# פרק ג' - תחשיב היחסים

## א) הגדרה

תחשיב היחסים היא שפה שבנויה על תחשיב הפסוקים. אלא שבמקום לנתח פסוקים אטומיים שיכולים להיות אמת או שקר באמצעות לוח אמת, בתחשיב היחסים הפסוקים מורכבים ממבנים מתמטיים המפרשים אוצר מילים. הבדל נוסף הוא שאין צורך בלוח אמת מפני שכל ערך או ביטוי בתחשיב היחסים יכול להיות לו רק ערך אחד.

## ב) תחביר

שם עצם אטומי - היא סימן של קבוע אישי או משתנה באוצר מילים. הקבועים האישיים יפורשו בכל מבנה בדרך אחת. למשתנה כידוע אין ערך קבוע ובהמשך יתברר כיצד מתעסקים איתו.

שם עצם - הוא פונקציה n מקומית המשלבת בתוכה מספר שמות עצם אטומיים כך שלבסוף לשם עצם יש ערך מספרי כלשהו. אמנם גם שם עצם אטומי הוא שם עצם מכיוון שגם לו יש ערך. שם עצם שיש בו רק קבועים אישיים יתפרש בכל מבנה אחרת. אם יש בשם עצם משתנים אין לו ערך קבוע, ובהמשך נלמד כיצד להתעסק עם ביטוי כזה.

נוסחה אטומית - היא ביטוי המורכב משמות עצם ויחס n מקומי כלשהו. נוסחה אטומית מקבלת את הערך אמת או שקר. כל נוסחה אטומית יכולה להתפרש אחרת בהתאם למבנה המתמטי שמפרש אותה.

נוסחה - היא נוסחה אטומית שמופעלים עליה קשרים $(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$ או כמתים (נלמד בהמשך). אמנם גם נוסחה אטומית בלבד היא נוסחה.

דוגמאות: (1) חשב את ערך שם העצם $F(F(c,x),c)$ במבנה $\langle R,2,+\rangle$ $\Leftarrow$ $(2+x)+2 = 4+x$

(2) מה ערך האמת של הנוסחה $[S(a,b)\rightarrow S(b,c)]\wedge S(a,c)$ במבנה $\langle R,2,3,4,<\rangle$? $[\overset{T}{(2<3)}\overset{T}{\rightarrow}\overset{T}{(3<4)}]\overset{T}{\wedge}\overset{T}{(2<4)} \equiv T$

(3) מה ערך האמת של הנוסחה $S[F(x,a),b]$ במבנה $\langle R,1,3,+,<\rangle$? $[(x+1)<3] \equiv$ לא ידוע. תלוי בערך של x

## ג) כמתים - $\forall, \exists$

יש שני סוגי כמתים: $\forall$ שפירושו "לכל" (הסימן בא מהאות A במילה All), ו-$\exists$ שפירושו "קיים" (הסימן בא מהאות E במילה Exist). משתנה שיופיע לפניו כמת יקרא "משתנה מכומת", ומשתנה שאין לפניו כמת יקרא "משתנה חופשי". נתון A נוסחה כלשהי ו-x משתנה, אזי הנוסחה:

$\forall x(A)$ - מקבל ערך אמת אם עבור כל ערך של x ב-A, A יקבל ערך אמת.

$\exists x(A)$ - מקבל ערך אמת אם יש לפחות ערך אחד של x ב-A עבורו A יהיה ערך אמת.

שלילת כמתים

שוללים כמת מהפכים:

$\neg[\forall x(A)] \equiv \exists x(\neg A)$

$\neg[\exists x(A)] \equiv \forall x(\neg A)$

## ד) פסוק

פסוק הוא נוסחה שכל המשתנים שמופיעים בה מכומתים.

<u>פסוק כולל</u>- הוא פסוק מהצורה $\forall x_1,x_2,\dots,x_n(B)$, כאשר B היא נוסחה שאין בה כמתים נוספים ואין בה משתנים חוץ מ-$x_1,x_2,\dots,x_n$ (אין חובה שכל המשתנים יופיעו). אם <u>בכל</u> הצבה אפשרית של איברים מהעולם של המבנה המתמטי במקום $x_1,x_2,\dots,x_n$ הערך של B הוא אמת, אזי הפסוק כולו אמת. אך אם יש לפחות הצבה אחת עבורה הערך של B שקר, הפסוק כולו שקר.

