Toute fonction réelle convexe et dérivable est $\mathcal{C}^1$

Voici la réponse à une question simple et naturelle que j'ai découvert sur le tard !

Théorème. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable sur I. Alors f est $\mathcal{C}^1$ sur I.*

Démonstration. On commence par un lemme qui explique que la seule chose qui peut rendre une fonction dérivable non $\mathcal{C}^1$ en un point, c'est une *absence* de limite de la dérivée à gauche ou à droite de ce point.

Lemme. Soit $g : I \to \mathbb{R}$ dérivable en x_0 mais pas $\mathcal{C}^1$ en x_0. Alors g' n'admet pas de limite à gauche, ou n'admet pas de limite à droite, en x_0.

Preuve du lemme. Le fait que g' ne soit pas $\mathcal{C}^1$ en x_0 signifie que :

- ou bien g' n'admet pas de limite à gauche ou n'admet pas de limite à droite en x_0,
- ou bien au moins l'une des limites à gauche ou à droite de g' en x_0 n'est pas égale à $g'(x_0)$.

Par le théorème de Darboux, g' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires donc la deuxième alternative ne peut pas avoir lieu. $\square$

La conclusion est maintenant immédiate, puisque f' est croissante et admet donc une limite à gauche et à droite en tout $x_0 \in I$.

$\square$