Construção da Hipocicloide 8/3

Matemática da variação, 3º Período Turma Comp

Estudantes & Autores:

Caroline Chaim

Fernando Giuseppe

Sumário

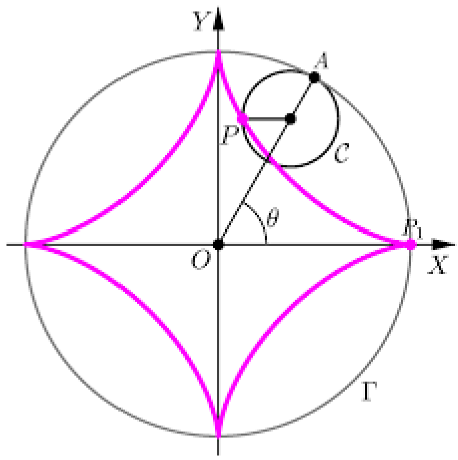
1. Introdução

O objetivo desse trabalho será o estudo de uma Hipociclóide 8/3. Será apresentado os seguintes tópicos da curva:

- Modelagem matemática da curva
- Pontos notáveis
- Cálculo do comprimento
- Cálculo da área

2. Construção geométrica e modelagem matemática

Uma Hipocicloide pode ser definida como a curva formada pela as posições de um ponto fixo em uma circunferência que desliza dentro de outra circunferência maior. *(fig 1)*



(fig 1)

Observe que a linha rosa representa a trajetória do ponto ao longo do deslizamento

Para construir uma equação parametrizada dessa curva, é necessário seguir os seguintes passos:

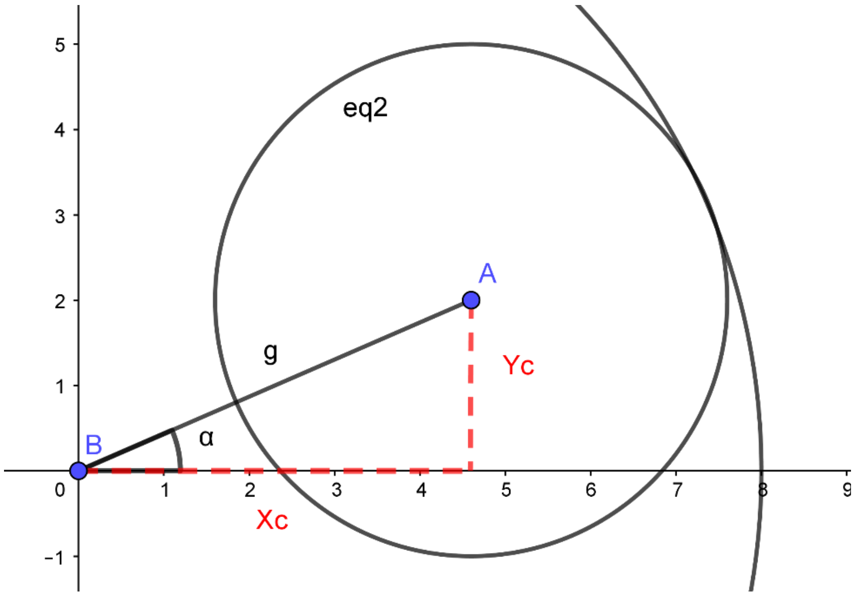
- Obter as coordenadas do centro da circunferência menor
- Obter as projeções que o raio menor faz com os eixos X e Y
- Somar as coordenadas do centro x do ponto com os dado da projeção x e subtrair as coordenadas do centro y com o dado da projeção y.

2.1 Coordenadas do centro da circunferência menor

Para determinar a trajetória do centro da circunferência, primeiros devemos adotar algumas variáveis. *(fig2)* O componente α representa o arco do centro da circunferência em relação ao ponto fixo (0,0) do plano cartesiano, e g representa o segmento dado entre o ponto (0,0) e A. Isso pode ser dado como a subtração dos raios da circunferencia maior (R) e menor (r):

$$g = R - r$$

As letras Xc e Yc podem ser entendidas como a projeção que o segmento faz nos eixos X e Y.



