

Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf



**Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Maritime**



SUPPORT DE COURS EN

RESISTANCE DES MATERIAUX

ELABORE PAR :

Dr. HADJAZI Khamis

ANNEE UNIVERSITAIRE : 2013-2014

SOMMAIRE

	Page
Sommaire	i
Introduction générale	01
Chapitre I	Généralité
I.1) Définitions et hypothèses	03
I.2) Propriétés des matériaux	05
I.3) Schématisation des liaisons (réaction d'appui)	06
I.3.1) Appui simple	06
I.3.2) Appui double (articulation)	06
I.3.3) Encastrement	06
I.4) Conditions d'équilibre	07
I.4.1) Equilibre de translation	07
I.4.2) Equilibre de rotation	07
I.5) Efforts internes	07
I.6) Méthode des sections	08
I.6.1) Effort normal	08
I.6.2) Efforts tranchants	11
I.6.3) Moments fléchissant	12
I.6.4) Moment de torsion	13
I.7) Contraintes	13
I.7.1) Contrainte normale (σ)	13
I.7.2) Contrainte en cisaillement (τ)	16
I.7.3) Efforts et contraintes multiples	17
I.7.4) Charges uniformément réparties	18
Exercices avec solutions	
Chapitre II	Système Triangles (ou treillis plan)
II.1) Généralités	21
II.2) Définition	22
II.3) Terminologie	22
II.3.1) Nœud	22
II.3.2) Barres ou membrures	23
II.4) Systèmes isostatiques et hyperstatiques	23
II.4.1) Système isostatique	23
II.4.2) Système hyperstatique	24
II.4.3) Système instable	24
II.5) Type de treillis	25
II.6) Hypothèse de calcul	26
II.7) Sollicitation des barres	26
II.8) Analyse de treillis	27
II.8.1) Calcul des treillis plans isostatiques par la méthode des nœuds	27
II.8.2) Calcul des treillis plans isostatiques par la méthode des sections (de Ritter)	32
Exercices avec solutions	
Chapitre III	Les Portiques Plan Isostatique
III.1) Définition	37
III.2) Méthode de calcul des efforts et du moment fléchissant	37
III.2.1) Méthode générale (section)	37

III.2.2) Méthode des travées	39
Exercices avec solutions	
Chapitre IV	Flexion Simple
IV.1) Généralités	43
IV.1.1) Définition	43
IV.2) Efforts tranchants et moments fléchissant	44
IV.3) Diagramme du moment fléchissant et de l'effort tranchant	46
IV.4) Equation différentielle de la ligne élastique	48
IV.4.1) Equation différentielle de la déformée	49
IV.5) Contraintes normales en flexion plane	51
IV.6) Contraintes tangentielles en flexion	54
IV.7) Equation de la flèche	58
IV.8) Méthode d'intégration directe	59
IV.9) Méthode de la poutre conjuguée (fictive)	60
IV.10) Méthodes des paramètres initiaux (Macaulay)	63
IV.11) Superposition des déformations	64
IV.12) Quelle que exemple pour déterminer efforts et flèches maximales	65
Exercices avec solutions	
Chapitre V	Flexion déviée
V.1) Introduction	67
V.1.1) Définition	67
V.2) Contrainte normale et déplacement	68
V.3) Axe neutre	69
V.4) Vérification a la résistance	69
Exercices avec solutions	
Chapitre VI	Flexion composée
VI.1) Flexion composée	74
VI.1.1) Flexion composée avec traction ou compression	74
VI.1.2) Traction ou compression excentrée	74
VI.2) Le noyau central	75
VI.2.1) Construction du noyau central	76
VI.3) Vérification a la résistance	78
Exercices avec solutions	

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La résistance des matériaux, désignée souvent par RDM, est la science du dimensionnement. C'est une discipline particulière de la mécanique des milieux continus qui permet de concevoir une pièce mécanique, un ouvrage d'art ou tout objet utilitaire. Ce dimensionnement fait appel à des calculs qui prévoient le comportement de l'objet dont la conception doit réunir les meilleures conditions de sécurité, d'économie et d'esthétique.

L'objet de la résistance des matériaux est l'étude de la stabilité interne c'est à dire la détermination des contraintes et déformations à l'intérieur de la matière et les déplacements des lignes moyennes des structures générés (machines en génie mécanique, bâtiment en génie civil,...). Elle est basée sur des hypothèses simplificatrices vérifiées expérimentalement. La RDM fait appel à la statique du solide qui est une branche de la statique étudiant l'équilibre des pièces dans un mécanisme. C'est un maillon essentiel dans le dimensionnement des systèmes mécaniques réels.

L'objet de la statique est l'étude de l'équilibre d'un corps ou d'un ensemble de corps solides dans leur géométrie initiale; c'est-à-dire dans la structure non déformée par rapport à un repère Galiléen. Le solide sera considéré comme infiniment rigide. Etudier donc la statique d'une structure revient à étudier sa stabilité externe, d'une part en vérifiant qu'elle ne se comporte pas comme un mécanisme, et d'autre part en déterminant les actions de liaisons (assemblages entre les différents solides et entre la structure et la fondation ou le sol).

La statique et la résistance des matériaux constituent l'outil indispensable de l'ingénieur constructeur pour concevoir et réaliser des ouvrages économiques qui ne risquent ni de se rompre ni de se déformer excessivement sous les actions qui leur sont appliquées.

Ces cours accompagnés avec des problèmes suivis de leurs solutions sont adressés aux étudiants de deuxième et troisième année LMD en Génie Mécanique et Maritime.

Le polycopié est divisé en six chapitres. Le premier chapitre, constituent une introduction générale à la résistance des matériaux. Le contenu est consacré, en premier lieu, à la mise en place des hypothèses fondamentales de la RDM ainsi qu'aux notions de contraintes. Le contenu du deuxième et troisième chapitre ressort de la statique du solide. Il sont structuré de manière à fournir à l'étudiant les bases de la statique afin que ce dernier puisse maîtriser l'équilibre de systèmes simples, calculer les réactions aux appuis d'une structure isostatique et rechercher l'équilibre des nœuds d'un système articulé et calculer les efforts intérieurs

(efforts normaux, tranchants et moments fléchissant) dans ses barres (système triangulaire et les portiques).

Ensuite, afin de dimensionner des structures élémentaires isostatiques; c'est-à-dire l'étude de la résistance et de la déformation des éléments d'une structure, de déterminer ou de vérifier leurs dimensions afin qu'ils supportent les charges dans des conditions de sécurité satisfaisantes des cas de sollicitations simples (flexion simple) et composée (flexion composée et déviée) sont étudiées dans les restes des chapitres.

I.1) DEFINITIONS ET HYPOTHESES

La résistance des matériaux ou la mécanique des matériaux est une branche de la mécanique appliquée servant à étudier le comportement des corps solides sous l'action des différents types de charges. La résistance des matériaux traite non seulement les méthodes d'ingénieurs employées pour le calcul de la capacité des structures et de ses éléments à supporter les charges qui leurs sont appliquées sans se détruire, ou se déformer appréciablement, mais aussi à présenter les critères de base pour la conception des structures (forme, dimensions,...) et l'utilisation des matériaux dans les meilleures conditions de sécurité et d'économie.

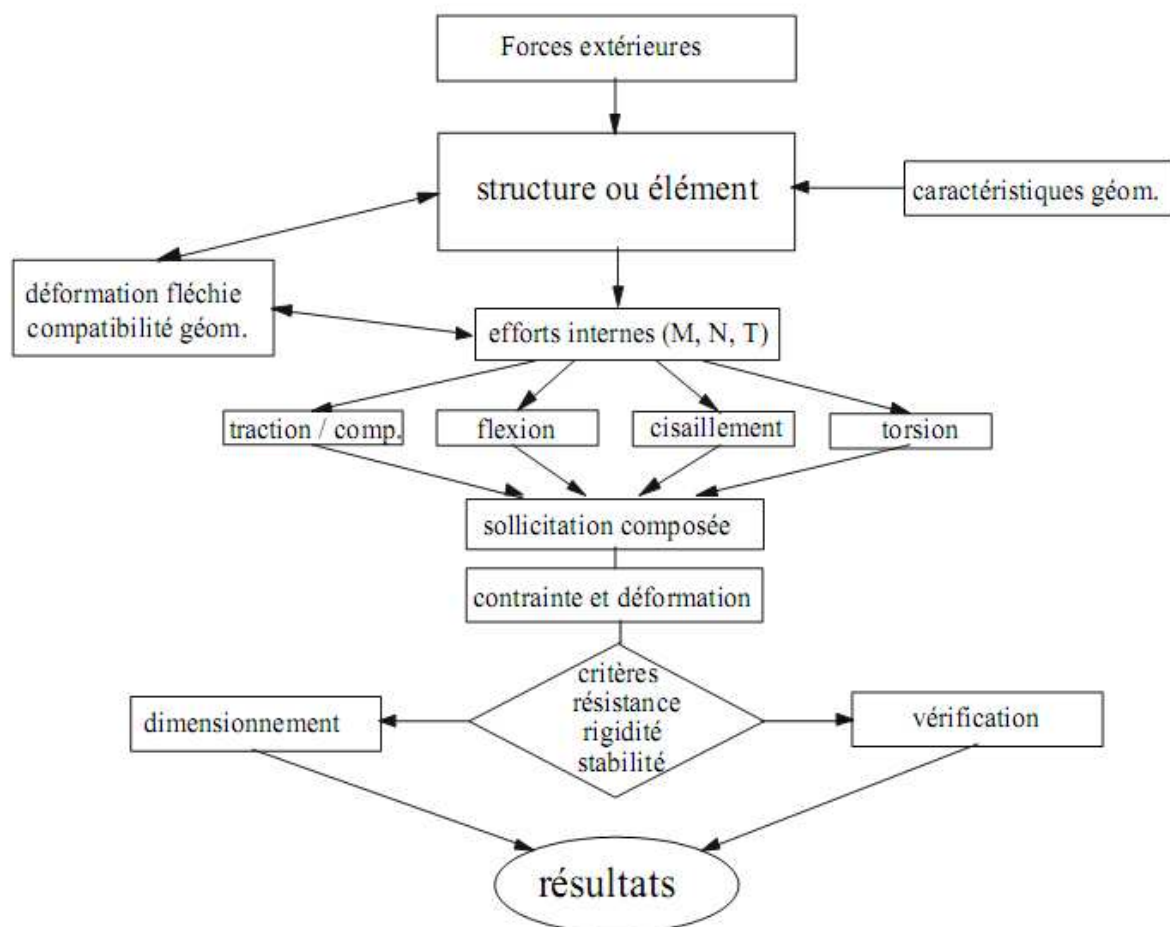
La résistance des matériaux est basée sur les résultats théoriques de la mécanique et les propriétés des matériaux qui ne peuvent être disponibles qu'à travers les résultats des travaux expérimentaux comme le témoigne l'histoire du développement de la résistance des matériaux qui constitue une combinaison fascinante de la théorie et l'expérience.

Les limites de la résistance des matériaux sont celles imposées par ses hypothèses mêmes. Les disciplines connexes telles que la théorie d'élasticité, de la plasticité ou la méthode des éléments finis se libèrent de certaines de ces contraintes. Les principales hypothèses de la résistance des matériaux sont les suivantes:

- ✓ **L'homogénéité, l'isotropie et la continuité du matériau** : On suppose que le matériau possède les mêmes propriétés élastiques en tous les points du corps, dans toutes les directions en un point quelconque du corps, et que le matériau est assimilé à un milieu continu.
- ✓ **L'élasticité et la linéarité du matériau**: On suppose admet qu'en chaque point contraintes et déformations sont proportionnelles et qu'après déformation, l'élément revient à son état initial.
- ✓ **La petitesse des déformations** : les déformations dues aux charges sont négligeables par rapport aux dimensions des éléments et la configuration géométrique reste inchangée.
- ✓ **Hypothèse des sections planes** (hypothèse de Navier-Bernoulli): Les sections droites restent planes et normales à la fibre moyenne au cours de la déformation.
- ✓ **Hypothèse de Saint Venant** : Tous les efforts qui interviennent dans la théorie peuvent être schématisés par leur torseur résultant.

Ces hypothèses simplificatrices conduisent à des solutions approchées qui permettent en général une bonne approximation du comportement des structures soumises à différents types de charges.

L'action extérieure est caractérisée par les différents types de forces connues agissant sur une structure ou un élément de structure défini par ses caractéristiques géométriques et mécaniques. Pour une structure isostatique, les efforts internes sont déterminés directement en utilisant les équations de la statique. Par contre pour une structure hyperstatique, il est nécessaire de faire intervenir les déformations de la structure pour déterminer les réactions. L'effort interne qui agit au niveau d'une section d'un élément de structure peut-être décomposé en effort normal de traction ou de compression, moment fléchissant, moment de torsion, effort tranchant ou une combinaison de ces sollicitations. A partir de ces efforts internes, nous pouvons obtenir des informations sur la répartition des contraintes et des déformations dans la section droite. Les valeurs extrêmes de ces contraintes et déformations sont les mesures de base des critères de résistance, de rigidité ou de stabilité pour vérifier ou dimensionner les éléments des structures.



La résistance des matériaux a donc pour but d'assurer qu'on utilise dans une structure donnée, une quantité minimale de matériaux, tout en satisfaisant aux exigences suivantes:

- 1- Résistance** : La pièce doit supporter et transmettre les charges externes qui lui sont imposées, (la capacité qu'a un corps de résister aux forces appliquées).
- 2- Rigidité** : La pièce ne doit pas subir de déformation excessive lorsqu'elle est sollicitée, (la propriété qu'a un corps à résister aux déformations).
- 3- Stabilité** : La pièce doit conserver son intégrité géométrique afin que soient évitées des conditions d'instabilité (flambement).
- 4- Endurance** : La pièce, si elle est soumise à un chargement répété, doit pouvoir tolérer sans rupture un certain nombre de cycles de sollicitation variable (fatigue).
- 5- Résiliences** : Enfin, dans le cas où un chargement dynamique (impact) est à prévoir, la pièce doit pouvoir absorber une certaine quantité d'énergie sans s'en trouver trop endommagée.

I.2) PROPRIETES DES MATERIAUX

Les matériaux résistent, dans la plupart des cas, aux sollicitations auxquelles ils sont soumis car les forces extérieures qui leur sont appliquées, constituent un système en équilibre. Parmi ces forces, il ne faut noter les réactions d'appuis ainsi que les liaisons.

Mais ce n'est pas tout, c'est aussi parce que ces matériaux sont doués de propriétés physiques données.

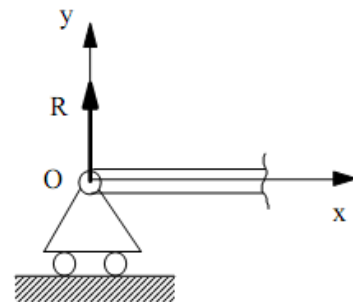
On note parmi les propriétés physiques importantes en résistance des matériaux : l'élasticité, la résistance, la rigidité, la ductilité, la malléabilité, ... Grâce à ces propriétés, les efforts internes engendrées dans les matériaux, sont capables de s'opposer à l'action des forces extérieures, où :

- 1- Élasticité** : La propriété physique d'un corps à reprendre sa forme après suppression de la sollicitation (charge).
- 2- Ductilité** : La propriété d'un corps à pouvoir être étiré en fils très mince.
- 3- Malléabilité** : La propriété d'un corps de pouvoir être réduit en feuilles minces. Un corps ductile est généralement malléable. Un corps qui n'est pas ductile, ni malléable est un corps dit cassant.

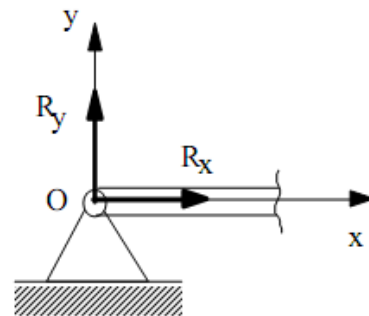
I.3) SCHEMATISATION DES LIAISONS (réaction d'appui)

Une structure est reliée au monde extérieur par un certain nombre de liaisons. Une liaison impose des conditions cinématiques en un point. Pour maintenir ces liaisons, il faut exercer des efforts de liaison qui sont des inconnues du problème. Dans le cas des problèmes plans (systèmes de forces coplanaires), la schématisation des liaisons et des efforts exercés se ramène à trois cas types : appui simple (ponctuel ou plan sans frottement), articulation (pivot) et encastrement.

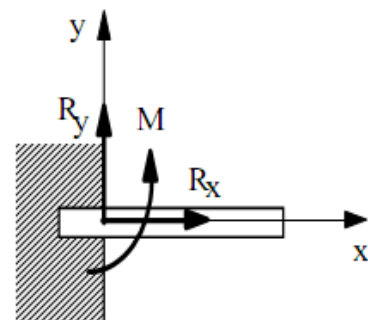
I.3.1) Appui simple : Ce type d'appui, laisse à la structure toute liberté de pivoter autour de O (extrémité de la poutre) et de se déplacer perpendiculairement à la droite joignant les points de contact. Si on néglige les frottements, la réaction d'appui a la direction de la droite précitée, et introduit une seule inconnue dans l'étude de la poutre.



I.3.2) Appui double (articulation) : Matérialisé par une rotule. Cet appui autorise les rotations d'une extrémité de la poutre ou d'un des éléments constituant la structure. La direction de la réaction R est inconnue, mais la ligne d'action passe par le centre de l'articulation. L'articulation introduit 2 inconnues, par exemple les projections sur deux directions du plan moyen.



I.3.3) Encastrement : L'encastrement interdit tout déplacement de la section droite de l'appui. Sa réaction est une force de densité variable répartie sur toute l'étendue de la section. En vertu du principe de Saint Venant, ces forces peuvent être remplacées par leur résultante générale R , et leur moment M rapportés au centre de gravité G . Ce type d'appui introduit donc 3 inconnues, les deux projections de R sur deux axes du plan moyen et l'intensité du moment M qui est perpendiculaire au plan moyen.



I.4) CONDITIONS D'EQUILIBRE

Tout comme en statique, les corps sont en équilibre en tout point donc les mêmes conditions d'équilibre sont appliquées sur les corps.

I.4.1) Équilibre de translation

$$\sum F_x = 0 \quad \text{Translation horizontale.}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \text{Translation verticale.}$$

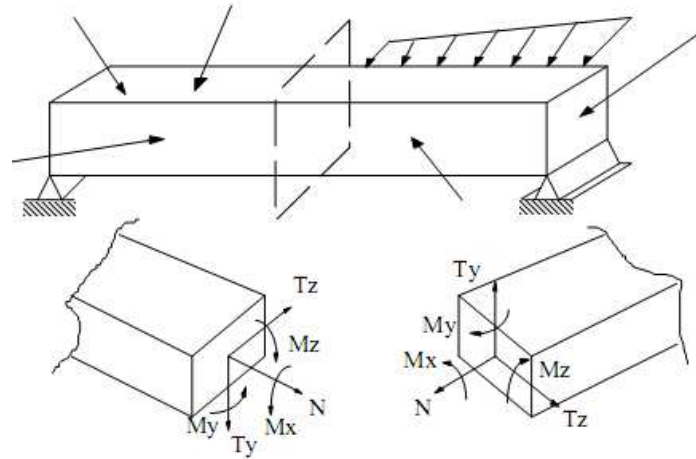
I.4.2) Équilibre de rotation

$$\sum M_z = 0 \quad \text{Rotation par rapport à n'importe lequel axe perpendiculaire au plan des forces } xy.$$

I.5) EFFORTS INTERNES

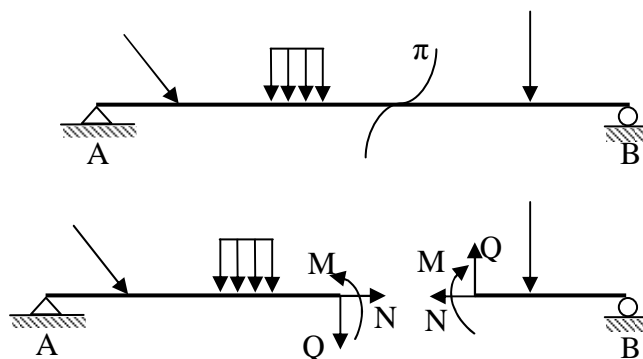
On appelle forces extérieures ou charges les forces appliquées connues sur une structure donnée. Suivant le cas, ces charges peuvent être réparties avec une densité donnée de volume (poids propre d'une structure) ou concentrées en un certain nombre de points. Dans cette catégorie de forces extérieures figurent aussi les réactions d'appuis. Sous l'effet de ces charges, les forces entre les particules d'un corps (élément) en équilibre varient. En Résistance des Matériaux, on appelle souvent cette variation des forces efforts internes.

Afin de faciliter l'étude des efforts exercés sur chaque particule matérielle on considère une section transversale d'un élément soumis à une sollicitation. Tout comme n'importe quel système de forces, les efforts intérieurs répartis sur toute la section peuvent être rapportés à un point (par exemple le centre de gravité de la section), et de ce fait on distingue le vecteur force F (F_x, F_y, F_z) et le vecteur moment M (M_x, M_y, M_z) résultant des forces intérieures dans la section. Il convient d'adopter les dénominations suivantes pour les forces et moments agissant dans une section.



I.6) METHODE DES SECTIONS

Pour déterminer les forces intérieures qui apparaissent dans un élément soumis à une sollicitation, on se sert, en résistance des matériaux, de la méthode des sections. Cette méthode est basée sur le fait que si un élément est en équilibre, sous l'action des forces extérieures, alors n'importe quelle partie de cet élément sous l'action des forces qui lui sont appliquées, est équilibré par un système de forces intérieures agissant dans la section. On considère l'élément AB plan, soumis à l'action d'un système de forces extérieures. Pour calculer les efforts et moments dans n'importe quelle section, on coupe à l'endroit voulu l'élément AB en deux parties. Les valeurs numériques des efforts N , Q et M sont égaux aux sommes algébriques des projections et des moments des forces extérieures agissant sur une des parties (gauche ou droite) de l'élément sectionné, généralement sur celle où les projections et moments se calculent plus facilement.

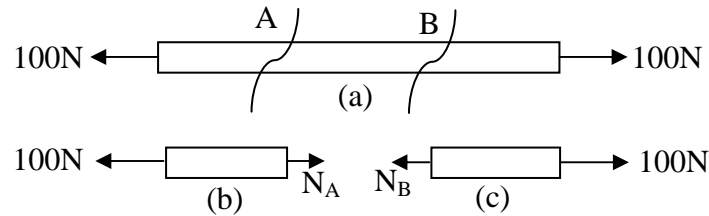


I.6.1) Effort Normal

La composante N de la résultante F représente la somme des projections de toutes les forces intérieures agissant suivant la normale de la section (ou suivant l'axe longitudinal de

l'élément). L'effort normal provoque une déformation longitudinale de l'élément. N est considéré positif s'il s'agit d'une traction et négatif dans le cas contraire.

Exercice 1 : Trouver les efforts normaux en A et en B dans la poutre ci-dessous.



Solution

Premièrement, isolons la section de gauche pour la coupe en A et plaçons N_A en tension (cas b). Nous aurons :

$$\sum F_x = N_A - 100 = 0$$

$$\text{D'où } N_A = 100N \quad (\text{donc en tension})$$

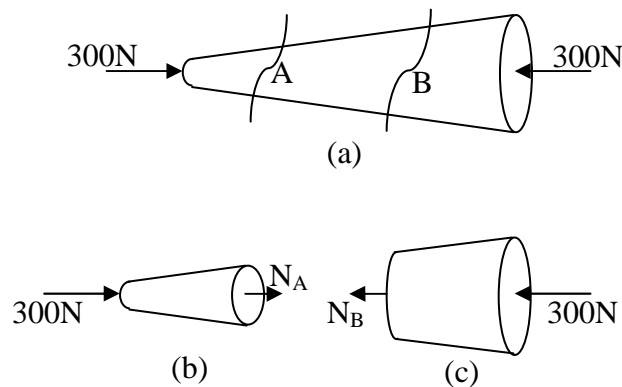
Ensuite, isolons la section de droite pour la coupe en B et plaçons N_B en tension (cas c). Nous aurons :

$$\sum F_x = -N_B + 100N = 0$$

$$\text{D'où } N_B = 100N = N_A$$

On remarque qu'entre les deux charges de $100N$ la valeur de l'effort normal est constante et vaut $100N$ de tension.

Exercice 2 : Trouver les efforts normaux en A et en B dans la poutre ci-dessous.



Solution

Premièrement, isolons la section de gauche pour la coupe en A et plaçons N_A en tension (par convention) (cas b). Nous aurons :

$$\sum F_x = N_A + 300 = 0$$

$$\text{D'où } N_A = -300N \quad (\text{donc en compression})$$

Ensuite, isolons la section de droite pour la coupe en B et plaçons N_B en tension (cas c). Nous aurons:

$$\sum F_x = -N_B - 300 = 0$$

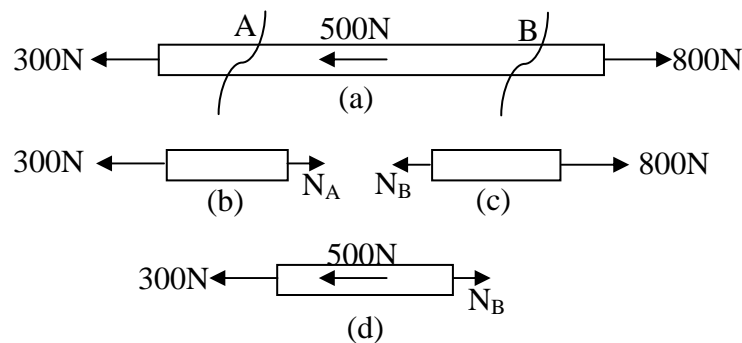
$$\text{D'où } N_B = -300\text{ N} = N_A$$

On remarque ici que même si la forme varie, l'effort de compression demeure le même sur toute la longueur de la pièce comme dans l'exemple précédent.

Remarque final

L'effort normal ne dépend que des charges, il est indépendant de la forme ou de la grosseur de la pièce.

Exercice 3 : Trouver les efforts normaux en A et en B dans la poutre ci-dessous.



Solution

Coupe A :
$$\sum F_x = -300 + N_A = 0$$

$$\text{D'où } N_A = 300\text{ N de tension}$$

Coupe B :
$$\sum F_x = -N_B + 800 = 0$$

$$\text{D'où } N_B = 800\text{ N de tension}$$

Même si on avait sélectionné la partie de gauche le résultat aurait été le même.

$$\sum F_x = -300 - 500 + N_B = 0$$

$$\text{D'où } N_B = 800\text{ N de tension également.}$$

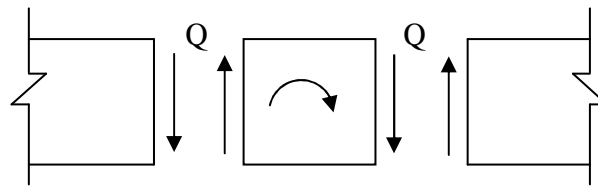
Remarques :

- En se déplaçant sur une pièce, on doit effectuer une coupe après chaque force rencontrée si on veut connaître les efforts que la pièce supporte en tout point.
- Entre deux charges l'effort normal ne change pas, mais si on rencontre une charge en se déplaçant sur la pièce, l'effort normal varie en une valeur égale à la charge, si celle-ci est parallèle à l'axe.

