נושא 3 - צביעת גרפים

א) הגדרה

צביעה של גרף היא מיפוי כל צמתי הגרף, כך שכל שני צמתים שכנים (יש ביניהם צלע) מקבלים צבע שונה. בפועל במקום צבעים נשתמש במספרים.

הדרך המקובלת להתייחס לצביעת גרפים היא כאל פונקציה $\varphi: V(G)\to[k]$ המקבלת צומת ומחזירה מספר, כך שכל שני צמתים שכנים מקבלים מספר שונה, $\forall (u,v)\in E(G), \varphi(u)\neq\varphi(v)$.

אם קיימת פונקציה כזו אז $[k]$ נאמר ש-G הוא k-צביע. ה-k הנמוך ביותר עבורו הגרף צביע נקרא "המספר הכרומטי" של G, ומסומן $\chi(G)$.

- בגרף דו-צדדי G - $\chi(G)=2$.
- במעגל אי זוגי C - $\chi(C)=3$.
- בגרף השלם K_r - $\chi(K_r)=r$.

ב) מוטיבציה

צביעה של גרפים מאפשרת לנו לחלק את כל צמתי הגרף לקבוצות בלתי תלויות כמספר הצבעים, כך שכל הקשתות הן בין הקבוצות ולא בתוכן. הגדרה מדוייקת של חלוקה כו נקראת "גרף הומומורפיזם".

המוטיבציה לבעית צביעה תקינה של גרף, היא במקרה שיש לנו קבוצת עצמים שאנו רוצים לחלק אותם לפי אילוצים המונעים עצמים מסויימים להיות באותה קבוצה עם עצמים אחרים. הפתרון לבעיה הוא לייצג את העצמים בתור צמתים והאילוצים בתור קשתות, ואז למצוא צביעה של הגרף. צביעה מינימלית תתן לנו חלוקה אופטימלית.

צביעה של גרף משמשת בעיקר לבעיות תזמון.

ג) אלגוריתם צביעה חמדני

זהו אלגוריתם שמקבל סדר כלשהו של הצמתים ומחזיר צביעה תקינה שלהם. בכל צומת האלגוריתם ינסה לתת לה את הצבע הנמוך ביותר שאפשר שלא תפוס ע"י השכנים שלה.

נסמן ב-$\Delta(G)$ את הדרגה המקסימלית הקיימת ב-G, $\Delta(G)=\max_{v\in V(G)} deg(v)$. אלגוריתם הצביעה החמדני מחזיר לכל היותר $\Delta(G)+1$ צבעים. שהרי במקרה הגרוע ביותר בו יגיע לצומת שהדרגה שלה $\Delta(G)$ וכבר הופיעו לפניה כל השכנים שלה, צומת זו תקבל את הצבע $\Delta(G)+1$.

כל שאר הצמתים יכולים להסתפק במספר צבעים זה.

6/4

17

האלגוריתם החמדני הוא אופטימלי אך ורק לגרפים שהמספר הכרומטי שלהם הוא תמיד $\Delta(G)+1$.
גרפים אלו הם: מעגל אי-זוגי והגרף המלא.* אבל אלו היחידים עבור כל שאר הגרפים האלגוריתם החמדני אינו אופטימלי.

$\chi(C_{2k+1})=3=\Delta(C_{2k+1})$
$\chi(K_r)=r=\Delta(K_r)$

נשים לב שמכיוון שהאלגוריתם החמדני מחזיר צביעה תקינה לכל גרף G מתקיים: $\chi(G)\le\Delta(G)+1$.
בסעיף הבא נלמד משפט שמשפר זאת.

3) <u>משפט ברוקס (Brooks')</u>

יהי G גרף קשיר, לא מעגל אי זוגי ולא גרף שלם, אזי, ניתן לצבוע אותו בלכל היותר $\Delta(G)$ צבעים, $\chi(G)\le\Delta(G)$.

<u>הוכחה:</u> אין הוכחה ישירה אלא תלוי איך נראה הגרף. ההוכחה תהיה באמצעות סידור מיטבי שבאמצעותו האלגוריתם צביעה החמדני מחזיר צביעה תקינה של $\Delta(G)$ צבעים. נחלק ל-4 מקרים אפשריים:

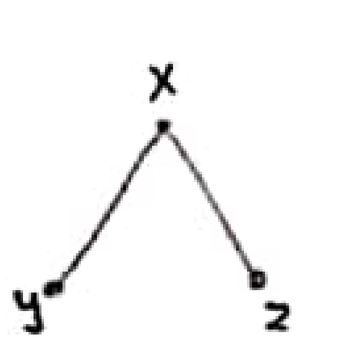
(1) אם $\Delta(G)\le 2$: אזי כיוון ש-G קשיר ולא מעגל אי-זוגי, הוא חייב להיות או מסלול או מעגל זוגי. בשני המקרים G הוא גרף דו-צדדי ולכן הוא 2 צביע.