<u>פסוק "יש"</u>- הוא פסוק מהצורה $\exists x_1,x_2,\dots,x_n(B)$, כאשר B היא נוסחה שאין בה כמתים נוספים ואין בה משתנים חוץ מ-$x_1,x_2,\dots,x_n$ (אין חובה שכל המשתנים יופיעו). אם יש לפחות הצבה אפשרית אחת של איברים מהעולם של המבנה המתמטי במקום $x_1,x_2,\dots,x_n$ עבורה הערך של B אמת, הפסוק כולו אמת. אך אם בכל ההצבות הערך של B שקר הפסוק כולו שקר.

* יהי A פסוק כלשהו ו-M מבנה המפרש אותו. אם עבור המבנה M הפסוק A מקבל ערך אמת, אזי נאמר "שהמבנה M מקיים את A", ונסמן: $M\models A$. אחרת נאמר ש"M לא מקיים את A", ונסמן: $M\not\models A$.

<u>דוגמאות</u>: (1) נתון הפסוק $\forall x[S(a,x)\vee S(x,b)]$ מה ערך האמת במבנה $\langle\mathbb{R},1,2\rangle$? $\forall x[1<x\vee x<2]\equiv T$

(2) נתון הפסוק $[\forall x(S(x))]\leftrightarrow[S(a)\wedge S(b)\wedge S(c)]$ מה ערך האמת במבנה $\langle\mathbb{R},1,2,3,\{\langle1\rangle,\langle2\rangle,\langle3\rangle\}\rangle$?

יש x ב-$\mathbb{R}$ שאינו מקיים את היחסים $\langle1\rangle,\langle2\rangle,\langle3\rangle$. $\overset{F}{[\forall x(\langle x\rangle)]}\leftrightarrow\overset{T}{[\langle1\rangle\wedge\langle2\rangle\wedge\langle3\rangle]}\equiv F$

(3) נתון הפסוק $[\exists x(S(x))]\to[\forall x(S(x))]$ מתקיים במבנה $\langle\mathbb{R},\langle5\rangle\rangle$? $\overset{T}{\exists x(\langle5\rangle)}\to\overset{F}{\forall x(\langle5\rangle)}\equiv F$

## ה) נוסחאות שקולות במבנה

בנוסחאות ארוכות ומסובכות בהם מאוד קשה לחשב את ערך הנוסחה, נרצה להחליף את הביטויים המסובכים בביטויים פשוטים וככה להקל על החישוב. לשם כך נחפש את נוסחאות שקולות (לאותו מבנה המפרש את הנוסחה) כך שנוכל להחליף את נוסחה מסובכת בנוסחה פשוטה, ועדיין הנוסחה הכללית תישאר שקולה לנוסחה המקורית. הכוונה בנוסחאות שקולות הוא שבכל הערכים מהמבנה המתמטי שנציב בהם נקבל את אותה תוצאה.

נסמן ב-T נוסחה שהיא תמיד אמת וב-F נוסחה שהיא תמיד שקר.

משפט: לכל נוסחה יש נוסחה שקולה ללא כמתים. בהמשך נלמד עוד על משפט זה.

דוגמא: האם הפסוק $\forall z[\forall x[[(\exists y(y<z))\to(\exists y(x<y))]\to x\neq z]]$ מתקיים בעולם $\{1,2,3\}$?

מצאנו דוגמא נגדית עבור $x=1$, $z=1$. $\exists y(x<y)\equiv x\neq3$ , $\exists y(y<z)\equiv z\neq1 \Rightarrow \underset{1,1}{\forall z,x}[(\underset{F}{z\neq1}\underset{T}{\to}\underset{T}{x\neq3})\underset{F}{\to}\underset{F}{x\neq z}]\Rightarrow$

## ג) הקשר בין איזומורפיזם לתחשיב היחסים

משפט: שני מבנים איזומורפיים $M_1 \cong M_2$, אזי כל פסוק שנכון באחד מהם נכון גם בשני, וכן להיפך.

משפט: נתונה נוסחה B שיש בה משתנה חופשי אחד x, ויהי a הוא איבר מן העולם של המבנה המפרש את הנוסחה. נסמן $B[a]$ את הפסוק שמתקבל מ-B על ידי הצבה של a במקום x. המשפט אומר כך: שני מבנים איזומורפיים $M_1 \cong M_2$ כאשר h הוא האיזומורפיזם ביניהם, אזי אם $B[a]$ מתקיים במבנה $M_1$ גם $B[h(a)]$ מתקיים ב-$M_2$. וכן להיפך, אם $B[a]$ לא מתקיים ב-$M_2$ גם $B[h(a)]$ לא מתקיים ב-$M_2$.

