L. Dietrich

Calcul de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n \mathrm{d}x$ via la loi de Bates (Note 2)

Il est bien connu que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ est une intégrale semi-convergente au sens de Riemann. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4(n-1)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{n}{2}-k\right)^{n-1} \operatorname{sgn}\left(\frac{n}{2}-k\right)$$

Démonstration. Nous allons utiliser la transformée de Fourier des fonctions L^2 avec la convention suivante :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} \mathrm{d}x.$$

Soit $n \geq 1$. Notons $f \colon x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$. Alors $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et il est bien connu qu'avec notre convention, $\hat{f} = \pi \mathbf{1}_{[-1,1]}$. Remarquons maintenant que par parité,

$$I_n := \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\widehat{f^n}(0). \tag{1}$$

Or avec notre convention on a pour tout $(f,g) \in (\mathrm{L}^2)^2$, $\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi}\hat{f} * \hat{g}$ (où $*$ désigne le produit de convolution), si bien que (1) devient

$$I_n = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \left(\hat{f} * \cdots * \hat{f}\right)(0). \tag{2}$$

Faisons un petit détour par les probabilités. Prenons $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes uniformes sur $[-1,1]$. La loi de $S_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ est alors connue, c'est une loi de *Bates* (voire par exemple [1] pour la densité sur $[0,1]$ puis faire une transformation affine pour passer sur $[-1,1]$)) qui a pour densité

$$g_n := \frac{1}{2}\frac{n}{2(n-1)!}\mathbf{1}_{[-1,1]} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(n\frac{x+1}{2}-k\right)^{n-1} \operatorname{sgn}\left(n\frac{x+1}{2}-k\right)$$

où sgn signifie *signe*. Remarquons que $\hat{f} = \underbrace{\frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}}_{:=\hat{g}} 2\pi$ où $\hat{g}$ est la densité des X_i. Ainsi $\hat{g} * \cdots * \hat{g}$ qui est la densité de nS_n vérifie (effet d'une transformation affine sur la densité) :

$$\left(\hat{g} * \cdots * \hat{g}\right)(x) = \frac{1}{n} g_n\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{4(n-1)!}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{x+n}{2}-k\right)^{n-1} \operatorname{sgn}\left(\frac{x+n}{2}-k\right)$$

donc

$$\left(\hat{g} * \cdots * \hat{g}\right)(0) = \frac{1}{4(n-1)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{n}{2}-k\right)^{n-1} \operatorname{sgn}\left(\frac{n}{2}-k\right).$$

Enfin, par (2) comme $\hat{f} = \pi\hat{g}$ on récupère

$$I_n = \frac{1}{2}\frac{(2\pi)^n}{(2\pi)^{n-1}} \left(\hat{g} * \cdots * \hat{g}\right)(0) = \frac{\pi}{4(n-1)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{n}{2}-k\right)^{n-1} \operatorname{sgn}\left(\frac{n}{2}-k\right).$$

□

Références

[1] N. L. Johnson, S. Kotz, and N. Balakrishnan, *Continuous univariate distributions. Vol. 2. 2nd ed*, New York, NY : Wiley, 2nd ed. ed., 1995.