1. Aksiominis tikimybės apibrėžimas ir tikimybės savybės.

1.4 Aksiominis tikimybės apibrėžimas

Tikimybių teorijos aksiomos abstrakčia forma atspindi tuos dėsningumus, kurie būdingi masiniams atsitiktiniams įvykiams. Jos nepateikia tikimybės skaičiavimo algoritmo, bet apibrėžia savybes, kurias privalo tenkinti tikimybė.

Apibrėžimas. Tikimybe vadiname neneigiamą, normuotą ir adityvią skaitinę funkciją **P**:
1. $\mathbf{P}(A) \geq 0$.
2. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.
3. $\mathbf{P}(A \bigcup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$, kai $A \bigcap B \leq \varnothing$.

Jos apibrėžimo sritis yra klasė $\mathcal{F}$.
Iš aksiomų išplaukia elementariosios išvados:
- $\mathbf{P}(\varnothing)=0$;
- $\mathbf{P}(A) \leq 1$;
- $\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A})$;
- $\mathbf{P}(A_1 \bigcup A_2 \bigcup ... \bigcup A_n) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + ... + \mathbf{P}(H_n)$, kai $A_k \bigcap A_m = \varnothing$, $k \neq m$.

Pastaroji savybė įrodoma matematinės indukcijos metodu, o kitas galima pagrįsti Veno diagramomis. Pabandykite.

Aksiominis tikimybės apibrėžimas yra bendras ir abstraktus. Jis neteikia algoritmo, kaip skaičiuoti įvykio tikimybę konkrečiu atveju.

Vieną (empirinį, susietą su eksperimento kartojimu) tikimybės skaičiavimo algoritmą apibūdinome statistiniame apibrėžime. Toliau pateiksime kitus įvykio tikimybės skaičiavimo metodus. Visi jie – aksiominio apibrėžimo atskiri atvejai.

2. Tikimybių sudėties teoremos.

2.1. Tikimybių sudėties teorema

Kai įvykiai A ir B nesutaikomi
$$\mathbf{P}(A \bigcup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$
Bet kuriems (nebūtinai nesutaikomiesiems) įvykiams A ir B yra tikimybių sudėties teorema.

1 teorema. *Dviejų įvykių sąjungos tikimybė yra lygi tų įvykių tikimybių sumos bei įvykių sankirtos tikimybės skirtumui*:
$$\mathbf{P}(A \bigcup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \bigcap B).$$

Šią teoremą galima pagrįsti Veno diagrama (2.1 pav.)

2.1 pav.

Tikimybių sudėties teoremą indukcijos metodu galima apibendrinti ir didesniam įvykių skaičiui. Pavyzdžiui, imdami tris įvykius A, B, C, gauname:
$$\mathbf{P}(A \bigcup B \bigcup C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A \bigcap B) - \mathbf{P}(A \bigcap C) - \mathbf{P}(B \bigcap C) + \mathbf{P}(A \bigcap B \bigcap C).$$

1 pavyzdys. Simetriškas lošiamasis kamuoliukas metamas du kartus. Kokia tikimybė, kad šešios akutės atvirs bent vieną kartą?

▶ Pažymėkime.

A={šešios akutės atvirto pirmuoju metimu},
B={ šešios akutės atvirto antruoju metimu}.

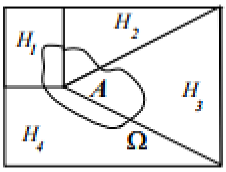
Tada $A \bigcup B$ = { šešios akutės atvirto bent vieną kartą}.
Kadangi įvykiai A ir B yra sutaikomi, pasinaudosime tikimybių sudėties teorema:
$$\mathbf{P}(A \bigcup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \bigcap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}. \quad ◀$$

3. Pilnosios tikimybės formulė.

Iš tikimybių adityvumo aksiomos ir tikimybių daugybos teoremos išplaukia pilnosios tikimybės formulė.

1 teorema. *Jei įvykiai H_1, H_2, ...H_n sudaro pilnąją įvykių grupę (2.2 pav.), tai bet kokio įvykio A tikimybė*

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A \mid H_1) + \mathbf{P}(H_2)\mathbf{P}(A \mid H_2) + \ldots + \mathbf{P}(H_n)\mathbf{P}(A \mid H_n)$$



2.2 pav.

▶ Galioja įvykių sąryšiai:

$$A = A \cap \Omega = A \cap (H_1 \cap H_2 ... \cup H_n) = (A \cap H_2) \cup (A \cap H_2) \cup ... \cup (A \cap H_n)$$

Kadangi $(A \cap H_k) \cap (A \cap H_m) = \varnothing$ su visais $k \neq m$, kai

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup ... \cup (A \cap H_n) = \mathbf{P}(A \cap H_1) + \mathbf{P}(A \cap H_2) + \cdots + \mathbf{P}(A \cap H_n) =$$
$$= \mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A \mid H_1) + \mathbf{P}(H_2)\mathbf{P}(A \mid H_2) + \cdots + \mathbf{P}(H_n)\mathbf{P}(A \mid H_n). \quad ◀$$

Įvykius H_k, $k = \overline{1,n}$ dažnai vadiname hipotezėmis.

