

CALCUL DE $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n dx$ VIA LA LOI DE BATES (NOTE 2)

Il est bien connu que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ est une intégrale semi-convergente au sens de Riemann. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n dx = \frac{\pi}{4(n-1)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{n}{2} - k\right)^{n-1} \operatorname{sgn}\left(\frac{n}{2} - k\right)$$

Démonstration. Nous allons utiliser la transformée de Fourier des fonctions L^2 avec la convention suivante :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Soit $n \geq 1$. Notons $f: x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$. Alors $f \in L^2(\mathbb{R})$ et il est bien connu qu'avec notre convention,

$$\hat{f} = \pi \mathbf{1}_{[-1,1]} \quad (1)$$

Remarquons maintenant que par parité,

$$I_n := \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n dx = \frac{1}{2} \widehat{f^n}(0). \quad (2)$$

Or avec notre convention on a pour tout $(f, g) \in (L^2)^2$,

$$\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}$$

où $*$ désigne le produit de convolution, si bien que (2) devient

$$I_n = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} (\hat{f} * \dots * \hat{f})(0). \quad (3)$$

Faisons un petit détour par les probabilités. Prenons X_1, \dots, X_n des variables indépendantes uniformes sur $[-1, 1]$. La loi de $S_n := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ est alors connue, c'est une loi de *Bates* qui a pour densité

$$g_n := \frac{1}{2} \frac{n}{2(n-1)!} \mathbf{1}_{[-1,1]} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(n \frac{x+1}{2} - k\right)^{n-1} \operatorname{sgn}\left(n \frac{x+1}{2} - k\right)$$

où sgn signifie *signe*. Remarquons que $\hat{f} = \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}}_{:= \hat{g}} 2\pi$ où \hat{g} est la densité des X_i . Ainsi $\hat{g} * \dots * \hat{g}$ qui est la

densité de nS_n vérifie (effet d'une transformation affine sur la densité) :

$$(\hat{g} * \dots * \hat{g})(x) = \frac{1}{n} g_n\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{4(n-1)!} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{x+n}{2} - k\right)^{n-1} \operatorname{sgn}\left(\frac{x+n}{2} - k\right)$$

donc

$$(\hat{g} * \dots * \hat{g})(0) = \frac{1}{4(n-1)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{n}{2} - k\right)^{n-1} \operatorname{sgn}\left(\frac{n}{2} - k\right)$$

Enfin, par (3) comme $\hat{f} = \pi \hat{g}$ on récupère

$$I_n = \frac{1}{2} \frac{(2\pi)^n}{(2\pi)^{n-1}} (\hat{g} * \dots * \hat{g})(0) = \frac{\pi}{4(n-1)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{n}{2} - k\right)^{n-1} \operatorname{sgn}\left(\frac{n}{2} - k\right).$$

□