(2) אם קיים $v\in V(G)$ כך ש-$deg(v)<\Delta(G)$: כלומר יש צומת שהדרגה שלה קטנה מ-$\Delta(G)$. נמצא איזשהו עץ פורש של G (אפשר עם DFS) ש-v הוא השורש שלו. כעת נסדר את כל צמתי הגרף לפי ה-post order על העץ (קודם בנים ואז אבא). בסידור זה לכל צומת, מלבד v שמופיע אחרון בסדר, יש לפחות שכן אחד שמופיע אחריו בסדר. לכן אם נכניס סדר זה לאלגוריתם החמדני, כל צומת תסתפק בלכל היותר $\Delta(G)$ צבעים ($\Delta(G)-1$ שכנים ועצמה). רק v תצטרך $deg(v)+1$ צבעים. אבל כאמור הדרגה שלה קטנה מ-$\Delta(G)$ לכן לא תוסיף צבע חדש.*

*דרך לשיטה בו יצאתי סדר שמחזיר כל היותר $\Delta(G)$ צבעים "מיון העץ".

(3) הגרף r רגולרי ($3\le r$), אך קיים צומת חתך x: נפרק את הגרף לשתי תתי גרף ש-x מפריד ביניהם כאשר x מופיע בשניהם. בשני תתי הגרפים $deg(x)<\Delta(G)$, שהרי פיצלנו בין השכנים של x. לכן על כל תת גרף נוכל להפעיל את מיון העץ כאשר x השורש. כל מה שנותר הוא להתאים בין הצבעים בין שתי תתי הגרפים, מה שלא יוסיף צבעים חדשים מאחר ואין ביניהם צלעות.

(4) המקרה שנותר הוא ש-G 2-קשיר, r רגולרי ($3\le r$), ולא שלם: בגרף שכזה קיימים שלושה צמתים x,y,z כך שיש קשת בין x ל-y ובין x ל-z אך אין קשת בין y ל-z, וגם אם נוריד את y,z מהגרף הוא ישאר קשיר. נוכיח זאת בטענת עזר בהמשך. נכניס לאלגוריתם החמדני את הסדר הבא: קודם y,z שיקבלו צבע 1, לאחר מכן כל שאר הצמתים לפי מיון העץ על $G-\{y,z\}$ כאשר x השורש. בסדר זה כל צומת תסתפק ב-$\Delta(G)$ צבעים כי יש שכן אחריה בסדר. וגם x לא תוסיף צבע כי שני שכנים שלה (y,z) עם אותו הצבע.

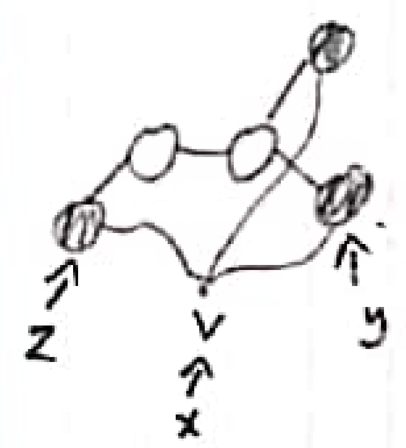


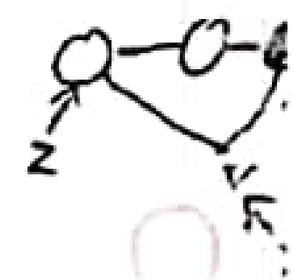
$\{y,z,\dots,x\}$

<u>טענת עזר</u>: בגרף G 2-קשיר, r רגולרי $(r\geq 3)$ ולא שלם, קיימים שלושה צמתים $\{x,y,z\}\in V(G)$ כך ש- $(x,y),(x,z)\in E(G)$ אך $(y,z)\notin E(G)$, וגם הגרף $G-\{y,z\}$ קשיר.

הוכחה: נחלק לשני מקרים:

(1) אם קיים $v\in V(G)$ כך שהגרף $G-v$ יהיה קשיר אך כבר לא 2 קשיר, $\kappa(G-v)=1$.
אזי בגרף $G-v$ יש צמתי חתך ובלוקים. נשים לב שבגרף G v חייב להיות מחובר בצלעות לכל בלוקי העלים ב-$G-v$, מפני שאחרת הורדתו לא הייתה הופכת את הגרף ל-1 קשיר.
לכן כעת נוכל לבחור שני בלוקי עלים, מכל אחד y ו-z ו-v הוא x. אם יש רק בלוק עלה אחד אזי v מחובר לבלוק נוסף ולכן נוכל לבחור y ו-z מכל בלוק, ו-x יהיה v עצמו.





(2) אם לא קיים צומת v כזאת, כלומר $\kappa(G-v)\geq 2$ $\forall v\in V(G)$. נבחר בגרף שלושה צמתים $\{x,y,z\}$ כך שיש קשת מ-x ל-y ומ-x ל-z אך אין קשת מ-y ל-z. חייבים להיות שלישיה כזאת אחרת הגרף היה שלם. נשים לב ש- $\kappa(G-y)\geq 2$ ו- $\kappa(G-y-z)\geq 1$, כלומר בהורדת y,z מ-G הגרף שנותר עדיין קשיר. מ.ש.ל.