4. Bejeso teorema.

2 teorema (Bejeso). *Tarkime, kad galioja 1 teoremos reikalavimai. Tada*

$$\mathbf{P}(H_k \mid A) = \frac{\mathbf{P}(H_k)\mathbf{P}(A \mid H_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A \mid H_i)}, \quad k = \overline{1,n}.$$

▶ Iš daugybos teoremos

$$\mathbf{P}(H_k \cap A) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(H_k \mid A) = \mathbf{P}(H_k)\mathbf{P}(A \mid H_k)$$

gauname:

$$\mathbf{P}(H_k \mid A) = \frac{\mathbf{P}(H_k)\mathbf{P}(A \mid H_k)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Belieka panaudoti pilnosios tikimybės formulę. ◀

5. Bernulio ekperimentai. Bernulio formulė.

3 Teorema. *Jei įvykiai A ir B yra nepriklausomi, tai nepriklausomieji bus ir įvykiai $\overline{A}$ ir B, A ir $\overline{B}$, $\overline{A}$ ir $\overline{B}$.*

▶

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B \cap (A \cup \overline{A})) = \mathbf{P}((A \cap B) \cup (\overline{A} \cup B)) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(\overline{A} \cap B) =$$
$$\mathbf{P}(A)P(B) + \mathbf{P}(\overline{A} \cap B).$$

Dabar

$$\mathbf{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B)(1 - \mathbf{P}(A)) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(\overline{A})$$

ir $\overline{A}$ ir B – nepriklausomieji įvykiai. Įrodykite kitus du teiginius. ◀

Nepriklausomumo sąvoką galima apibrėžti ir didesniam skaičiui įvykių.

Jei įvykiai, pasirodę atlikus vieną eksperimentą, nepriklauso nuo įvykių pasirodžius atlikus antrąjį eksperimentą, tai tokius eksperimentus vadinsime nepriklausomaisiais. Nepriklausomieji eksperimentai, kurių kiekvieno metu įvyksta įvykis A su nekintančia tikimybe $\mathbf{P}(A)=p$ $(\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - p)$ kiekviename eksperimente, vadiname **Bernulio eksperimentais**. Monetos metimas, grąžinamosios atrankos – Bernulio eksperimentų pavyzdžiai.

Sakykime, n kartų kartojame Bernulio eksperimentą, $\mathbf{P}(A)=p$ ir $\mathbf{P}(\overline{A}) = q = 1 - p$. Kokia tikimybė, kad įvykis A pasirodys k kartų? Šią tikimybę žymėsime $\mathbf{P}_n(k)$.

4 Teorema (Bernulio formulė). $\mathbf{P}_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = \overline{0,n}$.

▶ Pažymėkime:
A_j={atliekant j-tąjį eksperimentą įvyko A}.
Viena iš galimų realizacijų (iš n eksperimentų A pasirodė k kartų) yra ši:

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap \overline{A}_{k+1} \cap \overline{A}_{k+2} \cap \ldots \cap \overline{A}_n.$$

Kadangi įvykiai nepriklausomi, tai

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap \overline{A}_{k+1} \cap \ldots \cap \overline{A}_n) = p^k \cdot q^{n-k}.$$

Visų skirtingų realizacijų skaičius lygus C_n^k, o jų tikimybės vienodos ir lygios $p^k \cdot q^{n-k}$. Iš adityvumo aksiomos išplaukia, kad $\mathbf{P}_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. ◀

6. Pasiskirstymo funkcijos apibrėžimas ir savybės.

Apibrėžimas. Atsitiktinio dydžio X **skirstinio funkcija** F_X vadiname įvykio $\{\omega: X(\omega) \leq x\}$ tikimybę:

$$F_X(x) = \mathbf{P}(\omega: X(\omega) \leq x),\ x \in \mathbf{R}.$$

Dažnai trumpai rašysime: $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$.

Pastaba. Kartais skirstinio funkcija apibrėžiama truputį kitaip: $F(x) = \mathbf{P}(X < x)$.

Savybės:

1 teorema. $0 \leq F(x) \leq 1$.

2 teorema. *Tikimybė atsitiktiniam dydžiui įgyti reikšmes iš intervalo* $(x_1, x_2]$ *lygi skirstinio funkcijos pokyčiui šiame intervale*

$$\mathbf{P}(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

3 teorema. *F yra nemažėjanti funkcija*:

$$F(x_1) \leq F(x_2), \text{ kai } x_1 < x_2.$$

4 teorema. $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

5 teorema. *F yra tolydi iš dešinės*:

$$F(x+0) = F(x), \text{ kai } x \in \mathbf{R}.$$

Pastaba. Jeigu skirstinio funkciją apibrėžime sąryšiu $F(x) = \mathbf{P}(X < x)$, tai pasikeičia tik antroji ir penktoji savybės:

- $\mathbf{P}(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$;
- $F(x-0) = F(x)$, kai $x \in \mathbf{R}$.

Atsitiktinio dydžio skirstinio funkcija išsamiai apibūdina atsitiktinį dydį. Iš jos matome, kokias reikšmes gali įgyti dydis ir kaip tikimybės pasiskirsčiusios pagal šias reikšmes.

7. Tankio funkcija ir jos savybės.

Apibūdindami diskrečiuosius atsitiktinius dydžius, pastebėjome, kad jų skirstinio funkcija turi pirmojo tipo trūkį tuose taškuose x, kurie yra dydžio galimos reikšmės. Kita svarbi atsitiktinių dydžių klasė yra tolydieji dydžiai. Atsitiktinį dydį vadinsime tolydžiuoju, jei jo pasiskirstymo funkcija $F(x)$ yra tolydi. Tada su visais $x \in \mathbf{R}$ $\mathbf{P}(X=x)=F(x+0)-F(x)=0$ ir dydžio X apibūdinimas tikimybėmis $\mathbf{P}(X=x)$ (taip skaičiavome diskrečiuoju atveju) yra beprasmis.