(fig 2)

Vale ressaltar que neste exemplo o centro da circunferência maior localiza-se em (0,0)

Uma forma de achar as coordenadas do ponto A descrito, é determinado o valor de Yc e Xc. Isso pode ser resolvido da seguinte maneira:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{Yc}{g}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{Xc}{g}$$

Substituindo g e colocando as variáveis Yc e Xc em evidência:

$$Yc = \operatorname{sen}(\alpha) \cdot (R - r)$$

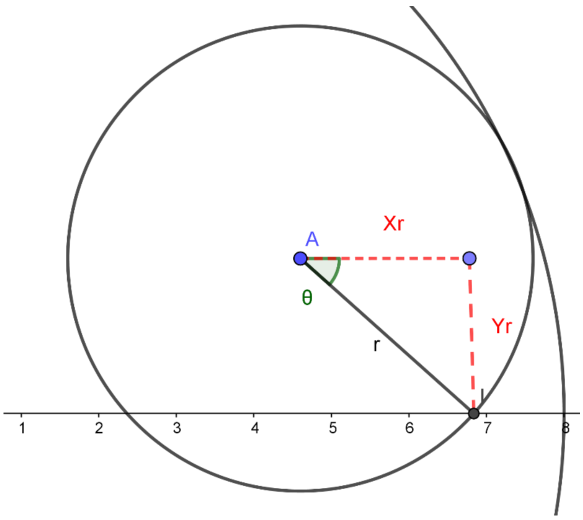
$$Xc = \cos(\alpha) \cdot (R - r)$$

Portanto a curva do ponto central da circunferência menor se dá por:

$$(\cos(\alpha) \cdot (R - r)\,, \operatorname{sen}(\alpha) \cdot (R - r))$$

2.2 Projeção que o raio menor faz nos eixos X e Y

Da mesma forma que fizemos no problema anterior, vamos achar os valores de Yr e Xr, que são projeções do raio da circunferência nos eixos. Agora, como temos um Angulo diferente vamos chamar o arco de θ. *(fig 3)*



(fig 3)

Como fizemos com que o arco α girasse no sentido anti-horário, temos que adotar o sentido contrário para θ.

Resolvendo a equação temos que as projeções são:

$$Xr = \cos(\theta) \cdot r$$

$$Yr = sin(\theta) \cdot r$$

2.3 Parametrização

A parametrização da curva do ponto que estamos procurando se dá pela adição da coordenada x do centro da curva com a projeção x do raio menor e a subtração da coordenada y do centro da curva com a projeção y do raio menor.

$$\gamma = \begin{cases} x = \cos(\alpha) \cdot (R - r) + \cos(\theta) \cdot r \\ y = \operatorname{sen}(\alpha) \cdot (R - r) - \operatorname{sen}(\theta) \cdot r \end{cases}$$

Com base na figura anterior *(fig3)* podemos perceber que a projeção de x vai da esquerda para a direita enquanto a projeção em y vai de cima para baixo, por isso a soma e a subtração, respectivamente, na equação anterior.

Agora é necessário substituir alguma variável α ou θ .

Para fazer isso, temos que adotar que o comprimento da circunferência menor e o traço da curva do centro da mesma circunferência vão ter o mesmo comprimento no mesmo instante. Isso implica que:

$$\alpha \cdot (R - r) = \theta \cdot r$$

Colocando em evidência temos:

