Aula 5 - Equação geral do calor. Parede Plana

Prof. Dr. Caio[1], Prof. Akira[2]

1. A Lei de Fourier e a Equação Geral

Lembrando que a Lei de Fourier na sua forma geral é dada por:

$$\overrightarrow{q''} = -k\nabla T = -k\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right). \tag{1}$$

Note que com a presença do gradiente na forma geral da Lei de Fourier fica claro o motivo do sinal negativo. Como o calor vai da superfície de maior para menor temperatura, utilizamos o sinal para corrigir o sentido que é contrário ao gradiente.

Em posse da Lei de Fourier, podemos deduzir a Equação Geral da Condução (também chamada de Equação de Difusão Térmica). Com esta equação será possível encontrarmos a distribuição de temperatura em um meio.

Considerando o volume de controle diferencial $dxdydz$ e o sistema de coordenadas cartesianas, pelo balanço energético obtemos que:

$$q_x - q_{x+dx} + q_y - q_{y+dy} + q_z - q_{z+dz} + \dot{E}_{ger} = \dot{E}_{acu}, \tag{2}$$

onde

$$\dot{E}_{ger} = \dot{q}dxdydz \tag{3}$$

e

$$\dot{E}_{acu} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz, \tag{4}$$

[1]caiofrs@insper.edu.br.
[2]pauloafe@insper.edu.br.

com ρ sendo a massa específica, c_p é o calor específico. Importante observar que $\dot{q}$ é dado em $[J/(sm^3)]$. A grandez ρc_p ($[J/(m^3K)]$) é chamada de capacidade térmica volumétrica e nos fornece a capacidade de um material armazenar energia térmica.

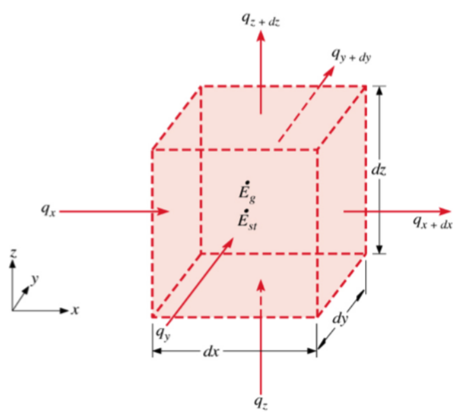

Figura 1: Volume de controle diferencial. Fonte: [1]

Expandindo q_{x+dx}, q_{y+dy} e q_{z+dz} em série de Taylor e realizando o truncamento nos termos de altas ordens, obtemos:

$$\begin{aligned} q_{x+dx} &= q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx, \\ q_{y+dy} &= q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y}dy, \\ q_{z+dz} &= q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z}dz. \end{aligned} \tag{5}$$

Substituindo, as equações (3), (4) e (5) em (2), obtemos:

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x}dx - \frac{\partial q_y}{\partial y}dy - \frac{\partial q_z}{\partial z}dz + \dot{q}dxdydz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}dxdydz. \tag{6}$$

Aplicando a Lei de Fourier na equação (6):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\frac{\partial T}{\partial x}dydz\right)dx - \frac{\partial}{\partial y}\left(-k\frac{\partial T}{\partial y}dxdz\right)dy - \frac{\partial}{\partial z}\left(-k\frac{\partial T}{\partial z}dxdy\right)dz+ \\ +\dot{q}dxdydz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}dxdydz. \end{aligned} \tag{7}$$

Dividing pelo volume, obtemos a Equação Geral da Condução:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-k\frac{\partial T}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(-k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{8}$$

O termo $-\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-k\frac{\partial T}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(-k\frac{\partial T}{\partial z}\right)$ representa a taxa líquida de transferência de energia por condução para o interior do volume de controle. Já, $\dot{q}$ é a taxa volumétrica de geração de energia térmica. Por fim, o termo $\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$ é a taxa de variação da energia térmica acumulada no interior do volume de controle.

A equação (8) pode ser também escrita em coordenadas cilíndricas e esféricas:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{9}$$

e

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(k\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)+\dot{q}=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{10}$$

As equações acima referem-se, respectivamente, as figuras figuras 2 e 3.