ה) <u>משפט Vizing</u>

<u>צביעת קשתות</u>: היא מיפוי של כל קשתות הגרף, כך שלכל שני קשתות עם קודקוד משותף מקבלות צבע שונה. המספר הנמוך ביותר של צבעים הנדרשים כדי לצבוע את כל הקשתות ב-G מסומן $\chi'(G)$. בסעיף קודם ראינו חסם תחתון ל-$\chi(G)$ באמצעות ברוקס כעת נראה חסם תחתון ל-$\chi(G)$.

<u>משפט Vizing</u>: לכל גרף G מתקיים: $\Delta(G)\leq\chi'(G)\leq\Delta(G)+1$.*

*גרף G דו-צדדי $\chi'(G)=\Delta(G)$

<u>הוכחה</u>: הכיוון הראשון $\Delta(G)\leq\chi'(G)$ טריוויאלי, שכן בצומת עם הכי הרבה שכנים כל קשת שיוצאת ממנו מקבלת צבע אחר. נוכיח $\chi'(G)\leq\Delta(G)+1$ באינדוקציה על מספר הקשתות $e(G)$.

בסיס- עבור $e(G)=1$, מספיק צבע 1 כל שכן 2.

צעד- נניח שהטענה נכונה עבור $e(G)=n-1$. נוכיח עבור $e(G)=n$, ניקח קשת $e=(u,v)$. אזי בגרף $G'=G-e$ $\Delta(G')\leq\Delta(G)$, לפי הנחת האינדוקציה יש צביעה הלכל היותר $\Delta(G')+1$ צבעים.
לכל צומת $x\in V(G)$ יש לכל היותר $\Delta(G)$ קשתות שיוצאות ממנו. לכן לכל צומת $x\in V(G)$ קיים לפחות צבע אחד שחסר לו. נסמן a_u הצבע שחסר ל-u. אם a_u גם חסר ל-v נצבע את (u,v) ב-a_u. לכן נניח ש- $a_u\in v$. נסמן $v=v_0$ ואת כל שאר הצמתים $v_1,\dots,v_{n-2}$ מלבד u. לכל צומת v_i נסמן ב-a_i את הצבע שחסר לה. נשים לב כי $a_0\in u$ אחרת סיימנו. נניח כי (u,v_1) צבועה ב-a_0*, אזי אם $a_u\notin v_1$ או $a_1\notin u$ נוכל לצבוע את (u,v_1) באחד מאלו ואז את (u,v) ב-a_0. אם זה לא כך ו- $a_1\in u$ נוכל לעבור

*ל למספר כך ת הצמתים מלכתחילה.

בס"ד

6/9

19

לדרוש (u,v_2) הצבועה ב-a_1 לחזור על אותו תהליך. כך נוכל לעבור על כל השכנים של u עד שנמצא צומת v_i כך ש $a_u \notin v_i$ או $a_i \notin u$, ואז לחזור אחורה ולתקן את כל השכנים שעברנו בהם, עד שנצבע את (u,v) באחד מ-$\Delta(G')+1$ הצבעים.* נשים לב שבכל תהליך כזה אנו מוצאים צבע חדש השייך ל-u ולכן אנו עוברים לצומת שהיא שכנה של u והקשת ביניהם צבועה בצבע זה. המקרה היחיד שנעצור הוא כאשר יש שני שכנים של u שהם v_k, v_l שלשניהם חסר אותו צבע, $a_k=a_l$. כעת נבחן את המסלול שיוצא מ-v_l ועובר לסירוגין בין הצבעים a_u ו-$a_l=a_k$.

יש 3 מקרים אפשריים.

(1) v_k נמצא במסלול זה - אזי המסלול נגמר ב-v_k שכן $a_u \in v_k$ אך $a_k \notin v_k$ לפי הגדרה. לכן נוכל להחליף את צבעי המסלול כך ש-$a_u \notin v_k$ אך $a_k \in v_k$. כעת נוכל לעשות הזזת צבעים מ-v_k עד v_0 ולקבל צביעה ב-$\Delta(G')+1$ צבעים.

(2) u נמצא במסלול - כיוון ש $a_u \notin u$ הוא בהכרח הגיע דרך (u,v_{k+1}) הצבוע ב-a_k. לכן שוב נחליף את הצבעים במסלול ונבצע הזזה מ-v_{k+1} עד v_0.

(3) כל מקרה אחר - המסלול אינו עובר ב-$\{u, v_k, v_{k+1}, v_l\}$. לכן נוכל לשנות את צבעי המסלול ולבצע הזזה מ-v_l עד v_0 ולקבל צביעה תקינה ב-$\Delta(G')+1$ והטענה מתקיימת.

Scanned with CamScanner