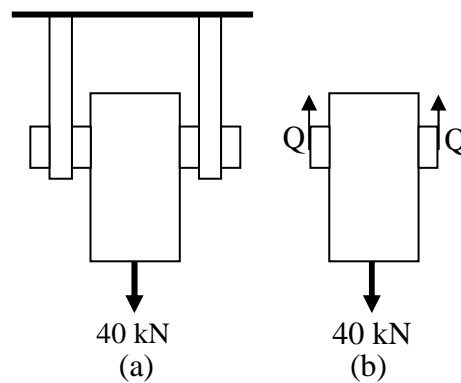
- Le principe d'action réaction est respecté à chaque coupe. Que l'on conserve la partie de gauche ou de droite, l'effort normal est le même en grandeur et reste en tension.

I.6.2) Efforts tranchants

Les forces transversales Q_z , et Q_y sont les sommes des projections de toutes les forces intérieures dans la section sur les axes centraux principaux de cette dernière. Ces efforts tranchants provoquent le cisaillement des bords de la section respectivement dans la direction des axes Z et Y . Le sens de Q sur le plan est positif par convention quand il tend à faire tourner un élément entre deux sections dans le sens des aiguilles d'une montre.



Exercice 4 : Trouver l'effort tranchant dans la goupille du système suivant.



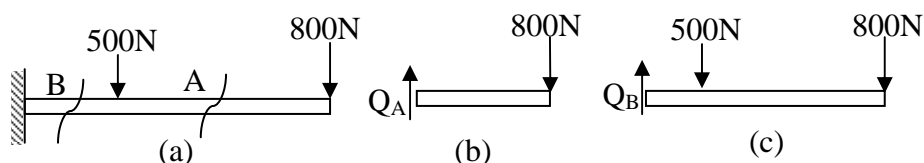
Solution

$$\sum F_y = -40000 + 2Q = 0$$

$$\text{D'où } Q = 20 \text{ kN}$$

La goupille, qui soutient la tige et sa charge, subit un effort tranchant tendant à la cisailier égal à 20 kN . Il faut donc qu'elle soit choisie en conséquence.

Exercice 5 : Trouver l'effort tranchant en A et en B du système ci-dessous.



Solution

Premièrement, isolons la section de droite (car on ne connaît pas les réactions d'appuis à l'encastrement). On a alors:

$$\sum F_y = -800 + Q_A = 0$$

$$\text{D'où } Q_A = 800N$$

Ensuite, isolons encore la partie de droite à partir de B , on a alors:

$$\sum F_y = Q_B - 500 - 800 = 0$$

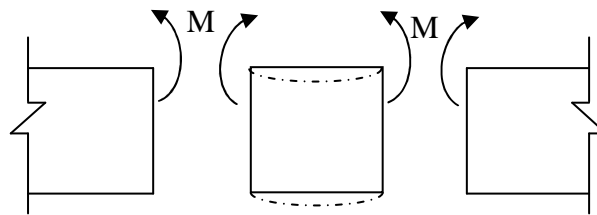
$$\text{D'où } Q_B = 1300N$$

Remarque

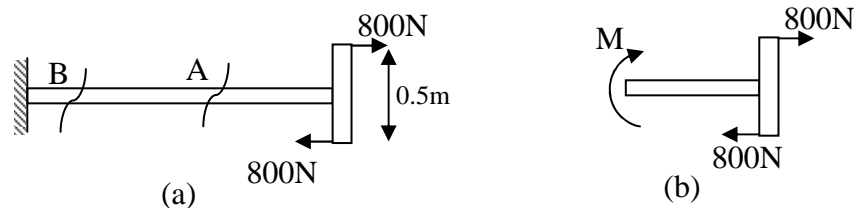
La valeur de l'effort tranchant Q change, de la valeur de la charge perpendiculaire à l'axe rencontré, en se déplaçant sur la poutre.

I.6.3) Moments fléchissant

Les composantes M_y et M_z du vecteur moment résultant représentent les sommes des moments de toutes les forces intérieures dans la section, par rapport aux axes d'inertie principaux de cette dernière Y et Z respectivement. Le sens positif des moments dans le plan qui par convention tend les fibres inférieures et comprime les fibres supérieures de la section.



Exercice 6 : Trouver le moment fléchissant dans la poutre ci-dessous aux points A et B .



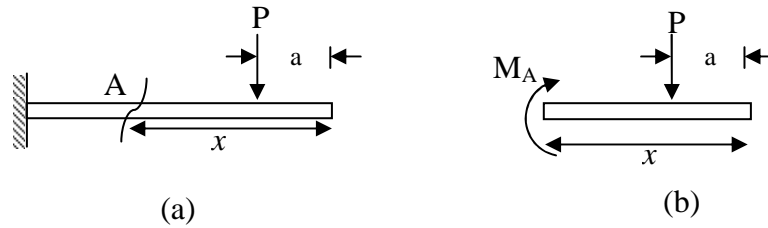
Solution

$$\sum M_A = \sum M_B = -(800 * 0.5) - M = 0$$

$$\text{D'où } M = -400Nm \text{ (donc sens contraire)}$$

Si l'effort provient d'un couple comme dans cet exemple, le moment de flexion est le même partout dans la poutre.

Exercice 7 : Trouver le moment fléchissant dans la poutre ci-dessous au point A.



Solution

$$\sum M_A = -(P(x-a)) - M_A = 0$$

$$\text{D'où } M_A = -P(x-a)$$

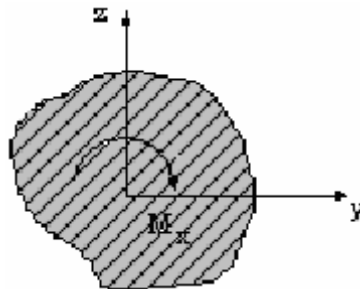
On voit ici que le moment fléchissant varie en fonction de la position (x) de la coupe dans la poutre.

Remarque

La valeur du moment fléchissant varie en fonction de la position de la coupe dans une poutre lorsque celle-ci est sollicitée par des charges.

I.6.4) Moment de torsion

Le moment de torsion M_x (ou M_t) est la somme des moments de toutes les forces intérieures dans la section par rapport à l'axe de la barre x . Le moment de torsion est positif lorsqu'il tend à tourner la section dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique) en regardant la section du côté de la normale extérieure.



I.7) CONTRAINTES

I.7.1) Contrainte normale (σ) (sigma)

La contrainte normale (σ) est l'intensité de l'effort normal (N). C'est l'effort supporté par unité de surface elle est exprimé par :

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \left[\frac{N}{m^2} \right]$$

Où :

N = effort normal [N]

A = aire de la section supportant l'effort N [m^2]

Les unités de la contrainte normale sont le N/m^2 , par contre en physique ces unités sont appelées aussi le Pascal (Pa).

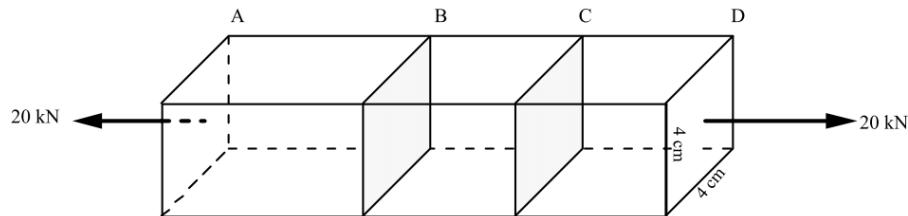
$$1 \frac{N}{m^2} = 1 Pa$$

$$1 kPa = 1 * 10^3 Pa$$

$$1 MPa = 1 * 10^6 Pa$$

$$1 GPa = 1 * 10^9 Pa$$

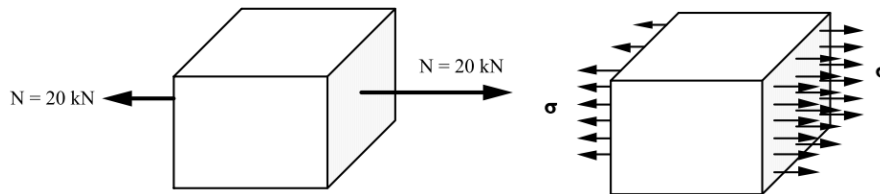
Exercice 8 : Trouver les contraintes normales en B et en C de la poutre ci-dessous.



Solution

En effectuant des coupes en B et C , on trouve facilement que l'effort N vaut $20 kN$ en tension.

Prenons la partie CD :

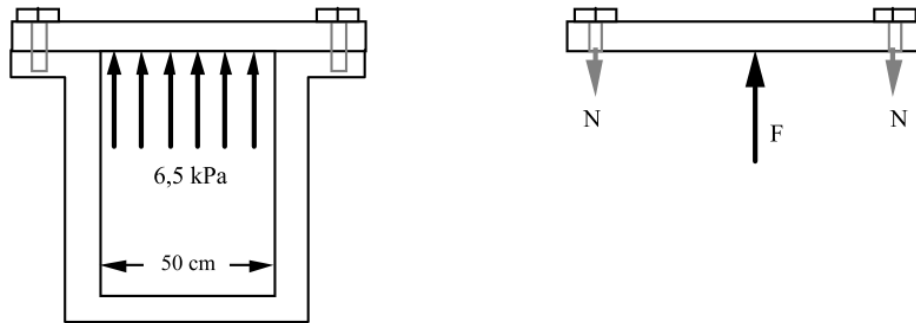


La section $A = 4 cm \times 4 cm = 16 cm^2 = 0.0016 m^2$

$$\sigma = \frac{20 kN}{0.0016 m^2} = 1,25 \cdot 10^4 kPa$$

$$\text{D'où } \sigma = 12,5 MPa$$

Exercice 9 : Le couvercle d'un réservoir de 50 cm de diamètre est fixé au moyen de 10 boulons de $1,5 cm^2$ de section. Quelle est la contrainte dans les boulons si la pression dans le réservoir est de 6,5 kPa?

**Solution**

D'abord calculons la force exercée par la pression dans le réservoir sur le couvercle.

$$P = \frac{F}{A_1}$$

Où A_1 : Aire sur laquelle s'exerce la poussée

$$A_1 = \pi 0,25^2 = 0,196 \text{ m}^2$$

Donc : $F = 6,5 \cdot 10^3 \cdot 0,196 = 1275 \text{ N}$

Si on calcule l'effort supporté par chaque boulon, on a :

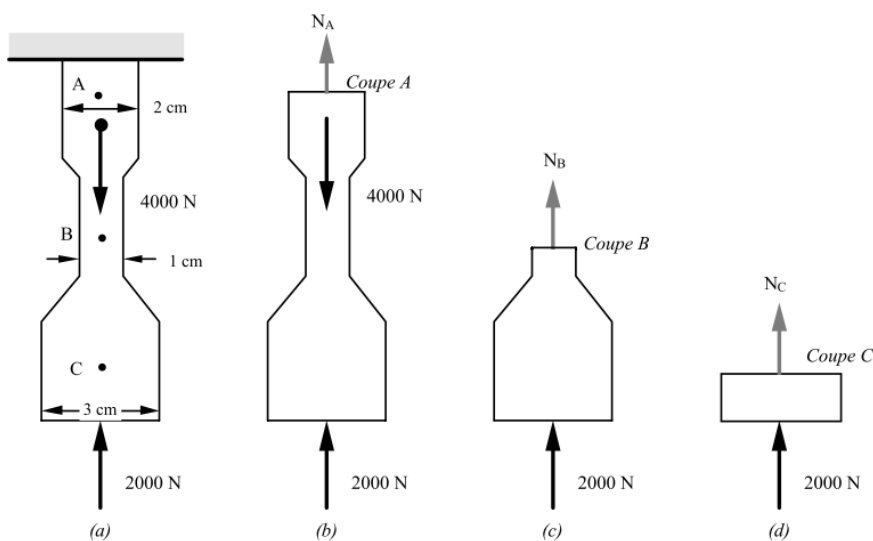
$$\sum F_y = 1275 - 10N = 0$$

$$\text{D'où : } N = 127,5 \text{ N}$$

Chaque boulon a une section de $1,5 \text{ cm}^2$ donc :

$$\sigma = \frac{127,5}{1,5 \text{ cm}^2} \left(\frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \right)^2 = 850 \cdot 10^3 \text{ Pa} = 850 \text{ kPa}$$

Exercice 10 : Trouver la contrainte normale aux points A, B et C de la tige ci-dessous.



Solution

D'abord la coupe A:

$$A_A = \frac{\pi d_A^2}{4} = 3,14 \cdot 10^{-4} m^2$$

$$\sum F_y = N_A - 4000 + 2000 = 0$$

D'où :

$$N_A = 2000N$$

Donc :

$$\sigma = \frac{2000}{3,14 \cdot 10^{-4}} = 6,37 \cdot 10^6 Pa = 6,37 MPa \text{ (tension)}$$

Coupe en B :

$$A_B = \frac{\pi d_B^2}{4} = \frac{\pi (0,01)^2}{4} = 7,85 \cdot 10^{-5} m^2$$

Et

$$\sum F_y = N_B + 2000 = 0 \text{ D'où } N_B = -2000N$$

$$\sigma_B = \frac{-2000}{7,85 \cdot 10^{-5}} = -2,55 \cdot 10^7 Pa$$

Donc

$$\sigma_B = 25,5 MPa \text{ (compression)}$$

Coupe C :

$$A_C = \frac{\pi d_C^2}{4} = \frac{\pi (0,03)^2}{4} = 7,1 \cdot 10^{-4} m^2$$

$$\text{On a } \sum F_y = N_C + 2000 = 0 \text{ D'où } N_C = -2000N$$

$$\text{D'où } \sigma_C = \frac{-2000}{7,1 \cdot 10^{-4}} = -2,82 \cdot 10^6 Pa$$

$$\text{Donc } \sigma_C = 2,82 MPa \text{ (compression)}$$

I.7.2) Contrainte en cisaillement (τ) (Tau)

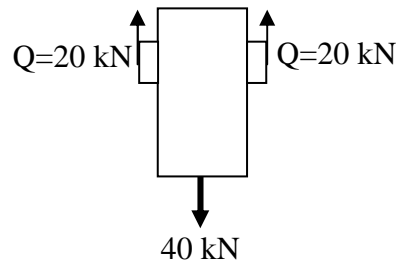
La contrainte en cisaillement « τ », c'est l'intensité de l'effort tranchant. C'est l'effort tranchant par unité de surface.

$$\tau = \frac{Q}{A} \left[\frac{N}{m^2} \right]$$

Où Q : L'effort tranchant [N]

A : Aire de la section de la pièce supportant l'effort Q [m^2]

Exercice 11 : Reprendre l'exercice 4. En sachant que les goupilles ont une section de $1,5 \text{ cm}^2$, calculer la contrainte en cisaillement dans la goupille.



Solution

ON a alors :

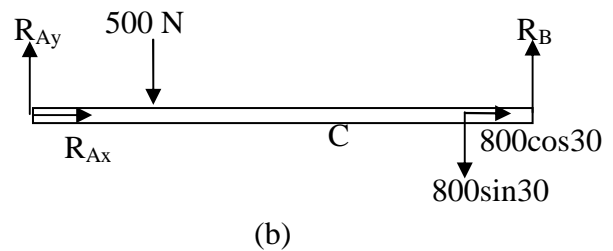
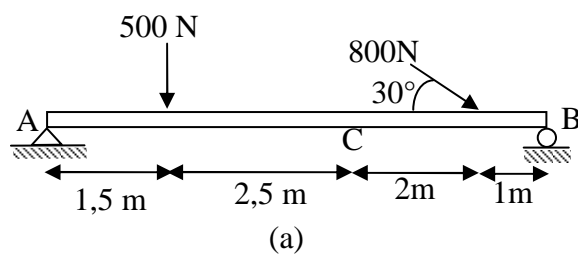
$$\tau = \frac{20000 \text{ N}}{1,5 \text{ cm}^2} \left[\frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \right]^2 = 1,33 \cdot 10^8 \text{ Pa}$$

D'où $\tau = 133 \text{ MPa}$

I.7.3) Efforts et contraintes multiples

Lorsque l'on veut étudier un corps en entier, il est souvent préférable de vérifier toutes les contraintes s'exerçant sur celui-ci. Dans ce cas, on doit effectuer une coupe aux points considérés et tenir compte des trois efforts possibles N , Q et M qui nous permettent de calculer les contraintes respectives.

Exercice 12 : Calculer les efforts, contraintes et moment fléchissant dans la poutre ci dessous au point C. La poutre a une section de 1 cm^2 .



Solution

En effectuant une coupe à gauche comme à droite, il nous manque toujours une réaction d'appui afin de compléter notre étude, donc nous commencerons par trouver les réactions d'appuis. Isolons le corps en entier (3 inconnues) et décomposons la force de 800 N .

Équilibre de rotation:

$$\sum M_A = -(500 \cdot 1,5) - (800 \sin 30 \cdot 6) + (R_B \cdot 7) = 0$$

$$7R_B = 750 + 2400 = 3150$$

D'où $R_B = 450 \text{ N}$

Équilibre de translation:

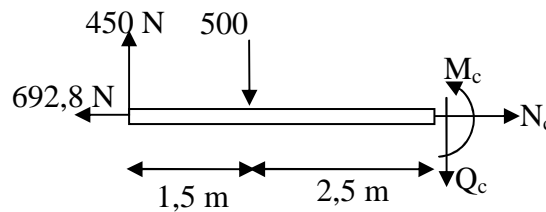
$$\sum F_x = R_{Ax} + 800 \cos 30 = 0$$

$$\text{D'où } R_{Ax} = -629,8 N \text{ (sens contraire)}$$

$$\text{Et } \sum F_y = R_{Ay} - 500 - 800 \sin 30 + R_B = 0$$

$$\text{D'où } R_{Ay} = 450 N$$

Maintenant nous pouvons effectuer une coupe en C. La coupe peut être soit à gauche, soit à droite. Choisissons la coupe de gauche.



Cherchons d'abord les efforts et moment fléchissant.

$$\sum F_x = -692,8 + N_C = 0 \text{ D'où } N_C = 692,8 N$$

$$\sum F_y = 450 - 500 - Q_C = 0 \text{ D'où } Q_C = -50 N$$

$$\text{et } \sum M_C = -(450 * 4) + (500 * 2,5) + M_C = 0$$

$$\text{D'où } M_C = 550 Nm$$

Du côté des contraintes maintenant. La contrainte normale:

$$\sigma = \frac{N_C}{A} = \frac{692,8}{1} \left(\frac{100}{1} \right)^2 = 6,93 \cdot 10^6 Pa = 6,93 MPa$$

La contrainte en cisaillement :

$$\tau_C = \frac{Q_C}{A} = \frac{-50}{1} \left(\frac{100}{1} \right)^2 = -5 \cdot 10^5 Pa = -500 kPa$$

I.7.4) Charges uniformément réparties

Une charge uniformément répartie ou distribuée est une charge qui agit sur une distance considérable de la poutre, et ce de façon uniforme. C'est-à-dire la charge sollicitant la poutre par unité de longueur est constante. Le poids propre de la poutre est une charge distribuée.

En général, la charge distribuée peut être répartie sur une partie de la poutre ou sur toute sa longueur. On appelle :

Charge uniformément répartie:

$$W = w * x \quad [N]$$

Où w : charge par unité de longueur (charge linéaire) [N/m]

W : charge totale uniformément répartie sur une longueur « x », [m].

Un bloc de béton appuyé sur une poutre peut être une charge distribuée. Par exemple, la charge ci-contre.

La charge totale « W » a comme grandeur, le produit de sa charge linéaire « w » par la longueur de sa charge « x ». Le point d'application de la charge totale W est toujours situé au centre de la partie conservée de la distribution.

Ici, la charge est prise dans sa totalité, sa valeur est:

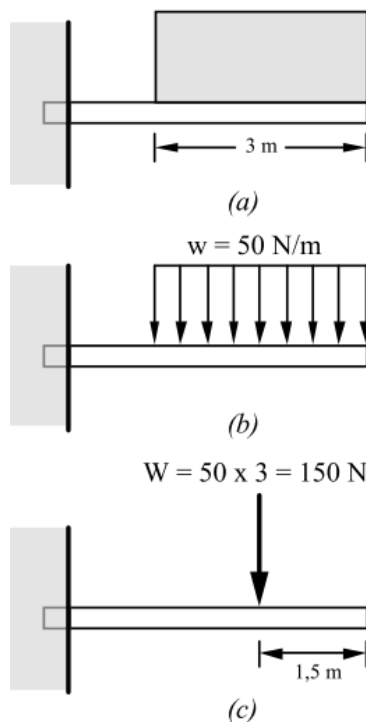
$$W = 50 \times 3 = 150 \text{ N}$$

Et elle est située au centre de la charge considérée, c'est-à-dire à 1,5 m du bord, figure c.

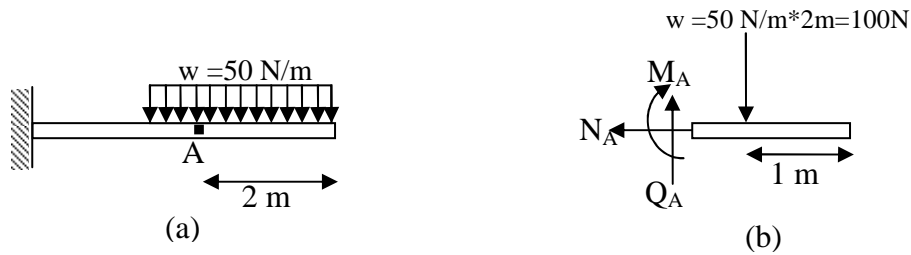
Si on effectuait une coupe dans les trois premiers mètres, la grandeur de la charge serait le produit de la charge linéaire par la grandeur choisie (par exemple à 2 m) donc

$$W = 50 \times 2 = 100 \text{ N}$$

Et son point d'application au centre de la partie conservée, c'est-à-dire à 1 m du bord cette fois-ci.



Exercice 15 : Calculer les efforts ainsi que les contraintes dans la poutre de la figure ci-dessous au point A. La poutre est carrée de 10 cm de côté.



Solution

Coupe A :

$$A = 0,1 * 0,1 = 0,01 \text{ m}^2$$

$$W = 50 * 2 = 100 \text{ N à 1m du bord}$$

$$\sum F_x = -N_A = 0 \quad \text{Donc } N_A = \sigma_A = 0$$

$$\sum F_y = Q_A - 100 = 0 \quad \text{D'où } Q_A = 100 \text{ N}$$

Donc

$$\tau = \frac{Q_A}{A} = \frac{100}{0,01} = 10 \text{ kPa}$$

Finalement :

$$\sum M_A = -M_A - (100 * 1) = 0 \quad \text{D'où } M_A = -100 \text{ Nm}$$

II.1) GENERALITES

Les treillis sont très largement utilisés en construction. Qu'il s'agisse de structures faites d'acier, de bois ou autre, les treillis se retrouvent dans les fermes des toitures des hangars et des grandes salles de sport, de grues, de ponts roulants, de pylônes, etc., figure II.1. On fait appel à ce mode de réalisation dans le but essentiel d'alléger l'ensemble d'une construction tout en assurant une plus grande stabilité et rigidité importante suivant leurs plans.

Les treillis peuvent être sollicités par des forces externes comme les charges à supporter, le poids propre de la structure, le poids de la neige, le trafic, les réactions d'appuis, ... tandis que les pièces de ces structures sont soumises à des forces internes de la part des pièces voisines. Ces efforts internes et externes doivent être déterminés pour pouvoir choisir les matériaux requis dans la réalisation des constructions. Des pièces trop grosses ne sont pas économiques par contre des pièces trop petites ne sont pas sécuritaires.

Lorsque toutes les barres ainsi que les forces appliquées sont dans un même plan, le treillis est appelé un treillis plan ; dans le cas contraire, il s'agit d'un treillis spatial.

➤ Génie civil



Pont



Structure de toiture



Pylône

➤ Transport



Châssis auto



Cadre moto



Structure portante

Figure II.1 : Domaine d'utilisation des treillis

II.2) DEFINITION

Les systèmes en treillis (appelés aussi triangulations ou structures réticulées) sont des structures composées de barres droites articulées entre-elles à leurs extrémités situées dans un seul plan appelé le plan de charpente. Les articulations communes à plusieurs barres sont les nœuds du système. Il forme généralement une chaîne simple (plane) de triangles juxtaposés. Cette construction est une des principales structures employées en ingénierie.

Les treillis sont des structures dont les pièces sont assemblées de façon à former des triangles. La cellule de base d'un treillis plan est le triangle (parce qu'il est la seule figure géométrique indéformable) et les trois barres (figure II.2a) articulées à leurs extrémités forment une structure stable pour supporter la charge P . Le treillis de la figure II.2a peut être agrandi par juxtaposition de triangles, et on obtient ainsi un système triangulé (figure II.2b).

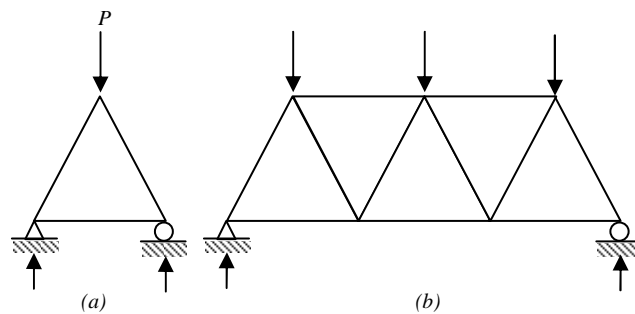


Figure II.2 : Systèmes en treillis

II.3) TERMINOLOGIE

II.3.1) Nœud: Le point de rencontre de deux ou plusieurs barres s'appelle un nœud. Les nœuds peuvent être fait de joint solide (assemblage par rivetage, soudage,...) ou des articulations (assemblage par rotule, axe, ...). La figure II.3 présente un exemple de détail de la réalisation pratique d'un nœud de treillis.

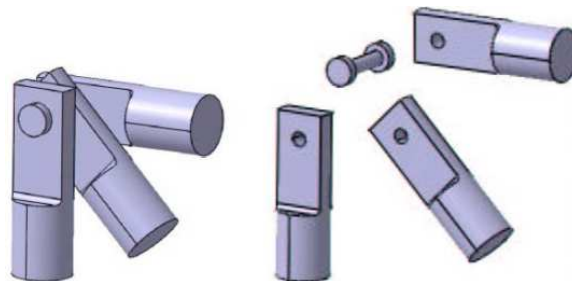


Figure II.3 : Détail d'un nœud

II.3.2) Barres ou membrures: Les pièces d'une structure triangulée sont des barres. Elles sont faites d'acier, de bois ou autre. On associe généralement les barres ou membrures des treillis à des barres articulées.