שני משפטים אלו יכולים לסייע לנו להוכיח ששני מבנים הם לא איזומורפיים. אם נגלה למשל ערכים a ו-$h(a)$ עבורם מקבלים תוצאות שונות בשני המבנים.

דוגמאות: (1) נתונה הנוסחה: $\forall x,y,z[(x+(y+z))=((x+y)+z)]$ המתפרשת במבנה $\langle +,\mathbb{N}\rangle$. מה ניתן להסיק מכך שמבנה זה איזומורפי למבנה $\langle *,\{2^n:n\in\mathbb{N}\}\rangle$ באמצעות $h(n)=2^n$?
שגם המבנה השני מפרש נוסחה זו כך שמתקיים: $\forall x,y,z[(x\cdot(y\cdot z))=((x\cdot y)\cdot z)]$

(2) נתבונן במבנים $\langle +,\mathbb{N}\rangle$ ו-$\langle *,\mathbb{N}\rangle$ כדי לבדוק האם הם איזומורפיים נסתכל בנוסחה $\forall y[F(x,y)=x]$ ונסמנה ב-C. נשים לב שעבור $C[0]$ במבנה $\langle *,\mathbb{N}\rangle$ הנוסחה מתקיימת, אולם אין ערך ב-$\langle +,\mathbb{N}\rangle$ עבורו הנוסחה מתקיימת. על כן מכיוון שאיזומורפיזם חייב להיות על - מבנים אלו אינם איזומורפיים.

## תחשיב היחסים – האם פסוק מתקיים במבנה

כאשר נתון פסוק ושואלים האם הוא מתקיים במבנה מסוים, צריך לבדוק האם הפסוק כולו מקבל ערך T או F.

נעשה זאת ע"י שיטת המשחק:

יש 2 שחקנים: שחקן ה"קיים" $\exists x$ - רוצה שתת הפסוק שהוא מוגדר עליו (הסוגריים שלו) יהיה True כי מספיק שקיים x אחד שמקיים את תת הפסוק אז התוצאה של תת הפסוק היא True.

השחקן השני הוא "לכל" $\forall x$ - רוצה שתת הפסוק שהוא מוגדר עליו (הסוגריים שלו) יהיה False כי מספיק שקיים x אחד שלא מקיים את תת הפסוק אז התוצאה של תת הפסוק היא False.

חשוב לציין שהכמתים בוחרים x כאלו שיעזרו להם לנצח (האופטימאליים ביותר) והבחירה מתבצעת משמאל לימין.

כאשר ננתח את הפסוק, נעשה זאת בשלבים מבפנים לבחוץ לכל כמת בנפרד וננסה להבין מה יירצה כל כמת לבחור.

דגשים:

- הכמתים רוצים לנצח רק בתוך הסוגריים שהם מוגדרים עליהם ולא משנה מה יש בשאר הפסוק. לדוגמא: בפסוק $\forall x(x > 0) \to \exists y(y < 9)$ , כמת ה"לכל" "רואה" רק את הסוגריים שלו $(x > 0)$ ולכן הוא רוצה שהסוגריים יהיו False ולכן אם אפשר, כמת ה"לכל" ייבחר x קטן או שווה ל 0 במטרה לפסול את תת הפסוק שלו אף על פי שבמקרה זה נקבל $F -> A$ וסה"כ הפסוק יהיה True.
- סדר הבחירה משמאל לימין חשוב, ולכן בניתוח הפסוק המלא, חייבים לבחור קודם לכמת השמאלי ביותר וכן הלאה. מי שבוחר ראשון לא יכול לבחור משהו בהתאם לאחרים שעדיין לא בחרו אבל אם הכמת יכול לבחור מספר שיגביל את האחרים וזה יעזור לו לנצח – הוא יבחר מספר זה.
- כאשר יש בתוך הסוגריים של כמת ה"לכל" גרירה ($\to$) אז הוא ינסה לעשות את צד שמאל של הגרירה true (ולא false כי אז נקבל ש false גורר A וסה"כ תת הפסוק יהיה true כנגד רצונו של כמת הקיים) ואת צד ימין False. הנחה זו תגביל את בחירתו של כמת ה"לכל".
- כאשר יש בתוך הסוגריים של כמת ה"קיים" גרירה ($\to$) אז בהתחלה הוא ינסה לבחור מספר שיגרום לצד שמאל של הגרירה להיות false כדי שסה"כ תת הפסוק יהיה true. ואם הוא לא מצליח אז הוא ינסה לעשות את צד ימין true.
- אם מופיע פעמיים כמת על אותו משתנה, אז אפשר להתייחס לכל אחד מהם כמשתנה שונה לגמרי. לדוגמא: $\forall x(x > 0) \to \exists x(x < 9)$ זה בדיוק אותו דבר כמו שרשום: $\forall x(x > 0) \to \exists y(y < 9)$
- אם יש את הקשר אם ורק אם ($\leftrightarrow$) אז כמת ה"קיים" ינסה להשוות את ערך האמת של צד שמאל וצד ימין. כלומר, הוא ינסה לבחור מספר שיעשה את 2 הצדדים false

