Calcul de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n \mathrm{d}x$ via la loi de Bates

Il est bien connu que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2^n(n-1)!} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} (n-2k)^{n-1}$$

Démonstration. Nous allons utiliser la transformée de Fourier des fonctions L^2 avec la convention suivante :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} \mathrm{d}x.$$

Soit $n \geq 1$. Notons $f \colon x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$. Alors $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et il est bien connu qu'avec notre convention, $\hat{f} = \pi \mathbf{1}_{[-1,1]}$. Remarquons maintenant que par parité,

$$I_n := \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\widehat{f^n}(0). \tag{1}$$

Or avec notre convention on a pour tout $(f,g) \in (\mathrm{L}^2)^2$, $\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi}\hat{f} * \hat{g}$ (où $*$ désigne le produit de convolution), si bien que (1) devient

$$I_n = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \left(\hat{f} * \cdots * \hat{f}\right)(0). \tag{2}$$

Faisons un petit détour par les probabilités. Prenons $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes uniformes sur $[-1,1]$. La loi de $S_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ est alors connue, c'est une loi de *Bates* (voire par exemple [1] pour la densité sur $[0,1]$ puis faire une transformation affine pour passer sur $[-1,1]$)) qui a pour densité

$$g_n := \frac{1}{2}\frac{n}{2(n-1)!}\mathbf{1}_{[-1,1]} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(n\frac{x+1}{2} - k\right)^{n-1} \operatorname{sgn}\left(n\frac{x+1}{2} - k\right)$$

où sgn signifie *signe*, avec la convention $\operatorname{sgn}(0) = 0$. Remarquons que $\hat{f} = \underbrace{\frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}}_{:=\hat{g}} 2\pi$ où $\hat{g}$ est la densité des X_i. Ainsi $\hat{g} * \cdots * \hat{g}$ qui est la densité de nS_n vérifie (effet d'une transformation affine sur la densité) :

$$\left(\hat{g} * \cdots * \hat{g}\right)(x) = \frac{1}{n} g_n\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{4(n-1)!}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{x+n}{2} - k\right)^{n-1} \operatorname{sgn}\left(\frac{x+n}{2} - k\right)$$

donc

$$\left(\hat{g} * \cdots * \hat{g}\right)(0) = \frac{1}{4(n-1)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{n}{2} - k\right)^{n-1} \operatorname{sgn}\left(\frac{n}{2} - k\right).$$

Enfin, par (2) comme $\hat{f} = 2\pi\hat{g}$ on récupère

$$I_n = \frac{1}{2}\frac{(2\pi)^n}{(2\pi)^{n-1}} \left(\hat{g} * \cdots * \hat{g}\right)(0) = \frac{\pi}{4(n-1)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{n}{2} - k\right)^{n-1} \operatorname{sgn}\left(\frac{n}{2} - k\right).$$

ce qui par symétrie autour de $n/2$ et en factorisant par $\frac{1}{2^{n-1}}$ se simplifie en la formule annoncée.

$\square$

Ci-dessous les valeurs de $\frac{I_n}{\pi}$ sous forme de fractions irréductibles pour $n \in [\![1, 30]\!]$, calculées grâce au module `fractions` de Python.

```
import math
from fractions import Fraction

def binom(n,k):
  return Fraction(math.factorial(n),(math.factorial(k)*math.factorial(n-k)))

for n in range(1,31):
  S=0
  for k in range(math.floor(n/2)+1):
    S=S+ Fraction((-1)**k * binom(n,k)* (n-2*k)**(n-1), 2**n*math.factorial(n-1))
  print(S)
```

```
1/2
1/2
3/8
1/3
115/384
11/40
5887/23040
151/630
259723/1146880
15619/72576
381773117/1857945600
655177/3326400
20646903199/108999475200
27085381/148262400
467168310097/2645053931520
2330931341/13621608000
75920439315929441/457065319366656000
12157712239/75277762560
5278968781483042969/33566877054287216640
37307713155613/243290200817664
909309998453551516 2569/607400632410911539 20000
339781108897078469/2322315553259520000
168702835448329388944396777/1178600187130132750663680000
754895580964335220 49/538583682060103680000
2859794140516672651 6864710559/2081879370546664907 7232435200
1148254700534533846 3969/852264288095109 12000000
430374979754582929417781296799/3254501180508256899567 36000000
360785672647066602 2715979/2777772818984273510 4000000
200905120288615660597628246036915611/1573900804133279867023877210112000000
184975934869031258237916555 11/147362699895661699242393600000
```

Références

[1] N. L. Johnson, S. Kotz, and N. Balakrishnan, *Continuous univariate distributions. Vol. 2. 2nd ed*, New York, NY : Wiley, 2nd ed. ed., 1995.