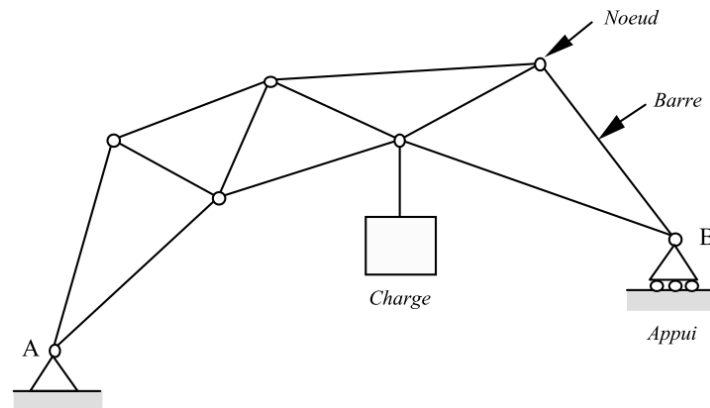
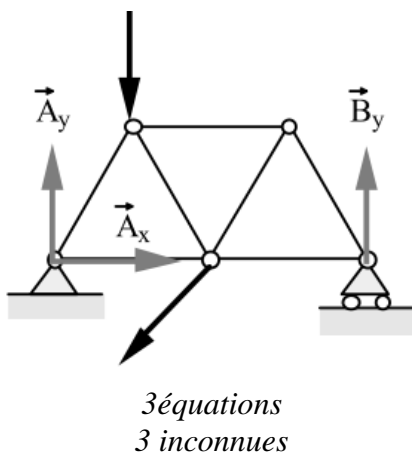


Figure II.4 : Terminologie d'un treillis

II.4) SYSTEMES ISOSTATIQUES ET HYPERSTATIQUES

II.4.1) Système isostatique

Un treillis ou système réticulé est extérieurement isostatique si les actions d'appui peuvent être déterminées à partir des trois équations d'équilibre de la statique ; dans le cas contraire, le treillis est extérieurement hyperstatique.



- Trois équations :

Equilibre de translation :

$$\sum F_x = 0 \dots\dots\dots(\text{II.1})$$

$$\sum F_y = 0 \dots\dots\dots(\text{II.2})$$

Equilibre de rotation :

$$\sum M = 0 \dots\dots\dots(\text{II.3})$$

- Trois inconnues :

A_x , A_y et B_y

Figure II.5 : Système isostatique

Par ailleurs, un treillis est intérieurement isostatique si les efforts dans les barres peuvent être déterminés par les équations d'équilibre de la statique à partir des charges et des actions d'appui préalablement calculées ; dans le cas contraire, le treillis est intérieurement hyperstatique.

II.4.2) Système hyperstatique

Si le nombre d'éléments inconnus des réactions d'appuis est supérieur au nombre d'équations d'équilibre dont on dispose, le système est dit hyperstatique. On a un système possédant plus d'inconnues que d'équations donc on ne peut résoudre ce type de système par les méthode que l'on connaît. Dans ce cas le nombre d'inconnues est quatres : A_x , A_y , B_x et B_y

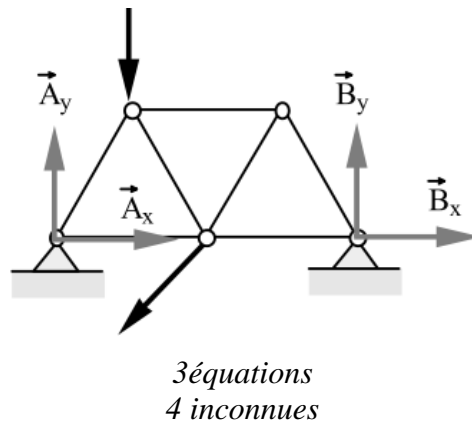


Figure II.6 : système hyperstatique

II.4.3) Système instable

Si le nombre d'éléments inconnues des réactions d'appuis est inférieur au nombre d'équations d'équilibre dont on dispose, le système est dit instable. C'est par exemple le cas d'un système reposant sur deux appuis simple comme l'exemple ci-contre: la structure peut se déplacer latéralement. Dans ce cas le nombre d'inconnue est seulement deux : A_y et B_y

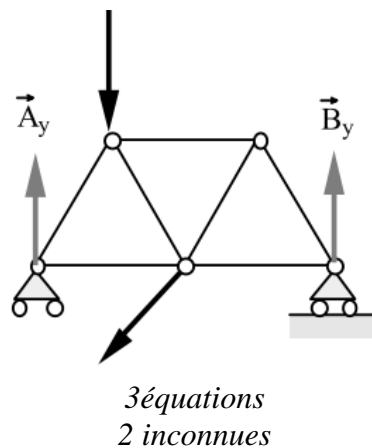


Figure II.7 : système instable

La condition nécessaire pour que le treillis soit intérieurement isostatique est :

$$b = 2n - 3 \quad (\text{II.4})$$

Où :

b : nombre de membrures (barres)

n : nombre de nœuds

- Si $b = 2n - 3$: Le système est intérieurement isostatique ;
- Si $b < 2n - 3$: Le système est instable ;
- Si $b > 2n - 3$: Le système est hyperstatique intérieurement.

Dans ce cas le degré d'hyperstaticité du treillis h est donné par :

$$h = b + l - 2n \quad (\text{II.5})$$

Où :

b : nombre de membrures (barres) ;

n : nombre de nœuds ;

l : le nombre de réactions d'appuis ;

- Si $h=0$ le système est isostatique.

II.5) TYPE DE TREILLIS

Les treillis peuvent être classés en plusieurs catégories comme par exemple:

1-Ferme de pont, (figure II.8)

2-Ferme de toit, (figure II.9)

3-Grue, (figure II.10)

4-Autres

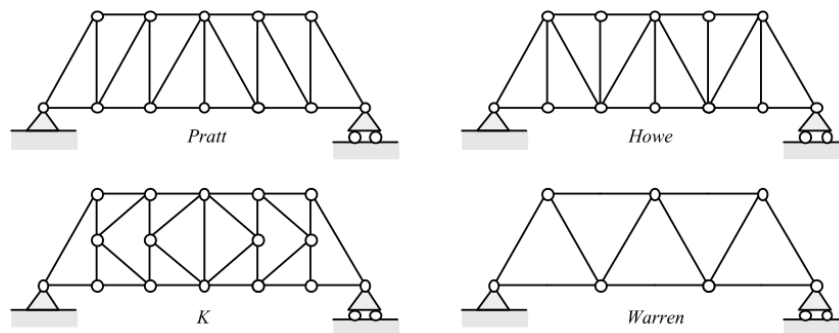


Figure II.8 : Ferme de pont.

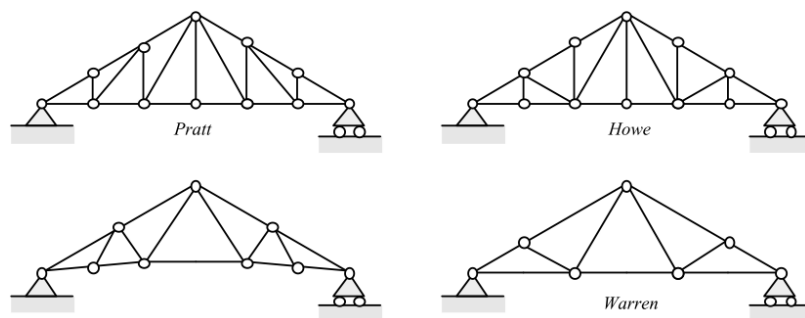


Figure II.9 : Ferme de toit.

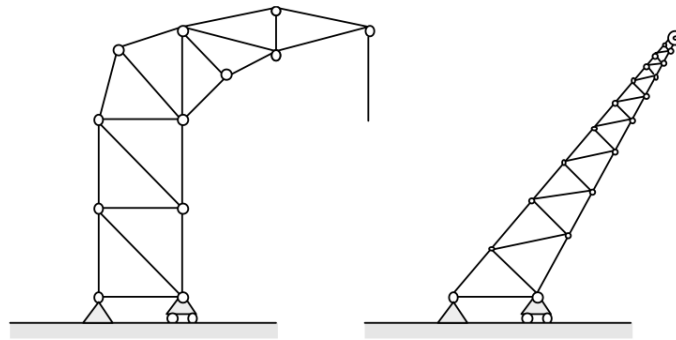


Figure II.10 : Grue.

II.6) HYPOTHESE DE CALCUL

Pour assurer que chacune des barres ne soit sollicité qu'en traction ou en compression il faut que :

- Pour déterminer les actions de liaison, on assimilera le système réticulé à un système matériel rigide (les barres sont considérés comme rigide et indéformables) .
- Les barres sont modélisées par leur ligne moyenne (ligne passant par le centre de gravité des sections droites).
- On suppose les barres articulées sans frottement aux nœuds, (articulation parfaite d'axe z perpendiculaire au plan du treillis).
- Le poids des barres soit négligeable devant les autres sollicitations,
- Les sollicitations extérieures (charge) ne soient que des efforts appliqués sur les nœuds,
- Les liaisons avec l'extérieur soient des appuis fixes ou des appuis mobiles.
- Les calculs sont conduits exclusivement en élasticité.

II.7) SOLLICITATION DES BARRES

On suppose que les forces extérieures sont appliquées aux nœuds. Il en résulte qu'une barre CD du système comprise entre les nœuds C et D est sollicitée par deux forces axiales N_C et N_D transmises par ces nœuds. La barre isolée doit être en équilibre sous l'action de ces deux forces, ce qui exige que celles-ci soient de sens opposé et d'intensité égale, figure II.11. La barre CD supporte donc uniquement un effort normal N_{CD} qui est considéré comme :

- Positif si la barre CD est tendue (Traction)
- Négatif si la barre CD est comprimée (Compression)

Donc nous pouvons écrire que : $N_{CD}=N_{DC}$

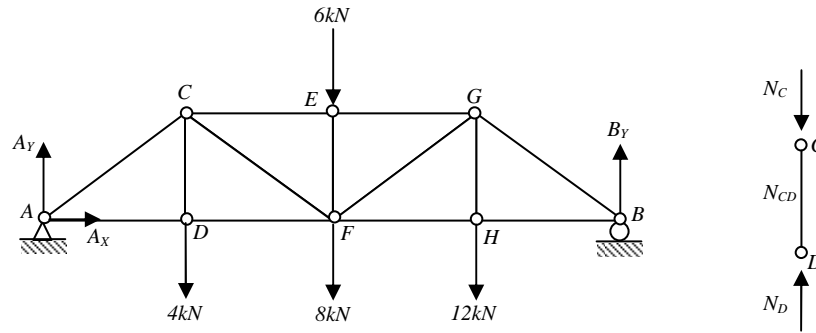


Figure II.11 : Sollicitation des barres

II.8) ANALYSE DE TREILLIS

Deux méthodes principales permettent de calculer théoriquement les efforts dans les membranes d'un treillis : la méthode des nœuds et la méthode des coupes (sections).

II.8.1) Calcul des treillis plans isostatiques par la méthode des nœuds

a) Méthodologie

Cette méthode consiste à faire le schéma rendu libre d'un premier nœud et d'écrire les deux équations exprimant son équilibre, $\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$, (C'est généralement le cas d'un nœud d'extrémité ou d'appui du treillis). Sur base des résultats obtenus par la résolution de ce premier système d'équations, on écrit l'équilibre d'un deuxième nœud puis d'un troisième et ainsi de suite pour obtenir les efforts dans toutes les barres.

Dans cette méthode, on comprendra aisément qu'il faut disposer d'un premier nœud où n'aboutissent que deux barres afin de n'introduire que deux inconnues puisque l'on n'a que deux équations (c'est toujours le cas dans les triangulations simples) et ensuite, il faut également que, pour tout nœud suivant, il n'y ait jamais plus de deux efforts inconnus à trouver. Ce sont ces deux critères qui vont gouverner le choix du nœud de départ puis de l'ordre suivant lequel on va progresser dans le treillis.

Signalons que souvent, il est utile de déterminer la nature du treillis et de calculer, au préalable, les réactions d'appui par équilibre de tout le treillis.

b) Remarque

Lors de la résolution, pour les efforts connus, on utilise leur sens ; pour les efforts inconnus dans les barres, on suppose qu'ils agissent en traction (leurs vecteurs représentatifs s'éloignent du nœud). On écrit les équations d'équilibre pour trouver la valeur de ces efforts.

Si le résultat est positif pour un effort, il s'agit bien d'une traction ; sinon il s'agit d'une compression.

Il est clair qu'au dernier nœud, les équations d'équilibre devront être automatiquement satisfaites et que cela pourra servir de contrôle final.

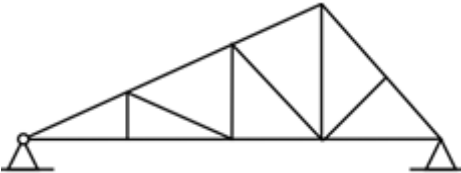
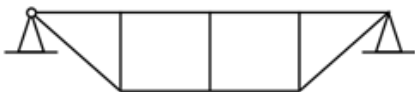
c) Conclusion

La méthode des nœuds est toute indiquée quand il s'agit de calculer les forces dans toutes les barres d'un treillis. Elle consiste à écrire l'équilibre de chaque nœud, pour déterminer les valeurs de sollicitation de chaque barre. On peut se vérifier sur le dernier nœud. Seuls problèmes :

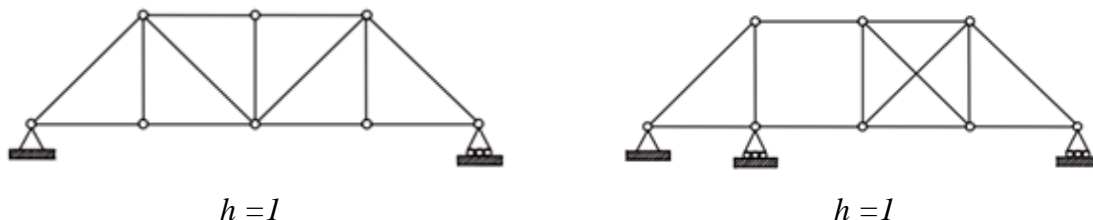
- On doit généralement résoudre entièrement le treillis pour obtenir l'effort dans une barre bien précise ;
- Les erreurs se cumulent au fur et à mesure de l'avancement de la résolution.

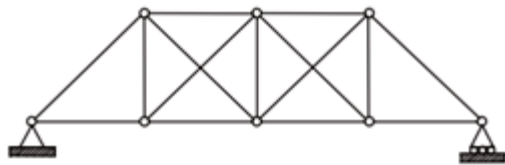
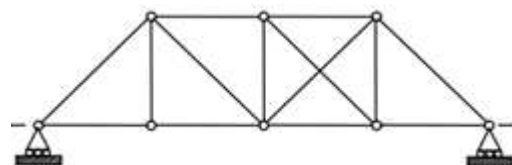
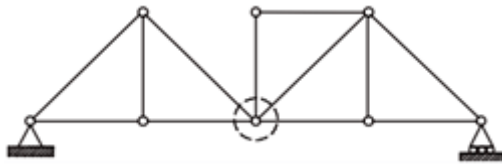
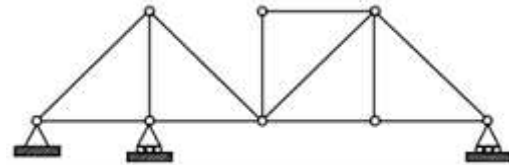
Exercice 1 :

1- Vérifier l'isostatisme des systèmes triangulés suivants.

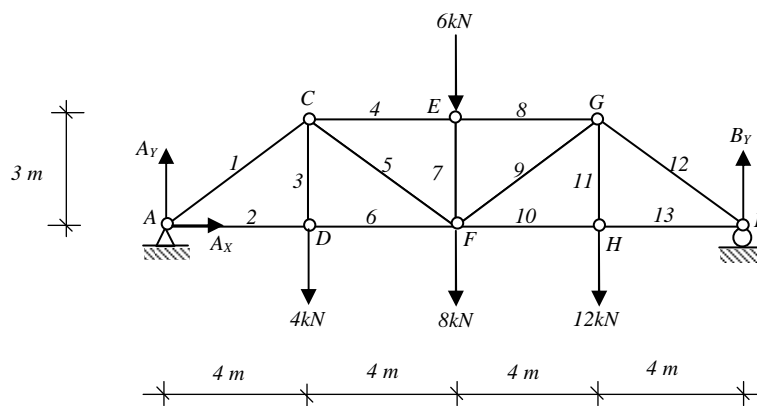
systèmes triangulés	Nbrs. de barres et de nœuds	Type de système
	$b = 15$ $n = 9$	Système est intérieurement isostatique
	$b = 11$ $n = 8$	le système est instable

2- Calculer le degré d'hyperstaticité h des systèmes triangulés suivants :



 $h = 2$  $h = 0$  $h = -1$  $h = 0$ **Exercice 2:**

Trouver les forces dans toutes les barres du treillis suivant.

**Solution**

- Vérification de la structure

$$b = 2n - 3$$

$$b = 13$$

$$n = 8 \Rightarrow 13 = 13$$

Donc le système est intérieurement isostatique.

1- Trouvons les réactions d'appuis

$$\sum M_A = - (4000 \cdot 4) - (8000 \cdot 8) - (6000 \cdot 8) - (12000 \cdot 12) + (B_y \cdot 16) = 0$$

$$B_y \cdot 16 = 16000 + 64000 + 48000 + 144000$$

$$\text{D'où } B_y = 17 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 4000 - 8000 - 6000 - 12000 + 17000 = 0$$

$$\text{D'où } A_y = 13 \text{ kN}$$

2- Équilibre des nœuds

- Nœud A : Remplaçons l'articulation par A_y et les barres 1 et 2 par des efforts N_1 et N_2 en tension.

$$\sum F_x = N_1 \cos \theta + N_2 = N_1(4/5) + N_2 = 0$$

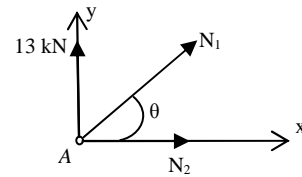
$$\text{D'où } N_2 = -(4/5)N_1$$

$$\sum F_y = N_1 \sin \theta + 13000 = 0$$

$$\text{Donc } N_1(3/5) = -13000$$

$$\text{D'où } N_1 = -21667 \text{ N}$$

$$\text{Donc } N_2 = 17333 \text{ N}$$



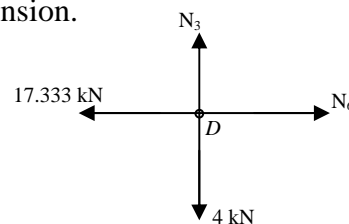
- Nœud D : Remplaçons la barre 2 par son effort, la barre 3 par un effort N_3 supposé en tension et la barre 6 par un effort N_6 supposé en tension.

$$\sum F_x = N_6 - 17333 = 0$$

$$\text{d'où } N_6 = 17333 \text{ N}$$

$$\sum F_y = N_3 - 4000 = 0$$

$$\text{d'où } N_3 = 4 \text{ kN}$$



- Nœud C : Remplaçons les barres 1 et 3 par leurs efforts, la barre 4 par un effort N_4 supposé en tension et la barre 5 par un effort N_5 supposé en tension.

$$\sum F_x = N_4 + 21667 \sin \alpha + N_5 \cos \theta$$

$$= N_4 + 21667(4/5) + N_5(4/5) = 0$$

$$\text{D'où } N_4 = -(4/5)N_5 - 17333 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 21667 \cos \alpha - 4000 - N_5 \sin \theta$$

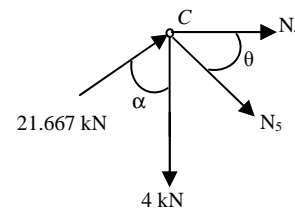
$$= 21667(3/5) - 4000 - N_5(3/5) = 0$$

$$(3/5)N_5 = 13000 - 4000$$

$$\text{D'où } N_5 = 15000 \text{ N}$$

$$N_5 \text{ dans équation (1) } N_4 = -(4/5)(15000) - 17333$$

$$\text{D'où } N_4 = -29333 \text{ N}$$



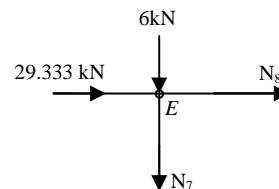
- Nœud E : Remplaçons la barre 4 par son effort (29333 N compression), la barre 7 par un effort N_7 supposé en tension et la barre 8 par un effort N_8 supposé en tension.

$$\sum F_x = N_8 + 29333 = 0$$

$$\text{D'où } N_8 = -29333 \text{ N}$$

$$\sum F_y = -N_7 - 6000 = 0$$

$$\text{D'où } N_7 = -6000 \text{ N}$$



- Nœud F: Remplaçons les barres 5, 6 et 7 par leurs efforts, la barre 9 par un effort N_9 supposé en tension et la barre 10 par un effort N_{10} supposé en tension.

$$\begin{aligned}\sum F_x &= -17333 - 15000\cos \theta + N_9\cos \theta + N_{10} \\ &= -17333 - 15000(4/5) + N_9(4/5) + N_{10} = 0\end{aligned}$$

$$\text{D'où } N_{10} = -(4/5) N_9 - 29333 \quad (1)$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 15000\sin \theta - 6000 - 8000 + N_9\sin \theta \\ &= 15000(3/5) - 14000 + N_9(3/5) = 0\end{aligned}$$

$$(3/5)N_9 = 14000 - 9000 = 5000$$

$$\text{D'où } N_9 = 8333 \text{ N}$$

$$N_9 \text{ dans équation (1) } N_{10} = -(4/5)(8333) + 29333$$

$$\text{D'où } N_{10} = 22667 \text{ N}$$

- Nœud H: Remplaçons la barre 10 par son effort, la barre 11 par un effort N_{11} supposé en tension et la barre 13 par un effort N_{13} supposé en tension.

$$\sum F_x = N_{13} - 22667 = 0$$

$$\text{D'où } N_{13} = 22667 \text{ N}$$

$$\sum F_y = N_{11} - 12000 = 0$$

$$\text{D'où } N_{11} = 12000 \text{ N}$$

- Nœud G: Remplaçons les barres 8 et 9 par leurs efforts, et la barre 12 par un effort N_{12} supposé en tension.

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 29333 - 8333\cos \theta + N_{12}\sin \alpha \\ &= 29333 - 8333(4/5) + (4/5)N_{12} = 0\end{aligned}$$

$$\text{D'où } N_{12} = -28333 \text{ N}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= -8333\sin \theta - 12000 - N_{12}\cos \alpha \\ &= -8333(3/5) - 12000 - (3/5)N_{12} = 0\end{aligned}$$

$$\text{D'où } N_{12} = -28333 \text{ N (preuve)}$$

- Nœud B: Vérification; Si les valeurs trouvées pour N_{12} et N_{13} par le calcul successif de toutes les barres sont exactes, les autres valeurs le seront également.

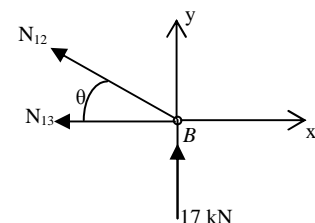
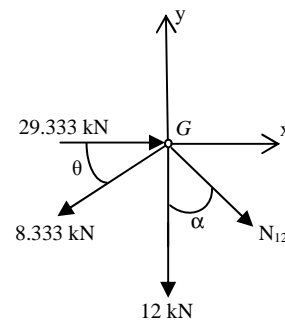
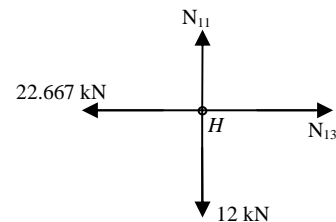
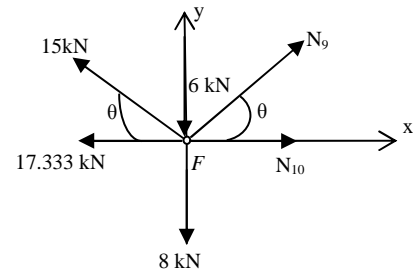
$$\sum F_y = N_{12}\sin \theta + 17000 = N_{12} (3/5) + 17000 = 0$$

$$\text{D'où } N_{12} = -28333 \text{ N}$$

$$\sum F_x = -N_{12}\sin \theta - N_{13} = 0 \Rightarrow N_{13} = -(4/5)N_{12} = -(4/5)(-28333)$$

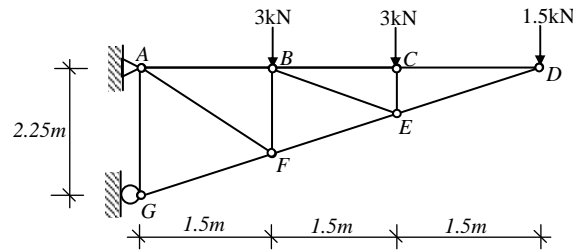
$$\text{D'où } N_{13} = 22667 \text{ N}$$

Les mêmes valeurs (N_{12} et N_{13}) trouvées par l'étude des nœuds G et H.



Exercice 3 :

Déterminer, par la méthode des nœuds, la force dans la membrure EF due aux charges externes.

**Solution**

- Vérification de la structure :

$$b = 2n - 3$$

$$b = 11$$

$$n = 7 \Rightarrow 11 = 11$$

Donc le système est intérieurement isostatique.

- Equilibre du nœud (D) : deux inconnues N_{CD} & N_{DE}

$$\sum F_y = 0 \text{ Donne } N_{DE} = 3.354 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \text{ Donne } N_{CD} = 3.0 \text{ kN}$$

- Equilibre du nœud (C) : deux inconnues N_{BC} & N_{CE}

$$\sum F_y = 0 \text{ Donne } N_{CE} = 3.0 \text{ kN}$$

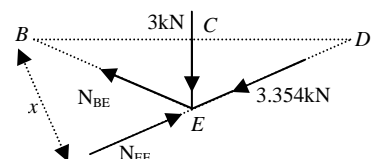
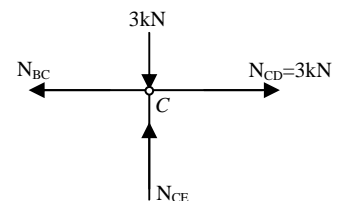
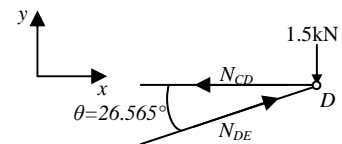
$$\sum F_x = 0 \text{ Donne } N_{BC} = 3.0 \text{ kN}$$

- Equilibre du nœud (E) : deux inconnues N_{EF} & N_{BE}

$$\sum M_B = 0 \text{ Donne } N_{EF} = 6.708 \text{ kN}$$

$$\text{Avec : } 3 \cdot BC + 3.354 \cdot x - N_{EF} \cdot x = 0$$

$$\text{Et } x = 3 \cdot \sin \theta$$

**II.8.2) Calcul des treillis plans isostatiques par la méthode des sections (de Ritter)**

La méthode des nœuds ci-dessus est un outil très pratique lorsqu'il s'agit de déterminer les efforts dans toutes les barres du treillis. Cependant, pour déterminer ou vérifier l'effort dans une barre quelconque, une autre méthode, appelée la méthode des sections est plus avantageuse.