- שאלה נוספת שיכולה להופיע זה לתת מבנה שאכן יקיים את הפסוק. במקרה זה נחזור לניתוח הפסוק ונראה מה גרם לו להיות false. **נלך לחלק היותר פשוט:** $[\forall x\exists y[x<y]]$ נפסל כי x בחר את המספר הגדול ביותר שאין מעליו מספרים נוספים. ולכן אם ניקח מבנה שיסיר את ההגבלה הזו, נקבל שגם הצד הזה יהיה true כי קיים y רוצה true ולכן הוא ייבחר y=x+1 (הוא בוחר אחרי x ולכן הוא יכול לבחור בהתאם ל x).

לכן ניקח לדוגמא את המבנה $<R,<>$ שאין לו איבר מקסימאלי. ולכן הפסוק יתקיים.

- עוד שאלה שיכולה להיות זה להוכיח את קיום הפסוק בהוכחה פורמאלית.

חשוב לציין ששיטת המשחק אינה הוכחה! את המילים הפורמאליות של ההוכחה נוציא מטבלת ההוכחות:

לכל x יהפוך להיות: **יהא x כלשהו.**

קיים x יהפוך להיות: **נגדיר ...=x**

אם יש גרירה בתוך סוגריים של הכמת "|לכל" $\forall x(A\rightarrow B)$ אז נרשום: **נניח שמתקיים A צ"ל שמתקיים B.** (ולאחר מכן, נשתמש בשלב כלשהו בהנחה)

עבור הקשר "או" נרשום: **צ"ל A או B**

עבור הקשר "וגם" נרשום: **צ"ל A וגם B**

הקשר אם ורק אם יהפוך להיות: **צ"ל א)** $A\rightarrow B$ **ב)** $B\rightarrow A$.

נחזור לדוגמא, נוכיח פורמאלית שהמבנה החדש שהגדרנו מקיים את הפסוק:

<u>הוכחה</u>: **בפסוק יש 2 צדדים ולכן נתייחס לכל צד בנפרד.** יש בצד שמאל לכל x ולכל y ולכן נרשום: **יהיו** $x,y\in R$ **כלשהם.** בסוגריים של "לכל" יש גרירה ולכן נרשום: **נניח ש** $x<y$ **צ"ל** $\exists z[x<z\wedge z<y]$. יש את הכמת קיים ולכן נרשום נגדיר... אך צריך לראות מה נבחר ל z – זה בדיוק מה שרשמנו בניתוח ולכן נרשום: **נגדיר** $z=\frac{x+y}{2}$**. ועכשיו צריך לתת הסבר** למה זה גורם שהפסוק יהיה נכון (ההנחה תעזור) נרשום: **לפי ההנחה** $x<y$

**ולכן** $x<\frac{x+y}{2}<y$**. קיבלנו** $T$ **בצד שמאל.** נעבור לצד ימין: נרשום עבור לכל $x$: **יהא** $x\in R$ **כלשהו.** עבור "קיים" $y$ נרשום: נגדיר.... נראה מה לבחור עבור $y$ בהתאם ל $x$ (ראינו בניתוח עבור המבנה החדש). נרשום: **נגדיר** $y=x+1$ **וקיבלנו** $T$**. סה"כ קיבלנו** $T\rightarrow T=T$ **מש"ל.**

דוגמא נוספת – קשה יותר: האם הפסוק

$\forall x\exists y\forall z[(z\neq x\wedge z\neq y)\rightarrow[\exists w[y\neq x\wedge w\neq x\wedge w\neq y\wedge w\neq z\wedge[S(x,w)\leftrightarrow S(x,z)]\wedge[S(y,w)\leftrightarrow S(y,z)]]]]$

מתקיים במבנה $<\{1,2,3,4,5\},S>$ $S^M=\{<x,y>\in\{1,2,3,4,5\}\times\{1,2,3,4,5\}:|x-y|\in\{1,4\}\}$?

