Une condition suffisante pour être L^p

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose μ σ-finie. Soit $1 < p, q < +\infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $f\colon X \to \mathbb{R}$ mesurable telle que pour tout $g \in \mathrm{L}^q$ on ait fg intégrable. Alors $f \in \mathrm{L}^p$.

Démonstration. Le résultat est intéressant car il ne demande pas qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $g \in \mathrm{L}^q$, $|\int_X fg \,\mathrm{d}\mu| \leq C\|g\|_{\mathrm{L}^q}$, c'est-à-dire la continuité de la forme linéaire $T_f : g \mapsto \int_X fg \,\mathrm{d}\mu$ sur L^q, ce qui par le théorème de représentation de Riesz (cf. remarque ci-dessous), donnerait bien la conclusion. Montrons en fait que cette continuité a bien lieu avec notre hypothèse.

Comme L^q est un espace de Banach, on dispose du théorème du graphe fermé. Supposons donc que (g_n) converge vers 0 dans L^q *et* que $(T_f(g_n))$ converge. Comme (g_n) converge vers 0 dans L^q alors par une réciproque partielle au théorème de convergence dominée de Lebesgue (voir par exemple le théorème IV.9 de [**?**]), on peut extraire de (g_n) une sous suite, $(g_{\varphi(n)})$ qui converge presque partout vers 0 et telle qu'il existe $h \in \mathrm{L}^q$ avec $|g_{\varphi(n)}| \leq h$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$, et donc $|fg_{\varphi(n)}| \leq fh$ qui est intégrable par notre hypothèse. Par convergence dominée, on a alors $T_f(g_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Mais comme la suite $(T_f(g_n))$ est supposée convergente, alors par unicité sa limite est 0. Par le théorème du graphe fermé, T_f est une forme linéaire continue sur L^q.

$\square$

Remarque. Il est vrai dans tout espace mesuré que le dual de L^p est isométriquement isomorphe à L^q (voir [**?**]) donc il existe $F \in \mathrm{L}^p$ telle que $\int_X Fg \,\mathrm{d}\mu = \int_X fg \,\mathrm{d}\mu$ pour tout $g \in \mathrm{L}^q$. Cependant, pour en déduire que $f = F$ presque partout il faut supposer μ σ-finie.

En effet, supposons que F et f ne sont pas égales presque partout. Alors il existe $0 < \varepsilon < 1$ tel que $|F - f| > \varepsilon$ sur un $E \subset X$ avec $\varepsilon < \mu(E) < 1$ (c'est pour cette dernière inégalité qu'on utilise le fait que μ est σ-finie). Posons alors $g = \frac{|F-f|}{F-f}\mathbf{1}_E \in L^q$. On a alors $0 = \int(F - f)g = \int |F - f| > \varepsilon^2$ ce qui est absurde.