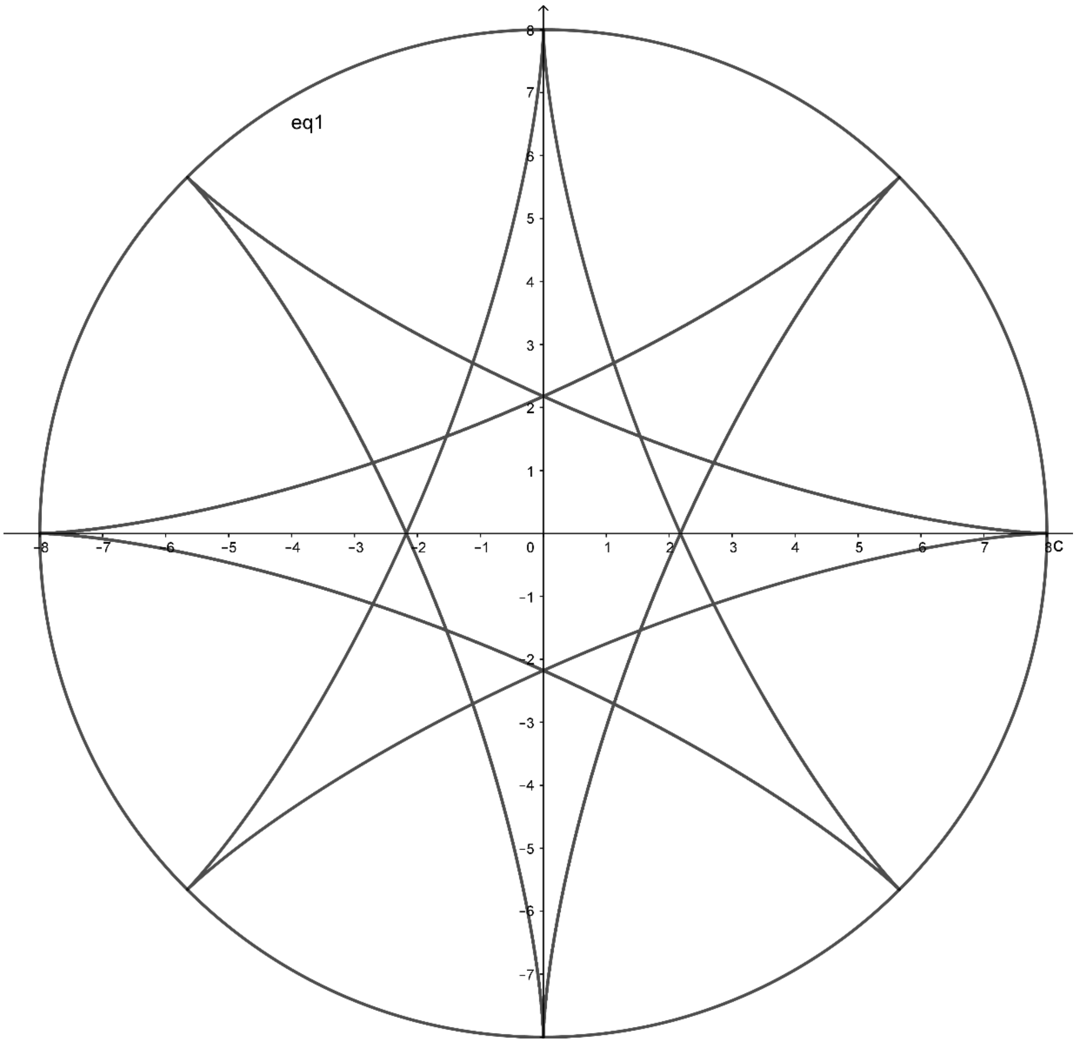
$$\theta = \alpha \cdot \frac{(R - r)}{r}$$

Substituindo:

$$\gamma = \begin{cases} x = \cos(\alpha) \cdot (R - r) + \cos\left(\alpha \cdot \dfrac{(R - r)}{r}\right) \cdot r \\ y = \operatorname{sen}(\alpha) \cdot (R - r) - \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \dfrac{(R - r)}{r}\right) \cdot r \end{cases}$$

Substituindo as variáveis R e r por 8 e 3 e obtendo o traço *(fig 4)*:

$$\gamma = \begin{cases} x = \cos(\alpha) \cdot 5 + \cos\left(\alpha \cdot \dfrac{5}{3}\right) \cdot 3 \\ y = \operatorname{sen}(\alpha) \cdot 5 - \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \dfrac{5}{3}\right) \cdot 3 \end{cases}$$



(fig 4)

3. Pontos notáveis

Agora que temos a equação paramétrica, podemos descobrir os pontos da curva que estão totalmente na horizontal e na vertical, assim como as cúspides.

