L. Dietrich

# Calcul de $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n \mathrm{d}x$ via la loi de Bates (Note 2)

Il est bien connu que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ est une intégrale semi-convergente au sens de Riemann. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n \mathrm{d}x =$$

*Démonstration.* Nous allons utiliser la transformée de Fourier des fonctions $\mathrm{L}^2$ avec la convention suivante :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x.$$

Soit $n \geq 1$. Notons $f\colon x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$. Alors $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et il est bien connu qu'avec notre convention,

$$\hat{f} = \pi \mathbf{1}_{[-1,1]} \tag{1}$$

Remarquons maintenant que par parité,

$$I_n := \int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\widehat{f^n}(0). \tag{2}$$

Or avec notre convention on a pour tout $(f,g) \in (\mathrm{L}^2)^2$,

$$\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi}\hat{f} * \hat{g}$$

où $*$ désigne le produit de convolution, si bien que (2) devient

$$I_n = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\left(\hat{f} * \cdots * \hat{f}\right)(0). \tag{3}$$

Faisons un petit détour par les probabilités. Prenons $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes uniformes sur $[-1,1]$. La loi de $S_n := \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ est alors connue, c'est une loi de *Bates* qui a pour densité

$$g_n := \frac{1}{2}\frac{n}{2(n-1)!}\mathbf{1}_{[-1,1]}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(n\frac{x+1}{2}-k\right)^{n-1}\operatorname{sgn}\left(n\frac{x+1}{2}-k\right)$$

où sgn signifie *signe*. Remarquons que $\hat{f} = \underbrace{\frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}}_{:=\hat{g}}2\pi$ où $\hat{g}$ est la densité des $X_i$. Ainsi $\hat{g} * \cdots * \hat{g}$ qui est la densité de $nS_n$ vérifie (effet d'une transformation affine sur la densité) :

$$\left(\hat{g} * \cdots * \hat{g}\right)(x) = \frac{1}{n}g_n\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{4(n-1)!}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{x+n}{2}-k\right)^{n-1}\operatorname{sgn}\left(\frac{x+n}{2}-k\right)$$

donc

$$\left(\hat{g} * \cdots * \hat{g}\right)(0) = \frac{1}{4(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{n}{2}-k\right)^{n-1}\operatorname{sgn}\left(\frac{n}{2}-k\right)$$

Enfin, par (3) comme $\hat{f} = \pi\hat{g}$ on récupère

$$I_n = \frac{1}{2}\frac{(2\pi)^n}{(2\pi)^{n-1}}\left(\hat{g} * \cdots * \hat{g}\right)(0) = \frac{\pi}{4(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{n}{2}-k\right)^{n-1}\operatorname{sgn}\left(\frac{n}{2}-k\right).$$

□