Aulas 24 e 25 - Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Prof. Dr. Caio[1], Prof. Paulo Akira[2]

1. Aspectos práticos para a implementação do Método dos Elementos Finitos (MEF)

Recomenda-se que o aluno faça uma leitura atenta da primeira parte da referência [1] sobre aspectos de modelagem e a aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) para treliças.

O Método dos Elementos Finitos trata-se de um métodos numérico destinado a resolução de equações diferenciais parciais. De forma bastante geral, o método se propõe a resolver um problema cuja a obtenção da solução analítica é uma tarefa difícil ou impossível. Para tanto, o domínio do problema é dividido em domínios mais simples que são chamados de elementos. Por exemplo, no plano, podemos discretizar o domínio em elementos quadriláteros e triangulares. No caso, de um problema espacial, o domínios pode ser discretizado em tetraedros e hexaedros. Dessa forma, o problema inicial é resolvido considerando a contribuição de cada elemento. Nota-se, que o método da uma aproximação para a solução do problema e, portanto, devemos nos preocupar, por exemplo, com aspectos como o erro que estaremos cometendo com esta aproximação, a convergência e a estabilidade do método e o consumo de recursos computacionais.

Assim, como para aplicação de qualquer método numérico, a modelagem física é crucial. Uma modelagem física errada e incoerente, resulta em soluções erradas mesmo que a implementação prática do método esteja correta. No

[1]caiofrs@insper.edu.br.
[2]pauloafe@insper.edu.br.

nosso caso, para a modelagem de treliças unidimensionais, utilizaremos a Teoria da Elasticidade Linear. Em outras, palavras consideraremos apenas pequenas deformações no regime elástico. Dessa forma, qualquer fonte de não-linearidade física e geométrica não são consideradas. Também, todas as análises feitas aqui serão estáticas, ou seja, nada deverá variar no tempo.

O *framework* de implementação do método, pode ser resumido de forma bastante geral no seguintes pontos:

1. **Entrada de dados da geometria e dos parâmetros de material**. Basicamente resume-se a entrada das coordenadas dos nós e da indexação que compões cada elemento. Também, são considerados dados da geometria, os valores relacionados a seção transversal (ST) (que devem ser usados para o caculo da área de do momento de inercia geométrico relacionados a ST). Como parâmetros do material, considera-se o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson.
2. **Construção das matrizes de rigidez local.** Para cada elemento na malha, vamos calcular a matriz de rigidez. Nesta etapa, é importante ressaltar que, se aplicável, a matriz de rotação também deve ser implementada.
3. **Construção da matriz de rigidez global.** A contribuição da rigidez de cada elemento será computada na matriz de rigidez global. Para tanto, realiza-se o espalhamento das matrizes de rigidez local utilizando os graus de liberdade previamente definidos na modelagem do elemento estrutural escolhido (e.g., elemento de treliça, viga, placa, grelha, casca).
4. **Construção do vetor de forças local.** Trata-se da construção do vetor de forças atuantes nos nó de cada elemento.
5. **Construção do vetor de forças global.** Analogamente a construção da matriz de rigidez global, constrói-se o vetor de força global tomando em consideração os vetores de força local de cada elemento e os graus de liberdade previamente definidos.
6. **Aplicação das condições de contorno.** Aplicação das condições de contorno de Dirichlet. Um exemplo para estas condições de contorno

seriam as restrições de movimento nos nós. Existem diversas técnicas numéricas para aplicação dessas condições como, por exemplo, a técnica dos Zeros e Uns e condensação estática.

7. **Resolução do sistema linear.** Para a resolução de sistemas lineares existem diversos métodos numéricos com características próprias como, por exemplo, o método de Gauss-Seidel, método de Jacobi e eliminação gaussiana.

8. **Pós-processamento** Como a formulação de elementos finitos utilizada aqui nos fornece o campo de deslocamentos podemos, a partir deste, calcular grandezas como deformação e tensão.

2. Exercícios

Estes exercícios foram retirados de [2].

Exercício 1. *Para a treliça representada nas condições abaixo, utilizando o Método dos Elementos Finitos, determine o campo de deslocamento e as tensões em cada elemento. Considere* $E = 30 \times 10^6$ *psi e* $A = 2$ *in*^{2}.

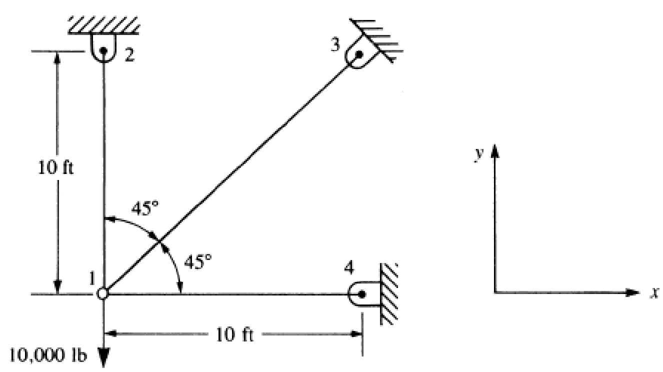

Figura 1: Treliça com três elementos Fonte: [2]

Exercício 2. *Para a treliça representada nas condições abaixo, utilizando o Método dos Elementos Finitos, determine o campo de deslocamento e as tensões* *em cada elemento. Considere* $E = 210$ *GPa,* $A = 5 \times 10^{-4}$ m^2 *e* $k = 2000$ kN/m.

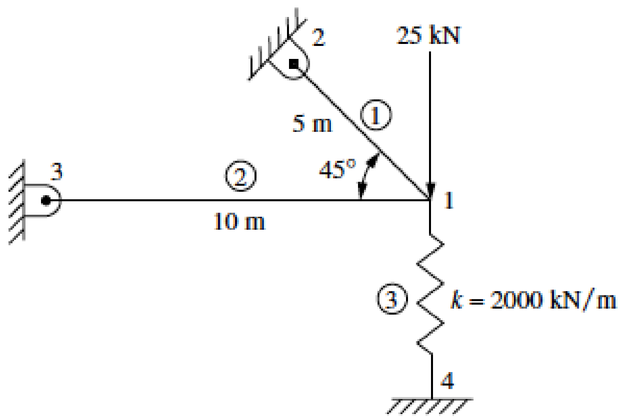

Figura 2: Treliça com dois elementos Fonte: [2]

Gabarito

1. $u_1 = 0.00414$ in, $v_1 = -0.0159$ in, $\sigma_1 = 3965$ psi, $\sigma_2 = 1471$ psi, $\sigma_3 = -1035$ psi.
2. $u_1 = -1.724 \times 10^{-3}$ m, $v_1 = -3.448 \times 10^{-3}$ m, $\sigma_1 = 51.2$ MPa, $\sigma_2 = -36.2$ MPa.

Referências

[1] A. A. Filho, Elementos finitos: A base da Tecnologia CAE, Érica, 2009.

[2] D. L. Logan, A First Course in the Finite Element Method, Cengage Learning, 2011.