

Calcul de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n dx$ via la loi de Bates (Note 2)

Il est bien connu que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ est une intégrale semi-convergente au sens de Riemann. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n dx = \frac{\pi}{4(n-1)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{n}{2} - k\right)^{n-1} \operatorname{sgn}\left(\frac{n}{2} - k\right)$$

Démonstration. Nous allons utiliser la transformée de Fourier des fonctions L^2 avec la convention suivante :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Soit $n \geq 1$. Notons $f: x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$. Alors $f \in L^2(\mathbb{R})$ et il est bien connu qu'avec notre convention, $\hat{f} = \pi \mathbf{1}_{[-1,1]}$. Remarquons maintenant que par parité,

$$I_n := \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n dx = \frac{1}{2} \widehat{f^n}(0). \quad (1)$$

Or avec notre convention on a pour tout $(f, g) \in (L^2)^2$, $\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}$ (où $*$ désigne le produit de convolution), si bien que (1) devient

$$I_n = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} (\hat{f} * \dots * \hat{f})(0). \quad (2)$$

Faisons un petit détour par les probabilités. Prenons X_1, \dots, X_n des variables indépendantes uniformes sur $[-1, 1]$. La loi de $S_n := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ est alors connue, c'est une loi de Bates (voire par exemple [1] pour la densité sur $[0, 1]$ puis faire une transformation affine pour passer sur $[-1, 1]$) qui a pour densité

$$g_n := \frac{1}{2} \frac{n}{2(n-1)!} \mathbf{1}_{[-1,1]} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(n \frac{x+1}{2} - k\right)^{n-1} \operatorname{sgn}\left(n \frac{x+1}{2} - k\right)$$

où sgn signifie *signe*, avec la convention $\operatorname{sgn}(0) = 0$. Remarquons que $\hat{f} = \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}}_{:= \hat{g}} 2\pi$ où \hat{g} est la densité

des X_i . Ainsi $\hat{g} * \dots * \hat{g}$ qui est la densité de nS_n vérifie (effet d'une transformation affine sur la densité) :

$$(\hat{g} * \dots * \hat{g})(x) = \frac{1}{n} g_n\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{4(n-1)!} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{x+n}{2} - k\right)^{n-1} \operatorname{sgn}\left(\frac{x+n}{2} - k\right)$$

donc

$$(\hat{g} * \dots * \hat{g})(0) = \frac{1}{4(n-1)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{n}{2} - k\right)^{n-1} \operatorname{sgn}\left(\frac{n}{2} - k\right).$$

Enfin, par (2) comme $\hat{f} = 2\pi \hat{g}$ on récupère

$$I_n = \frac{1}{2} \frac{(2\pi)^n}{(2\pi)^{n-1}} (\hat{g} * \dots * \hat{g})(0) = \frac{\pi}{4(n-1)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{n}{2} - k\right)^{n-1} \operatorname{sgn}\left(\frac{n}{2} - k\right).$$

□

RÉFÉRENCES

- [1] N. L. JOHNSON, S. KOTZ, AND N. BALAKRISHNAN, *Continuous univariate distributions. Vol. 2. 2nd ed*, New York, NY : Wiley, 2nd ed. ed., 1995.