Cette méthode consiste à couper le treillis (figure II.12) en deux parties par une section qui coupe les barres dont on veut déterminer les efforts. On isole la partie à gauche de la section, on dénote les efforts inconnus des barres comme des forces extérieures et l'on tient compte

des forces extérieures appliquées aux nœuds ainsi que les actions aux appuis. On calcule ensuite les efforts inconnus à partir des équations d'équilibre de la statique.

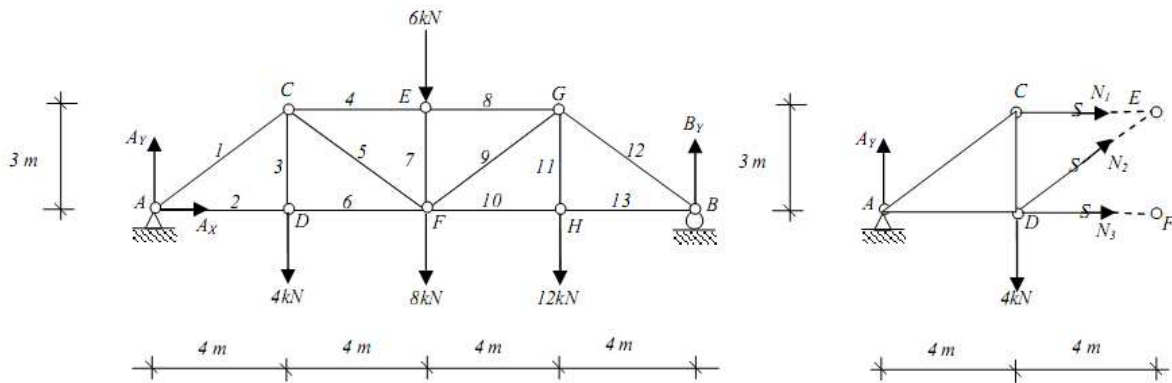


Figure II.12 : Méthode des sections (de Ritter)

La coupe idéale est donc celle qui ne sectionne que trois barres, puisqu'on n'a que trois équations d'équilibre. Il faut savoir choisir la coupe appropriée qui permettra les calculs, car ce n'est pas n'importe quelle coupe qui conviendra. On coupera le treillis en deux parties autant de fois que cela est nécessaire, selon le nombre de barres dont on veut calculer les efforts.

a) Méthodologie

Pour les efforts connus, on utilise leur sens ; pour les efforts inconnus dans les barres, on suppose qu'ils agissent en traction. Les équations d'équilibre sont écrites pour trouver la valeur de ces efforts. Si le résultat est positif pour un effort, il s'agit bien d'une traction ; sinon, il s'agit d'une compression.

Pour écrire les équations d'équilibre de la statique, on utilise les composantes horizontales et verticales des efforts et des forces extérieures suivant les axes \bar{x} et \bar{y} . On peut aussi employer les distances des forces et des efforts au point P (le point P représente l'intersection des deux poutres prises parmi les trois barres coupées), par rapport auquel on écrit l'équation d'équilibre des moments $\sum \vec{M}_{F/P} = \vec{0}$, si cela s'avère plus commode et plus rapide pour les calculs. Le point d'intersection des deux poutres coupées est appelé « pole ».

b) Conclusion

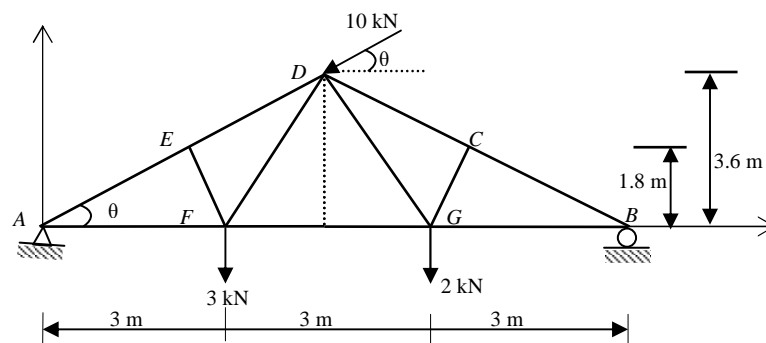
Cette méthode est simple. Juste en appliquant les équations d'équilibres sur la demi-structure, on détermine les valeurs de sollicitation de chaque barre. Cependant, les calculs sont plus laborieux que la méthode des nœuds. L'avantage de cette méthode est qu'elle :

- permet de calculer l'effort dans une barre particulière, directement, sans être au préalable obligé de calculer les efforts dans plusieurs autres barres.
- De plus, les erreurs ne se cumulent pas. Cependant, on ne peut pas se vérifier.

Exercice 4 :

Soit le treillis articulé plan schématisé par la figure ci-dessous.

- 1) Etudier l'isostaticité du treillis.
- 2) Déterminer l'effort dans la barre DG.

**Solution**

- 1- Isostaticité du système

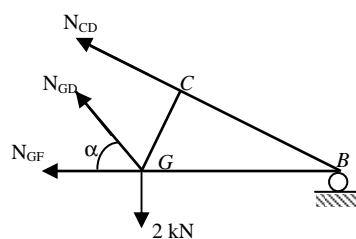
Nombre de nœuds: ($n = 7$)

Nombre de barres: ($b = 11$)

Donc $b = 2n - 3$, d'où le système est isostatique.

- 2- Effort dans la barre DG.

En utilisant la méthode des section, on coupe au maximum trois barres de sorte que la barre dont on recherche l'effort soit parmi elle.



Nous écrivons une seule équation qui est celle des moments par rapport au point B :

$$\sum M_B = 0$$

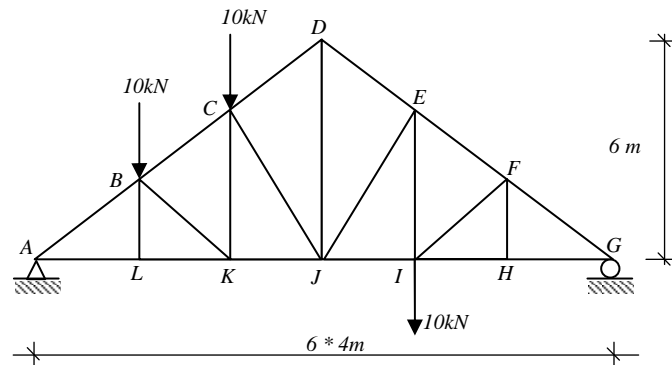
$$\Rightarrow - (N_{GD} \sin \alpha) * 3 + 2 * 3 = 0$$

$$\Rightarrow N_{GD} = 2 / \sin \alpha \text{ (avec } \alpha = 67^\circ, 38')$$

$$\Rightarrow N_{GD} = 2.17 \text{ kN (traction)}$$

Exercice 5 :

Calculez la force dans la barre DJ de la ferme de toit illustrés.

**Solution**

Dans ce cas si, il est impossible de tracer une section à travers DJ sans devoir couper quatre éléments dont les efforts sont inconnus. Il faut donc faire une première coupe (barres CD, CJ et KJ) avant d'analyser une deuxième section contenant la barre DJ.

1- Isostaticité du système

Nombre de nœuds: ($n = 12$)

Nombre de barres: ($b = 21$)

Donc $b = 2n - 3$, d'où le système est isostatique.

Avant de faire une coupe, il faut trouver les réactions aux appuis.

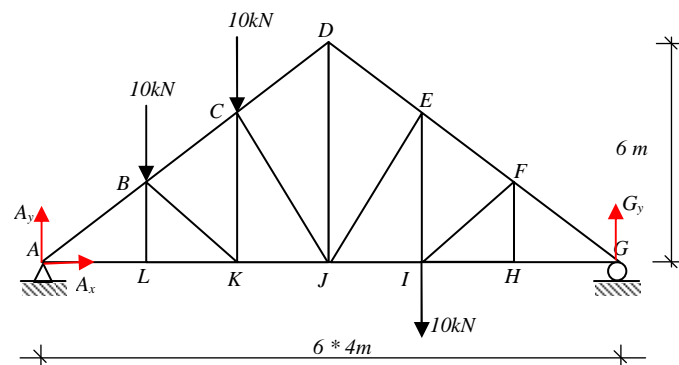
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 10 \cdot 4 + 10 \cdot 8 + 10 \cdot 6 - 24 \cdot G_y = 0$$

$$\Rightarrow G_y = 11.67 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + G_y - 10 - 10 - 10 = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 18.3 \text{ kN}$$



➤ La première section

Les barres coupées deviennent des forces inconnues;

il est donc possible de résoudre ce système à trois inconnues.

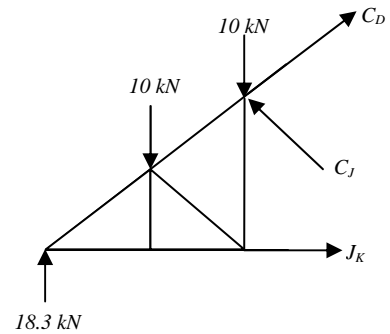
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow C_J(4/5.65) \cdot 12 - 10 \cdot 4 - 10 \cdot 8 = 0$$

$$\Rightarrow C_J = 14.1 \text{ kN (C)}$$

$$\sum M_J = 0 \Rightarrow C_D(4/4.47) \cdot 6 - 18.3 \cdot 12 - 10 \cdot 4 - 10 \cdot 8 = 0$$

$$\Rightarrow C_D = -18.6 \text{ kN}$$

$$C_D = 18.6 \text{ kN (C)}$$

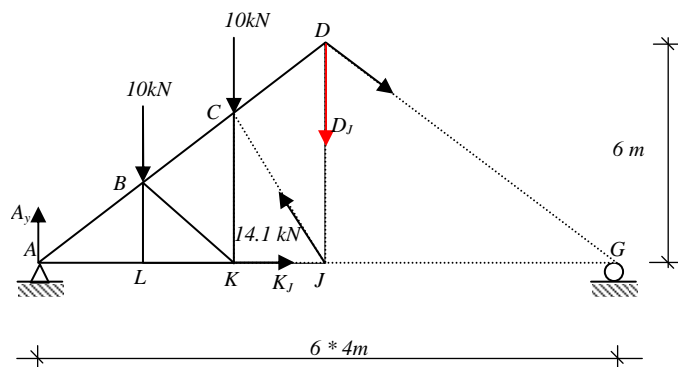


On peut calculer la barre J_K , mais ce n'est pas nécessaire pour solutionner le problème.

➤ Deuxième section

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow 12 \cdot D_j + 10 \cdot 16 + 10 \cdot 20 - 18.3 \cdot 24 - 14.1 \cdot (4/5.65) \cdot 12 = 0$$

$$\Rightarrow D_j = 16.6 \text{ kN (T)}$$



III.1) DEFINITION

On appelle portique ou cadre tout système plans ou spatiaux rigides constitués par un nombre d'éléments en général rectilignes appelés travées dont les parties horizontales portent le nom poutres ou traverses et les parties transversales transmettant les charges au sol sont appelées poteaux ou montants.

Un portique admet donc trois types de chargement :

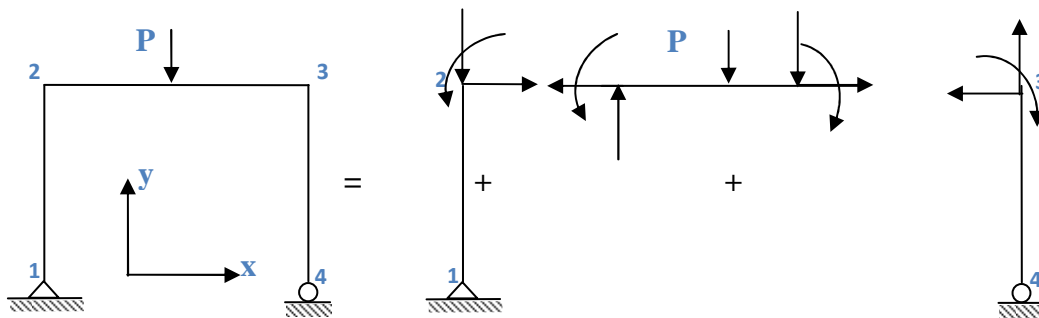
- Charge de traction, compression (appliquer le plus souvent aux poteaux)
- Charge de flexion (appliquer le plus souvent à la poutre)
- Moment de flexion

III.2) METHODE DE CALCUL DES EFFORTS ET DU MOMENT FLECHISSANT

On appliquant la méthode des sections le calcul des efforts normaux, effort tranchant et le moment fléchissant peut être déterminé par deux méthodes.

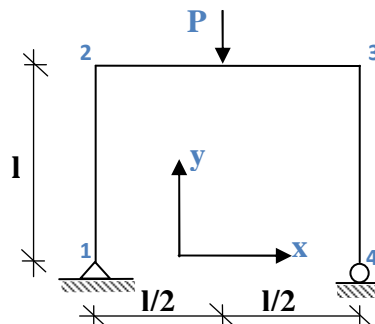
III.2.1) Méthode générale (section)

Cette méthode consiste à prendre l'ensemble du portique et faire des sections suivantes x et y telle que :



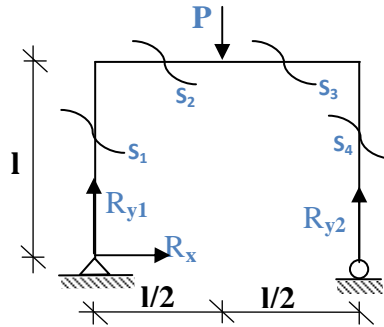
Exercice 1 :

A l'aide de la méthode des sections. Tracer les diagrammes des efforts normaux (N), des efforts tranchants (Q) et des moments fléchissant (M_f).



Solution

Cette méthode consiste à prendre l'ensemble du portique et faire des sections suivant x et y telle que :



Calcul des réactions :

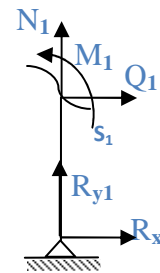
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \rightarrow R_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \rightarrow R_{y1} + R_{y2} = 0 \\ \sum M_1 = 0 \rightarrow R_{y2}l - P\frac{l}{2} = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$R_{y2} = \frac{P}{2} \text{ et } R_{y1} = \frac{P}{2}$$

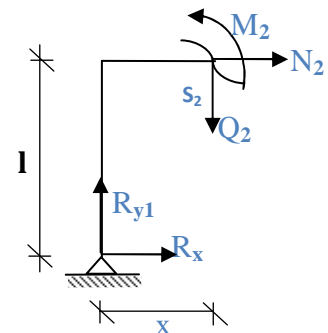
Section 1 : $0 \leq y \leq l$

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \rightarrow N_1 = -\frac{P}{2} \\ \sum F_x = 0 \rightarrow Q_1 = 0 \\ \sum M_{s1} = 0 \rightarrow M_1 = 0 \end{cases}$$



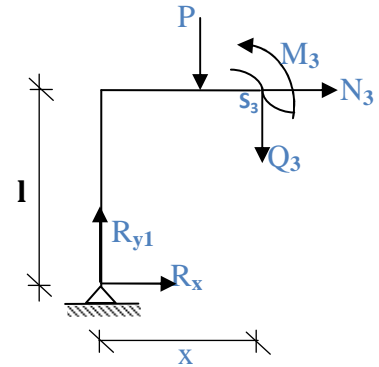
Section 2 : $0 \leq x \leq l/2$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \rightarrow N_2 = 0 \\ \sum F_y = 0 \rightarrow Q_2 = \frac{P}{2} \\ \sum M_{s2} = 0 \rightarrow M_2 = R_{y1}x \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow M_2 = 0 \\ x=l/2 \rightarrow M_2 = Pl/4 \end{cases} \end{cases}$$

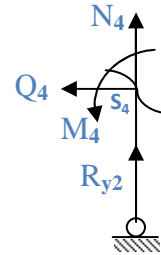
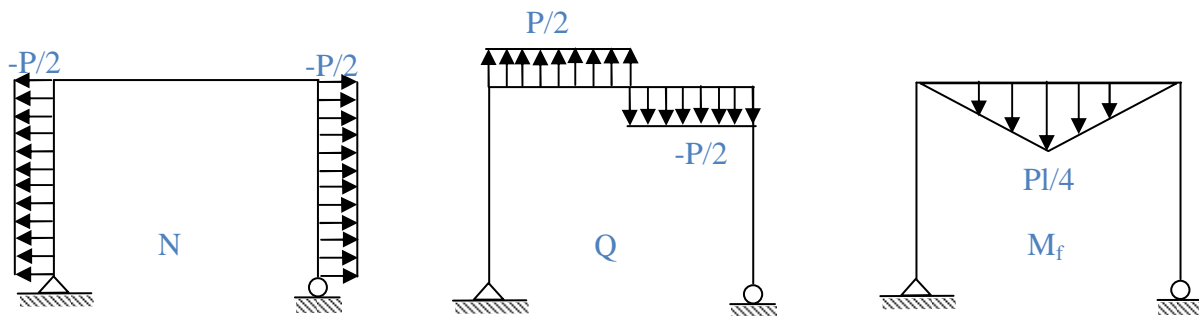


Section 3 : $l/2 \leq x \leq l$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \rightarrow N_3 = 0 \\ \sum F_y = 0 \rightarrow Q_3 = -\frac{P}{2} \\ \sum M_{s_3} = 0 \rightarrow M_3 = R_{y1}x - P(x - l/2) \Rightarrow \begin{cases} x = l/2 \rightarrow M_3 = Pl/4 \\ x = l \rightarrow M_3 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

**Section 4 : $0 \leq y \leq l$**

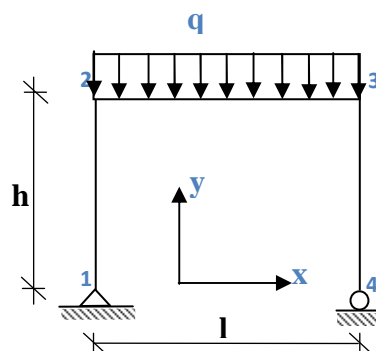
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \rightarrow Q_4 = 0 \\ \sum F_y = 0 \rightarrow N_4 = -\frac{P}{2} \\ \sum M_{s_4} = 0 \rightarrow M_4 = 0 \end{cases}$$

**Diagrammes de sollicitation****III.2.2) méthode des travées**

Cette méthode consiste à isoler chaque travée de telle façon qu'il reste toujours en équilibre, les diagrammes de l'effort normal, tranchant et moment fléchissant et la superposition de l'ensemble de chaque travée.

Exercice 2 :

A l'aide de la méthode des travées. Tracer les diagrammes des efforts normaux (N), des efforts tranchants (Q) et des moments fléchissant (M_f).



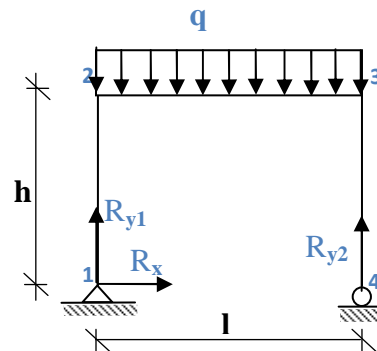
Solution

Calcul des réactions :

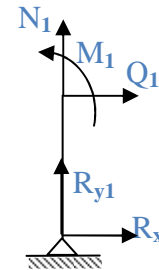
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \rightarrow R_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \rightarrow R_{y1} + R_{y2} = ql \\ \sum M_1 = 0 \rightarrow R_{y2}l - q \frac{l^2}{2} = 0 \end{cases}$$

Donc :

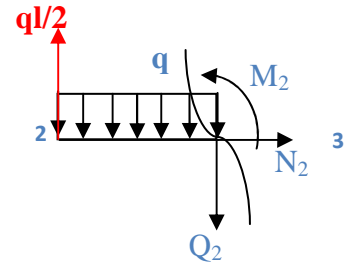
$$R_{y2} = \frac{ql}{2} \text{ et } R_{y1} = \frac{ql}{2}$$

**Le montant [1.2]**

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \rightarrow N_1 = -\frac{ql}{2} \\ \sum F_x = 0 \rightarrow Q_1 = 0 \\ \sum M_{(1)} = 0 \rightarrow M_1 = 0 \end{cases}$$

**Traverse [2.3]**

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \rightarrow \frac{ql}{2} - qx - Q_2 = 0 \rightarrow Q_2 = \frac{ql}{2} - qx \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow Q_2 = \frac{ql}{2} \\ x=l \rightarrow Q_2 = -\frac{ql}{2} \end{cases} \\ \sum F_x = 0 \rightarrow N_2 = 0 \\ \sum M_{(1)} = 0 \rightarrow M_2 = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow M_2 = 0 \\ x=l \rightarrow M_2 = 0 \end{cases} \end{cases}$$



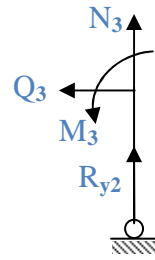
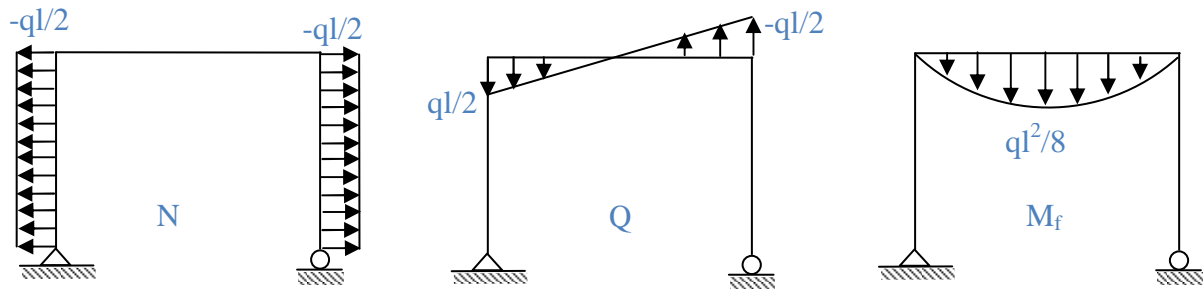
Pour calculer la valeur maximale du moment fléchissant on calcule :

$$\frac{dM_2}{dx} = 0 \rightarrow \frac{ql}{2} - qx = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{2}$$

$$\text{Donc : } M_{\max}(l/2) = q \frac{l^2}{8}$$

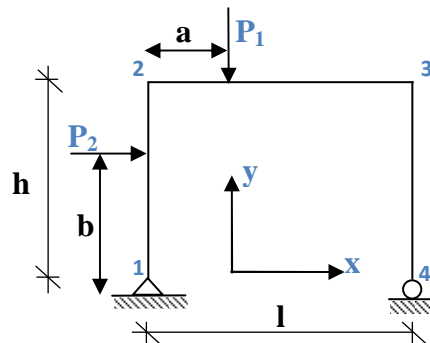
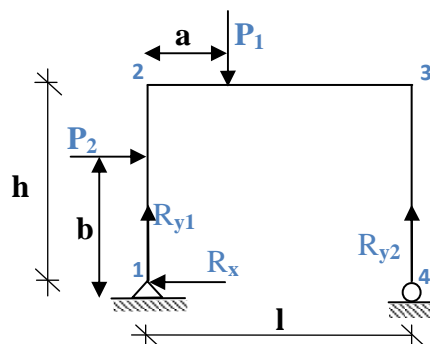
Montant [3.4]

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \rightarrow Q_3 = 0 \\ \sum F_y = 0 \rightarrow N_3 = -\frac{ql}{2} \\ \sum M_s = 0 \rightarrow M_3 = 0 \end{cases}$$

**Diagrammes de sollicitation****Exercice 3 :**

On considère l'ossature [1.2-3.4] soumise à deux charges concentrées P_1 sur la traverse [2.3] et P_2 sur le montant [1.2]. Avec $P_1 \gg P_2$

A l'aide de la méthode des sections. Tracer les diagrammes des efforts normaux (N), des efforts tranchants (Q) et des moments fléchissant (M_f).

