Лабораторная работа 3

Кубические параметрические сплайны

Для построения гладкой кривой будет использовано параметрическое задание точек кривой $X = X(t)$, при этом t - независимый параметр, такой что $0 \leq t \leq 1$. Кубическим параметрическим сплайном назовем следующую систему уравнений:

$$X = X(t) = \begin{cases} x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x, \\ y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y, \\ z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z. \end{cases} \tag{1}$$

Координаты точек на кривой описываются вектором $X(x(t), y(t), z(t))$, а три производные задают координаты соответствующего касательного вектора в точке. Например, для координаты x:

$$\frac{dx}{dt} = 3a_x t^2 + 2b_x t + c_x \tag{2}$$

Одним из способов задания параметрического кубического сплайна является указание координат начальной и конечной точек, а также векторов касательных в них. Такой способ задания называется формой Эрмита.

Кривая Эрмита.

Рис. 1: Пример кривой в форме Эрмита.

Задание кривой в форме Эрмита - это параметрическое задание кривой вида

$$X = F(t, \overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{R_1}, \overrightarrow{P_4}, \overrightarrow{R_4}), \tag{3}$$

при этом:

$\overrightarrow{P_1}$ -вектор начала кривой, при этом парамер $t = 0$;

$\overrightarrow{R_1}$ -вектор производной кривой(или, геометрически, касательная) в точке $t = 0$;

$\overrightarrow{P_4}$ -вектор конца кривой, при этом парамер $t = 1$;

$\overrightarrow{R_4}$ -вектор производной кривой(или, геометрически, касательная) в точке $t = 1$;

параметр t лежит в пределах $0 \leq t \leq 1$, и выбирая различные значения этого параметра можно получить промежуточные точки кривой.

Будем решать задачу нахождения четверки коэффициентов a_x, b_x, c_x, d_x , так как для оставшихся двух уравнений коэффициенты находятся аналогично.

Запишем условие для построения сплайна:

$$\begin{cases} x(0) = P_{1x}, \\ x(1) = P_{4x}, \\ x'(0) = R_{1x}, \\ x'(1) = R_{4x}. \end{cases} \tag{4}$$

Перепишем уравнение (1) для x в виде скалярного произведения векторов:

$$x(t) = \left([t^3, t^2, t, 1], \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \right) \tag{5}$$

Обозначим вектор строку $T = [t^3, t^2, t, 1]$, и вектор столбец коэффициентов $C_x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$, тогда скалярное произведение примет вид:

$$\mathbf{x(t)}\mathbf{=}\mathbf{(T,C)} \tag{6}$$

Из (4) следует, что

$$\begin{aligned} x(0) = P_{1x} = ([0, 0, 0, 1], C_x), \\ x(1) = P_{4x} = ([1, 1, 1, 1], C_x), \\ x'(0) = R_{1x} = ([0, 0, 1, 0], C_x), \\ x'(1) = R_{4x} = ([3, 2, 1, 0], C_x). \end{aligned}$$

Отсюда получаем векторно-матричное уравнение:

$$\begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{4x} \\ R_{1x} \\ R_{4x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} C_x \tag{7}$$

Эта система решается относительно C_x нахождением обратной матрицы размером 4x4

$$C_x = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{4x} \\ R_{1x} \\ R_{4x} \end{bmatrix} = M_h G_{hx} \tag{8}$$

Здесь:
M_h - эрмитова матрица,
G_h - геометрический вектор Эрмита.

Подставим выражение C_x в выражение (5) для нахождения $x(t)$:

$$x(t) = TM_h G_{hx} = \left[t^3, t^2, t, 1\right] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{4x} \\ R_{1x} \\ R_{4x} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Выпишем в явном виде формулы для вычисления координат точек сплайна.
Так как

$$TM_h = \left[(2t^3 - 3t^2 + 1), (-2t^3 + 3t^2), (t^3 - 2t^2 + t), (t^3 - t^2)\right], \tag{10}$$

то умножая справа на G_{hx}, получаем:

$$x(t) = TM_h G_{hx} = P_{1x}(2t^3 - 3t^2 + 1) + P_{4x}(-2t^3 + 3t^2) + R_{1x}(t^3 - 2t^2 + t) + R_{4x}(t^3 - t^2) \tag{11}$$

