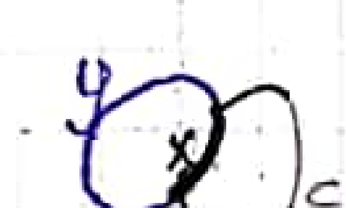
הוכחה: באופן פשוט בגלל שהגרף דו-צדדי אז: מטריצת השכנות A היא Totally Unimodular ולכן הפתרון ב-LP הוא גם פתרון ב-IP. אבל אפשר להוכיח באמצעות הלמה הדו-כיוונית. כבר ראינו $\nu_F(G)\ge\nu(G)$. נוכיח ההיפך באמצעות משפט König. יהי C כיסוי מינימלי.

$$\nu_F(G)=\sum_{e\in E(G)}F(e)\underset{\text{C מכסה כל צלע}}{\le}\sum_{v\in C}\sum_{e\in E_v}F(e)\underset{\text{לפי אילוץ}}{\le}\sum_{v\in C}1=|C|=\tau(G)\underset{\text{König}}{=}\nu(G)\Rightarrow\nu_F(G)\le\nu(G)$$ מ.ש.ל

<u>משפט:</u> קיים שידוך שברי מקסימלי F כך שלכל $e\in E(G)$: $F(e)\in\{0,\frac{1}{2},1\}$.

הוכחה: ניקח שידוך שברי מקסימלי שממקסם את כמות הצלעות שמשקלן 0. נראה שכל הצלעות בשידוך זה הן צלעות מבודדות או שמרכיבות מעגל אי-זוגי. כלומר בגרף $G[F]$, כל הרכיבים הם צלע בודדת או מעגל אי-זוגי.

- אין מעגל זוגי כי אז יכולנו לאפס את אחת הקשתות ולהעביר את משקלה לצלעות לידה.
- אין מסלול באורך יותר מ-1 כי אז יכולנו להעביר את המשקל לצלעות בקצוות המסלול ולאפס עוד צלעות.
- עד כה הוכחנו שלכל רכיב עם יותר מצלע אחד הוא מעגל אי-זוגי. נניח שאין צומת עם דרגה יותר מ-2. אם יש כזה נוכל להתקדם דרכו ולצאת מהמעגל, אם נחזור למעגל הראשון נקבל מעגל זוגי. אחרת צריך נס"ם בצומת שדרגתה 1 ולכן הקשת האחרונה חייבת להיות במשקל 1, ואפשר לאפס את הקודמת לה.



$x\notin c\ |\ y\notin c$
זוגי

כעת כל צלע מבודדת תקבל 1, וכל צלע במעגל אי-זוגי תקבל $\frac{1}{2}$, כל שאר הצלעות יקבלו 0.