

Calcul de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n dx$ via la loi de Bates

Il est bien connu que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n dx = \frac{\pi}{2^n(n-1)!} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} (n-2k)^{n-1}$$

Démonstration. Nous allons utiliser la transformée de Fourier des fonctions L^2 avec la convention suivante :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Soit $n \geq 1$. Notons $f: x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$. Alors $f \in L^2(\mathbb{R})$ et il est bien connu qu'avec notre convention, $\hat{f} = \pi \mathbf{1}_{[-1,1]}$. Remarquons maintenant que par parité,

$$I_n := \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n dx = \frac{1}{2} \widehat{f^n}(0). \quad (1)$$

Or avec notre convention on a pour tout $(f, g) \in (L^2)^2$, $\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}$ (où $*$ désigne le produit de convolution), si bien que (1) devient

$$I_n = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} (\hat{f} * \dots * \hat{f})(0). \quad (2)$$

Faisons un petit détour par les probabilités. Prenons X_1, \dots, X_n des variables indépendantes uniformes sur $[-1, 1]$. La loi de $S_n := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ est alors connue, c'est une loi de Bates (voire par exemple [1] pour la densité sur $[0, 1]$ puis faire une transformation affine pour passer sur $[-1, 1]$) qui a pour densité

$$g_n := \frac{1}{2} \frac{n}{2(n-1)!} \mathbf{1}_{[-1,1]} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(n \frac{x+1}{2} - k\right)^{n-1} \operatorname{sgn} \left(n \frac{x+1}{2} - k\right)$$

où sgn signifie *signe*, avec la convention $\operatorname{sgn}(0) = 0$. Remarquons que $\hat{f} = \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}}_{:=\hat{g}} 2\pi$ où \hat{g} est la densité

des X_i . Ainsi $\hat{g} * \dots * \hat{g}$ qui est la densité de nS_n vérifie (effet d'une transformation affine sur la densité) :

$$(\hat{g} * \dots * \hat{g})(x) = \frac{1}{n} g_n \left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{4(n-1)!} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{x+n}{2} - k\right)^{n-1} \operatorname{sgn} \left(\frac{x+n}{2} - k\right)$$

donc

$$(\hat{g} * \dots * \hat{g})(0) = \frac{1}{4(n-1)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{n}{2} - k\right)^{n-1} \operatorname{sgn} \left(\frac{n}{2} - k\right).$$

Enfin, par (2) comme $\hat{f} = 2\pi\hat{g}$ on récupère

$$I_n = \frac{1}{2} \frac{(2\pi)^n}{(2\pi)^{n-1}} (\hat{g} * \dots * \hat{g})(0) = \frac{\pi}{4(n-1)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{n}{2} - k\right)^{n-1} \operatorname{sgn} \left(\frac{n}{2} - k\right).$$

ce qui par symétrie autour de $n/2$ et en factorisant par $\frac{1}{2^{n-1}}$ se simplifie en la formule annoncée. □

Ci-dessous les valeurs de $\frac{I_n}{\pi}$ sous forme de fractions irréductibles pour $n \in \llbracket 1, 30 \rrbracket$, calculées grâce au module fractions de Python.

```
import math
from fractions import Fraction

def binom(n,k):
    return Fraction(math.factorial(n), (math.factorial(k)*math.factorial(n-k)))

for n in range(1,31):
    S=0
    for k in range(math.floor(n/2)+1):
        S=S+ Fraction((-1)**k * binom(n,k)* (n-2*k)**(n-1), 2**n*math.factorial(n-1))
    print(S)
```

1/2
1/2
3/8
1/3
115/384
11/40
5887/23040
151/630
259723/1146880
15619/72576
381773117/1857945600
655177/3326400
20646903199/108999475200
27085381/148262400
467168310097/2645053931520
2330931341/13621608000
75920439315929441/45706531936656000
12157712239/75277762560
5278968781483042969/33566877054287216640
37307713155613/243290200817664
9093099984535515162569/60740063241091153920000
339781108897078469/2322315553259520000
168702835448329388944396777/1178600187130132750663680000
75489558096433522049/538583682060103680000
28597941405166726516864710559/208187937054666649077232435200
11482547005345338463969/85226428809510912000000
430374979754582929417781296799/3254501180508256899956736000000
3607856726470666022715979/27777728189842735104000000
200905120288615660597628246036915611/1573900804133279867023877210112000000
18497593486903125823791655511/147362699895661699242393600000

RÉFÉRENCES

- [1] N. L. JOHNSON, S. KOTZ, AND N. BALAKRISHNAN, *Continuous univariate distributions. Vol. 2. 2nd ed*, New York, NY : Wiley, 2nd ed. ed., 1995.