Tolydieji dydžiai skirstomi į dvi klases: absoliučiai tolydžiuosius ir singuliariuosius. Praktiniuose taikymuose singuliarieji dydžiai nepasitaiko, todėl toliau nagrinėsime tik absoliučiai tolydžiuosius dydžius, trumpai juos vadindami tolydžiaisiais (5, 6 ir 7 pirmojo skyrelio pavyzdžiai).

Apibrėžimas. Atsitiktinis dydis vadinamas **tolydžiuoju** (absoliučiai tolydžiuoju), jeigu egzistuoja tokia funkcija p(x), su kuria

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du, \text{ kai } x \in \mathbf{R}$$

Funkciją $p(x)$ vadiname **skirstinio tankiu**, arba trumpiau, tankiu. Iš apibrėžimo išplaukia, kad tankis yra neneigiamoji normuotoji funkcija:

1. $\boxed{p(x) \geq 0,\ x \in \mathbf{R} \text{ ir } \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx = 1.}$

Paminėsime kitas savybes.

2. $\boxed{\mathbf{P}(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\, dx}$

3. Jei $p(x)$ yra tolydi taške x, tai $\boxed{p(x) = \frac{dF(x)}{dx}}$.

Iš šios savybės išplaukia, kad

$$p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{P}(x < X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Taigi $p(x)$ yra pasiskirstymo funkcijos $F(x)$ momentinis kitimo greitis, arba tikimybės tankis.

8. Atsitiktinio dydžio skaitinės charakteristikos: vidurkis, dispersija, jų apibrėžimas ir savybės.

6.1. Vidurkis

Apibrėžimas. Atsitiktinio dydžio X vidurkiu vadiname skaičių

$$\mathbf{M}X = \sum_i x_i \mathbf{P}(X = x_i),$$

kai X – diskretusis atsitiktinis dydis,

$$\mathbf{M}X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, dx,$$

kai X – tolydusis atsitiktinis dydis su tankiu $p(x)$.

Apibrėžime reikalaujama, kad eilutė ir integralas konverguotų absoliučiai:

$$\sum_i |x_i| \mathbf{P}(X = x_i) < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, p(x)\, dx < \infty.$$

Priešingu atveju sakoma, kad vidurkis neegzistuoja.

Atsitiktinio dydžio X vidurkis $\mathbf{M}X$ yra skaičius, apie kurį yra susitelkusios atsitiktinio dydžio įgyjamos reikšmės.

6.2 Atsitiktinių dydžių funkcijos vidurkis

Tarkime, kad atsitiktinis dydis X yra diskretusis ir $Y = f(X)$. Tada

$$\mathbf{M}Y = \sum_i f(x_i)\,\mathbf{P}(X = x_i).$$

Taigi, skaičiuojant atsitiktinio dydžio $Y = f(X)$ vidurkį, pakanka žinoti X skirstinį bei funkciją f, o Y skirstinio žinoti nebūtina.

Tarkime, kad atsitiktinis dydis X yra tolydusis su skirstinio tankiu $p(x)$, f –tolydžioji funkcija. Tada atsitiktinio dydžio $Y = f(x)$ vidurkis

$$\mathbf{M}Y = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,p(x)\,dx.$$

Kaip matome, skaičiuojant $Y=f(X)$ vidurkį, pakanka žinoti atsitiktinio dydžio X tankį $p(x)$ ir funkciją f, o atsitiktinio dydžio Y tankio žinoti nebūtina.

6.3. Vidurkio savybės

Tarkime, kad vidurkis egzistuoja. Suformuluosime vidurkio savybes.

1. $\mathbf{M}C=C$; čia C – konstanta.
2. Jei $X\geq 0$, tai $\mathbf{M}X\geq 0$.
3. $|\mathbf{M}X| \leq \mathbf{M}|X|$.
4. $\mathbf{M}(X+Y) = \mathbf{M}X + \mathbf{M}Y$.

Ši savybė gali būti apibendrinta:

$$\mathbf{M}(X_1 + ... + X_n) = \mathbf{M}X_1 + ... + \mathbf{M}X_n.$$

5. Jei atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra nepriklausomi, tai
$$\mathbf{M}XY = \mathbf{M}X\mathbf{M}Y.$$

Ši savybė gali būti apibendrinta: jei atsitiktiniai dydžiai $X_1,...,X_n$ yra nepriklausomi, tai

$$\mathbf{M}(X_1...X_n) = \mathbf{M}X_1...\mathbf{M}X_n.$$

6. $\mathbf{M}(CX) = C\mathbf{M}X$; čia C – konstanta.

6.5. Dispersija

Iki šiol nagrinėjome atsitiktinio dydžio padėties skaičių tiesėje charakteristikas: vidurkį, modą, kvantilius. Jos gan dažnai pakankamai apibūdina atsitiktinį dydį, tačiau ne visada. Svarbi atsitiktinio dydžio įgyjamų reikšmių sklaida apie vidurkį. Šią sklaidą charakterizuoja dispersija.

Apibrėžimas. Atsitiktinio dydžio X dispersija $\mathbf{D}X$ vadinama šio dydžio nuokrypio nuo vidurkio kvadrato vidurkį:

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^2.$$

Iš apibrėžimo išplaukia tokios dispersijos skaičiavimo formulės:

$$\mathbf{D}X = \sum_i (x_i - \mathbf{M}X)^2\mathbf{P}(X = x_i),$$

kai X – diskretusis dydis, ir

$$\mathbf{D}X = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{M}X)^2\,p(x)\,dx,$$

kai X – tolydusis atsitiktinis dydis.

Dispersija egzistuoja, kai eilutė arba integralas konverguoja.