**Solution**

Calcul des réactions :

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \rightarrow R_x = P_2 \\ \sum M_{(4)} = 0 \rightarrow R_{y1} = -\frac{P_1(l-a) - bP_2}{l} \\ \sum M_{(1)} = 0 \rightarrow R_{y2} = \frac{aP_1 + bP_2}{l} \end{cases}$$

Montant [1.2] :

$$\diamond 0 \leq y \leq b$$

$$\begin{cases} N_1 = -\frac{P_1(l-a) - bP_2}{l} \\ Q_1 = 0 \\ M_1 = 0 \end{cases}$$

$$\diamond b \leq y \leq h$$

$$\begin{cases} N_2 = -\frac{P_1(l-a) - bP_2}{l} \\ Q_2 = -P_2 \\ M_2 = -P_2(x-b) \end{cases}$$

Montant [2.3] :

$$\diamond 0 \leq x \leq a$$

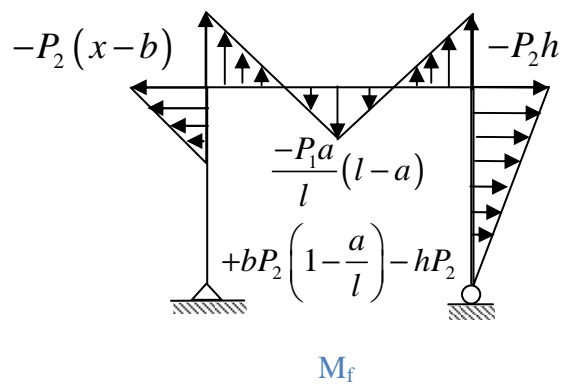
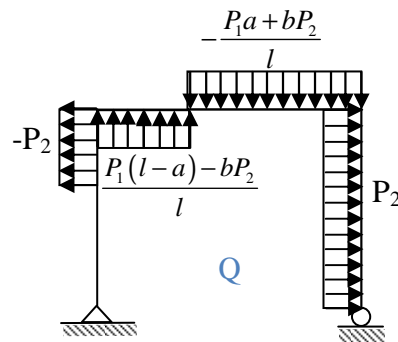
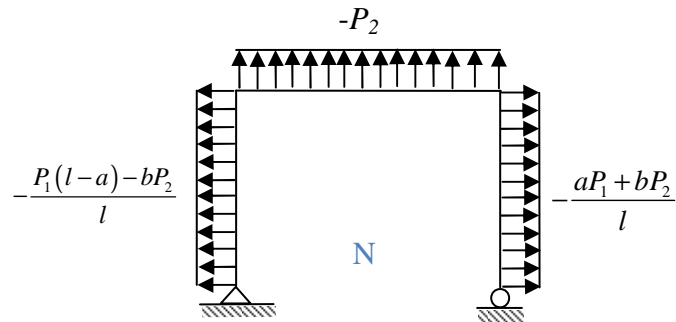
$$\begin{cases} N_3 = -P_2 \\ Q_3 = \frac{P_1(l-a) - bP_2}{l} \\ M_3 = \frac{P_1}{l}x(l-a) + bP_2\left(1 - \frac{x}{l}\right) - hP_2 \end{cases}$$

$$\diamond a \leq x \leq l$$

$$\begin{cases} N_4 = -P_2 \\ Q_4 = -\frac{P_1a + bP_2}{l} \\ M_4 = \frac{-P_1}{l}x(l-a) + bP_2\left(1 - \frac{x}{l}\right) - hP_2 - P_1(x-a) \end{cases}$$

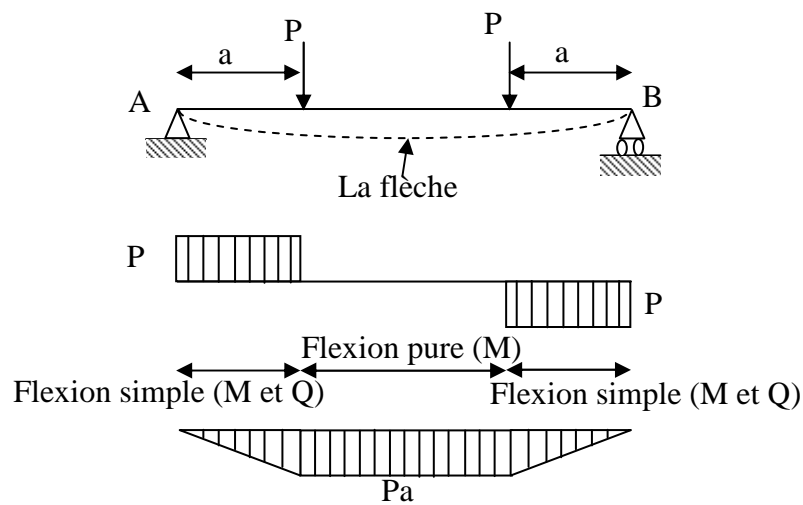
Montant [3.4] :

$$\begin{cases} N_5 = -\frac{aP_1 + bP_2}{l} \\ Q_5 = P_2 \\ M_5 = -P_2(h-x) \end{cases}$$

Diagrammes de sollicitation

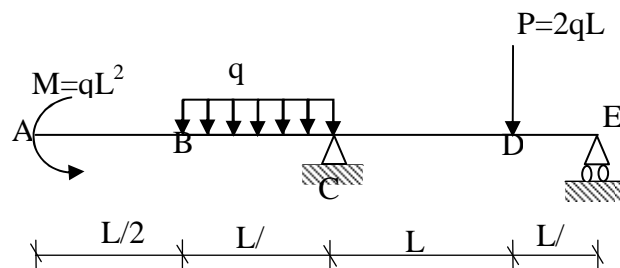
IV.1) GENERALITES

L'action des forces latérales sur une poutre se traduit en une déformation de l'axe longitudinal initialement droit en une courbe curviligne. L'état d'une section de poutre où de toutes les composantes des efforts internes, seule un moment fléchissant M_y ou M_z n'est pas nul, est dit état de flexion plane pure. La déformation résultante de ce genre de sollicitation est connue sous le nom de la flèche. Lorsque l'effort tranchant n'est pas nul, en ce cas la sollicitation est dite flexion simple.



IV.1.1) Définition

Une poutre est dite en flexion lorsqu'elle est soumise à des forces ainsi que des couples se trouvant dans un plan contenant l'axe longitudinal de la poutre. Ces forces agissent perpendiculairement à l'axe longitudinal et le plan contenant les forces est un plan de symétrie de la poutre.



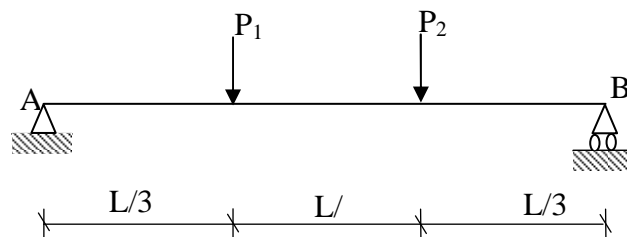
IV.2) EFFORTS TRANCHANTS ET MOMENTS FLECHISSANT

La construction des diagrammes des éléments de réduction constitue une étape essentielle dans toute étude de *RDM*. Un diagramme est un graphe qui indique la valeur (intensité et nature) de la sollicitation considérée dans toutes les sections du système étudié.

Les diagrammes des éléments de réduction permettent de localiser les sections les plus sollicitées (sièges des contraintes les plus élevées) et servent au dimensionnement des différents éléments des structures.

Dans la construction des diagrammes, les valeurs positives et négatives sont portées de part et d'autre d'un axe-origine. Par ailleurs, pour le diagramme du moment fléchissant, on a pour habitude de porter les ordonnées toujours du côté des fibres tendues.

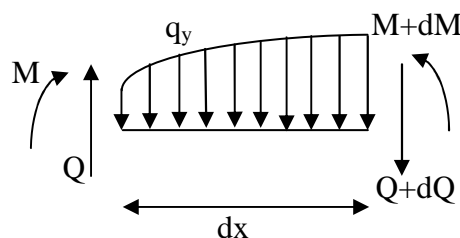
Considérons une poutre en appui simple soumise à des efforts verticaux P_1 et P_2 . On suppose que la poutre possède un plan de symétrie axial tel que les poutres circulaire, rectangulaire et des profilé en T , I et U ...



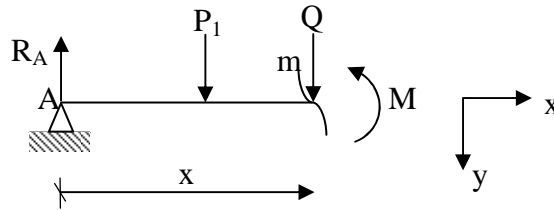
Pour déterminer les expressions du moment fléchissant et de l'effort tranchant, on suppose que la poutre AB est dévisée en deux parties par la section droite (mn) située à une distance x du support gauche « A » et la partie de la poutre à la droite de (mn) est retirée.

Pour pouvoir tracer les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant, il faut respecter les directions suivantes:

- ✓ Effort tranchant positif du haut vers le bas
- ✓ Moment fléchissant positif dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.



Pour étudier l'équilibre du tronçon de gauche de la poutre, on doit tenir compte non seulement des efforts externes tel que les charges P_1 et les réactions R_A , mais aussi des efforts internes, réparties sur la section droite (mn) et qui représentent l'action du tronçon droit de la poutre sur le tronçon gauche.



Le système de forces peut être remplacé par une résultante égale à la somme algébrique des forces données et par un couple.

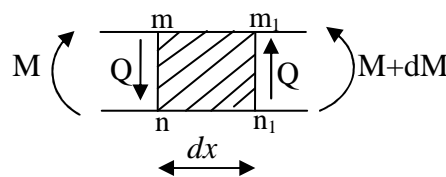
Dans notre cas on remplace les efforts P_2 et R_B par une force verticale Q agissant dans le plan de section (mn) et par un couple M_f .

L'effort tranchant Q et le moment fléchissant M_f qui agissent dans cette section, sont donnés par les relations suivantes:

$$Q = R_A - P_1$$

$$M_f = R_A x - P_1 \left(x - \frac{L}{3} \right)$$

Pour exprimer la relation entre moment flechissant dans la section (mn) on considère un élément pris entre deux section très voisines (mn) et (m_1n_1) :



$$\sum M /_{(mn)} = 0 \quad \Rightarrow \quad M + dM - M + Qdx = 0$$

$$\Rightarrow Q = -\frac{dM}{dx}$$

IV.3) DIAGRAMME DU MOMENT FLECHISSANT ET DE L'EFFORT TRANCHANT

Dans le cas général des poutres sollicitées transversalement dans un plan de symétrie, les contraintes réparties sur une section de poutre équilibre l'effort tranchant et le moment fléchissant en cette section. On détermine d'abord les contraintes dues au moment fléchissant appelées contraintes normales de flexions et en suite les contraintes tangentielle (contraintes de cisaillement) produites par l'effort tranchant.

La représentation graphique de la variation du moment fléchissant et de l'effort tranchant simplifie l'étude des contraintes dans une poutre.

a) Cas d'une force concentrée à mi-travée

Détermination des réactions :

$$\sum M / A = 0 \Rightarrow R_B = 0.5P$$

$$\sum F = 0 \Rightarrow R_A = 0.5P$$

Expressions des efforts internes :

Tronçon I : $0 \leq x \leq L/2$

$$N = 0$$

$$Q - 0.5P = 0 \Rightarrow Q = 0.5P$$

$$M - 0.5Px = 0 \Rightarrow M = 0.5Px$$

$$M(0) = 0 \text{ et } M(0.5L) = \frac{PL}{4}$$

Tronçon II : $L/2 \leq x \leq L$

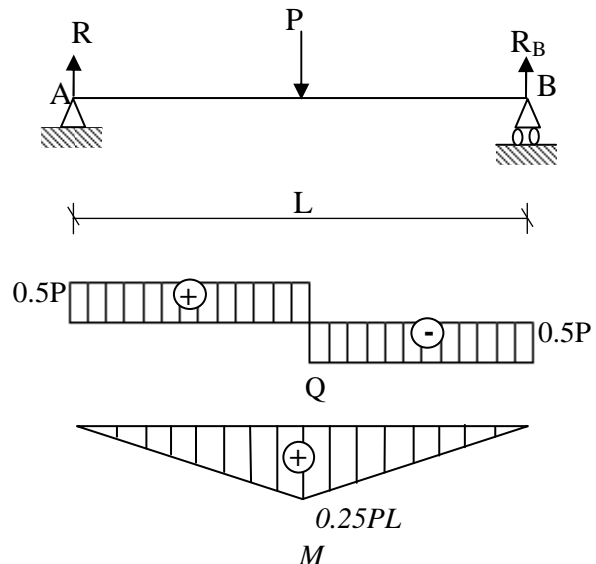
$$N = 0$$

$$Q + P - 0.5P = 0 \Rightarrow Q = -0.5P$$

$$M - 0.5Px + P\left(x - \frac{L}{2}\right) = 0$$

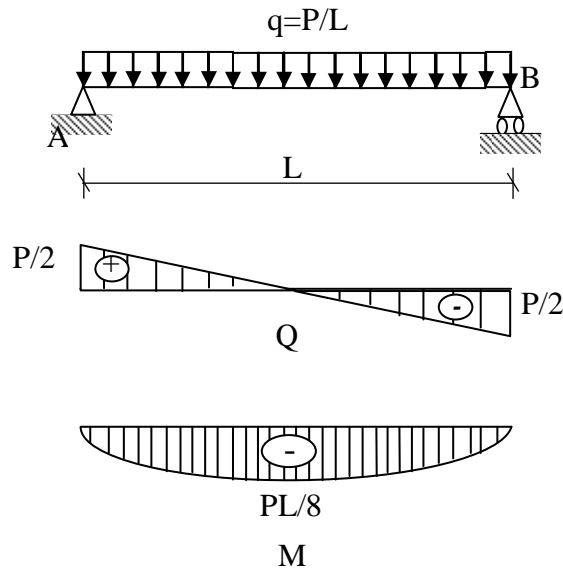
$$\Rightarrow M = 0.5Px - P\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

$$M(0) = 0, \quad M(L) = 0 \text{ et } M_{\max} = M(0.5L) = \frac{PL}{4}$$



b) Cas d'une charge uniformément répartie avec $q=P/L$

Détermination des réactions



$$\sum M /_A = 0 \Rightarrow R_B L - (P/L) L (L/2) = 0$$

$$\Rightarrow R_B = 0.5P$$

$$\sum F = 0 \Rightarrow R_A + R_B - (P/L) L = 0$$

$$\Rightarrow R_A = 0.5P$$

Expression des efforts internes :

$$N = 0$$

$$Q - 0.5P + \left(\frac{P}{L}\right)x = 0$$

$$\Rightarrow Q = 0.5P - \left(\frac{P}{L}\right)x = 0$$

$$Q(0) = 0.5P, \quad Q(L) = -0.5P$$

$$\text{Et } Q(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{2}$$

$$M - 0.5Px + 0.5\left(\frac{P}{L}\right)x^2 = 0$$

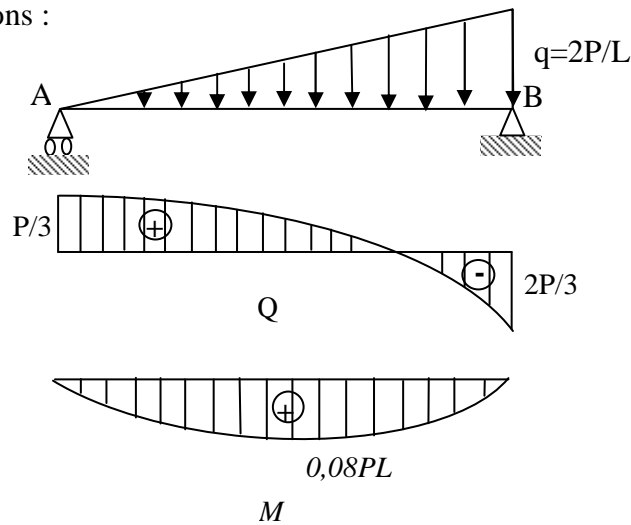
$$\Rightarrow M = 0.5Px - 0.5\left(\frac{P}{L}\right)x^2 = 0$$

$$M(0) = 0, \quad M(L) = 0$$

$$M_{\max} = M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{PL}{8}$$

c) Cas d'une charge triangulaire répartie $q=2P/L$

Détermination de réactions :



$$\sum M / A = 0 \Rightarrow R_B L - q \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{2L}{3} \right) = 0$$

$$\Rightarrow R_B = qL/3 = (2/3)P$$

$$\sum F = 0 \Rightarrow R_A + R_B - qL/2 = 0$$

$$\Rightarrow R_A = qL/6 = P/3$$

Expression des efforts internes :

$$N = 0$$

$$Q - \frac{P}{3} + q \frac{x}{L} \frac{x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow Q = \frac{P}{3} - \frac{qx^2}{2L} = \frac{P}{3} - \frac{Px^2}{L^2}$$

$$Q(0) = P/3, \quad Q(L) = -2P/3$$

$$\Rightarrow Q(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$M - \frac{P}{3}x + qx \frac{x}{L} \frac{x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow M = \frac{P}{3}x - \frac{qx^3}{6L} = \frac{P}{3}x - \frac{Px^3}{3L^2}$$

$$M(0) = 0, \quad M(L) = 0, \quad M_{\max} \left(\frac{L}{\sqrt{3}} \right) = 0.08PL$$

IV.4) EQUATION DIFFERENTIELLE DE LA LIGNE ELASTIQUE

Dans toute étude de structure, outre le calcul des réactions, des éléments de réduction et des contraintes, on fait également des calculs de déplacements. Généralement, on fixe pour les déplacements des sections des limites admissibles à ne pas dépasser, tout comme pour les

contraintes. Il n'est pas rare même que les conditions de déformabilité soient plus sévères que les conditions de résistance.

La limitation des déplacements vise avant tout à préserver la fonctionnalité de la construction. A titre d'exemple, une trop grande déformabilité des poutres peut provoquer la fissuration des cloisons légères et engendrer des désordres très gênants.

D'autre part, lorsque les déplacements sont importants ils peuvent modifier significativement l'action des charges appliquées (ils engendrent d'autres efforts, dits effets du second ordre), et dans ce cas il est nécessaire d'en tenir compte.

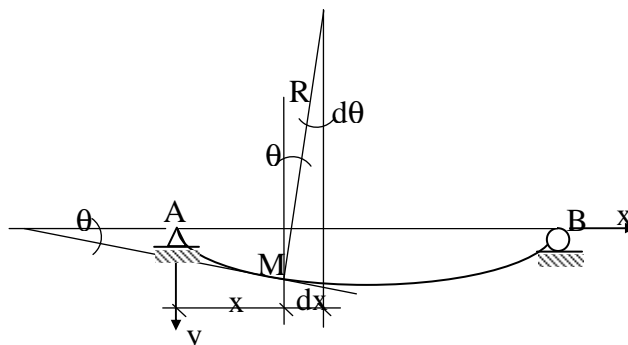
Dans le cas d'une poutre horizontale fléchie dans le plan xy , l'axe des x étant confondu avec l'axe longitudinal de la pièce, les déplacements verticaux des centres de gravité des sections droites, mesurés à partir de l'axe x , sont appelés flèches. Les rotations se font autour de l'axe z (axe neutre) et représentent les angles, mesurés en radians, dont tournent les sections droites de la poutre.

IV.4.1) Équation différentielle de la déformée

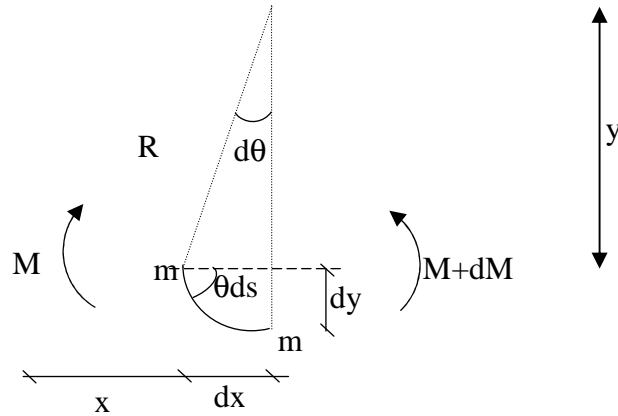
Considérons une poutre horizontale simplement appuyée, fléchie dans le plan vertical xy . Après flexion, l'axe longitudinal AB de la poutre prend la forme courbe AMB . Cette courbe est appelée *déformée* ou *ligne élastique* (ou *élastique* tout simplement) de la poutre et peut être décrite par une équation de la forme $y = f(x)$. Les ordonnées y représentant les flèches subies par les sections (leurs centres de gravité plus exactement) de la pièce.

Nous admettrons que la courbure de la ligne élastique en un point donné ne dépend que de la valeur du moment fléchissant en ce point. Dans ce cas, nous utilisons la relation liant la courbure au moment fléchissant obtenue rigoureusement dans le cas de la flexion pure et qui s'écrit :

$$\frac{1}{R} = -\frac{M_z}{EI_z}$$



Afin d'étudier la déformation de cette poutre, on prend en élément (mm_1)



$$\frac{I}{R} = \varepsilon \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{[1 + (\frac{dy}{dx})^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (IV.2)$$

Le facteur ε vaut ± 1 et a été introduit pour des raisons que nous évoquons plus loin. Remarquons toutefois que du point de vue mathématique ε vaut $+1$ et le signe de la courbure ne dépend que de la valeur de la dérivée seconde (le dénominateur de l'expression (IV.2) étant strictement positif). Ainsi, la courbure (ou la dérivée seconde) est positive si la concavité de la courbe est tournée vers les y positifs et elle est négative quand la concavité est orientée vers les y négatifs (Figure IV.2).

A partir des équations (IV.1) et (IV.2), on déduit la relation différentielle suivante reliant le moment (M_z) et la flèche (y).

$$\frac{M_z}{EI_z} = \varepsilon \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{[1 + (\frac{dy}{dx})^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (IV.3)$$

Physiquement, la dérivée première $y' = \frac{dy}{dx}$ représente la pente de la tangente à la déformée y au point courant M . Dans le cadre de l'hypothèse admise des petits déplacements, les angles sont très petits et, non seulement on peut confondre la tangente et l'angle $dy/dx = \tan \theta \approx \theta$, mais le terme $(dy/dx)^2$ devient négligeable devant l'unité. D'où la simplification de la relation (IV.3) :

$$\frac{M_z}{EI_z} = \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \varepsilon y'' \quad (IV.4a)$$

Notons au passage que dans le cadre des petits déplacements, y' représente également la rotation de la section Σ d'abscisse x .

La valeur à donner à ε se déduit plus facilement de la dernière expression. Il suffit de comparer les signes de y'' et de M_z . La convention de signes adoptée pour le moment est exactement l'opposée de celle de y'' puisqu'on considère un moment comme positif quand la concavité de la déformée est tournée vers les y négatifs.

D'où le signe adéquat à prendre :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = -\frac{M_z}{EI_z} \quad \text{Ou encore : } EI_z y'' = -M_z \quad (\text{IV.4b})$$

Compte tenu des relations différentielles reliant q , Q et M , on peut en déduire :

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = y''' = -\frac{Q_y}{EI_z} \quad \text{et} \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = y^{IV} = \frac{q_y}{EI_z} = \frac{q}{EI_z} \quad (\text{IV.5})$$

Il importe de noter que dans le cas des barres très élancées, les flèches peuvent être importantes et l'expression (IV.4b) ne fournit plus une bonne approximation. Il faut alors faire usage de la relation (IV.3), sachant que ε vaut -1 pour les raisons données plus haut. L'utilisation de la définition exacte de la courbure introduit deux différences fondamentales par rapport à l'approximation (IV.4) :

- L'équation différentielle n'est plus linéaire,
- Dans le calcul du moment, il faut tenir compte de l'influence des déplacements, ce qui revient à introduire des moments additionnels secondaires (*moments du second ordre*).

D'autre part, la relation (IV.1) montre qu'il y a proportionnalité entre la courbure et le moment fléchissant, autrement dit les développements à partir de cette équation sont valables uniquement dans le domaine élastique linéaire. Si on sort de ce domaine, il faut utiliser une relation non linéaire de la forme $1/R = f(M)$, déduite de l'étude du comportement élasto-plastique de la pièce considérée.

Nous allons voir dans les paragraphes suivants quelques méthodes parmi les plus importantes qui permettent d'obtenir l'équation de la ligne élastique d'une poutre fléchie.

IV.5) CONTRAINTES NORMALES EN FLEXION PLANE

Des contraintes normales se développent dans les sections transversales d'une poutre soumise à un moment fléchissant. La figure montre les fibres tendues et comprimées externes d'un tronçon de poutre fléchi. Dans la zone comprimée les fibres se raccourcissent tandis que dans la zone de traction elles s'allongent. Ces deux zones sont séparées par un plan neutre ayant un

rayon de courbure R et dont la longueur ne varie pas lors de la flexion. L'allongement relatif d'une fibre se trouvant à une distance y de l'axe neutre peut être écrit :

$$\varepsilon = \frac{a'b'}{ab} = \frac{(R+y)d\theta - dx}{dx}$$

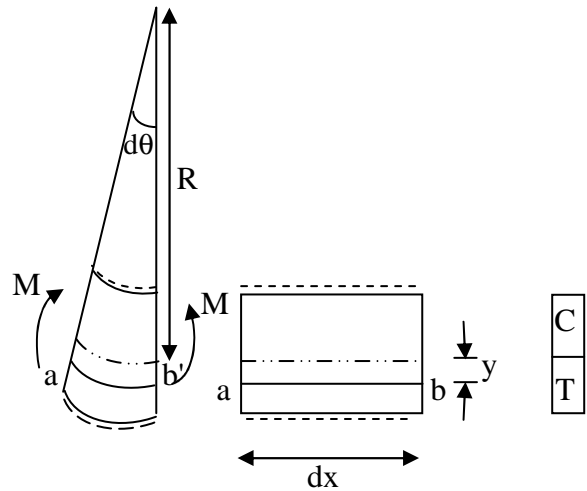
Avec :

$$dx = R d\theta$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{y}{R}$$

$$\text{On a : } \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\text{Donc : } \sigma = \frac{E}{R} y$$



La condition d'équilibre qui lie les contraintes et les efforts internes dans la section transversale d'une poutre est :

$$\iint_s \sigma y ds = M$$

En introduisant la valeur de σ dans l'expression du moment, on obtient :

$$M = \iint_s \frac{E}{R} y^2 ds$$

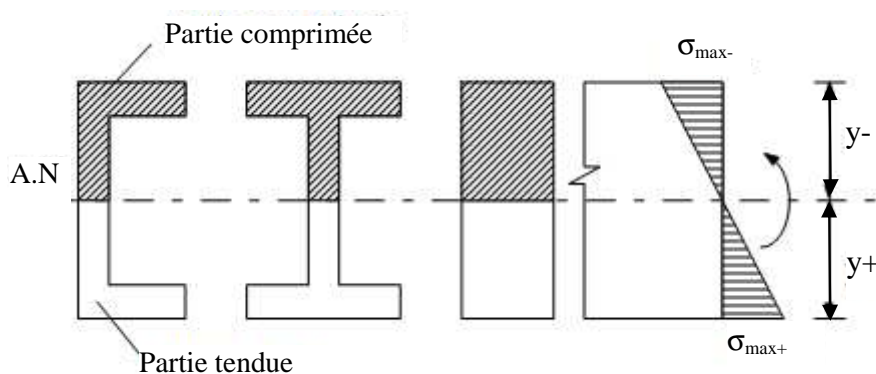
$$M = \frac{E}{R} \iint_s y^2 ds$$

$$M = \frac{E}{R} I_z$$

En remplaçant R par sa valeur, la contrainte normale en tout point de la section de la poutre distante de y de l'axe x a pour valeur :

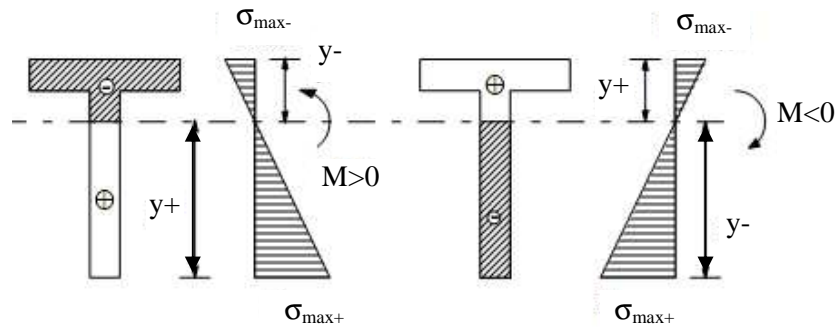
$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

1- Cas d'une section ayant un axe de symétrie horizontal



2- Cas d'une section n'ayant pas un axe de symétrie horizontal

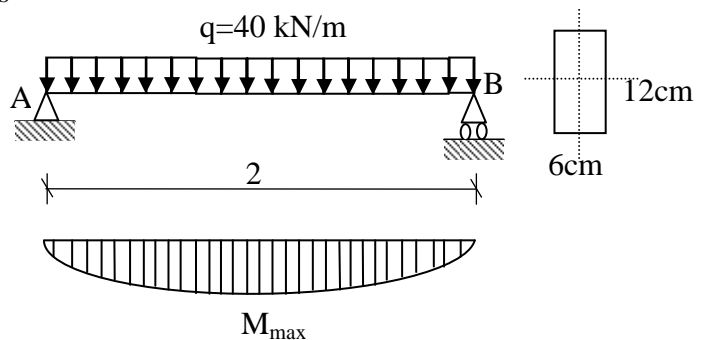
Dans ce cas les contraintes de traction et de compression maximales sont différentes



Exercice 1 :

Vérifier la résistance de la poutre ci-dessous si la contrainte admissible $[\sigma] = 160 \text{ N/mm}^2$.

