Aula 6 - Aletas

Prof. Dr. Caio[1], Prof. Akira[2]

1. Superfícies estendidas - Aletas

Em geral, o objetivo principal das aletas é aumentar a taxa de transferência de calor por convecção e/ou radiação para a vizinhança. Em outras palavras, internamente há condução e externamente há convecção na direção transverssal. Para a formualção do modelo matemático das aletas, vamos considerar as seguintes hipóteses:

- regime permanente,
- condução unidimensional,
- condutividade térmica constante,
- sem geração de calor,
- radiação desprezível em face da convecção.

Tomemos o elemento diferencial da aleta mostrada na figura 1, pelo balanço energético obtemos que:

$$q_x - q_{x+dx} - dq_{conv} = 0. \tag{1}$$

[1]caiofrs@insper.edu.br.
[2]pauloafe@insper.edu.br.

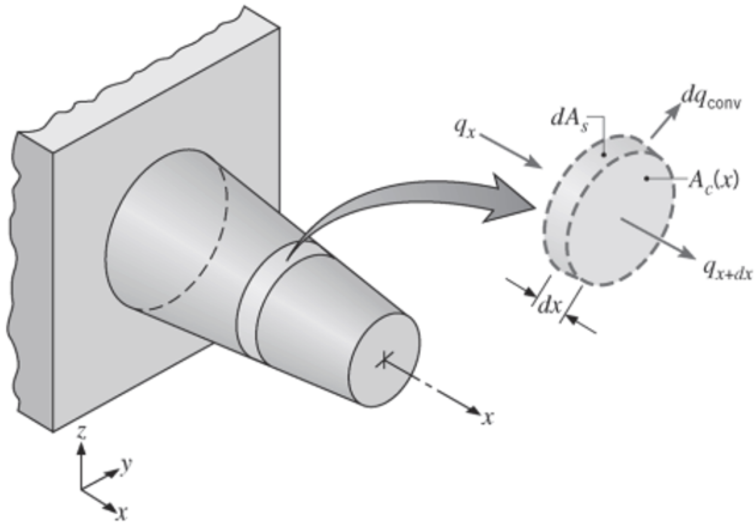

Figura 1: Aleta piniforme. Fonte: [1]

Expandindo q_{x+dx} em uma série de Taylor e desconsiderando os termos de ordem superior:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx}dx. \tag{2}$$

Substituindo a equação (2) na equação (1), obtemos:

$$-\frac{dq_x}{dx}dx - dq_{conv} = 0. \tag{3}$$

Aplicando a Lei de Fourier na equação anterior:

$$-\frac{d}{dx}\left(-kA_c\frac{dT}{dx}\right)dx - hA_s(T - T_\infty) = 0, \tag{4}$$

onde

$$A_s = Pdx, \tag{5}$$

com P sendo o perímetro da seção. Da equação (4), temos que:

$$k\frac{dA_c}{dx}\left(\frac{dT}{dx}\right) + kA_c\frac{d^2T}{dx^2} - hP(T - T_\infty) = 0. \tag{6}$$

Supondo agora que A_c é constante, temos que:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA_c}(T - T_\infty) = 0. \tag{7}$$

Definindo

$$m^2 = \frac{hP}{kA_c} \tag{8}$$

e

$$\theta = T - T_\infty, \tag{9}$$

temos que

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0. \tag{10}$$

Note que que a equação diferencial ordinária (EDO) em (10) é homogênea de segunda ordem. Resolvendo esta equação, temos a seguinte solução:

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}, \tag{11}$$

em que C_1 e C_2 são constantes que vamos encontrar aplicando as condições de contorno. A solução (11) também pode ser escrita em termos do seno e cosseno hiperbólico:

$$\theta(x) = C_3 \sinh(mx) + C_4 \cosh(mx), \tag{12}$$

em que, novamente, C_3 e C_4 são constantes.

Vamos supor que na base da aleta temos,

$$\theta_b = T_b - T_\infty = \theta(0). \tag{13}$$

Ainda, para resolver a EDO necessitamos de mais uma condição de contorno, pois, temos que acha duas constantes C_1 e C_2 (ou C_3 e C_4). Esta segunda condição de contorno será obtida analisando a ponta da aleta. Abaixo, apresentamos quatro casos referente a diferentes condições de contorno na ponta da aleta.

1.1. Caso A: Convecção na ponta

Com convecção na ponta da aleta, a condição de contorno é expressa por:

$$-k\frac{d\theta}{dx}\bigg|_{x=L} = h\theta(L) \tag{14}$$

Da condição de contorno na base, obtemos que:

$$\theta(0) = C_1 \sinh(0) + C_2 \cosh(0) \Rightarrow C_2 = \theta_b \tag{15}$$

Derivando a eq. (12):

$$\frac{d\theta}{dx} = C_1 m \cosh(mx) + C_2 \theta_b m \sinh(mx) \tag{16}$$

Aplicando a eq. (14):

$$\begin{aligned} -k \left[C_1 m \cosh(mL) + \theta_b m \sinh(mL) \right] = hC_1 \sinh(mL) + h\theta_b \cosh(mL) \Leftrightarrow \\ C_1 = -\theta_b \frac{\sinh(mL) + \frac{h}{km} \cosh(mL)}{\cosh(mL) + \frac{h}{km} \sinh(mL)} \end{aligned} \tag{17}$$

Logo, a distribuição de temperatura é dada por:

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh[m(L-x)] + \frac{h}{km} \sinh[m(L-x)]}{\cosh(mL) + \frac{h}{km} \sinh(mL)}. \tag{18}$$