Šaknis iš dispersijos vadinama **vidutiniu kvadratiniu nuokrypiu** (kartais standartu) ir žymima

$$\sigma_X = \sqrt{\mathbf{D}X}.$$

Santykis

$$V_X = \frac{\sigma_X}{\mathbf{M}X}$$

vadinamas variacijos koeficientu.

Dispersijos savybės:

1. $\mathbf{D}X \geq 0$.
2. $\mathbf{D}X = \mathbf{M}X^2 - (\mathbf{M}X)^2$, kadangi

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^2 = \mathbf{M}(X^2 - 2X\mathbf{M}X + (\mathbf{M}X)^2) = \mathbf{M}X^2 - 2\mathbf{M}X\mathbf{M}X + (\mathbf{M}X)^2 =$$
$$= \mathbf{M}X^2 - (\mathbf{M}X)^2.$$

3. $\mathbf{D}C = 0$; čia C – konstanta.
4. $\mathbf{D}CX = C^2\mathbf{D}X$, kadangi

$$\mathbf{D}CX = \mathbf{M}(CX - \mathbf{M}CX)^2 = C^2\mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^2 = C^2\mathbf{D}X.$$

5. Jei atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra nepriklausomi, tai

$$\mathbf{D}(X + Y) = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y,$$

kadangi

$$\mathbf{D}(X+Y) = \mathbf{M}(X + Y - \mathbf{M}(X+Y))^2 = \mathbf{M}((X - \mathbf{M}X) + (Y - \mathbf{M}Y))^2 = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^2 +$$
$$+ \mathbf{M}(Y - \mathbf{M}Y)^2 + 2\mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)\mathbf{M}(Y - \mathbf{M}Y) = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y + 2\mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)(Y - \mathbf{M}Y) =$$
$$= \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y + 2\mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)\mathbf{M}(Y - \mathbf{M}Y) = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y.$$

Šią savybę galima apibendrinti: jei $X_1, ..., X_n$ yra poromis nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, o $a_1, \ldots,$ a_n – realiosios konstantos, tai

$$\mathbf{D}(a_1X_1 + ... + a_nX_n) = a_1^2\mathbf{D}X_1 + ... + a_n^2\mathbf{D}X_n.$$

9. Atsitiktinio vektoriaus pasiskirstymo funkcijos apibrėžimas ir savybės.

Apibrėžimas. Realiąją funkciją

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \mathbf{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, ..., X_n \leq x_n)$$

vadiname atsitiktinio vektoriaus ($X_1, X_2, ..., X_n$) daugiamate (n – mate) skirstinio funkcija; čia $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$.

Dvimatė skirstinio funkcija geometrine prasme – paviršius. Ji, kaip ir vienmatė skirstinio funkcija yra nemažėjanti, kinta tarp 0 ir 1, yra tolydžioji iš dešinės, bent vienam iš argumentų tolstant į $-\infty$, artėja į 0. Neįrodinėdami pateikiame šias ir kitas skirstinio funkcijos savybes.

1. $0 \leq F(x, y) \leq 1$.
2. $F(x, y)$ yra tolydi iš dešinės:

$$F(x+0,\ y+0) = F(x,\ y) \text{ su visais } (x,\ y) \in \mathbf{R}^2.$$

3. $F(x, y)$ yra nemažėjanti kiekvieno argumento atžvilgiu:

$$F(x_2,\ y) \geq F(x_1,\ y), \text{ kai } x_2 > x_1,$$
$$F(x, y_2) \geq F(x, y_1), \text{ kai } y_2 > y_1$$

4. Galioja lygybės:

$$F(+\infty, +\infty) = 1,$$
$$F(-\infty,\ y) = F(x,\ -\infty) = F(-\infty,\ -\infty) = 0.$$

5. Pažymėkime vektoriaus koordinačių skirstinio funkcijas:

$$F_1(x) = \mathbf{P}(X \leq x),\ F_2(y) = \mathbf{P}(Y \leq y).$$

Tada

$$F(x,\ +\infty) = F_1(x),\ \ F(+\infty,\ y) = F_2(y)$$

10. Atsitiktinio vektoriaus tankio funkcija ir jos savybės.

> **Apibrėžimas**. Vektorių (X, Y) vadiname tolydžiuoju (absoliučiai tolydžiuoju), jeigu egzistuoja tokia neneigiama funkcija $p(x, y)$, su kuria
> $$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u,v)\, du\, dv, \quad (x;y) \in \boldsymbol{R}^2.$$

Funkciją $p(x, y)$ vadiname **skirstinio tankiu**.
Tankio funkcijai būdingos savybės:

1. $p(x,y) \geq 0$ *su visais* $(x;y) \in \boldsymbol{R}^2$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\, dx\, dy = 1 \quad \text{(iš apibrėžimo ir savybės } F(+\infty, +\infty) = 1\text{)}.$$

Taigi, tankis $p(x, y)$ yra neneigiama ir normuota funkcija.
Geometrinė prasmė: paviršius, esantis virš plokštumos $x0y$, ir juo ribojamo kūno tūris yra lygus vienetui.