- Construire le diagramme des moments
- Déterminer la section dangereuse
- calculer la contrainte maximale
- compare cette contrainte avec $[\sigma]$.



Solution

Le moment maximal est à mi-travée :

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = 20 \text{ kNm}$$

$$I_z = \frac{60 \cdot 120^3}{12} = 860 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I_z} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 60}{864 \cdot 10^4} = 138,8 \text{ N/mm}^2 < 160 \text{ N/mm}^2$$

Exercice 2:

$$I_z = 2 \cdot 10^6 \text{ mm}^4, \quad [\sigma_-] = 80 \text{ N/mm}^2$$

$$h = 106 \text{ mm}, \quad [\sigma_+] = 120 \text{ N/mm}^2$$

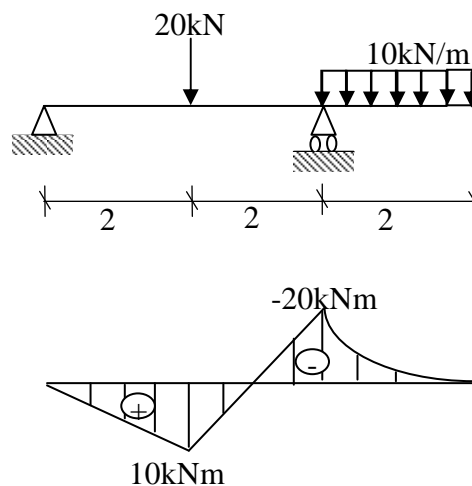
$$y_G = 60 \text{ mm}$$

Solution

Diagramme des moments

$$\Rightarrow M_{\max}^+ = 10 \text{ kNm}$$

$$M_{\max}^- = 20 \text{ kNm}$$



-contraintes :

Pour $M_{\max}^+ = 10 \text{ kNm}$

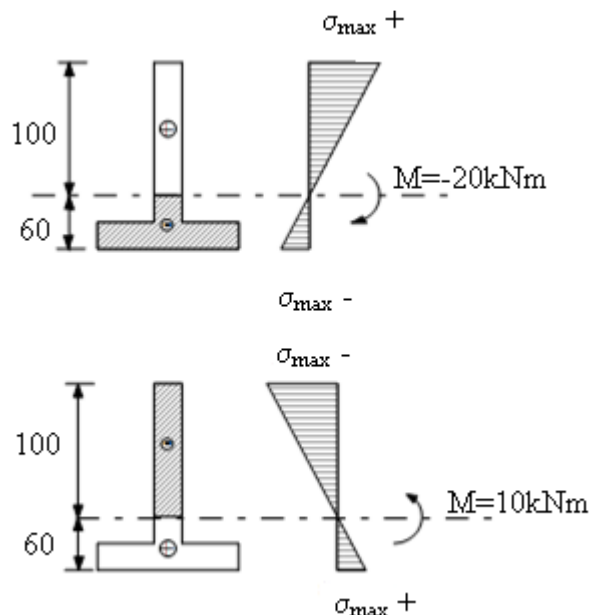
$$\sigma_{\max}^+ = \frac{10 \cdot 10^5 \cdot 60}{2 \cdot 10^6} = 30 \text{ N/mm}^2 < 120$$

Et pour $M_{\max}^- = 20 \text{ kNm}$

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{20 \cdot 10^5 \cdot 100}{2 \cdot 10^6} = 100 \text{ N/mm}^2 < 120$$

$$|\sigma_{\max}^-| = \frac{20 \cdot 10^5 \cdot 60}{2 \cdot 10^6} = 60 \text{ N/mm}^2 < [\sigma_-]$$

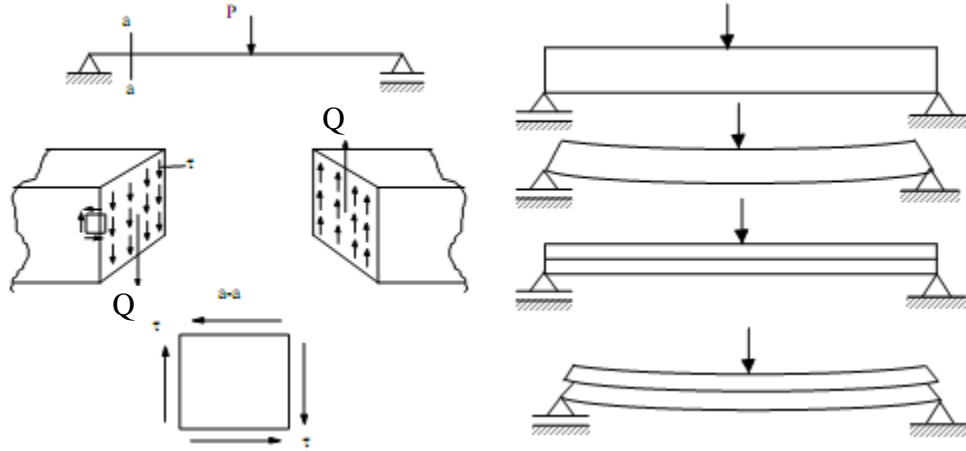
$$|\sigma_{\max}^-| = \frac{10 \cdot 10^5 \cdot 100}{2 \cdot 10^6} = 50 \text{ N/mm}^2 < [\sigma_-]$$



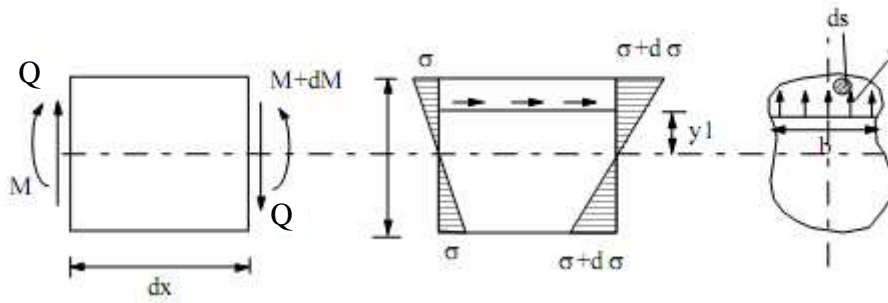
IV.6) CONTRAINTES TANGENTIELLES EN FLEXION

Quand une poutre est soumise à l'action simultanée d'un moment fléchissant et d'un effort tranchant, en plus des contraintes normales, des contraintes tangentielles apparaissent aussi au niveau des sections droites. Aux contraintes tangentielles d'un élément unitaire sont associées des contraintes tangentielles égales sur les facettes horizontales (réciprocité des contraintes tangentielles). L'existence de ces contraintes suivant les couches horizontales de la poutre peut être démontrée par superposition de deux poutres de hauteur h simplement appuyées aux extrémités et soumises à une force concentrée à mi-travée. On constate qu'il y a un glissement

des fibres inférieures ce qui signifie qu'il y a des contraintes tangentielles horizontales empêchant ce glissement dans le cas d'une poutre équivalente de hauteur $2h$.



Considérons un tronçon de poutre de longueur dx soumis à un effort tranchant constant Q et un moment fléchissant variant de M à $M+dM$.



La partie supérieure de l'élément dx à une distance y_1 de l'axe neutre est en équilibre sous l'action des contraintes σ à gauche de l'élément dx , $\sigma+d\sigma$ à droite de l'élément et de la contrainte tangentielle horizontale τ . Ecrivons l'équation d'équilibre:

$$\iint_{S_1} \sigma ds - \iint_{S_2} (\sigma + d\sigma) ds + \int \tau b dx = 0$$

En supposant que les contraintes tangentielles sont constantes dans la section $b dx$:

$$\begin{aligned} \tau b dx &= \iint_{S_1} d\sigma ds = \iint_{S_1} \frac{dM}{I} y ds \\ &= \frac{dM}{I} \iint_{S_1} y ds \\ &= \frac{dM}{I} S_1^* \iint_{S_1} y ds \\ \Rightarrow \tau &= \frac{dM}{dx} \frac{S_1^*}{I b} = \frac{TS_1^*}{I b} \end{aligned}$$

En un point arbitraire d'une section droite d'une poutre soumise à l'action simultanée d'un effort tranchant et d'un moment fléchissant, la valeur de la contrainte tangentielle est déterminée par:

$$\tau = \frac{QS_z}{I_z b}$$

Avec:

τ : Contrainte tangentielle.

b : Largeur de la section dans la couche considérée.

I_z : Moment d'inertie.

S^*_z : Moment statique de l'aire située soit au-dessous soit au-dessus de la couche considérée.

Q : L'effort tranchant.

La contrainte tangentielle varie avec l'ordonnée y comme le rapport S^*_z/b . τ est nul aux points les plus éloignés du centre de gravité et passe par un maximum pour l'ordonnée correspondant au maximum de S^*_z/b .

a) Poutre à section rectangulaire

Dans le cas d'une section rectangulaire, la largeur b est constante. A une distance y de l'axe z - z on détermine le moment statique S^* et le moment quadratique I_z . On aura :

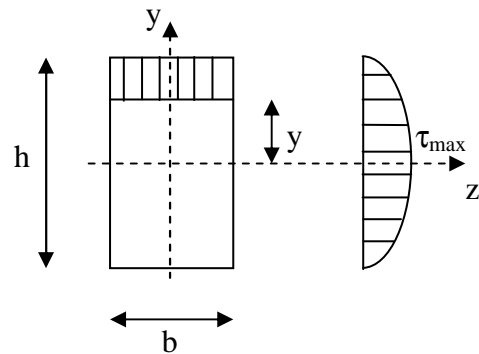
$$S_1 = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

On obtient:
$$\tau = \frac{6Q}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$y = 0 \quad \tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh}$$

$$y = \frac{h}{2} \quad \tau_{\min} = 0$$

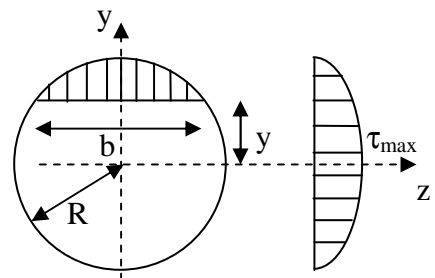


b) Section circulaire

$$S_1 = \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \text{ (Variation parabolique)}$$

$$I_z = \frac{\pi R^4}{4}, \quad b = \sqrt{R^2 - y^2}$$

D'où
$$\tau = \frac{4Q}{3\pi R^4} (R^2 - y^2)$$



$$\tau_{\max} = \frac{4Q}{3\pi R^4} \text{ Pour } y = 0$$

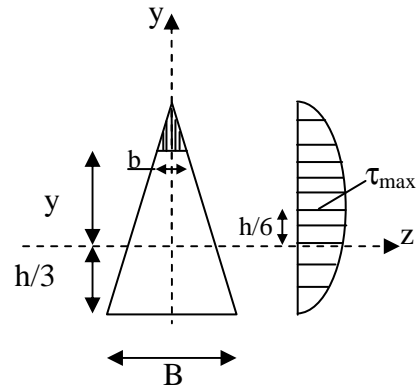
$$\tau_{\min} = 0 \text{ Pour } y = R$$

c) Section triangulaire

$$S = \frac{1}{3}b \left(\frac{2}{3}h - y \right) \left(\frac{1}{3}h + y \right) = \frac{Bh^3}{36}$$

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{Bh} \text{ Pour } y = \frac{h}{6}$$

$$\tau_{\min} = 0 \text{ Pour } y = \frac{2h}{3} \text{ ou } y = -\frac{h}{3}$$



Construire le diagramme des contraintes tangentielles de la section rectangulaire creuse. Pour tracer le diagramme des contraintes on calcule les contraintes tangentielles aux limites des zones de variation brutale et on joint les points de discontinuités par des segments de droites et par des paraboles quadratiques entre les points où la variation est exprimée par la formule:

$$\tau = \frac{QS^*}{I_z b}$$

$$Q = 80 \text{ kN}$$

$$I = \frac{1}{12} (6 \cdot 12^3 - 4 \cdot 8^3) = 693.3 \text{ cm}^4$$

Point 1 :

$$S_1^* = 0 \Rightarrow \tau_1 = 0$$

point 2 : largeur $b=6$ cm

$$S_2^* = 6 \frac{12-8}{2} \left(\frac{12}{2} - \frac{12-8}{4} \right) = 60 \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow \tau_2 = 11.54 \text{ N/mm}^2$$

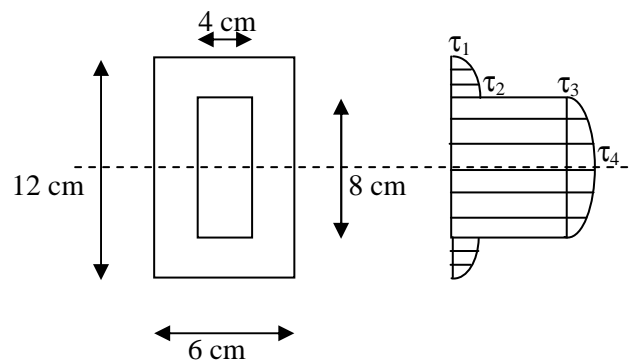
Point 3 : même point avec $b=6-4=2$ cm (discontinuité de la section)

$$S_3^* = S_2^* \Rightarrow \tau_3 = \tau_2 \frac{6}{6-4} = 34.6 \text{ N/mm}^2$$

Point 4 : milieu de la section

$$S_4^* = S_2^* + (6-4) \frac{8}{2} \cdot \frac{8}{2} = 76 \text{ cm}^3$$

$$\tau_4 = 43.9 \text{ N/mm}^2$$

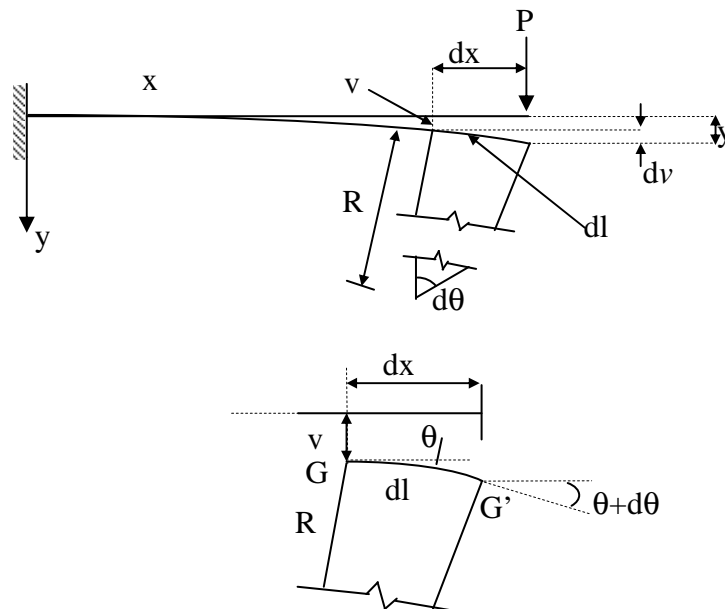


IV.7) EQUATION DE LA FLECHE

Quand on charge une poutre, la ligne moyenne qui, initialement est droite, se déforme sous l'effet d'un moment fléchissant. L'allure de l'axe longitudinal de la poutre après flexion (déformé) est appelée ligne élastique. On s'intéresse au calcul des déformations élastiques à la flexion pour pratiquement deux raisons :

- Calcul à la rigidité : en plus du calcul à la résistance, on doit parfois vérifier que la flèche de la poutre ne dépasse pas la valeur de la flèche maximale permise.
- Le calcul des déformations est essentiel pour l'analyse des systèmes hyperstatiques, comme nous allons le voir dans le chapitre suivant.

L'expression de l'équation de la déformation peut être facilement obtenue à partir de la relation entre la courbure et le moment fléchissant:



Sachant initialement que:

$$\frac{1}{R} = \frac{M_z}{EI_z}$$

L'arc GG' ayant pour longueur dl :

$$dl = R d\theta$$

Ou : $\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dl}$

La tangente de la courbure v au point x est défini par :

$$\frac{dv}{dx} = \operatorname{tg} \theta$$

Donc: $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

On peut écrire:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{d}{dx} \left(\operatorname{arctg} \frac{dy}{dx} \right) \frac{dx}{ds} \\ &= \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \frac{dx}{ds} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \\ \frac{1}{R} &= -\frac{M}{EI} = -\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{3/2}} \approx -\frac{d^2 y}{dx^2} \\ \frac{dy}{dx} &\ll 1 \end{aligned}$$

Donc, on obtient finalement l'équation de la flèche de la forme:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M$$

IV.8) METHODE D'INTEGRATION DIRECTE

L'équation de la déformée peut être obtenue par intégration successive de l'équation différentielle. En intégrant une première fois on obtient l'équation de l'angle de rotation :

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx} = \int -\frac{M(x)}{EI} dx + C_1$$

En intégrant une seconde fois il vient :

$$y(x) = \int \left[\int -\frac{M(x)}{EI} dx + C_1 \right] dx + C_2$$

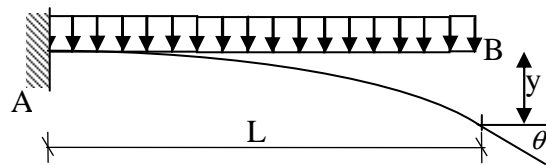
Où C_1 et C_2 sont les constantes d'intégration à déterminer à partir des conditions aux limites.

Il faut noter que dans le cas des poutres ayant plusieurs tronçons dont chacun possède sa propre équation du moment, il faut substituer l'expression de M dans chacune des équations différentielles et procéder à l'intégration. Les constantes d'intégration dans ce cas sont

déterminées en utilisant les conditions aux appuis des extrémités de la poutre et aux conditions de continuité aux limites des tronçons.

Exercice 3:

Déterminer l'expression de la déformée d'une console soumise à une charge uniformément répartie sur toute sa longueur.



$$M = -q \frac{x^2}{2}$$

$$EIy''(x) = -M = q \frac{x^2}{2}$$

$$EIy'(x) = EI\theta(x) = q \frac{x^3}{6} + C_1$$

$$EIy(x) = q \frac{x^4}{24} + C_1x + C_2$$

Condition aux limites

$$y'(L) = 0 = q \frac{L^3}{6} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -q \frac{L^3}{6}$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow q \frac{L^4}{24} - q \frac{L^4}{6} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{qL^4}{8}$$

$$\text{D'où } y = \frac{1}{EI} \left[\frac{qx^4}{24} - \frac{qL^3}{6}x + \frac{qL^4}{8} \right] \text{ et } y'(x) = \theta(x) = \frac{1}{6EI} (qx^3 - qL^3)$$

$$\text{A l'extrémité libre } x = 0 \Rightarrow \theta_{\max} = \frac{-qL^3}{6EI} \text{ et } y = \frac{qL^4}{8EI}$$

IV.9) METHODE DE LA POUTRE CONJUGUEE (FICTIVE)

La méthode d'intégration directe de l'équation différentielle de la ligne élastique qui est très efficace pour les poutres simples à un seul tronçon, devient laborieuse même pour une poutre à trois tronçons. Pour simplifier les calculs il est parfois utile de se servir d'autres méthodes, comme la méthode des paramètres initiaux ou la méthode grapho-analytique dite méthode de

la poutre conjuguée (fictive). Cette dernière est basée sur l'analogie qui existe entre l'équation différentielle de la déformée et celle qui lie le moment fléchissant à la charge répartie :

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \Leftrightarrow \frac{d^2 M(x)}{dx^2} = q(x)$$

Pour une poutre donnée, la méthode grapho-analytique consiste à considérer le diagramme des moments fléchissant comme une charge fictive répartie agissant sur une poutre fictive.

La flèche $y(x)$ et l'angle de rotation $\theta(x)$ de la poutre donnée sont déterminés respectivement par le rapport du moment fléchissant et de l'effort tranchant dans une section x de la poutre fictive à la rigidité de la poutre donnée c'est-à-dire :

$$\theta(x) = \frac{Q_f(x)}{EI}$$

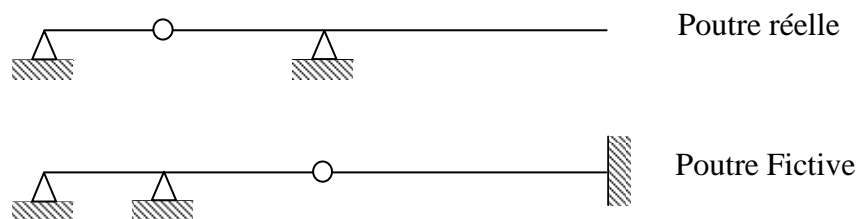
$$y(x) = \frac{M_f(x)}{EI}$$

Où $Q_f(x)$: l'effort tranchant de la poutre fictive

$M_f(x)$: moment fléchissant de la poutre fictive

Les règles de construction de la poutre fictive sont les suivantes :

- 1- Un appui à l'extrémité de la poutre réelle reste inchangé pour la poutre fictive.
- 2- Un appui intermédiaire de la poutre réelle est remplacé par une articulation dans la poutre fictive.
- 3- Une articulation de la poutre réelle devient un appui intermédiaire dans la poutre fictive.
- 4- L'encastrement de la poutre réelle est pris comme extrémité libre dans la poutre fictive.
- 5- Une extrémité libre de la poutre réelle devient un encastrement dans la poutre fictive.



Le diagramme positif du moment fléchissant de la poutre réelle agit sur la poutre fictive de haut en bas et le diagramme négatif du moment fléchissant de la poutre réelle agit sur la poutre fictive de bas en haut. Il faut noter aussi que cette méthode est efficace pour calculer les déplacements des sections particulières de la poutre, pourvu qu'il soit facile de déterminer les aires et les centres de gravité des diagrammes du moment fléchissant.

Exercice 4:

On donne P , L , E et I

- Déterminer θ_c , θ_A et y_A

- Déterminer la charge P pour que $y_{\max} \leq \frac{L}{300}$

Solution

Calcule des réactions :

$$\sum M_{A'd} = 0$$

$$R_{C'}L + PL \frac{L}{2} \frac{L}{3} = 0$$

$$\Rightarrow R_{C'} = -\frac{PL^2}{6} \Rightarrow T_{C'} = -R_{C'} = \frac{PL^2}{6}$$

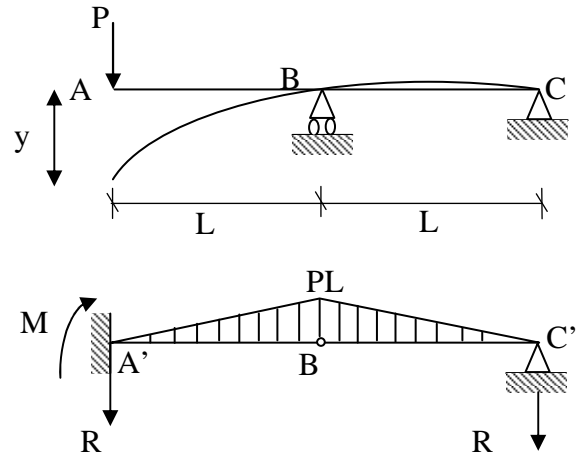
$$R_{A'} = -PLL + \frac{PL^2}{6} = \frac{-5PL^2}{6} \Rightarrow T_{A'} = R_{A'} = \frac{-5PL^2}{6}$$

$$M_{A'} = \frac{-PL^2}{6} 2L + PL^2 L = \frac{2}{3} PL^3$$

$$\text{D'où } \theta_A = \frac{T_{A'}}{EI} = \frac{-5PL^2}{6EI}$$

$$\theta_C = \frac{T_{C'}}{EI} = \frac{PL^2}{6EI}$$

$$y_{\max} = \frac{M_{A'}}{EI} = \frac{2PL^3}{3EI} \leq \frac{L}{1000} \Rightarrow P \leq \frac{EI}{2L^2}$$

**Exercice 5:**

Déterminer la flèche au point C et la rotation au point B de la poutre ci contre.

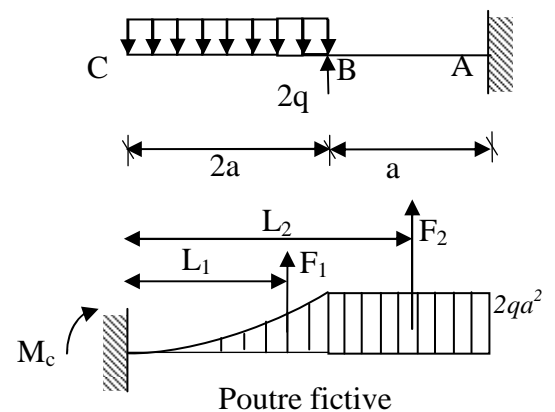
Solution :

On détermine les aires des diagrammes des moments de charge tronçon et les barres de levier par rapport à C.

$$F_1 = \frac{4}{3} qa^3$$

$$L_1 = \frac{3}{2} a$$

Le centre de gravité de la section 1 : $\left(\frac{3L}{4}, \frac{L}{4}\right)$



$$\text{L'aire de la section 1 : } \Omega = \frac{hL}{3}$$

$$F_2 = 2qa^3 \quad L_2 = \frac{5}{2}a$$

$$F_3 = qa^3 \quad L_2 = \frac{5}{2}a$$

$$M_c = \sum F_i L_i \Rightarrow y_c = \frac{7qa^4}{EI}$$

$$T_B = F_2 \Rightarrow \theta_B = \frac{2qa^3}{EI}$$

IV.10) METHODES DES PARAMETRES INITIAUX (MacAulay)

La méthode des paramètres initiaux est basée sur le principe de la fonction discontinue pour la détermination d'une expression unique du moment fléchissant d'une poutre de plusieurs tronçons. L'intégration directe de cette expression résulte en deux constantes $C_{10} = \theta$ et $C_{v20} = y$ qui s'avèrent être les paramètres initiaux. Ainsi si on prend l'origine des coordonnées aux points situés à l'extrême gauche de la poutre, les expressions de $y(x)$ et $\theta(x)$ sont données par les équations :

$$EI\theta(x) = EI\theta_0 + \sum M \frac{(x-a)^1}{1!} + \sum P \frac{(x-b)^2}{2!} + \sum q_c \frac{(x-c)^3}{3!} - \sum q_d \frac{(x-d)^3}{3!} + \sum q'_c \frac{(x-c)^4}{4!} - \sum q'_d \frac{(x-d)^4}{4!} + \dots$$

$$EIy(x) = EIy_0 + EI\theta_0 x + \sum M \frac{(x-a)^2}{2!} + \sum P \frac{(x-b)^3}{3!} + \sum q_c \frac{(x-c)^4}{4!} - \sum q_d \frac{(x-d)^4}{4!} + \sum q'_c \frac{(x-c)^5}{5!} - \sum q'_d \frac{(x-d)^5}{5!} + \dots$$

Où :

M : moments concentrés extérieurs ou à l'encastrement

a : distance entre l'origine des coordonnées et les points d'application des moments M

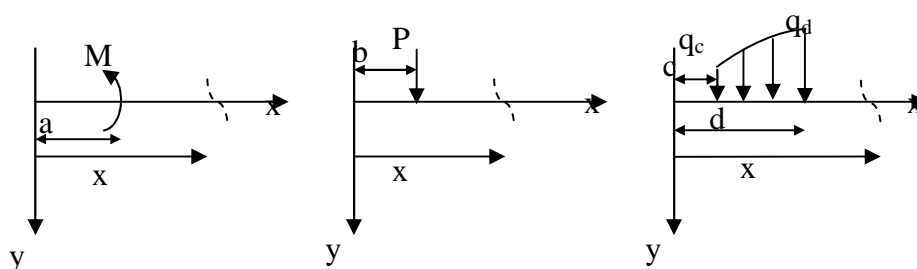
p : les forces concentrées y compris les réactions

b : distances entre l'origine des coordonnées et les points d'application des forces P

q_c, q_d : respectivement, les intensités au début et à la fin de la charge répartie

q'_c, q'_d : respectivement, les valeurs des dérivées de q aux points $x = c$ et $x = d$

Les directions des charges sont positives comme indiquées ci-dessous :



Les deux paramètres initiaux y_0 et θ_0 sont déterminés par les conditions d'appui de la poutre.