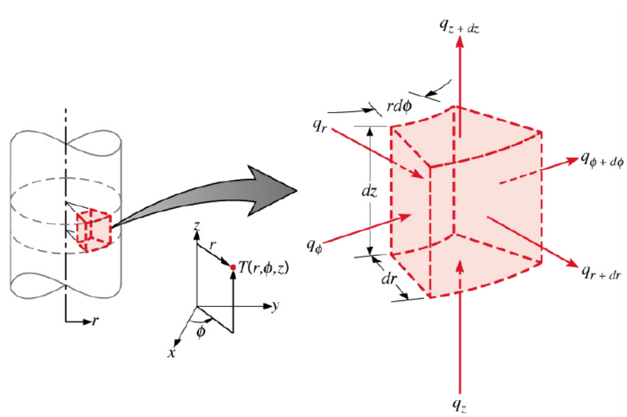

Figura 2: Volume de controle diferencial em coordenadas cilíndricas. Fonte: [1]

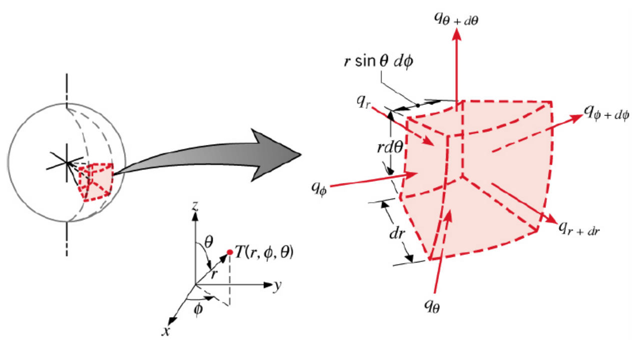

Figura 3: Volume de controle diferencial em coordenadas esféricas. Fonte: [1]

2. Propriedades termofísicas na condução

Sabemos que o coeficiente k refere-se a condutividade térmica, ou seja, a propriedade termofísica do material em transferir energia térmica por condução. Podemos também definir, a partir da condutividade térmica, a difusividade.

Definição 1 (Difusividade térmica). *trata-se da capacidade de um material de conduzir energia térmica em relação à sua capacidade de acumula-la. Em outras palavras, é a capacidade do material em responder a mudanças no ambiente térmico. A difusividade térmica é dada por:*

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}, \tag{11}$$

em $[m^2/s]$.

Ressaltmos que tanto o coeficiente de condutividade k quanto o coeficiente de difusividade térmica α são propriedades do material e podem ser encontradas nas tabelas de propriedades.

3. O caso unidimensional

Em aula tomamos as seguintes hipóteses:

- condução unidimensional;

- propriedades constantes;
- sem geração.

Dessa forma, a equação (8) fica:

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \tag{12}$$

Substituindo (11) em (12):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{13}$$

Note que como a equação (13) é de primeira ordem na variável t e de segunda ordem na variável x, então precisaremos de três condições de contorno para resolver a equação. Mais especificamente, precisaremos de uma distribuição inicial da temperatura no tempo e duas condições inicias para o espaço. As condições de contorno que usaremos são condições de Dirichelt e Neumann. As condições de Dirichelt se nos dão valores da função no domínio. Já as condições de contorno de Neumann nos fornecem a derivada normal ao domínio da função em questão. As figuras 4, 5, 6 e 7 mostram algumas das condições de contorno possíveis.

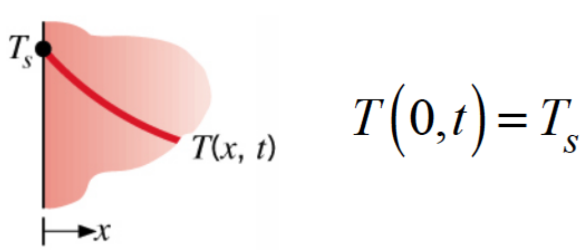

Figura 4: Temperatura superficial constante. Fonte: [1]

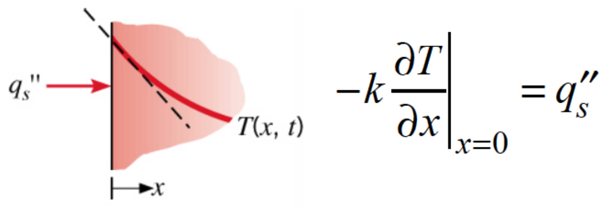

Figura 5: Fluxo de calor constante constante. Fonte: [1]

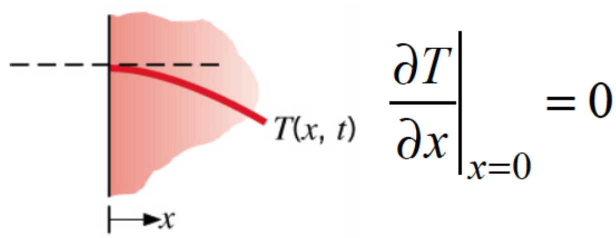

Figura 6: Superfície adiabática. Fonte: [1]