2. Jeigu tankis $p(x, y)$ yra tolydus taške (x,y), tai

$$p(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y}.$$

3. Imkime bet kurį erdvės $\boldsymbol{R}^2$ (plokštumos) poerdvį **D**.
Tada tikimybė

$$\mathbf{P}((X,Y) \in \mathbf{D}) = \iint_{(D)} p(x,y)\, dx\, dy.$$

4. Atsitiktinių dydžių X ir Y vienmačiai tankiai (marginalieji)

$$p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\, dy, \quad p_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\, dx.$$

11. Kovariacijos apibrėžimas ir jos savybės.

> **Apibrėžimas**. Atsitiktinių dydžių X ir Y nuokrypių nuo vidurkių sandaugos vidurkį vadiname kovariacija ir žymime
> $$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)(Y - \mathbf{M}Y).$$

Iš kovariacijos apibrėžimo išplaukia, kad

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \sum_i \sum_j (x_i\text{-}\mathbf{M}X)(y_i\text{-}\mathbf{M}Y)p_{ij},$$

kai (X, Y) – diskretusis, ir

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} (x\text{-}\mathbf{M}X)(y\text{-}\mathbf{M}Y)\, p(x,y)dx\, dy,$$

kai (X, Y) – tolydusis, jei eilutė (integralas) konverguoja absoliučiai.

Jei $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$, tai atsitiktinius dydžius X ir Y vadiname **nekoreliuotas**. Jei $\operatorname{cov}(X,Y) \neq 0$, dydžiai vadinami koreliuotais (susietais koreliacine priklausomybe).

Pagrindinės kovariacijos savybės:

1. $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$.
2. $\operatorname{cov}(X,X) = \mathbf{D}X$.
3. $|\operatorname{cov}(X,Y)| \leq \sqrt{\mathbf{D}X\, \mathbf{D}Y}$.
4. Jei atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra nepriklausomi, tai jie yra nekoreliuoti (kai koreliacija egzistuoja), kadangi

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)(Y - \mathbf{M}Y) = \mathbf{M}(XY - Y\mathbf{M}X - X\mathbf{M}Y + \mathbf{M}X\mathbf{M}Y) = \mathbf{M}XY - \mathbf{M}X\mathbf{M}Y -$$
$$- \mathbf{M}Y\mathbf{M}X + \mathbf{M}X\mathbf{M}Y = 0.$$

Čia pasinaudojome tuo, kad, jei dydžiai nepriklausomi, tai $\mathbf{M}XY$=$\mathbf{M}X\mathbf{M}Y$.

Reikėtų atkreipti dėmesį į tai, kad atvirkščias teiginys nėra teisingas. Priklausomieji dydžiai gali būti nekoreliuoti. Pagrįsime tai pavyzdžiu. Tarkime, kad atsitiktinio dydžio X tankis lygus

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{kai } x \in (-1, 1), \\ 0, & \text{priešingu atveju.} \end{cases}$$

Apibrėžiame atsitiktinį dydį $Y=X^2$. Aišku, kad atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra priklausomi, kadangi tarp jų egzistuoja funkcinė priklausomybė. Tačiau

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\mathbf{M}XY-\mathbf{M}X\mathbf{M}Y=\mathbf{M}X^3-\mathbf{M}X\mathbf{M}X^2=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^3dx-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}xdx\cdot\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2dx=$$

$$=\frac{1}{8}x^4\Big|_{-1}^{1}-\left(\frac{1}{4}x^2\Big|_{-1}^{1}\right)\left(\frac{1}{6}x^3\Big|_{-1}^{1}\right)=0-0\cdot\frac{1}{3}=0.$$

5. $\mathbf{D}(\alpha X\pm\beta Y)=\alpha^2\mathbf{D}X+\beta^2\mathbf{D}Y\pm 2\alpha\beta\operatorname{cov}(X,Y);$

čia α ir β - realiosios konstantos.

6. Apibrėšime koreliacinę matricą

$$K=\begin{pmatrix}\mathbf{D}X & \operatorname{cov}(X,Y)\\ \operatorname{cov}(X,Y) & \mathbf{D}Y\end{pmatrix}.$$

Koreliacinė matrica yra simetriška ir neneigiamai apibrėžta, t. y.

$$K=K^T,\quad |K|\geq 0.$$

12. Koreliacijos koeficiento apibrėžimas ir jos savybės.

Koreliacinio ryšio glaudumui nusakyti vartojama bedimensė charakteristika – koreliacijos koeficientas.

Apibrėžimas. Atsitiktinių dydžių X ir Y koreliacijos koeficientu ρ vadiname santykį

$$\rho=\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbf{D}X\,\mathbf{D}Y}}.$$

Koreliacijos koeficiento savybės:

1. $\rho(aX+b,cY+d)=\rho(X,Y)$, kai $a>0, c>0$,

kadangi

$$\rho(aX+b,cY+d)=\frac{\mathbf{M}(aX+b-\mathbf{M}(aX+b))(cY+d-\mathbf{M}(cY+d))}{\sqrt{\mathbf{D}(aX+b)\mathbf{D}(cY+d)}}=$$

$$=\frac{ac\,\mathbf{M}(X-\mathbf{M}X)(Y-\mathbf{M}Y)}{\sqrt{a^2c^2\mathbf{D}X\,\mathbf{D}Y}}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbf{D}X\,\mathbf{D}Y}}=\rho(X,Y).$$

2. Jei X ir Y nepriklausomieji atsitiktiniai dydžiai, tai

$$\rho(X,Y)=0.$$

3. $|\rho(X,Y)|\leq 1.$

4. $|\rho(X,Y)|=1$ tada ir tik tada, kai X ir Y yra susiję tiesine priklausomybe, t. y. $Y=aX+b$.

13. Nepriklausomų atsitiktinių dydžių apibrėžimas.

Apibrėžimas. Atsitiktinius dydžius X ir Y vadiname **nepriklausomaisiais**, jei su visais $(x;y)\in \boldsymbol{R}^2$

$$\mathbf{P}(X<x,Y<y)=\mathbf{P}(X<x)\mathbf{P}(Y<y),$$

t. y. jei dvimatė skirstinio funkcija lygi vienmačiai funkcijų sandaugai: $F(x,y)=F_1(x)F_2(y)$.