Scanned with CamScanner

כמת "לכל" z רוצה false והוא רואה גרירה ולכן הוא רוצה להיות שונה מ x,y ולא לקיים את צד ימין. אין לו השפעה על $z \neq w$ אבל הוא ינסה להגביל את w.

אנו רואים שהניתוח לא מקדם אותנו למספרים ולכן כדאי לנסות לבחור אפשרויות של מספרים כדי לראות האם נוכל למצוא את המספרים הנכונים כיוון שזה עולם סופי.

$\forall x \exists y \forall z[(z \neq x \wedge z \neq y) \rightarrow [\exists w[y \neq x \wedge w \neq x \wedge w \neq y \wedge w \neq z \wedge [S(x,w) \leftrightarrow S(x,z)] \wedge [S(y,w) \leftrightarrow S(y,z)]]]]$

נתחיל בכך ש"לכל" x בוחר 1, לדוגמא, "קיים" y רוצה true ולכן הוא ייבחר מספר שונה מ x, נבחר 2. "לכל" z יבחר 3.

הגענו לבחירת w: קודם כל $w \neq 1,2,3$ כדי לקיים את התנאים הראשונים. נשים לב ש $S(x,z)$ הוא $S(1,3)$ שאינו מתקיים ולכן w ירצה לא לקיים את $S(1,w)$ ולכן בהכרח $w = 4$

כי עבור $w = 5$ זה יתקיים. ויש לנו $F \leftrightarrow F = T$ , אבל בתנאי האחרון קיבלנו

$S(2,3) \leftrightarrow S(2,4)$ - $F = T \leftrightarrow F$ ובסה"כ קיבלנו $F$.

אבל זו רק דוגמא אחת ל false כי ייתכן שקיים y אחר שייתן תוצאה true כי y הוא עם הכמת "קיים". חשוב להדגיש כי דוגמא לfalse עבור "קיים" זה לא מספיק ודוגמא ל true עבור "לכל" זה לא מספיק.

לכן נחזור ל y וננסה לבחור אחד אחר:

נבחר 3, "לכל" z ייבחר 4. הגענו לבחירת w: קודם כל $w \neq 1,3,4$ כדי לקיים את התנאים הראשונים. נשים לב ש $S(x,z)$ הוא $S(1,4)$ שאינו מתקיים ולכן w ירצה לא לקיים את $S(1,w)$ ואין לו מספר כזה כי האפשרויות שנותרו הם 2 ו 5 שמתקיימים ביחס עם 1.

ושוב קיבלנו: $F = F \leftrightarrow T$ ובסה"כ קיבלנו $F$.

נבחר $y = 4$ , "לכל" z ייבחר 5. הגענו לבחירת w: קודם כל $w \neq 1,4,5$ כדי לקיים את התנאים הראשונים. נשים לב ש $S(x,z)$ הוא $S(1,5)$ וזה מתקיים ולכן w ירצה לקיים את $S(1,w)$ ולכן בהכרח $w = 2$. ויש לנו $T \leftrightarrow T = T$ , אבל בתנאי האחרון קיבלנו

$S(4,5) \leftrightarrow S(4,2)$ - $F = T \leftrightarrow F$ ובסה"כ קיבלנו $F$.

נותר לבדוק את $y = 5$ , "לכל" z ייבחר 4. הגענו לבחירת w: קודם כל $w \neq 1,4,5$ כדי לקיים את התנאים הראשונים. נשים לב ש $S(x,z)$ הוא $S(1,4)$ שאינו מתקיים ולכן w ירצה לא לקיים את $S(1,w)$ ולכן בהכרח $w = 3$. ויש לנו $F \leftrightarrow F = T$ , אבל בתנאי האחרון קיבלנו

$S(5,4) \leftrightarrow S(5,3)$ - $F = T \leftrightarrow F$ ובסה"כ קיבלנו $F$.

ובסה"כ ראינו שעבור $x = 1$ , לא משנה איזה $y$ נבחר, $z$ ייבחר מספר כלשהו שיגביל את הבחירה של $w$ ונקבל $F$ תמיד.