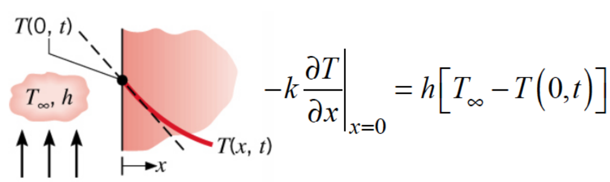

Figura 7: Convecção na superfície. Fonte: [1]

4. Exercícios

1. Considere condições de regime permanente na condução unidimensionalem uma parede plana com uma condutividade térmica $k = 50W/(m \cdot K)$ e espessura $L = 25cm$ sem geração interna de calor. Determine o fluxo térmico e a grandeza desconhecida em cada caso e esboce a distribuição de temperaturas, indicando o sentido do fluxo térmico. As temeperaturas estão em $\circ C$ e os gradientes em K/m

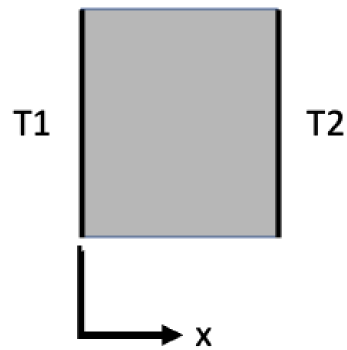

Figura 8: Parede plana.

- $T_1 = 50$, $T_2 = -20$
- $T_1 = -30$, $T_2 = -10$
- $T_1 = 70$, $\frac{dT}{dx} = 160$
- $T_2 = 40$, $\frac{dT}{dx} = -80$
- $T_2 = 30$, $\frac{dT}{dx} = 200$

2. Um aparelho para medir condutividade térmica emprega um aquecedor elétrico que é posicionado entre duas amostras idênticas, com $30mm$ de diâmetro e $60mm$ de comprimento, que são pressionadas entre placas que são mantidas a uma temperatura uniforme de $T_0 = 77°C$, por um fluido circulante. Uma graxa condutora é colocada entre todas as superfícies para garantir um bom contato térmico. Termopares diferenciais, espaçados de $15mm$, são isntalados no interior das amostras. As superfícies laterais das amostras são isoladas de modo a garantir transferênciade calor unidimensionalmente através das amostras.

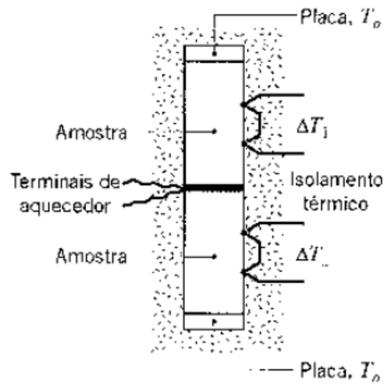

Figura 9: Sistema térmico com termopar e amostras. Fonte: [1]

- Com duas amostras de aço inoxidável 316 no aparelho, a uma corrente elétrica no aquecedor eé de $0.353A$ a $100V$, e os termopares diferenciais indicam $\Delta T_1 = \Delta T_2 = 25°C$. Qual é condutividade térmica do aço inoxidável das amostras? Qual é a temperatura média das amostras?
- Por engano, uma amostra de ferro Armco foi colocada na posição inferior do aparelho. Na posição superior permanece a amostra de aço inoxidável 316 utilizada no item anterior. Para essa situação, a corrente no aquecedor é de $0.601A$ a $100V$, e os termopares diferenciais indicam $\Delta T_1 = \Delta T_2 = 15°C$. Quais são a condutividade térmica e a temperatura média da amostra de ferro Armco?
- Qual eé a vantagem em se construir o aparelho com duas amostras idênticas impresando o aquecedor ao invés de construí-lo com uma uúnica combinação aquecedor-amostra? Quando a perda de calor pelas superfícies laterais das amostras se tornaria significativa? Em quais condições você esperaria $\Delta T_1 \neq \Delta T_2$?

Gabarito

1. • $q''_x = 14kW/m^2$, $\frac{dT}{dx} = -280K/m$

- $q''_x = -4kW/m^2$, $\frac{dT}{dx} = 80K/m$
- $q''_x = 8kW/m^2$, $T_2 = 110°C$
- $q''_x = 4kW/m^2$, $T_1 = 60°C$
- $q''_x = -10kW/m^2$, $T_1 = 20°C$

2. - $k = 14.98W/(m \cdot K)$, $T_m = 127°C$.
   - $k = 70.04W/(m \cdot K)$, $T_m = 107°C$

Referências

[1] F. P. Incropera, P. DeWitt, Bergamn, Lavine, Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa, LTC, 2008.