

Paul Lévy, Fermat-Wiles et une somme.

Dans [1], Paul Lévy affirme sans la démontrer l'équivalence entre l'identité suivante

$$\sum_{p=3}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n^p x)}{n^2} \right)^3 dx = 0$$

et le théorème de Fermat-Wiles, seulement Fermat à l'époque. On détaille un des deux sens ici.

Montrons en fait que pour tout entier $p \geq 3$,

$$\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n^p x)}{n^2} \right)^3 dx = 0.$$

Fixons p un tel entier. Commençons déjà par remarquer que la série de fonctions sous l'intégrale converge normalement – et donc son cube, uniformément – sur $[0, 2\pi]$. Ainsi il suffit de vérifier que pour tout entier $N \geq 1$ on a

$$\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^N \frac{\cos(n^p x)}{n^2} \right)^3 dx = 0.$$

Pour cela, il est suffisant de montrer que si n_1, n_2, n_3 désignent des entiers supérieurs ou égaux à 1 alors

$$\int_0^{2\pi} \cos(n_1^p x) \cos(n_2^p x) \cos(n_3^p x) dx = 0.$$

L'identité pour tout réels r, s, t

$$\cos(r) \cos(s) \cos(t) = \frac{1}{4} (\cos(r+s-t) + \cos(s+t-r) + \cos(t+r-s) + \cos(r+s+t))$$

permet de voir que la fonction intégrée ci-dessus est bien de moyenne nulle sur $[0, 2\pi]$ dès lors que

$$n_1^p + n_2^p - n_3^p \neq 0, \quad n_2^p + n_3^p - n_1^p \neq 0, \quad n_3^p + n_1^p - n_2^p \neq 0$$

ce qui est vrai par le théorème de Fermat-Wiles car $p \geq 3$.

REMARQUE. Lors de la publication de [1], le théorème de Fermat-Wiles n'était encore que le grand théorème de Fermat et pas encore démontré. En fait cette identité est une façon de compter les solutions à l'équation de Fermat : remarquons que si (n_1, n_2, n_3) en est une solution alors elle apporte une contribution $+1/4$ dans l'intégrale ci-dessus (au total dans l'identité il faudrait aussi prendre en compte les autres termes développés du cube qui tombent sur n_1, n_2 et n_3). Ainsi, une façon de prouver le théorème de Fermat-Wiles serait de réussir à démontrer cette identité, mais ceci semble hors de portée. Pour aller plus loin, on pourra se renseigner sur la méthode du cercle de Hardy et Littlewood [2]. Je remercie enfin Antoine Chambert-Loir qui m'a montré cet article de Paul Lévy et initié à cette problématique.

RÉFÉRENCES

- [1] P. LEVY, *Axiome de Zermelo et nombres transfinis*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (3), 67 (1950), pp. 15–49.
- [2] R. C. VAUGHAN, *The Hardy-Littlewood method. 2nd ed*, vol. 125, Cambridge : Cambridge University Press, 2nd ed. ed., 1997.