14. Empirinės imties charakteristikos: vidurkis, dispersija, kvantiliai, pasiskirstymo funkcija.

Tikimybių teorijos kurse nagrinėjome atsitiktinio dydžio X skaitines charakteristikas: vidurkį dispersiją, modą, kvantilius ir kt. Statistiniai jų analogai (įverčiai) yra empirinės skaitinės charakteristikos. Apibrėšime pagrindines empirines (imties) skaitines charakteristikas.

Variacinė eilutė. Surašę imties elementus jų didėjimo tvarka, gauname variacinę imties eilutę

$$X_{(1)} \le X_{(2)} \le \ldots \le X_{(n)}.$$

Empirinis q – kvantilis. Tarkime, kad $0 < q < 1$, tuomet empirinis q – kvantilį $\hat{X}_q$ yra

$$\hat{X}_q = \begin{cases} \dfrac{X_{(nq)} + X_{(nq+1)}}{2}, & \text{kai } nq \text{ sveikasis skaičius,} \\ X_{([nq]+1)}, & \text{priešingu atveju.} \end{cases}$$

čia $[nq]$ – skaičiaus nq sveikoji dalis. Kai $q = 1/2$, gauname empirinę medianą. Empirinio q – kvantilio realizaciją žymėsime x_q.

Empiriniai momentai. k – tuoju empiriniu pradiniu momentu vadinsime dydį

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, \quad k = 1,2,\ldots.$$

Pirmąjį empirinį pradinį momentą vadinsime empiriniu vidurkiu ir žymėsime

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Empirinio vidurkio realizaciją, gautą konkrečios imties atveju, žymėsime $\overline{x}$.

k – tuoju empiriniu centriniu momentu vadinsime dydį

$$M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^k, \quad k = 1,2,\ldots.$$

Antrąjį empirinį centrinį momentą vadinsime empirine dispersija ir žymėsime

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2.$$

Dydį S vadinsime empiriniu standartiniu nuokrypiu, Empirinės dispersijos realizaciją žymėsime s^2.

Matematinėje statistikoje dažnai taikoma taip vadinama pataisyta empirinė dispersija

$$\overline{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2.$$

Šios statistikos realizaciją žymėsime $\overline{s}$.

15. Taškiniai įverčiai: suderintasis, nepaslinktasis, efektyvusis.

Taškinis įvertis yra atsitiktinis dydis. Kartojant eksperimentą (imant to paties didumo imtis), šis dydis įgis skirtingas reikšmes. Taškinis įvertis $\hat{\Theta}$ skiriasi nuo populiacijos parametro Θ tam tikra reikšme, kuri vadinama paklaida. Apie šių paklaidų įvertinimą bus kalbama vėliau.

Funkcijas $\vartheta(X)$ galime parinkti įvairiai, todėl reikia kriterijų, kuriais remdamiesi galėtume parinkti tam tikra prasme geriausius įverčius. Dažniausiai reikalaujama, kad įvertis būtų:

1) suderintas, $\mathbf{P}(|\Theta - \hat{\Theta}| < \varepsilon) \to 1, \quad \varepsilon > 0$;

2) nepaslinktas, $\mathbf{M}\hat{\Theta} = \Theta$;

3) efektyvus, $\mathbf{D}\hat{\Theta} \to \min$.

Įvertis, kuris iš visų galimų parametro Θ nepaslinktų įverčių turi mažiausią dispersiją, vadinamas **efektyviu**. Yra nemažai metodų taškiniams įverčiams rasti. Praktikoje dažniausiai taikomi du metodai: momentų ir didžiausio tikėtumo.

16. Momentų metodas.

Momentų metodą pasiūlė K. Pirsonas. Sakykime atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcija priklauso nuo h parametrų $F(X,\Theta_1,...,\Theta_h)$ ir turi h momentų. Imame h empirinių momentų ir prilyginame juos atitinkamiems teoriniams momentams. Gauname h lygčių ir h nežinomųjų sistemą, kurią sprendžiame $\Theta_1,...,\Theta_h$ atžvilgiu. Jei sprendiniai

$$\vartheta(X_1,...,X_n) \quad , \quad i=1,2,...,h$$

egzistuoja, tai jie laikomi parametrų $\Theta_1,...,\Theta_h$ taškiniais įverčiais. Šiuo metodu gauti įverčiai gali būti neefektyvūs. Kartais jie yra paslinktieji. Tačiau momentų metodas dažnai taikomas praktikoje, nes nereikalauja sudėtingų skaičiavimų. Paaiškinsime šį metodą pavyzdžiu.

4 pavyzdys. Stebimas atsitiktinis dydis $X \sim N(\mu,\sigma)$. Taikydami momentų metodą rasime parametrų taškinius įverčius. Priminsime, kad atsitiktinės imties $X = (X_1,\ldots,X_n)$ komponentės $X_i, i=\overline{1,n}$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai su tokiu pat kaip ir X tikimybiniu skirstiniu, t.y. $X_i \sim N(\mu,\sigma)$, $\mathbf{M}X_i = \mu$, $\mathbf{D}X_i = \sigma^2, i=\overline{1,n}$. Imdami pirmąjį pradinį ir antrąjį centrinį momentus ir lygindami juos su atitinkamais teoriniais momentais

$$\begin{cases} \overline{X} = \mathbf{M}X, \\ S^2 = \mathbf{D}X, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{X} = \mu \\ S^2 = \sigma^2 \end{cases}.$$

iš karto gauname μ ir σ^2 taškinius įverčius $\hat{\mu} = \overline{X}$, $\hat{\sigma}^2 = S^2$.