Аналогично для остальных координат,:

$$y(t) = TM_h G_{hy} = P_{1y}(2t^3 - 3t^2 + 1) + P_{4y}(-2t^3 + 3t^2) + R_{1y}(t^3 - 2t^2 + t) + R_{4y}(t^3 - t^2) \tag{12}$$

$$z(t) = TM_h G_{hz} = P_{1z}(2t^3 - 3t^2 + 1) + P_{4z}(-2t^3 + 3t^2) + R_{1z}(t^3 - 2t^2 + t) + R_{4z}(t^3 - t^2) \tag{13}$$

Это можно переписать в векторном виде:

$$\overrightarrow{X}(t) = \overrightarrow{P_1}(2t^3 - 3t^2 + 1) + \overrightarrow{P_4}(-2t^3 + 3t^2) + \overrightarrow{R_1}(t^3 - 2t^2 + t) + \overrightarrow{R_4}(t^3 - t^2) \tag{14}$$

Кривая в форме Безье

Для задания кривой Безье изменяется форма задания граничных условий,

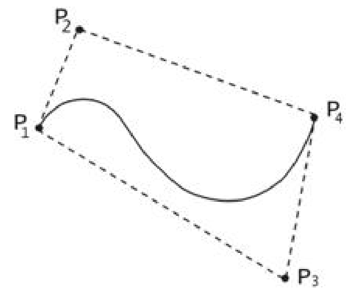

Рис. 2: Пример кривой в форме Безье.

а именно (см рис 2), вместо векторов R_1 и R_4 вводятся точки (и соответствующие им радиус векторы) P_2 и P_3, такие что выполняются условия:

$$P'(0) = R_1 = 3(P_2 - P_1)P'(1) = P_4 = 3(P_4 - P_3) \tag{15}$$

Переход от формы Эрмита к форме Безье осуществляется преобразованием:

$$G_h = \begin{bmatrix} \overrightarrow{P_1} \\ \overrightarrow{P_4} \\ \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{R_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{P_1} \\ \overrightarrow{P_2} \\ \overrightarrow{P_3} \\ \overrightarrow{P_4} \end{bmatrix} = M_{hb}G_b \tag{16}$$

где G_b - геометрический вектор Безье. Подставляя это в выражение для $x(t)$, получаем

$$x(t) = TM_hG_{hx} = TM_hM_{hb}G_{bx} = (1-t)^3P_{1x} + 3t(1-t)^2P_{2x} + 3t^2(1-t)P_{3x} + t^3P_{4x} \tag{17}$$

Полезным свойством сплайнов в форме Безье является то что кривая всегда лежит внутри выпуклой оболочки, образованной четырехугольником $\left[\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{P_3}, \overrightarrow{P_4}\right]$. Это свойство можно доказать, пользуясь тем, что в выражении (17) коэффициенты принимают значения от 0 до 1 и их сумма равна единице.

Аналогично координате x находятся остальные координаты:

$$y(t) = TM_hG_{hy} = TM_hM_{hb}G_{by} = (1-t)^3P_{1y} + 3t(1-t)^2P_{2y} + 3t^2(1-t)P_{3y} + t^3P_{4y} \tag{18}$$

$$z(t) = TM_hG_{hz} = TM_hM_{hb}G_{bz} = (1-t)^3P_{1z} + 3t(1-t)^2P_{2z} + 3t^2(1-t)P_{3z} + t^3P_{4z} \tag{19}$$

В векторной форме:

$$\overrightarrow{X}(t) = (1-t)^3\overrightarrow{P_1} + 3t(1-t)^2\overrightarrow{P_2} + 3t^2(1-t)\overrightarrow{P_3} + t^3\overrightarrow{P_4} \tag{20}$$

Заметим, что матрица вида $M_hM_{hb} = M_b = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ - называется матрицей Безье

В задании, студентам будут, согласно вариантам, указаны тип кривой и соответствующий набор точек. В программе потребуется выбрать N ($N \geq 20$) опорных точек t_i, из диапазона $0 \leq t \leq 1$, таких, что $t_0 = 0, \ldots t_i \ldots t_N = 1$, и по формулам(для кривой Эрмита (11),(12),(13), для кривой Безье (17),(18),(19)), рассчитать значение $\overrightarrow{X}(t)$ в этих точках, и соединить эти точки отрезками.

Для удобства проверки, также следует указать вектора касательных, приложенные к точкам начала и конца кривой Эрмита(См рис. 1) или ограничивающий четырехугольник в случае кривой Безье(См рис. 2).