Paul Lévy, Fermat-Wiles et une somme. (Note 3)

Dans [1], Paul Lévy affirme (sans la démontrer) l'équivalence entre l'identité suivante

$$\sum_{p=3}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n^p x)}{n^2} \right)^3 \mathrm{d}x = 0$$

et le théorème de Fermat-Wiles (seulement Fermat à l'époque). On détaille le sens direct ici.

Montrons en fait que pour tout entier $p \geq 3$,

$$\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n^p x)}{n^2} \right)^3 \mathrm{d}x = 0.$$

Commençons déjà par remarquer que la série de fonctions sous l'intégrale converge normalement – et donc son cube, uniformément – sur $[0, 2\pi]$. Ainsi il suffit de vérifier que pour tout entier $N \geq 1$ on a

$$\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{N} \cos(n^p x) \right)^3 \mathrm{d}x = 0.$$

Pour cela, il est suffisant de montrer que si n_1, n_2, n_3 désignent des entiers supérieurs ou égaux à 1 alors

$$\int_0^{2\pi} \cos(n_1^p x) \cos(n_2^p x) \cos(n_3^p x) \mathrm{d}x = 0.$$

L'identité pour tout réels r, s, t

$$\cos r \cos s \cos t = \frac{1}{4} \left(\cos(r+s+t) + \cos(s+t-r) + \cos(t+r-s) + \cos(r+s+t) \right)$$

permet de primitiver par rapport à x la quantité $\cos(ax)\cos(bx)\cos(cx)$ en

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\sin((a+b-c)x)}{a+b-c} + \frac{\sin((b+c-a)x)}{b+c-a} + \frac{\sin((c+a-b)x)}{c+a-b} + \frac{\sin((a+b+c)x)}{a+b+c} \right]$$

si bien qu'avec $a = n_1^p,\ b = n_2^p,\ c = n_3^p$ et $x = 2\pi$ la quantité ci-dessus est nulle dès lors que $a+b-c \neq 0$, $b+c-a \neq 0$, $c+a-b \neq 0$ ce qui est vrai par le théorème de Fermat-Wiles car $p \geq 3$.

Remarque. La réciproque demande plus de travail, (remarquons par exemple que nous n'avons pas utilisé le facteur $\frac{1}{p^2}$. En fait cette identité est une façon de compter les solutions à l'équation de Fermat-Wiles. Pour aller plus loin autour de cette équivalence, on peut se renseigner sur la méthode du cercle de Hardy et Littlewood [2]. Je remercie enfin Antoine Chambert-Loir qui m'a montré cet article de Paul Lévy.

Références

[1] P. Levy, *Axiome de Zermelo et nombres transfinis*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (3), 67 (1950), pp. 15–49.

[2] R. C. Vaughan, *The Hardy-Littlewood method. 2nd ed*, vol. 125, Cambridge : Cambridge University Press, 2nd ed. ed., 1997.