Patikrinsime, ar gautieji įverčiai yra nepaslinktieji. Remdamiesi vidurkio savybėmis, gauname

$$\mathbf{M}\hat{\mu} = \mathbf{M}\overline{X} = \mathbf{M}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}X_i = \frac{1}{n}n\mu = \mu .$$

Parametro μ įvertis $\hat{\mu}$ yra nepaslinktasis. Panašiai samprotaudami gautume, kad

$$\mathbf{M}\hat{\sigma}^2 = \mathbf{M}S^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2,$$

t.y. S^2 yra paslinktas σ^2 įvertis. Kuo mažesnis n, tuo didesnis poslinkis. Dideliems n tas poslinkis nedidelis. Jis konverguoja į nulį, kai $n \to \infty$. Todėl sakoma, kad įvertis S^2 yra asimptotiškai nepaslinktas. Parametro σ^2 nepaslinktasis įvertis yra nepaslinktoji empirinė dispersija

$$\overline{S}^2 = \frac{n}{n-1}S^2 .$$

$\overline{S}^2$ yra suderintas, nepaslinktas ir efektyvus įvertis.

17. Didžiausio tikėtinumo metodas.

Geresni rezultatai dažniau gaunami **didžiausio tikėtumo metodu**, pasiūlytu R.Fišerio 1912 m. Tarkime, kad iš populiacijos, kurios skirstinio funkcija $F(x,\Theta_1,...,\Theta_h)$ priklauso nuo h nežinomų parametrų $\Theta_1,...,\Theta_h$, gauta n didumo atsitiktinės imties $X = (X_1,\ldots,X_n)$ realizacija $x = (x_1,\ldots,x_n)$.

Kai atsitiktinis dydis yra diskretus, tai sandauga

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2,..., X_n = x_n) = \\ &= \mathbf{P}(x_1,\Theta_1,...,\Theta_h)\,\mathbf{P}(x_2,\Theta_1,...,\Theta_h)\ldots\mathbf{P}(x_n,\Theta_1,...,\Theta_h) = \\ &= \prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}(x_i,\Theta_1,...,\Theta_h). \end{aligned}$$

vadinama didžiausiojo tikėtinumo funkcija, čia $\mathbf{P}(x_i,\Theta_1,...\Theta_h)$ tikimybė, kad atsitiktinis dydis X įgis reikšmę x_i.

Kai atsitiktinis dydis tolydus, tikėtinumo funkcija vadinama sandauga

$$L = \prod_{i=1}^{n} p(x_i,\Theta_1,...,\Theta_h),$$

čia $p(x,\Theta_1,...,\Theta_h)$ - atsitiktinio dydžio X tankio funkcija.

Parametrų $\Theta_1,...,\Theta_h$ didžiausiojo tikėtinumo įverčiais vadinamos statistikos $\hat{\Theta}_j = \vartheta_j(X_1,..., X_n)$, maksimizuojančios didžiausiojo tikėtinumo funkciją L. Ieškant didžiausiojo tikėtinumo įverčių sprendžiamas kelių kintamųjų funkcijos L ekstremumo radimo uždavinys. Įverčiai $\hat{\Theta}_j$, $j = \overline{1,h}$ yra lygčių sistemos

$$\frac{\partial L}{\partial \Theta_j} = 0, \quad j = \overline{1,h}$$

sprendiniai. Kadangi funkcijos L ir $\ln L$ įgyja didžiausią reikšmę esant toms pačioms $\ddot{\Theta}_j$, $j = \overline{1,h}$ reikšmėms, tai skaičiavimams supaprastinti, kartais naudojama logaritminė didžiausiojo tikėtinumo funkcija. Šiuo atveju didžiausiojo tikėtinumo įverčiai randami išsprendus lygčių sistemą

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \Theta_j} = 0, \quad j = \overline{1,h}.$$

Šiuo metodu gauti įverčiai yra suderinti ir efektyvūs. Taikant metodą praktikoje, dažnai tenka spręsti sudėtingas lygčių sistemas, o gaunami įverčiai kartais gali būti paslinktieji.

6 pavyzdys. Tarkime, kad stebint atsitiktinį dydį X, kurio skirstinys yra Puasono su nežinomu parametru λ.

Sudarome didžiausio tikėtinumo funkciją

$$L = \prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{X_i}e^{-\lambda}}{X_i!}.$$

Jos logaritmas

$$\ln L = \sum_{i=1}^{n}\left(\ln \lambda^{X_i} - \ln(X_i!) - \lambda\right) = \ln\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i - \sum_{i=1}^{n}\ln(X_i!) - n\lambda,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}X_i - n = 0.$$

Iš paskutinės lygties gauname parametro didžiausio tikėtinumo įvertį

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i = \overline{X}.$$

18. Pasikliautinojo intervalo sąvoka.

Kadangi $\hat{\Theta}$ yra atsitiktinis dydis, pareikalaujame, kad nelygybė

$$\left|\Theta - \hat{\Theta}\right| < \varepsilon$$

galiotų su tam tikra **didele** tikimybe $(1-\alpha) \in \{0{,}9; 0{,}95; 0{,}95\}$.

