

## Une condition suffisante pour être $L^p$ (Note 1)

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré. On suppose  $\mu$   $\sigma$ -finie. Soit  $1 < p, q < +\infty$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Soit  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable telle que pour tout  $g \in L^q$  on ait  $fg$  intégrable. Alors  $f \in L^p$ .

*Démonstration.* Le résultat est intéressant car il ne demande pas qu'il existe  $C > 0$  telle que pour tout  $g \in L^q$ ,  $|\int_X fg \, d\mu| \leq C\|g\|_{L^q}$ , c'est-à-dire la continuité de la forme linéaire  $T_f : g \mapsto \int_X fg \, d\mu$  sur  $L^q$ , ce qui par le théorème de représentation de Riesz (cf. remarque ci-dessous), donnerait bien la conclusion. Montrons en fait que cette continuité a bien lieu avec notre hypothèse.

Comme  $L^q$  est un espace de Banach, on dispose du théorème du graphe fermé. Supposons donc que  $(g_n)$  converge vers 0 dans  $L^q$  et que  $(T_f(g_n))$  converge. Comme  $(g_n)$  converge vers 0 dans  $L^q$  alors par une réciproque partielle au théorème de convergence dominée de Lebesgue (voir par exemple le théorème IV.9 de [1]), on peut extraire de  $(g_n)$  une sous suite,  $(g_{\varphi(n)})$  qui converge presque partout vers 0 et telle qu'il existe  $h \in L^q$  avec  $|g_{\varphi(n)}| \leq h$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et presque tout  $x \in X$ , et donc  $|fg_{\varphi(n)}| \leq fh$  qui est intégrable par notre hypothèse. Par convergence dominée, on a alors  $T_f(g_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Mais comme la suite  $(T_f(g_n))$  est supposée convergente, alors par unicité sa limite est 0. Par le théorème du graphe fermé,  $T_f$  est une forme linéaire continue sur  $L^q$ . □

REMARQUE. Il est vrai dans tout espace mesuré que le dual de  $L^p$  est isométriquement isomorphe à  $L^q$  (voir [2]) donc il existe  $F \in L^p$  telle que  $\int_X Fg \, d\mu = \int_X fg \, d\mu$  pour tout  $g \in L^q$ . Cependant, pour en déduire que  $f = F$  presque partout il faut supposer  $\mu$   $\sigma$ -finie.

En effet, supposons que  $F$  et  $f$  ne sont pas égales presque partout. Alors il existe  $0 < \varepsilon < 1$  tel que  $|F - f| > \varepsilon$  sur un  $E \subset X$  avec  $\varepsilon < \mu(E) < 1$  (c'est pour cette dernière inégalité qu'on utilise le fait que  $\mu$  est  $\sigma$ -finie). Posons alors  $g = \frac{|F-f|}{F-f} \mathbf{1}_E \in L^q$ . On a alors  $0 = \int (F - f)g = \int |F - f| > \varepsilon^2$  ce qui est absurde.

### RÉFÉRENCES

- [1] H. BRÉZIS, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, 1983.
- [2] G. B. FOLLAND, *Real Analysis : Modern Techniques and Their Applications*, 2nd edition, 2 ed., 1999.