3.1 Pontos na horizontal

Pontos na horizontal da curva não apresentam variação em Y. Para determinar isso precisamos considerar a variação da curva em Y e X:

$$x'(\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha) \cdot 5 - \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) \cdot 5$$

$$y'(\alpha) = \cos(\alpha) \cdot 5 - \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) \cdot 5$$

Como não queremos variação na direção Y, temos:

1. $0 \neq -\operatorname{sen}(\alpha) \cdot 5 - \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) \cdot 5$
2. $0 = \cos(\alpha) \cdot 5 - \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) \cdot 5$

Resolvendo a primeira (1) equação:

Temos:

- $\operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) \neq -\operatorname{sen}(\alpha)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha \cdot \frac{5}{3}\right) \neq -\operatorname{sen}(\alpha)$
- $\operatorname{sen}\left(\pi + \frac{5}{3} \cdot \alpha\right) \neq -\operatorname{sen}(\alpha)$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{5}{3} \cdot \alpha\right) \neq -\operatorname{sen}(\alpha)$

Resolvendo:

- $\alpha \neq 3\pi K$
- $\alpha \neq 3\pi k - \frac{3}{4}\pi$
- $\alpha \neq 3\pi k - \frac{3}{2}\pi$
- $\alpha \neq 3\pi k - \frac{9}{4}\pi$

(Com k sendo um número real positivo)

Resolvendo a segunda (2) equação:

Temos:

- $\cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) = \cos(\alpha)$
- $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha \cdot \frac{5}{3}\right) = \cos(\alpha)$
- $\text{sen}\left(\pi + \alpha \cdot \frac{5}{3}\right) = \cos(\alpha)$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) = \cos(\alpha)$

Resolvendo:

- $\alpha = 3\pi K$
- $\alpha = 3\pi K - \frac{3}{4}\pi$
- $\alpha = 3\pi K - \frac{3}{2}\pi$
- $\alpha = 3\pi K - \frac{9}{4}\pi$

Pode-se observar que não existe valor para alfa que satisfaça a condição, por essa razão é possível concluir que não existe tangente no sentido horizontal para nossa parametrização.

3.2 Pontos na vertical

Seguiremos a mesma linha de raciocínio que os pontos na horizontal, mas dessa vez não terá variação no eixo X:

1. $0 = -\text{sen}(\alpha) \cdot 5 - \text{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) \cdot 5$
2. $0 \neq \cos(\alpha) \cdot 5 - \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) \cdot 5$

Como a única diferença é no senal, podemos assumir que o resultado será o mesmo para a equação formulada no tópico anterior, e, portanto, novamente afirmamos que não existe tangente no sentido vertical na nossa parametrização.

3.3 Cúspides

Cúspides são pontos onde o gráfico da função faz um “bico”, ou seja, pontos onde a função não é derivável.

Podemos calcular os pontos de cúspides de uma Hipociclóide usando a seguinte função:

$$f(\alpha) = \frac{\hat{y}'(\alpha)}{\hat{x}'(\alpha)}$$

E podemos calcular $\hat{y}'(\alpha)$ e $\hat{x}'(\alpha)$ a partir do versor tangente:

$$\hat{\gamma}(\alpha) = \frac{1}{|\gamma'(\alpha)|} \cdot \gamma'(\alpha)$$

Para tal calculamos $|\gamma'(\alpha)|$:

$$|\gamma'(\alpha)| = \sqrt{[x'(\alpha)]^2 + [y'(\alpha)]^2} \therefore$$

$$|\gamma'(\alpha)| = \sqrt{\left(-5 \cdot \mathrm{sen}(\alpha) - 5 \cdot \mathrm{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)^2 + \left(5 \cdot \cos(\alpha) - 5 \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)^2} \therefore$$