Exercice 6:

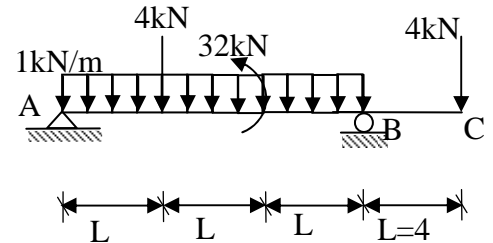
Déterminer la flèche maximale et les rotations aux appuis de la poutre représentée sur la figure ci-dessous.

Solution :

Par les équations de la statique on détermine les réactions aux appuis et on trouve :

$$R_A = 10 \text{ kN}$$

$$R_B = 10 \text{ kN}$$



$$EI\theta(x) = EI\theta_0 - \frac{10}{2}x^2 + \frac{x^3}{6} - \frac{(x-12)^3}{6} + 2(x-4)^2 + 32(x-8) - 5(x-12)^2$$

$$EIy(x) = EIy_0 + EI\theta_0 x - \frac{5}{3}x^3 + \frac{x^4}{24} - \frac{(x-12)^4}{24} + \frac{2}{3}(x-4)^3 + 16(x-8)^2 - \frac{5}{3}(x-12)^3$$

$$EIy(0) = 0 \Rightarrow EIy_0 \Rightarrow y_0 = 0$$

$$EIy(12) = 0 \Rightarrow \theta_0 = \frac{118,22}{EI}$$

$$\theta(0) = \theta_0 = \frac{118,22}{EI}$$

$$\theta(12) = \frac{57,78}{EI}$$

La flèche maximale :

$\theta(x) = 0 \Rightarrow$ Équation polynomiale de degré 3

x	0	4	8	12	16
$EI\theta(x)$	118.22	48.89	-84.4	-57.78	-25.78

Donc $\theta(x) = 0$ pour $x \in]4, 8[$

En utilisant la méthode de dichotomie, on converge vers $x = 5.48$

$$\Rightarrow y(5.48) = \frac{414}{EI}$$

IV.11) SUPERPOSITION DES DEFORMATIONS

Les équations différentielles de la déformée sont des équations linéaires c'est-à-dire tous les termes de y , y' et y'' sont du premier ordre. Les déformations dues à plusieurs cas de charges

peuvent être donc superposées ou cumulées. Cette méthode est surtout utilisée quand le chargement est composé de plusieurs cas de charge élémentaire ou les déformations sont données dans les aides mémoires de la RDM.

Exercice 7:

Déterminer la flèche maximale de la poutre ci-dessous.

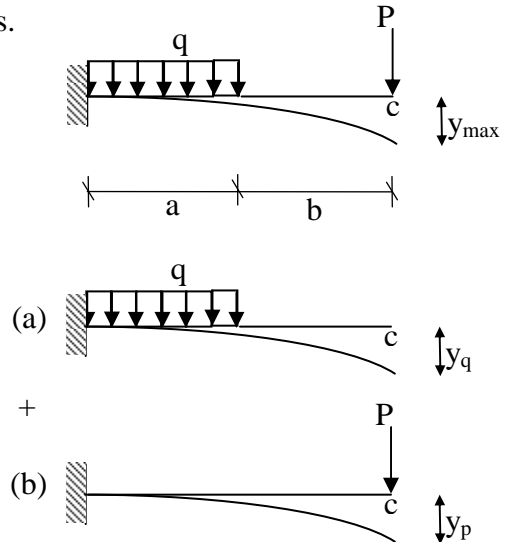
Solution

$$y_{\max} = y_q + y_p$$

$$y_q = \frac{qa^3(4L-a)}{24EI}$$

$$y_p = \frac{pL^3}{3EI}$$

$$y_{\max} = \frac{pL^3}{3EI} + \frac{qa^3(4L-a)}{24EI}$$



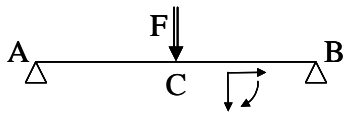
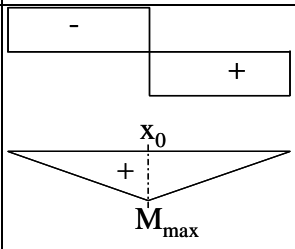
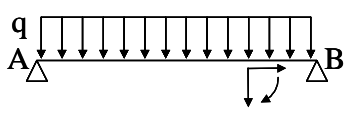
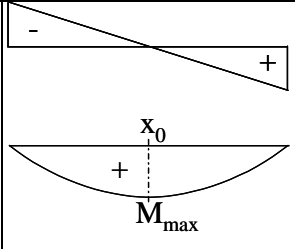
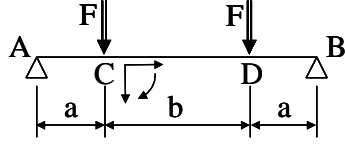
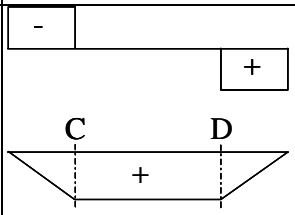
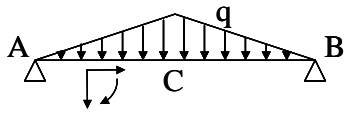
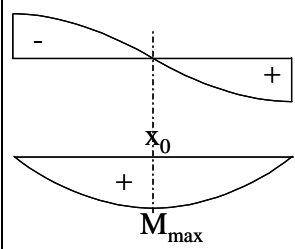
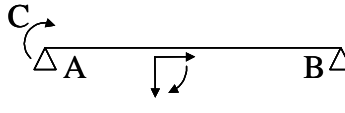
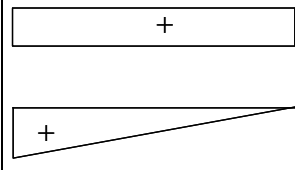
IV.12) QUELLE QUE EXEMPLE POUR DETERMINER EFFORTS ET FLECHES MAXIMALES

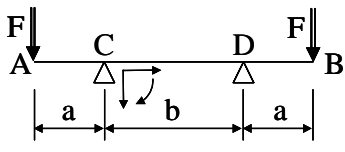
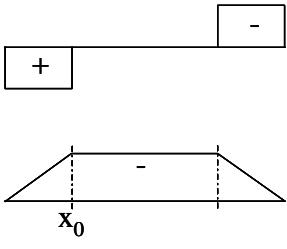
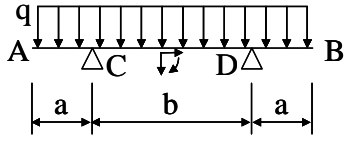
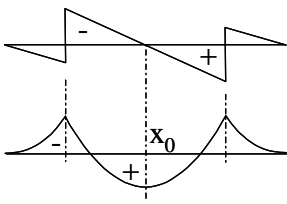
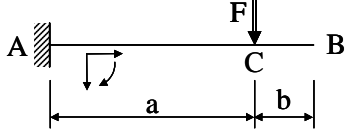
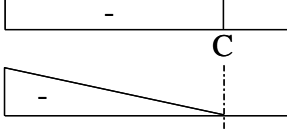
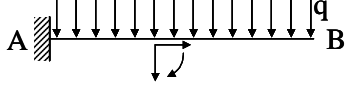
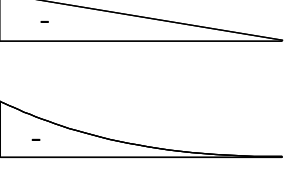
Les efforts liés à la flexion, c'est-à-dire le moment fléchissant et l'effort tranchant, sont souvent moins directs à déterminer que les efforts normaux. Il est donc intéressant de construire des abaques qui interviennent en amont du choix des sections, pour déterminer ces efforts, en fonction des situations types. Les données d'entrée de ces outils sont :

- La nature des appuis
- Les paramètres géométriques de la structure
- La nature et la position des charges

En sortie, on accède à des expressions pour les valeurs particulières des efforts et pour les flèches maximales, en fonction de l'intensité de la force, de l'inertie des sections, et du module d'élasticité du matériau.

Les tableaux suivants reprennent un certain nombre de situations courantes. Certains ouvrages proposent des tableaux plus complets, pour d'autres configurations de poutre simples ou continues sur n travées ou encore pour des portiques courants.

Configuration	Diagramme	Point	Effort	Flèche $Y_{max} =$
		A	$Q = -\frac{F}{2}$	$\text{En } x = \frac{L}{2}$ $\frac{FL^3}{48EI}$
		L/2	$M = \frac{FL}{4}$	
		B	$Q = \frac{F}{2}$	
		A	$Q = -\frac{qL}{2}$	$\text{En } x = \frac{L}{2}$ $\frac{5qL^4}{384EI}$
		L/2	$M = \frac{qL^2}{8}$	
		B	$Q = \frac{qL}{2}$	
		A	$Q = -F$	$\text{En } x = \frac{L}{2}$ $\frac{Fa(4a^2 - 3L^2)}{24EI}$
		C	$M = Fa$	
		D	$Q = F$	
		A	$Q = -\frac{qL}{4}$	$\text{En } x = \frac{L}{2}$ $\frac{qL^4}{120EI}$
		L/2	$M = \frac{qL^2}{12}$	
		B	$Q = \frac{qL}{4}$	
		A	$Q = \frac{C}{L}$ $M = C$	$\text{En } x = L - \frac{L}{\sqrt{3}}$ $\frac{2\sqrt{3}CL^2}{54EI}$

		A	$Q = F$	En $x = \frac{L}{2}$
		C	$M = -Fa$	$\frac{-Fab^2}{8EI}$
		D	$Q = -F$	En A et B $\frac{Fa^2(3b+2a)}{6EI}$
		Cg	$Q = qa$ $M = \frac{-qa^2}{2}$	En $x = \frac{L}{2}$ $\frac{qb^2(5b^2 - 24a^2)}{384EI}$
		Cd	$Q = q(a - 0,5L)$ $M = \frac{-qa^2}{2}$	En A, B : $\frac{qa(3a^3 + 6a^2b - b^3)}{24EI}$
		$L/2$	$M = \frac{q(b^2 - 4a^2)}{8}$	
		Dg	$Q = q(0,5L - a)$ $M = \frac{-qa^2}{2}$	
		Dd	$Q = -qa$ $M = \frac{-qa^2}{2}$	
		A	$Q = -F$ $M = -Fa$	En B $\frac{Fa^2(3L - a)}{6EI}$
		A	$T = -q \cdot L$ $M = \frac{-qL^2}{2}$	En B $\frac{qL^4}{8EI}$

		A	$Q = -\frac{qL}{2}$ $M = \frac{-qL^2}{6}$	En B $\frac{qL^4}{30EI}$
		A	$Q = \frac{Fb}{a}$	En B $\frac{FLb^2}{3EI}$
		C	$M = -Fb$	
		B	$Q = -F$	
		A	$Q = \frac{qb^2}{2a}$	En B $\frac{qb^3(4a+3b)}{24EI}$
		C	$M = \frac{-qb^2}{2}$	
		Cd	$Q = -qb$	
		A	$Q = \frac{q(b^2 - a^2)}{2a}$	En B $\frac{qbL(3b^2 + ab - a^2)}{24EI}$
		En $x_0 = \frac{a^2 - b^2}{2a}$	$M = \frac{q(a^2 - b^2)^2}{8a^2}$	
		Cg	$Q = \frac{q(a^2 + b^2)}{2a}$ $M = -\frac{qb^2}{2}$	
		Cd	$Q = -qb$ $M = \frac{qb^2}{2}$	

V.1) INTRODUCTION

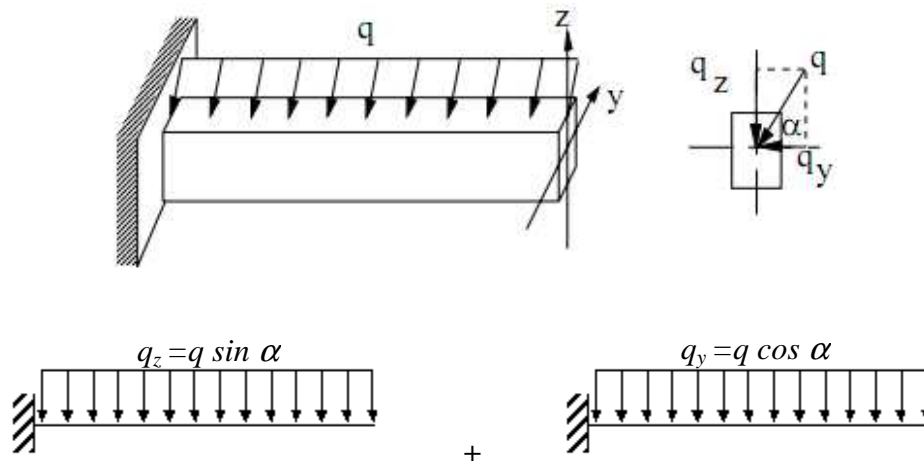
Dans le cas général une section peut être soumise à l'action des six composantes de l'effort internes à savoir (N , Q_x , Q_y , M_x , M_y , M_z) et qui ont été classées sous quatre catégories de sollicitation ou déformation simple : traction et compression (N), cisaillement (Q_x , Q_y) torsion M_x , et flexion M_y , M_z . Dans la pratique courante, on rencontre rarement des cas où les sollicitations sont simples moins encore ou les six composantes des efforts internes apparaissent en même temps au niveau d'une section.

On rencontre, cependant, différents types de leurs combinaisons. Sous les hypothèses de la résistance des matériaux ces combinaisons peuvent être analysées en utilisant le principe de superposition des efforts. Dans ce chapitre on étudiera la combinaison de deux flexions dite flexion déviée. La combinaison de la flexion déviée avec la traction ou compression communément appelée flexion composée (voir chapitre 5).

V.1.1) Définition

La flexion déviée est définie comme une combinaison de deux flexions planes, si les charges sont appliquées aux axes principaux. Dans certain cas les chargements on flexion sont inclinés par rapport à l'un des axes principaux, la décomposition de ce chargement en deux composantes parallèle aux axes produit une flexion déviée.

L'étude de la flexion déviée revient à décomposer les sollicitations en deux flexions planes suivant les plans principaux.



V.2) CONTRAINTE NORMALE ET DEPLACEMENT

Pour une action simultanée de M_y et M_z , les contraintes en un point de coordonnées y et z se déterminent par la formule :

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y$$

I_y et I_z moments d'inertie principaux de la section droite de la poutre suivant y et z .

M_y et M_z sont les moments fléchissant par rapport aux axes y et z qui sont les composantes du moment fléchissant résultants.

Ce résultat est établi directement en considérant que la flexion déviée comme la somme de deux flexions dirigées suivant les axes centraux d'inertie et en appliquant le principe de superposition, où :

$$M_z = M \sin \alpha$$

$$M_y = M \cos \alpha$$

Donc :

$$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$$

Le moment résultant est appliquée au plan incliné suivant un angle α par rapport au plan principal d'inertie zy de la poutre.

Le déplacement vertical y (la flèche) et la rotation θ d'une section quelconque de la poutre en flexion déviée sont définis comme les sommes géométrique des déplacements verticaux et des rotations due aux composantes du moment fléchissant agissant dans les plans principaux de la poutre.

$$y_{zy} = \sqrt{y_z^2 + y_y^2}$$

$$\theta_{zy} = \sqrt{\theta_z^2 + \theta_y^2}$$

Avec :

$$\theta_z = \frac{dy}{dz} \text{ et } \theta_y = \frac{dy}{dy}$$

y_z et y_y sont les déplacement verticaux dans les directions z et y .

θ_z et θ_y sont les rotations de la section autour des axes z et y .

V.3) AXE NEUTRE

L'axe neutre est l'ensemble des points pour les quels la contrainte σ est nulle.

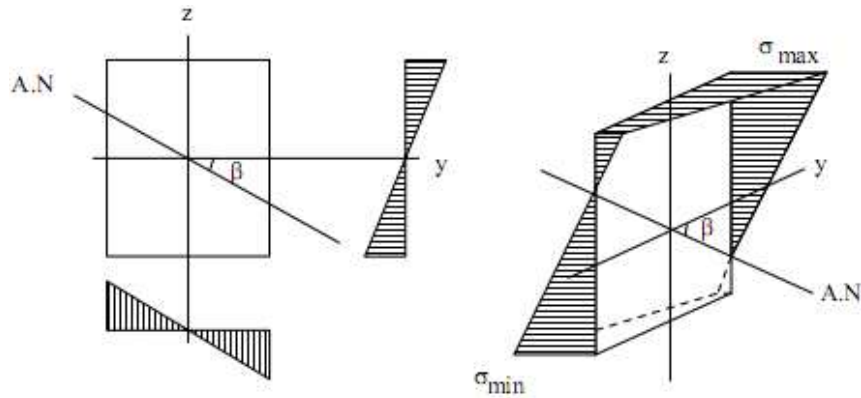
L'axe neutre, a pour équation :

$$\frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y = 0$$

Donc :

$$y = - \frac{M_y}{M_z} \frac{I_z}{I_y} z$$

L'axe neutre alors est un droit passant par le centre de gravité de la section.



En flexion déviée due à une charge inclinée de α par rapport à l'axe oy on a les relations :

$$M_z = M \sin \alpha$$

$$M_y = M \cos \alpha$$

Où M est le moment suivant un axe orienté de α par rapport à $y-y$.

Donc :

$$y = - \frac{I_z}{I_y} z \operatorname{tg} \alpha$$

La tangente de l'axe neutre s'écrit alors :

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{M_y}{M_z} \frac{I_z}{I_y} = - \operatorname{ctg} \alpha \frac{I_z}{I_y}$$

Donc l'expression de la contrainte peut être mise sous la forme :

$$\sigma = M \left(z \frac{\cos \alpha}{I_y} + y \frac{\sin \alpha}{I_z} \right)$$

V.4) VERIFICATION A LA RESISTANCE

Le calcul de vérification de la résistance s'effectue à la base des données sur la contrainte totale maximale.

D'après la formule de la contrainte, les contraintes maximales se localisent aux points les plus éloignés de l'axe neutre. Pour une section symétrique on a :

$$\sigma_{\max} = \left| M_{\max} \left(y_{\max} \frac{\sin \alpha}{I_z} + z_{\max} \frac{\cos \alpha}{I_y} \right) \right| \leq [\sigma_+]$$

$$\sigma_{\min} = - \left| M_{\max} \left(y_{\max} \frac{\sin \alpha}{I_z} + z_{\max} \frac{\cos \alpha}{I_y} \right) \right| \leq [\sigma_-]$$

Exercice 1 :

Dimensionner une poutre d'un toit simplement appuyée de longueur $L=4m$. Le rapport $h/b=2$, l'angle entre le toit et l'horizontale est de 25° . La charge verticale $q = 0,4 \text{ kN/m}$ est répartie sur toute la longueur. On donne $[\sigma]=10 \text{ N/mm}^2$, et $E=10^4 \text{ N/mm}^2$.

Solution

$$\sigma_{\max} = M_{\max} \left(y_{\max} \frac{\sin \alpha}{I_z} + z_{\max} \frac{\cos \alpha}{I_y} \right) \leq [\sigma]$$

Avec :

$$y_{\max} = \frac{h}{2}, \quad z_{\max} = \frac{b}{2}, \quad I_z = \frac{bh^3}{12}, \quad I_y = \frac{hb^3}{12}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\max} = M_{\max} \left(12 * h \frac{\sin \alpha}{2bh^3} + 12 * b \frac{\cos \alpha}{hb^3} \right) \leq [\sigma]$$

$$M_{\max} \left(\frac{6}{bh^2} \sin \alpha + \frac{6}{hb^2} \cos \alpha \right) \leq [\sigma]$$

Pour $h = 2b$

$$M_{\max} \left(\frac{6}{4b^3} \sin \alpha + \frac{6}{2b^3} \cos \alpha \right) \leq [\sigma]$$

$$M_{\max} \left(\frac{3}{2b^3} \sin \alpha + \frac{3}{b^3} \cos \alpha \right) \leq [\sigma]$$

$$\Rightarrow \frac{3}{b^3} M_{\max} \left(\frac{1}{2} \sin \alpha + \cos \alpha \right) \leq [\sigma]$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3M}{[\sigma]} (0,5 \sin \alpha + \cos \alpha)}$$

$$\Rightarrow b = 13 \text{ cm}$$

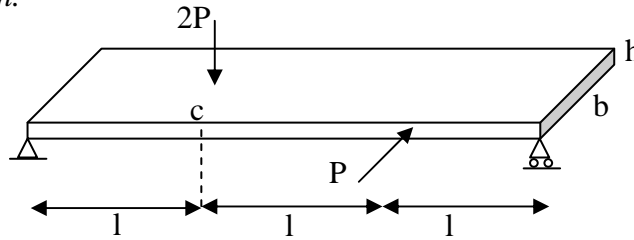
Et

$$h = 2 * b = 26 \text{ cm}$$

Exercice 2 :

Déterminer la contrainte et le déplacement au point « c ».

On suppose que $b=2h$.

**Solution****1) Calcul de la contrainte**

Etape 1 :

$$R_B = \frac{2}{3}P, \quad R_A = \frac{4}{3}P$$

$$\sigma_{1c} = \frac{M}{I_x} y = \frac{\frac{4}{3}Pl * \frac{h}{2}}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{16Pl}{h^3}$$

Etape 2 :

$$R_B = \frac{2}{3}P, \quad R_A = \frac{P}{3}$$

$$\sigma_{2c} = \frac{M}{I_y} y = \frac{\frac{2}{3}Pl * \frac{b}{2}}{\frac{hb^3}{12}} = \frac{16Pl}{h^3}$$

$$\text{Finalement : } \sigma_c = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{32Pl}{h^3}$$

2) Calcul de déplacement

Etape 1 :

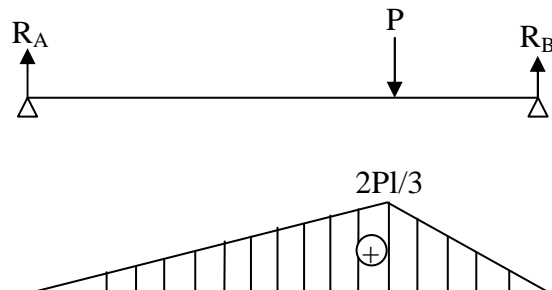
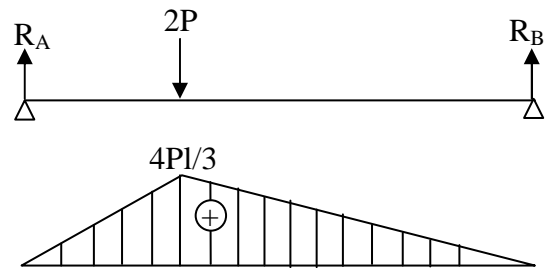
$$M_f = R_A x = \frac{4P}{3}x - 2P(x-l)$$

$$EIy'' = -M_f = -\frac{4P}{3}x + 2P(x-l)$$

$$EIy = -\frac{4P}{18}x^3 + \frac{P}{3}(x-l)^3 + C_1x + C_2$$

$$x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow C_2=0$$

$$x=3l \rightarrow y=0 \rightarrow C_1 = -\frac{3}{4}Pl^2$$



$$\text{Donc : } EIy = -\frac{4P}{18}x^3 + \frac{P}{3}(x-l)^3 - \frac{3}{4}Pl^2x$$

$$y_{1(x=l)} = -\frac{1}{EI} \frac{35}{36} Pl^3$$

Etape 2 :

$$M_f = \frac{P}{3}x - P(x-2l)$$

$$EIy'' = -\frac{P}{3}x + P(x-2l)$$

$$EIy = -\frac{P}{18}x^3 + \frac{P}{6}(x-2l)^3 + C_1x + C_2$$

$$x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow C_2=0$$

$$x=3l \rightarrow y=0 \rightarrow C_1 = -\frac{1}{9}Pl^2$$

$$\text{Donc : } EIy = -\frac{P}{18}x^3 + \frac{P}{6}(x-2l)^3 - \frac{1}{9}Pl^2x$$

$$y_{2(x=l)} = -\frac{1}{6EI}Pl^3$$

$$\begin{aligned} \text{Finalement : } y_{(x=l)} &= \sqrt{\left(y_{1(x=l)}\right)^2 + \left(y_{2(x=l)}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{35}{36EI}Pl^3\right)^2 + \left(-\frac{1}{6EI}Pl^3\right)^2} \\ y_{(x=l)} &\approx \frac{Pl^3}{EI} \end{aligned}$$

Exercice 3:

Les poutres ayant un des moments d'inertie principaux très grand par rapport à l'autre sont très sensibles aux déviations des chargements par rapport à l'axe principal de chargement.

Calculer la variation de la contrainte due à une déviation de la charge de 2°.

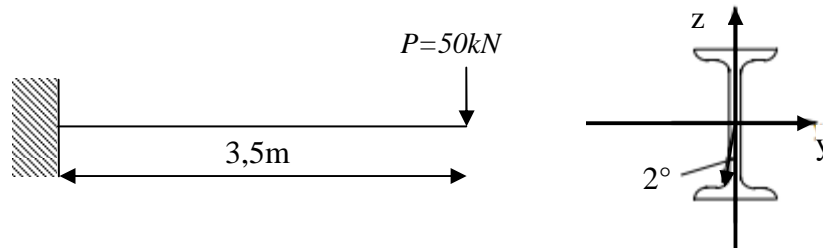
Considérons le cas d'une console en IPE600 de longueur L=3,5 m et ayant les caractéristiques géométriques suivantes :

$$I_z = 118,3 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 4520 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$h = 610 \text{ mm}$$

$$b = 224 \text{ mm}$$



La poutre est sollicitée par une charge $P = 50 \text{ kN}$ appliquée à son extrémité libre. Calculer la variation de la contrainte pour une déviation de P de 2° par rapport à l'axe z - z .