Tai trumpai galime užrašyti

$$\mathbf{P}(\left|\Theta - \bar{\Theta}\right| < \varepsilon) = 1-\alpha .$$

Ši lygybė ekvivalenti lygybei

$$\mathbf{P}(\bar{\Theta} - \varepsilon < \Theta < \bar{\Theta} + \varepsilon) = 1-\alpha.$$

Intervalas $PI_{1-\alpha}(\Theta) = (\bar{\Theta} - \varepsilon; \bar{\Theta} + \varepsilon)$ vadinamas **pasikliautinuoju intervalu (Confidence interval),** tikimybė $1-\alpha$ **pasikliovimo tikimybe arba pasikliovimo lygmeniu**, o skaičius ε - **įverčio tikslumu (paklaida)**.

19. Statistinės hipotezės, pirmos ir antros rūšies klaidos, reikšmingumo lygmuo.

Hipoteze statistikoje vadinamas teiginys apie nežinomus populiacijų požymių (kintamųjų) skirstinius. Pavyzdžiui, statistinėmis hipotezėmis bus šie teiginiai:

- stebimo atsitiktinio dydžio skirstinys yra normalusis;
- atsitiktinio dydžio vidurkis lygus 100;
- dviejų atsitiktinių dydžių vidurkiai yra lygūs;
- vieno atsitiktinio dydžio dispersija yra didesnė negu kito ir t.t.

Tikrinamoji hipotezė vadinama **nuline** ir žymima H_0. Kartu nagrinėjama ir jai priešinga hipotezė H_a. Ji vadinama **alternatyviąja**. Hipotezės skirstomos į parametrines ir neparametrines. Jei statistinė hipotezė tikrinama nežinomų pasiskirstymo dėsnio parametrų atžvilgiu, tai ji vadinama **parametrine hipoteze** (populiacijos parametras lyginamas su kokiu nors skaičiumi, arba tarpusavyje lyginami kelių populiacijų analogiški parametrai). Pavyzdžiui, jei **vieno** stebimo atsitiktinio dydžio skirstinys normalusis $X \sim N(\mu, \sigma)$ galima tikrinti šias hipotezes:

1) $H_0 : \mu = \mu_0$, $\quad H_a : \mu \neq \mu_0$ arba $H_a : \mu < \mu_0$ arba $H_a : \mu > \mu_0$;

2) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, $\quad H_a : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ arba $H_a : \sigma^2 < \sigma_0^2$ arba $H_a : \sigma^2 > \sigma_0^2$;

3) $H_0 : \begin{matrix} \mu = \mu_0 \\ \sigma^2 = \sigma_0^2 \end{matrix}, \quad H_a : \begin{matrix} \mu \neq \mu_0 \\ \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{matrix}.$

Tarkime, kad **dviejų** stebimų atsitiktinių dydžių skirstiniai yra normalieji $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ ir $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_1)$ Lyginant jų parametrus, dažnai tenka tikrinti hipotezes:

1) $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, $\quad H_a : \mu_1 \neq \mu_2$ arba $H_a : \mu_1 < \mu_2$ arba $H_a : \mu_1 > \mu_2$;

2) $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $\quad H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ arba $H_a : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ arba $H_a : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

Parametrinė hipotezė vadinama **paprastąja**, jeigu kokio nors parametro atžvilgiu iškelta tik viena prielaida, pavyzdžiui, $H_0 : \Theta = \Theta_0$; priešingu atveju ji vadinama **sudėtingąja**, pavyzdžiui, $H_a : \Theta < \Theta_0$.

Hipotezių tikrinimo klaidos. Statistikoje nagrinėjami atsitiktiniai dydžiai, todėl ir apie hipotezės atmetimą arba priėmimą galime kalbėti tik su tam tikra tikimybe. Taigi, galimos hipotezės tikrinimo klaidos. Pažymėkime α tikimybę, kad teisinga hipotezė H_0 bus atmesta. Tuomet $1-\alpha$ bus tikimybė, kad teisinga hipotezė H_0 bus priimta. Tikimybė α vadinama **reikšmingumo lygmeniu.** Jis parodo mūsų pasirinktą teisės suklysti laipsnį. Taisyklė, pagal kurią (remiantis imties duomenimis) hipotezė H_0 priimama arba atmetama, vadinama **statistiniu kriterijumi.**

Tikrindami hipotezę H_0, galime padaryti dviejų rūšių klaidas:

- atmesti hipotezę H_0, kai ji yra teisinga (pirmos rūšies klaida).
- priimti hipotezę H_0, kai ji yra klaidinga (antros rūšies klaida).

Pažymėkime α - pirmos rūšies klaidos tikimybę, o β - antros rūšies klaidos tikimybę. Galimi atvejai nurodyti lentelėje.

		Populiacija	
		***H_0* teisinga**	***H_0* klaidinga**
Sprendimas pagal imties duomenis	**Atmesti *H_0***	**I rūšies klaida** su tikimybe $\boldsymbol{\alpha}$ (reikšmingumo lygmuo)	Teisingas sprendimas su tikimybe **$1 - \boldsymbol{\beta}$** (kriterijaus galia)
	Neatmesti *H_0*	Teisingas sprendimas su tikimybe **$1 - \boldsymbol{\alpha}$**	**II rūšies klaida** su tikimybe $\boldsymbol{\beta}$

Tradicinis nematematinis pavyzdys, motyvuojantis pirmosios rūšies klaidos tikimybės fiksavimą, yra toks; teismas sprendžia, ar teisiamasis kaltas. Hipotezė H_0 - nekaltas, alternatyva H_a - kaltas. Pirmosios rūšies klaida – nekaltą pripažinti kaltu. Antrosios rūšies klaida – kaltą išteisinti. Manoma, kad pirmosios rūšies klaida pavojingesnė (beje, žinoma ir kitokių požiūrių). Todėl stengiamasi pirmosios rūšies klaidos tikimybę fiksuoti, t.y. imti ją pakankamai mažą.