$$|\gamma'(\alpha)| = \sqrt{\left(25 \cdot \mathrm{sen}^2(\alpha) + 50 \cdot \mathrm{sen}(\alpha) \cdot \mathrm{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) + 25 \cdot \mathrm{sen}^2\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right) + \left(25 \cdot \cos^2(\alpha) - 50 \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) + 25 \cdot \cos^2\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)} \therefore$$

$$|\gamma'(\alpha)| = \sqrt{50 + 50 \cdot \mathrm{sen}(\alpha) \cdot \mathrm{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) - 50 \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)} \therefore$$

$$|\gamma'(\alpha)| = 5 \cdot \sqrt{2 \cdot \left(1 + \mathrm{sen}(\alpha) \cdot \mathrm{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) - \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)}$$

Dessa forma o versor tangente é:

$$\hat{\gamma}(\alpha) = \frac{1}{5 \cdot \sqrt{2 \cdot \left(1 + \mathrm{sen}(\alpha) \cdot \mathrm{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) - \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)}} \cdot \left(-5 \cdot \mathrm{sen}(\alpha) - 5 \cdot \mathrm{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right), 5 \cdot \cos(\alpha) - 5 \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right) \therefore$$

$$\hat{x}(\alpha) = -\frac{sin(\alpha) + sin\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)}{\sqrt{2 \cdot \left(1 + \mathrm{sen}(x) \cdot \mathrm{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) - \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)}} \therefore$$

$$\hat{x}(\alpha) = -\frac{\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)}{\sqrt{2 \cdot \left(1 + \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) - \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)}} \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot \left(1 + \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) - \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)}}{\sqrt{2 \cdot \left(1 + \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) - \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)}}$$

$$\therefore$$

$$\hat{x}(\alpha) = -\frac{\sqrt{2 \cdot \left(1 + \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) - \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)} \cdot \left(\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)}{2 \cdot \left(1 + \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) - \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)}$$

$$\hat{y}(\alpha) = \frac{cos(\alpha) - cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)}{\sqrt{2 \cdot \left(1 + \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) - \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)}} \therefore$$

$$\hat{y}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha) - \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)}{\sqrt{2 \cdot \left(1 + \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) - \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)}} \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot \left(1 + \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) - \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)}}{\sqrt{2 \cdot \left(1 + \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) - \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)}} \therefore$$

$$\hat{y}(\alpha) = \frac{\sqrt{2 \cdot \left(1 + \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) - \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)} \cdot \left(\cos(\alpha) - \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)}{2 \cdot \left(1 + \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) - \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)}$$

Com isso agora temos como calcular $f(\alpha)$:

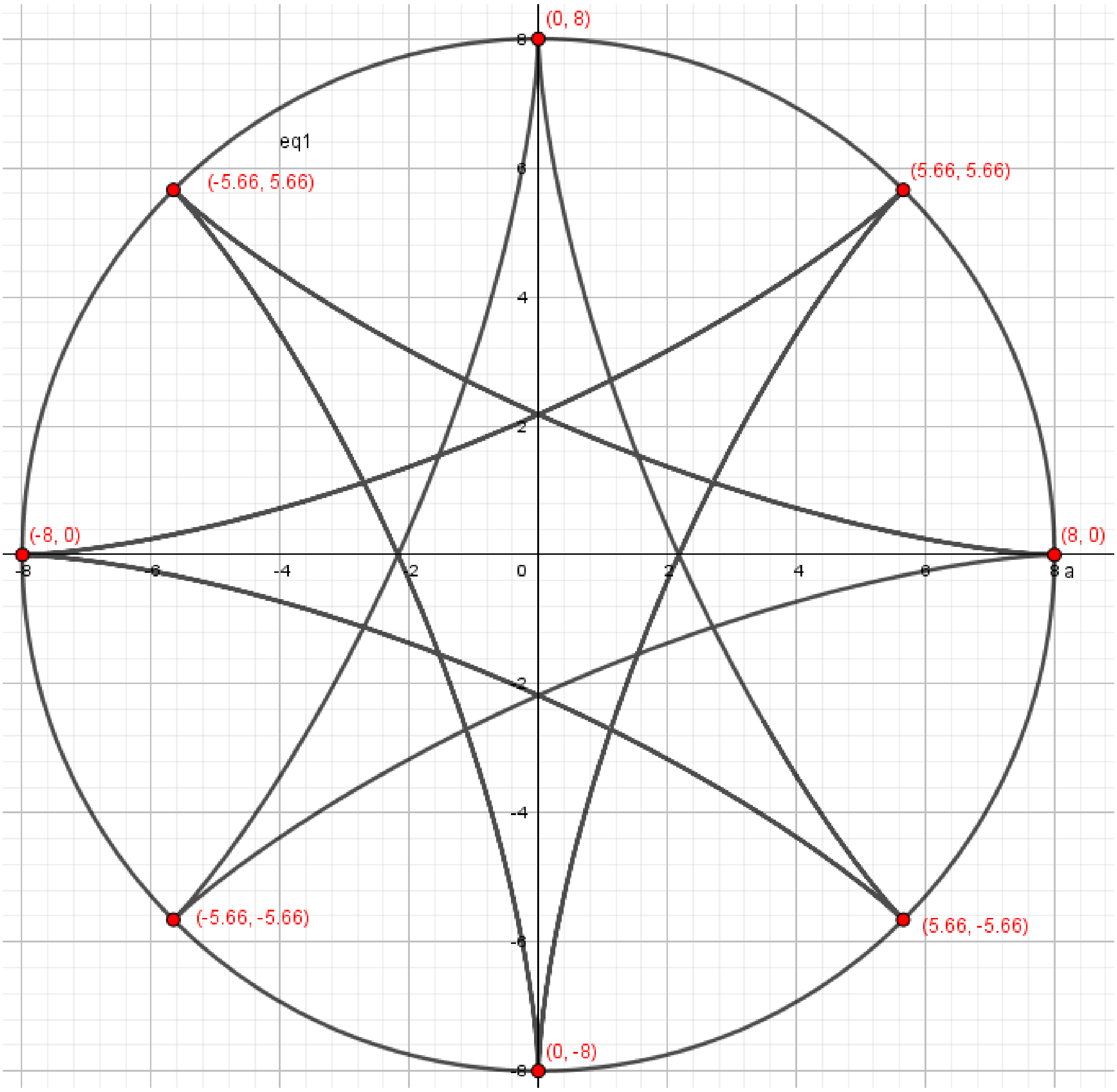
$$f(\alpha) = \frac{\dfrac{\sqrt{2 \cdot \left(1 + \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) - \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)} \cdot \left(\cos(\alpha) - \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)}{2 \cdot \left(1 + \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) - \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)}}{-\dfrac{\sqrt{2 \cdot \left(1 + \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) - \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)} \cdot \left(\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)}{2 \cdot \left(1 + \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) - \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)}} \therefore$$

$$f(\alpha) = -\frac{\sqrt{2 \cdot \left(1 + \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) - \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)} \cdot \left(\cos(\alpha) - \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)}{2 \cdot \left(1 + \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) - \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)} \cdot \frac{2 \cdot \left(1 + \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) - \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)}{\sqrt{2 \cdot \left(1 + \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) - \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)} \cdot \left(\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)} \therefore$$

$$f(\alpha) = -\frac{cos(\alpha) - cos\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)}{sen(\alpha) + sen\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)}$$

Como a função $f(\alpha)$ é contínua para todos os valores de α que não anulam o denominador, precisamos analisar apenas os casos em que $sen(\alpha) + sen\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) = 0$, ou seja, os casos em que $\alpha = k \cdot \frac{3\pi}{4}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Portanto as cúspides da nossa Hipociclóide são todos os pontos que satisfazem essa igualdade. Como por exemplo: $(8\ ;\ 0), para\ k = 0$, $\left(-4\sqrt{2}\ ; 4\sqrt{2}\right), para\ k = 1$ e $(0\ ;\ -8), para\ k = 2$.