Solution

Pour une force axée :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} Y_{\max}}{I_z} = \frac{PL}{I_z} \frac{h}{2} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 3500 \cdot 305}{118,3 \cdot 10^7} = 45,1 \text{ N/mm}^2$$

On écrit l'équation de l'axe neutre pour déterminer son inclinaison par rapport à l'axe y - y lorsque la force est déviée de 2° par rapport à l'axe de chargement vertical z - z .

$$\alpha = 90 - 2 = 88^\circ$$

$$\tan \beta = -\frac{I_z}{I_y} \cot \alpha = \frac{118,3 \cdot 10^7}{4,52 \cdot 10^7} \cot 88^\circ = -0,913$$

Donc :

$$\beta = -42,4^\circ$$

On remarque que l'inclinaison de l'axe neutre est très importante pour une petite déviation de 2° . Les contraintes maximales se trouvent aux points extrêmes de la section.

$$M_{z\max} = (P \cos \alpha) L \quad M_{y\max} = (P \sin \alpha) L \quad \text{à l'encastrement}$$

$$M_{z\max} = 50 \cdot 10^3 \cos 2^\circ \cdot 3500 \quad M_{y\max} = 50 \cdot 10^3 \sin 2^\circ \cdot 3500$$

$$M_{z\max} = 1,749 \cdot 10^8 \text{ Nmm} \quad M_{y\max} = 6,107 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z\max} Y_{\max}}{I_z} + \frac{M_{y\max} Z_{\max}}{I_y} = \frac{1,749 \cdot 10^8 \cdot 305}{118,3 \cdot 10^7} + \frac{6,107 \cdot 10^6 \cdot 112}{4520 \cdot 10^4}$$

$$\sigma_{\max} = 60,23 \text{ N/mm}^2$$

L'augmentation en % de la contrainte due à la déviation de la force est :

$$\frac{\sigma_{\max \text{ déviée}} - \sigma_{\max \text{ centrée}}}{\sigma_{\max \text{ centrée}}} \cdot 100 = 33,5 \%$$

VI.1) FLEXION COMPOSEE

La flexion composée provient de l'action conjuguée d'une flexion due à un chargement latérale et d'un effort axial (traction ou compression) ou seulement de l'effet d'un effort normal excentré par rapport à l'axe moyen de l'élément.

VI.1.1) Flexion composée avec traction ou compression

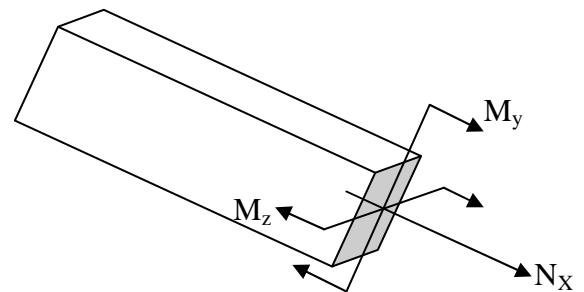
C'est le cas général d'une poutre soumise à des chargements transversaux et longitudinaux, ou une section arbitraire, les efforts M_z , M_y , Q_x , Q_y ainsi que N sont présents.

En utilisant le principe de superposition, on peut déterminer la contrainte normale globale en un point quelconque de la section normale par :

$$\sigma_1 = \pm \frac{M_z}{I_z} y \quad \text{Contrainte due au } M_z$$

$$\sigma_2 = \pm \frac{M_y}{I_y} z \quad \text{Contrainte due au } M_y$$

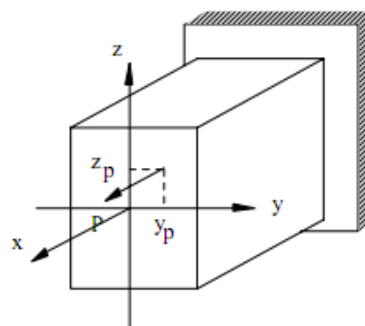
$$\sigma_3 = \pm \frac{N_x}{A} \quad \text{Contrainte due au } N_x$$



Donc la contrainte globale est donné par : $\sigma = \pm \frac{M_z}{I_z} y \pm \frac{M_y}{I_y} z \pm \frac{N_x}{A}$

VI.1.2) Traction ou compression excentrée

La flexion composée peut être aussi le résultat de l'action d'une force longitudinale excentré par rapport à l'axe moyen de la poutre. On rencontre ce cas de chargement généralement dans les éléments courts sollicités par une force excentrée dont les coordonnées du point d'application sont y_p , z_p .



Les efforts internes en une section quelconque sont :

$$N = P$$

$$M_z = P * y_p$$

$$M_y = P * z_p$$

D'où les contraintes en un point dans la section :

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{A}{P} \frac{M_y}{I_y} z + \frac{A}{P} \frac{M_z}{I_z} y \right]$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \left[1 + z_p \frac{A}{I_y} z + y_p \frac{A}{I_z} y \right]$$

On pose : $i = \sqrt{\frac{I_i}{A}}$ rayon de giration suivant l'axe i

$$\sigma = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{z_p}{i_y^2} z + \frac{y_p}{i_z^2} y \right]$$

L'équation de l'axe neutre :

C'est l'ensemble des fibres dans lesquelles la poutre ne subit aucune traction ou compression c'est-à-dire la contrainte est nulle.

$$\sigma = 0 = 1 + \frac{z_p}{i_y^2} z + \frac{y_p}{i_z^2} y$$

D'après l'équation de l'axe neutre, ce dernier coupe les axes zz et yy aux points :

$$y = 0 \quad , \quad z_{AN} = -\frac{i_y^2}{z_p}$$

Et

$$z = 0 \quad , \quad y_{AN} = -\frac{i_z^2}{y_p}$$

Donc l'axe neutre coupe les axes du quadrant opposé de celui du point d'application de la force.

VI.2) LE NOYAU CENTRAL

On attend par noyau central la région autour d'elle la force doit être appliquée pour avoir des contraintes de même signe dans toute la section de la barre.

Ou :

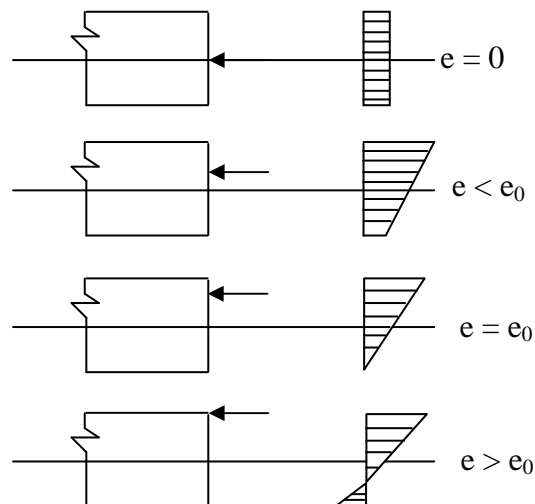
C'est la zone d'une section droite, lorsqu'on applique dans laquelle un effort normal, toutes les fibres seront tendue (ou comprimées).

VI.2.1) Construction du noyau central

Pour tracer la région du noyau central on doit suivre les étapes suivantes :

- On trace les tangentes à la section on négligeant les creux.
- On détermine les centres de chargement correspondant aux axes neutres traces à l'aide de la formule du noyau central (axe neutre).
- On trace des droites par les points obtenus, la région bordée par des droites est le noyau central de la section.

D'après l'équation de l'axe neutre l'étendu de la section comprimée ou tendue dépend de l'excentricité de la force. Il est donc d'un grand intérêt pratique d'éviter dans la section droite le développement des contraintes de traction dues à la force compressive excentrique pour assurer la résistance des barres en matériau fragile à la traction. On appelle noyau central de section la partie du plan de la section droite contenant le centre de gravité et limitée par un contour fermé, dans lequel la force appliquée provoque des contraintes de même signe en tous les points de la section droite.



Le contour du noyau central de la section est déterminé par l'ensemble des positions des points d'application de la force excentrée qui fait passer l'axe par tous les points tangents à la section de telle manière qu'elle ne le coupe nulle part.

Les coordonnées des points d'application de la force sont déterminées d'après les formules suivantes :

$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_{AN}}, \quad z_p = -\frac{i_y^2}{z_{AN}}$$

Ces formules traduisent la relation entre la position de l'axe neutre et le point d'application de la force. Quand l'axe neutre tourne par rapport à un point fixe y_0 et z_0 le point d'application de la force se déplace suivant une ligne droite PP ne passant pas par le centre de gravité de la section.

Exercice 1:

➤ Cas d'une section rectangulaire :

Pour le cas d'un rectangle par exemple quand l'axe neutre est coïncident avec AB : l'axe neutre coupe l'axe y - y à $y_{AN} = y_0 = \frac{h}{2}$ et ne coupe pas l'axe z - z ($z_{AN} = \infty$).

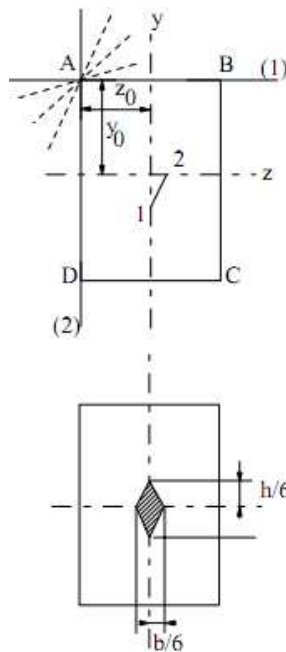
Les coordonnées du point d'application de la force correspondante à cette position de l'axe neutre sont déterminées par :

$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_{AN}} = -\frac{h}{6}$$

Car

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12}$$

$$z_p = -\frac{i_y^2}{z_{AN}} = -\frac{i_y^2}{\infty} = 0$$



D'une manière analogue on détermine les coordonnées du point 2 correspond à une position de l'axe neutre coïncidente avec AD, et on trouve :

$$y_p = 0 \quad \text{et} \quad y_p = \frac{b}{2}$$

La liaison des deux points 1 et 2 correspond à la rotation de l'axe neutre au point (z_0, y_0) passant de la position AB à AD.

Le contour du noyau central de la section rectangulaire est un losange dont les deux autres points 3 et 4 sont déterminés de la même manière que précédemment, c'est-à-dire quand l'axe neutre passe de BA à AD et de AD à DC.

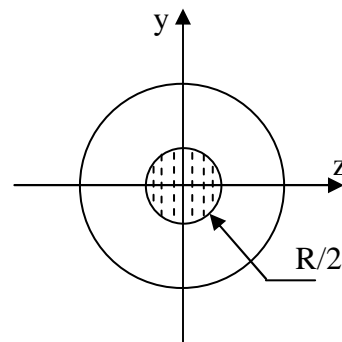
➤ Cas d'une section circulaire :

$$\text{On a : } I = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$v = v' = \frac{D}{2} = R$$

$$\Rightarrow c = \rho * v = \frac{\frac{\pi D^4}{64}}{\frac{\pi D^2}{4}} \frac{D}{2} = \frac{D}{8}$$

$$\Rightarrow c' = \rho * v' = \frac{D}{8}$$



VI.3) VERIFICATION A LA RESISTANCE

Pour une section symétrique, la condition de résistance s'écrit :

$$\sigma = \frac{F}{A} \pm \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]$$

Ou pour le cas d'un effort normal excentré

$$\sigma = \frac{F}{A} \left[1 \pm \frac{z_p}{i_y^2} z_{\max} \pm \frac{y_p}{i_z^2} y_{\max} \right] \leq [\sigma]$$

Exercice 2 :

- 1) Déterminer les contraintes normales σ_{\max} et σ_{\min} et la position de l'axe neutre dans la section dangereuse de la poutre ci-dessous :
- 2) Si les angles que forme P avec les axes x-x, y-y et z-z sont 30° , 60° et 90° respectivement, déterminer la longueur L maximale de la poutre pour que la contrainte normale maximale ne dépasse pas celle provoquée par la force excentrée.

Solution

1- Les contraintes, maximale et minimale sont données par :

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{F}{A} \left[1 \pm \frac{z_p}{i_y^2} z_{\max} \pm \frac{y_p}{i_z^2} y_{\max} \right]$$

Application numérique :

$$i_y^2 = \frac{b^2}{12} = \frac{240^2}{12} = 4800 \text{ mm}^2$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{200 * 240^3}{12} = 2,3 * 10^8 \text{ mm}^4$$

$$i_z^2 = \frac{h^2}{12} = \frac{200^2}{12} = 3333,3 \text{ mm}^2$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{240 * 200^3}{12} = 1,6 * 10^8 \text{ mm}^4$$

$$z_p = 60 \text{ mm} \quad z_{\max} = 120 \text{ mm}$$

$$y_p = 50 \text{ mm} \quad y_{\max} = 100 \text{ mm}$$

$$N = 60 * 10^3 \text{ N}$$

$$A = 240 * 200 = 48000 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{60 * 10^3}{48000} \left(1 \pm \frac{60 * 120}{4800} \pm \frac{50 * 100}{3333,3} \right)$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} \sigma_{\max} = 5 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{\min} = -2,5 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

2- La force inclinée par rapport à l'axe moyen de la poutre provoque une flexion composée dont les moments et l'effort normal résultant des projections de la force sur les axes y-y, z-z et x-x sont respectivement :

$$P_x = P \cos \alpha$$

$$P_y = P \cos \beta$$

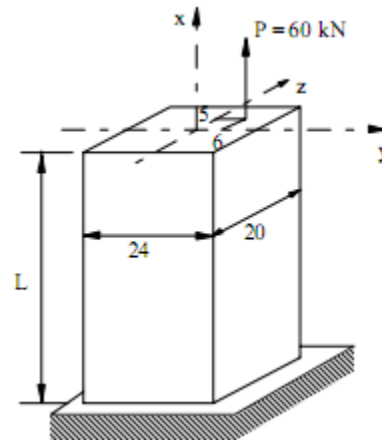
$$P_z = P \cos \gamma$$

$$N = P_x = P \cos \alpha$$

$$M_z = P_y L = PL \cos \beta$$

$$M_y = P_z L = PL \cos \gamma$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{I_z} y_{\max} \pm \frac{M_y}{I_y} z_{\max}$$



$$\sigma_{\max} = \frac{P \cos \alpha}{A} + \frac{y_{\max} PL \cos \gamma}{I_z} + \frac{z_{\max} PL \cos \beta}{I_y}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\max} - \frac{P \cos \alpha}{A} = L \left(\frac{y_{\max} P \cos \gamma}{I_z} + \frac{z_{\max} P \cos \beta}{I_y} \right)$$

VI.4) APPLICATION NUMERIQUE

Avec $\sigma_{\max} = 5 \text{ N/mm}^2$

On obtient :

$$5 - \frac{60 \cdot 10^3 \cos 30}{48000} = L \left(\frac{60 \cdot 10^3 \cos 60 \cdot 100}{1,6 \cdot 10^8} + \frac{60 \cdot 10^3 \cos 90 \cdot 120}{2,3 \cdot 10^8} \right)$$

$$L = \frac{3,92}{0,0188} = 209 \text{ mm}$$

Exercice 3:

Déterminer le noyau central de la section suivante :

$$I_x = 2171,6 \text{ cm}^4$$

$$i_x = 8,66 \text{ cm}^2$$

$$I_y = 191 \text{ cm}^4$$

$$i_y = 2,52 \text{ cm}^2$$

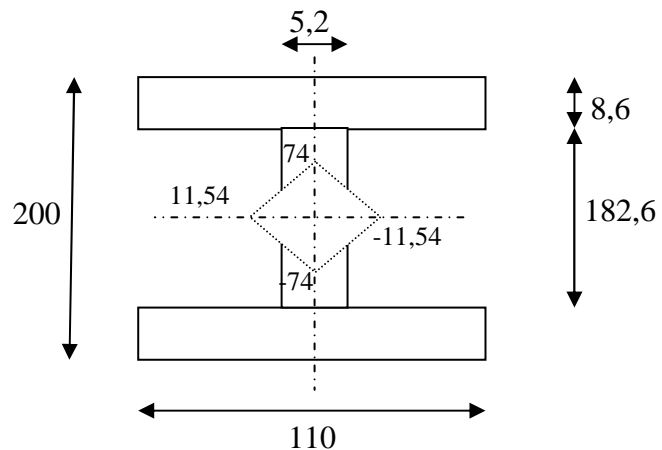
$$A = 34,64 \text{ cm}^2$$

$$x_p = -\frac{i_y^2}{x} \text{ Avec } \begin{cases} x = 5,5 \\ x = -5,5 \end{cases}$$

Donc : $x_p = \pm 11,54 \text{ cm}$

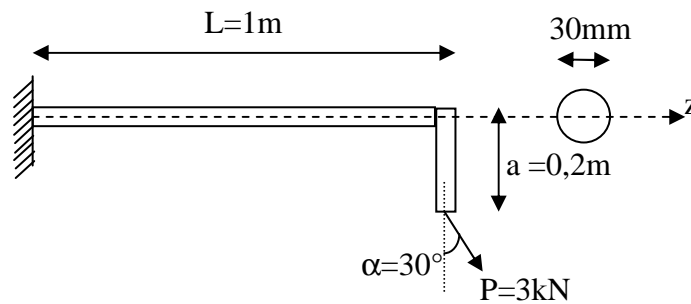
$$y_p = -\frac{i_x^2}{y} \text{ Avec } \begin{cases} y = 100 \\ y = -100 \end{cases}$$

Donc : $y_p = \pm 74 \text{ cm}$



Exercice 4 :

Déterminer σ_{\max} et σ_{\min} de la poutre suivante.

**Solution**

$$M = M_y - P \cos \alpha x$$

$$x = 0 \Rightarrow M = M_y = aP \sin \alpha = 0,3 \text{ kNm}$$

$$x = l \Rightarrow M = -2,29 \text{ kNm}$$

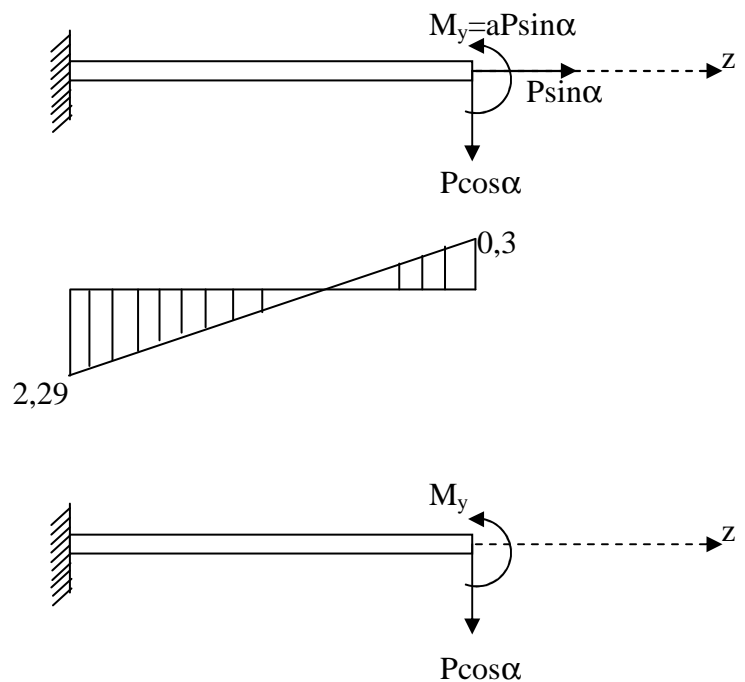
$$\sigma_1 = \frac{P \sin \alpha}{\frac{\pi}{4} (30 \cdot 10^{-2})^2} = 21,22 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_2 = \pm \frac{M_x}{I_y} y = \pm \frac{2,29 \cdot 10^3}{\frac{\pi}{64} (30 \cdot 10^{-2})^2} \left(\frac{30}{2} \cdot 10^{-2} \right) = \pm 863,91 \text{ kN/m}^2$$

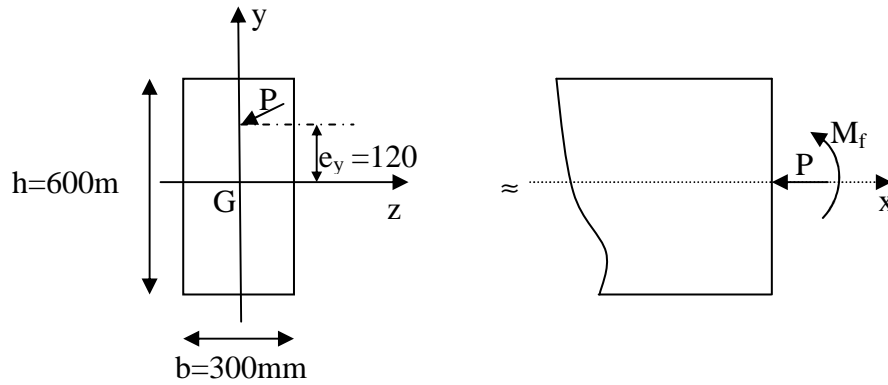
$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = 21,22 \pm 863,91$$

$$\sigma_{\max} = 885,13 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_{\min} = -842,69 \text{ kN/m}^2$$

**Exercice 5:**

La section de la poutre rectangulaire montrée sur la figure ci après est soumise à un effet de compression excentré $P = 2500 \text{ kN}$ appliqué en un point de l'axe y à une distance $e_y = 120 \text{ mm}$ de l'axe z .



- a- Déterminer les contraintes dans les fibres extrêmes supérieures et inférieures ;
 b- Déterminer la valeur minimale de e_y pour qu'il n'y ait pas de contraintes de traction agissant sur la section.

Solution

- a) Dans la fibre supérieure extrême, on a une contrainte totale de compression σ_s égale à :

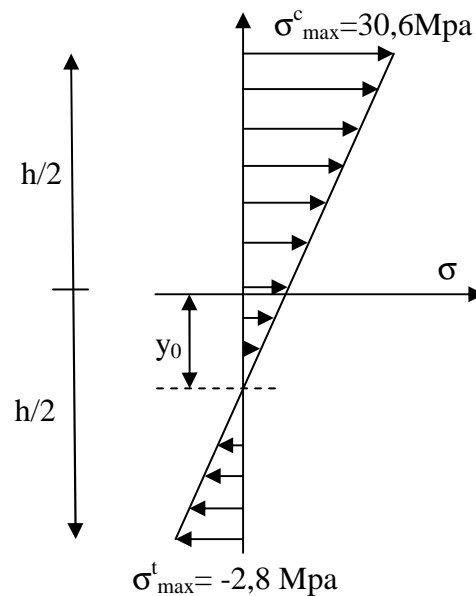
$$\sigma_s = \sigma_{\left(\frac{h}{2}\right)} = \frac{P}{A} + \frac{(Pe_y) h}{I 2}$$

$$\sigma_s = \left[\left(\frac{2500 \cdot 10^3}{300 \cdot 600} \right) \left(1 + \frac{6 \cdot 120}{600} \right) \right] = 30,6 \text{ Mpa} \quad (\sigma_{\max} \text{ compression})$$

Et sur la fibre inférieure extrême σ_i égale à :

$$\sigma_i = \sigma_{\left(\frac{h}{2}\right)} = \frac{P}{A} - \frac{Pe_y h}{I 2}$$

$$\sigma_i = \left[\left(\frac{2500 \cdot 10^3}{300 \cdot 600} \right) \left(1 - \frac{6 \cdot 120}{600} \right) \right] = -2,8 \text{ Mpa} \quad (\sigma_{\max} \text{ traction})$$



$$\text{Fibre neutre : } \sigma(y_0) = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{-\frac{P}{A}}{\frac{Pe_y}{I}} = \frac{-13,89}{\frac{3 \cdot 10^8}{54 \cdot 10^8}} = -250,02 \text{ mm}$$

b) Pour que la section ne soit pas soumise à des contraintes de traction, il faut que

$$\sigma_i = 0$$

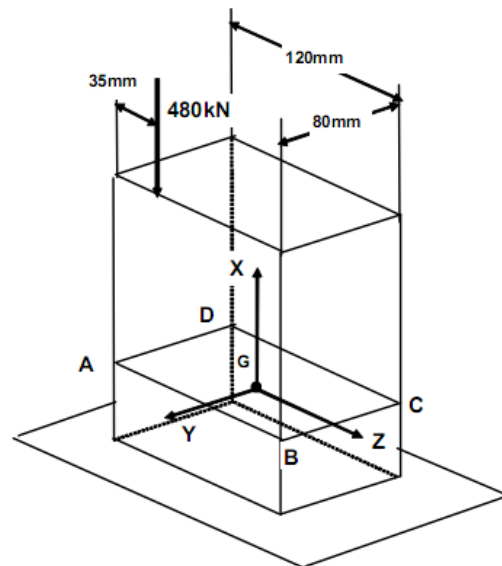
Et par conséquent :

$$e_y = \frac{h}{6} = \frac{600}{6} = 100 \text{ mm}$$

Il faut l'excentricité de l'effort P ne dépasse pas 100 mm

Exercice 6:

Calculer les contraintes normales aux points A, B, C et D et localiser l'axe neutre.



Solution

$$\text{Torseur de section en G : } \begin{cases} \vec{R}_G = \vec{F}_E \Rightarrow \begin{cases} N_x = -480 \text{ kN} \\ 0 \\ 0 \end{cases} \\ \vec{M}_G = \vec{GE} \wedge \vec{F}_E \Rightarrow \begin{cases} 0 \\ M_y = 12000 \text{ kNmm} \\ M_z = 19200 \text{ kNmm} \end{cases} \end{cases}$$

La contrainte normale en un point P quelconque :

$$\sigma_{xx}^p = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z}{I_z} Y^p + \frac{M_y}{I_y} Z^p$$

$$\sigma_{xx}^p = \frac{480 \cdot 10^3}{120 \cdot 80} - \frac{19200 \cdot 10^3 \cdot 12}{120 \cdot 80^3} Y^p + \frac{12000 \cdot 10^3 \cdot 12}{120^3 \cdot 80} Z^p$$

$$\sigma_{xx}^p = -50 - 3,75 * Y^p + 1,0417 * Z^p$$

Contrainte en A :

$$\sigma_{xx}^A = -50 - 3,75 * 40 + 1,0417 * (-60)$$

$$\sigma_{xx}^A = -262,5 \text{ Mpa}$$

Les calculs sont identiques pour les points B, C, D :

$$\sigma_{xx}^B = -137,5 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_{xx}^C = 162,5 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_{xx}^D = 37,5 \text{ Mpa}$$

Equation de l'axe neutre : $\sigma_{xx}^p = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z}{I_z} Y^p + \frac{M_y}{I_y} Z^p = 0$

$$\sigma_{xx}^p = -50 - 3,75 * Y^p + 1,0417 * Z^p = 0$$

$$-50 - 3,75 * Y^p + 1,0417 * Z^p = \frac{500 + 3,75 Y^p}{1,0417}$$

$$Z = 3,6 Y + 48$$