Aula 01 - Introdução e Métodos Computacionais em Engenharia

Prof. Dr. Caio[1], Prof. Akira[2]

1. Modelagem matemática e os problemas em engenharia

A partir da identificação do problema físico, tomaremos hipóteses e admitiremos simplificações razoáveis para traduzir tais problemas em equações matemáticas que representem o comportamento físico do objeto a ser estudado em determinadas condições. Agora, o próximo passo é resolver o problema matemático em mãos. No entanto, este problema nem sempre pode ser resolvido de forma analítica. Para tanto, utilizamos métodos numéricos que vão nos auxiliar a transpor estes problemas para o computador. Note que estaremos fazendo mais uma aproximação e, consequentemente, estaremos cometendo um erro. Para avaliar se este erro que estamos cometendo é aceitável, devemos antes nos familiarizar com os conceitos de precisão e acurácia. A figura 1 ilustra estes conceitos.

- **Precisão**: refere-se a obter respostas próximas uma da outra quando aplicamos o modelo numérico de forma repetida.
- **Acurácia**: refere-se a quão próximo as respostas aproximadas estão da resposta verdadeira.

[1]caiofrs@insper.edu.br.
[2]pauloafe@insper.edu.br

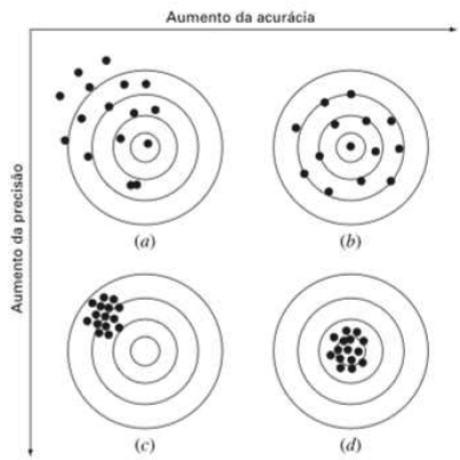

Figura 1: Modelagem hierárquica. Fonte: [1]

1.1. *Tipos de erro*

Ao modelo numérico temos associado o **erro de truncamento** que refere-se a diferença produzida devido a aproximação matemática entre a solução resultante do modelo e a solução real. Um exemplo seria aproximar uma função analítica pela série de Taylor limitada a determinada ordem. Métodos numéricos por sua vez, são já construídos tomando em consideração o erro de truncamento como, por exemplo, os métodos de Runge-Kutta utilizados na resolução de equações diferenciais ordinárias. Por outro, lado temos também os **erros de arredondamento** relacionados a quantidade limitada de algoritmos significativos que podem ser usados para representar números no computador.

Por definição de erro, entenderemos:

$$X_{verdadeiro} = X - E_a, \tag{1}$$

onde $X_{verdadeiro}$ é o valor verdadeiro e X é o valor aproximado. Da eq. 1, obtemos que

$$E_a = X_{verdadeiro} - X, \tag{2}$$

onde E_a é o chamado **erro absoluto** que nos da a amplitude do erro mas não transmite a noção de ordem de grandeza. A ordem de grandeza por sua vez, poderá ser expressa pelo **erro relativo**:

$$E_r = \frac{E_a}{X_{verdadeiro}}. \tag{3}$$

Métodos numéricos muitas vezes utilizam abordagens iterativas para calcular as soluções aproximadas como, por exemplo, métodos para achar zeros de funções (Newton-Raphson, Secante, etc.). Dessa forma, devemos calcular o erro relativo em cada iteração. Muitas vezes utilizamos o erro para determinar a ordem do método em questão. Em processos iterativos calculamos o erro relativo por:

$$E_r = \frac{X_t - X_{t-1}}{X_t}, \tag{4}$$

onde X_t refere-se ao valor de X na iteração atual e X_{t-1} ao valor na iteração anterior, com $t = 1, 2, 3....$

2. Um pouco sobre modelagem hierárquica

Quando saímos do problema físico para o modelo matemático temos que definir hipóteses e fazer algumas suposições de forma que o modelo. Isto resulta num modelo matemático aproximado do problema inicial, ou seja, temos um modelo mais simples em que conseguimos resolver o conjunto de equações seja de forma analítica ou computacional. A questão é como definir um nível ideal de complexidade do modelo matemático de forma que este seja satisfatoriamente representativo. Para tanto, se usa a modelagem hierárquica em que aumentamos a complexidade da modelagem de forma gradativa até que se encontre um modelo satisfatório para o problema em questão. Note que nem sempre precisamos do modelo mais complexo dentro do contexto em que estamos inseridos, muitas vezes uma aproximação mais grosseira é o suficiente para resolver a situação que nos encontramos. A figura 2 ilustra a modelagem hierárquica que é amplamente explorada em Bucalem e Bathe [2]

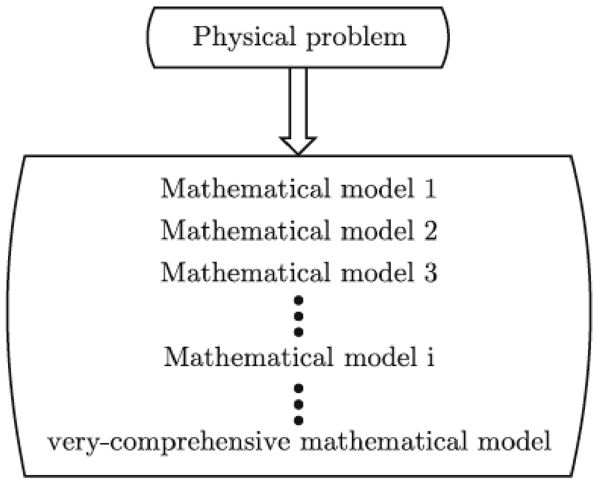

Figura 2: Modelagem hierárquica. Fonte: [2]

Referências

[1] S. Chapra, R. Canale, Numerical Methods for Engineers, McGraw Hill, 2016.

[2] M. L. Bucalem, K. J. Bathe, The Mechanics of Solids and Structures - Hierarchical Modeling and the Finite Element Solution, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011.