4. Comprimento

O <u>comprimento</u> e dado pela seguinte formula:

$$L = \int_0^{10\pi} \sqrt{[x'(\alpha)]^2 + [y'(\alpha)]^2}\ d\alpha$$

$$L = 5\int_0^{2\pi} \sqrt{25 \cdot \left(\mathrm{sen}^2(\alpha) + 2 \cdot \mathrm{sen}(\alpha) \cdot \mathrm{sen}\left(\alpha\frac{5}{3}\right) + \mathrm{sen}^2\left(\alpha\frac{5}{3}\right)\ \right) + 25 \cdot \left(\cos^2(\alpha) - 2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\alpha\frac{5}{3}\right) + \cos^2(\alpha)\frac{5}{3}\right)}\ d\alpha$$

Lembrando que:

$\mathrm{sen}^2\,\theta + \ \cos^2\theta = 1$

$$L = 25 \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cdot \mathrm{sen}(\alpha) \cdot \mathrm{sen}\left(\alpha\frac{5}{3}\right) - 2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\alpha\frac{5}{3}\right) + 2}\ d\alpha$$

$$L = 25 \cdot \sqrt{2} \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos\left(\frac{8\alpha}{3}\right) + 1}\ d\alpha$$

Trabalhando para chegar na primitiva

$$\frac{\sqrt{1 - \cos^2\left(\alpha\frac{8}{3}\right)}}{\sqrt{1 - \cos\left(\alpha\frac{8}{3}\right)}}$$

$$\frac{\left|\mathrm{sen}\left(\alpha\frac{8}{3}\right)\right|}{\sqrt{1 - \cos\left(\alpha\frac{8}{3}\right)}}$$

Para que essa equação seja verdadeira:

$$\alpha \neq \frac{3\pi}{4}$$

$$L = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{sen}\left(\alpha\frac{8}{3}\right)}{\sqrt{1 - \cos\left(\alpha\frac{8}{3}\right)}} - \int_{\pi}^{3\pi/4} \frac{\mathrm{sen}\left(\alpha\frac{8}{3}\right)}{\sqrt{1 - \cos\left(\alpha\frac{8}{3}\right)}}$$

5. Área

$$A = \int_0^{10\pi} y(\alpha) \cdot x'(\alpha)\, d\alpha \therefore$$

$$A = \int_0^{10\pi} \left(5 \cdot \mathrm{sen}(\alpha) - 3 \cdot \mathrm{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right) \cdot \left(-5 \cdot \mathrm{sen}(\alpha) - 5 \cdot \mathrm{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)\, d\alpha \therefore$$

$$A = \int_0^{10\pi} \left(-25 \cdot \mathrm{sen}^2(\alpha) - 10 \cdot \mathrm{sen}(\alpha) \cdot \mathrm{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right) + 15 \cdot \mathrm{sen}^2\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\right)\, d\alpha \therefore$$

Vamos separar a integral em 3 partes:

$$A = -25 \cdot \int_0^{10\pi} \mathrm{sen}^2(\alpha)\ d\alpha - 10 \cdot \int_0^{10\pi} \mathrm{sen}(\alpha) \cdot \mathrm{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\ d\alpha + 15 \cdot \int_0^{10\pi} \mathrm{sen}^2\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\ d\alpha \ \therefore$$

A resolução da primeira integral é a seguinte:

$$\int_0^{10\pi} \mathrm{sen}^2(\alpha)\ d\alpha = \left(\frac{1}{2} \cdot \alpha - \frac{1}{4} \cdot \mathrm{sen}(2\alpha)\right)\Big|_{0}^{10\pi}$$

$$\int_0^{10\pi} \mathrm{sen}^2(\alpha)\ d\alpha = \left(\frac{1}{2} \cdot 10\pi - \frac{1}{4} \cdot \mathrm{sen}(2 \cdot 10\pi)\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{4} \cdot \mathrm{sen}(2 \cdot 0)\right)$$