Por sua vez, o calor transferido na aleta será:

$$q_a = -kA_c \frac{d\theta}{dx}\bigg|_{x=0} = M \frac{\sinh(mL) + \frac{h}{km} \cosh(mL)}{\cosh(mL) + \frac{h}{km} \sinh(mL)}, \tag{19}$$

em que

$$M^2 = mkA_c\theta_b \tag{20}$$

1.2. Caso B - Ponta adiabática

No caso de considerarmos o processo adiabático na ponta, temos que:

$$-k \frac{d\theta}{dx}\bigg|_{x=L} = 0. \tag{21}$$

Novamente, da condição de contorno na base:

$$\theta(0) = \theta_b \Leftrightarrow C_2 = \theta_b. \tag{22}$$

Derivando e aplicando a condição de contorno:

$$-k[C_1 m \cosh(mL) + \theta_b m \sinh(mL)] = 0 \Leftrightarrow C_1 = -\theta_b \tanh(mL). \tag{23}$$

A distribuição de temperatura pode ser calculada como:

$$\frac{\theta}{\theta_b} = -\tanh(mL)\sinh(mx) + \cosh(mx) = \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}. \tag{24}$$

O calor transferido na aleta é:

$$q_a = -kA_c \frac{d\theta}{dx}\bigg|_{x=0} = M \tanh(mL). \tag{25}$$

1.3. Caso C - Temperatura dada na ponta

Agora, a temperatura é conhecida na ponta de tal forma que

$$\theta(L) = \theta_L \tag{26}$$

Da condição de contorno na base temos que $C_2 = \theta_b$. Dessa forma, temos que:

$$C_1 \sinh(mL) + \theta_b \cosh(mL) = \theta_L \Leftrightarrow C_1 = \frac{\theta_L - \theta_b \cosh(mL)}{\sinh(mL)}. \tag{27}$$

Por sua vez a distribuiçãode temperatura é dada por:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\theta_L - \theta_b \cosh(mL)}{\sinh(mL)} \sinh(mx) + \theta_b \cosh(mx) \Leftrightarrow \\ \frac{\theta}{\theta_b} &= \frac{\frac{\theta_L}{\theta_b} \sinh(mx)\theta_b[\sinh(mL - mx)]}{\sinh(mL)} \end{aligned} \tag{28}$$

O calor transferido na aleta é:

$$q_a = M\frac{\cosh(mL) - \frac{\theta_L}{\theta_b}}{\sinh(mL)}. \tag{29}$$

1.4. Caso D - Aleta infinita

Podemos considerar que a distribuição de temperatura na ponta é desprezível quando $mL > 2.65$. Assim,

$$\theta(L) = 0. \tag{30}$$

Neste caso vamos utilizar a eq. (11). Da condição de contorno na base temos que:

$$\theta(0) = C_1 + C_2 = \theta_b. \tag{31}$$

No entanto, da condição de contorno na ponta:

$$\theta(x \to \infty) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = \theta_b. \tag{32}$$

A distribuição de temperatura será:

$$\theta = \theta_b e^{-mx} \Leftrightarrow \frac{\theta}{\theta_b} = e^{-mx}. \tag{33}$$

E o calor transferido na aleta é:

$$q_a = M. \tag{34}$$

2. Desempenhos das aletas

A aleta representa uma resistência condutiva à transferência de calor em relação a superfície geral, por isso devemos medir seu desempenho. A efetividade é a razão entre o calor transferido pela aleta e o calor transferido sem a aleta e é dada por

$$\epsilon_a = \frac{q_a}{hA_c\theta_b}. \tag{35}$$

Em termos práticos, a utilização da aleta só é justificável se $\epsilon_a \geq 2$.

Por sua vez, a eficiência eé calculada como a razão entre o calor transferido pela aleta e o máximo calor que pode ser transferido se a aleta estivesse na temperatura da base. Calculamos a eficiência com

$$\eta_a = \frac{q_a}{hA_s\theta_b} \tag{36}$$

3. Exercício

Passagens aletadas são frequentemente formadas entre placas paralelas para melhorar a transferência de calor por convecção no núcleo de trocadores de calor compactos. Uma importantate aplicação é no resfriamento de equipamentos eletrônicos, onde uma ou mais estantes de aletas, resfriadas a ar, são colocadas entre componentes eletrônicos, que dissipam calor. Seja uma única estante de aletas retangulares, com comprimento L e espessura t, com condições de transferência de calor por convecção correspondente a h e T_∞.

1. Obtenha expressões para as taxas de transferência de calor nas aletas $q_{a,e}$ e $q_{a,L}$, em termos das temperaturas nas extremidades, T_e e T_L.
2. Em uma aplicação específica, uma estante de aletas, com $200mm$ de largura e $100mm$ de profundidade, contém 50 aletas de comprimento $L = 12mm$. A estante completa eé feita de alumínio e todas as placas possuem espessura de $1mm$. Se limitações de temperatura associadas aos componentes elétricos fixados às placas opostas ditam que as temperaturas máximas permitidas nestas placas são de $T_e = 400K$ e

$T_L = 350K$, quais são as dissipações máximas de potência correspondentes se $h = 150W/(m^2\dot{K})$ e $T_\infty = 300K$?

Gabarito

1. $q_{a,e} = kA_c\left[\frac{m\theta(0)}{\tanh(mL)} - \frac{m\theta(L)}{\sinh(mL)}\right]$; $q_{a,L} = kA_c\left[\frac{m\theta(0)}{\sinh(mL)} - \frac{m\theta(L)}{\tanh(mL)}\right]$
2. $q_{max,e} = 5975W$; $q_{max,L} = -4287.5W$

Referências

[1] F. P. Incropera, P. DeWitt, Bergamn, Lavine, Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa, LTC, 2008.