$$\int_0^{10\pi} \mathrm{sen}^2(\alpha)\ d\alpha = 5\pi$$

Para calcularmos a segunda integral podemos utilizar a identidade trigonométrica $\mathrm{sen}(x) \cdot \mathrm{sen}(y) = \frac{1}{2} \cdot (\cos(x-y) - \cos(x+y))$, onde $x = \alpha$ e $y = \alpha \cdot \frac{5}{3}$. Assim:

$$\int_0^{10\pi} \mathrm{sen}(\alpha) \cdot \mathrm{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\ d\alpha = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{10\pi} \cos\left(\alpha \cdot \frac{2}{3}\right) - \cos\left(\alpha \cdot \frac{8}{3}\right)\ d\alpha$$

$$\int_0^{10\pi} \mathrm{sen}(\alpha) \cdot \mathrm{sen}\left(\alpha \cdot \frac{5}{3}\right)\ d\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^{10\pi} \cos\left(\alpha \cdot \frac{2}{3}\right) d\alpha - \int_0^{10\pi} \cos\left(\alpha \cdot \frac{8}{3}\right) d\alpha\right)$$

$$\int_0^{10\pi} \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}\left(\alpha\cdot\frac{5}{3}\right)\,d\alpha = \frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{3}{2}\operatorname{sen}\left(\alpha\cdot\frac{2}{3}\right)\right)-\left(\frac{3}{8}\operatorname{sen}\left(\alpha\cdot\frac{8}{3}\right)\right)\Big|_{0}^{10\pi}\right)$$

$$\int_0^{10\pi} \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}\left(\alpha\cdot\frac{5}{3}\right)\,d\alpha = \frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{3}{2}\operatorname{sen}\left(10\pi\cdot\frac{2}{3}\right)\right)-\left(\frac{3}{8}\operatorname{sen}\left(10\pi\cdot\frac{8}{3}\right)\right)-\left(\frac{3}{2}\operatorname{sen}\left(0\cdot\frac{2}{3}\right)\right)-\left(\frac{3}{8}\operatorname{sen}\left(0\cdot\frac{8}{3}\right)\right)\right)$$

$$\int_0^{10\pi} \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}\left(\alpha\cdot\frac{5}{3}\right)\,d\alpha = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$$

$$\int_0^{10\pi} \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}\left(\alpha\cdot\frac{5}{3}\right)\,d\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{16} = \frac{9\sqrt{3}}{32}$$

A resolução da terceira integral é a seguinte:

$$\int_0^{10\pi} \operatorname{sen}^2\left(\alpha\cdot\frac{5}{3}\right)\,d\alpha = \left(\frac{1}{2}\cdot\alpha-\frac{3}{20}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{10}{3}\alpha\right)\right)\Big|_{0}^{10\pi}$$

$$\int_0^{10\pi} \operatorname{sen}^2\left(\alpha\cdot\frac{5}{3}\right)\,d\alpha = \left(\frac{1}{2}\cdot 10\pi-\frac{3}{20}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{10}{3}\cdot 10\pi\right)\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{3}{20}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{10}{3}\cdot 0\right)\right)$$

$$\int_0^{10\pi} \operatorname{sen}^2\left(\alpha\cdot\frac{5}{3}\right)\,d\alpha = \left(5\pi+\frac{3}{20}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\int_0^{10\pi} \operatorname{sen}^2\left(\alpha\cdot\frac{5}{3}\right)\,d\alpha = \left(5\pi+\frac{3\sqrt{3}}{40}\right)$$

Voltando para o cálculo da Área temos:

$$A = -25\cdot 5\pi - 10\cdot\frac{9\sqrt{3}}{32} + 15\cdot\left(5\pi+\frac{3\sqrt{3}}{40}\right) \therefore$$

$$A = -125\pi - \frac{45\sqrt{3}}{16} + 75\pi + \frac{9\sqrt{3}}{8} \therefore$$

$$A = -125\pi - \frac{45\sqrt{3}}{16} + 75\pi + \frac{9\sqrt{3}}{8} \therefore$$

$$A = -\frac{27\sqrt{3}}{16} - 50\pi$$