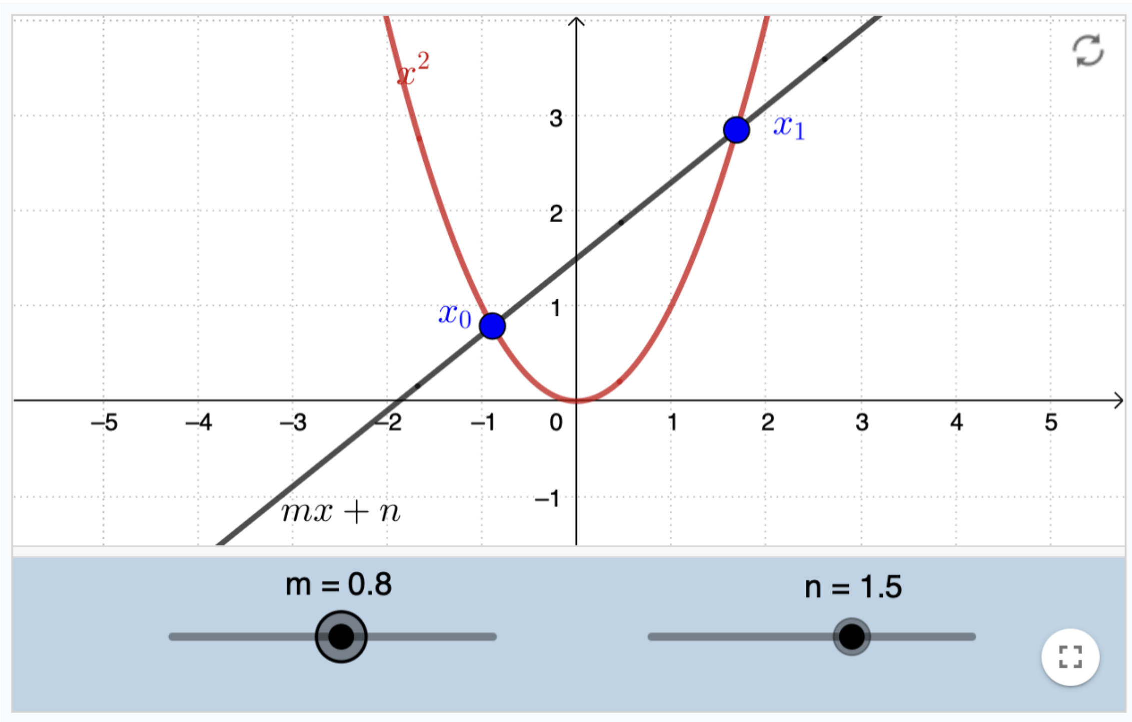
0 Введение

Геометрическая интерпретация квадратных и кубических уравнений. Рассмотрим уравнение вида $x^2 = kx + b$ (1). В школе мы научились находить решения такого уравнения, используя, например, известную формулу корней квадратного уравнения. Для нашего уравнения она имеет следующий вид:

$$x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4b}}{2} = \frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} + n}.$$

Также мы можем решить уравнение (1) графически: построим графики функций $y = x^2$ и $y - kx + b$ на одной координатной плоскости. Наглядно это можно увидеть с помощью интерактивной модели ниже. Изменим положение ползунков k и b и проанализируем, что происходит с решениями уравнения (точками пересечения графиков).



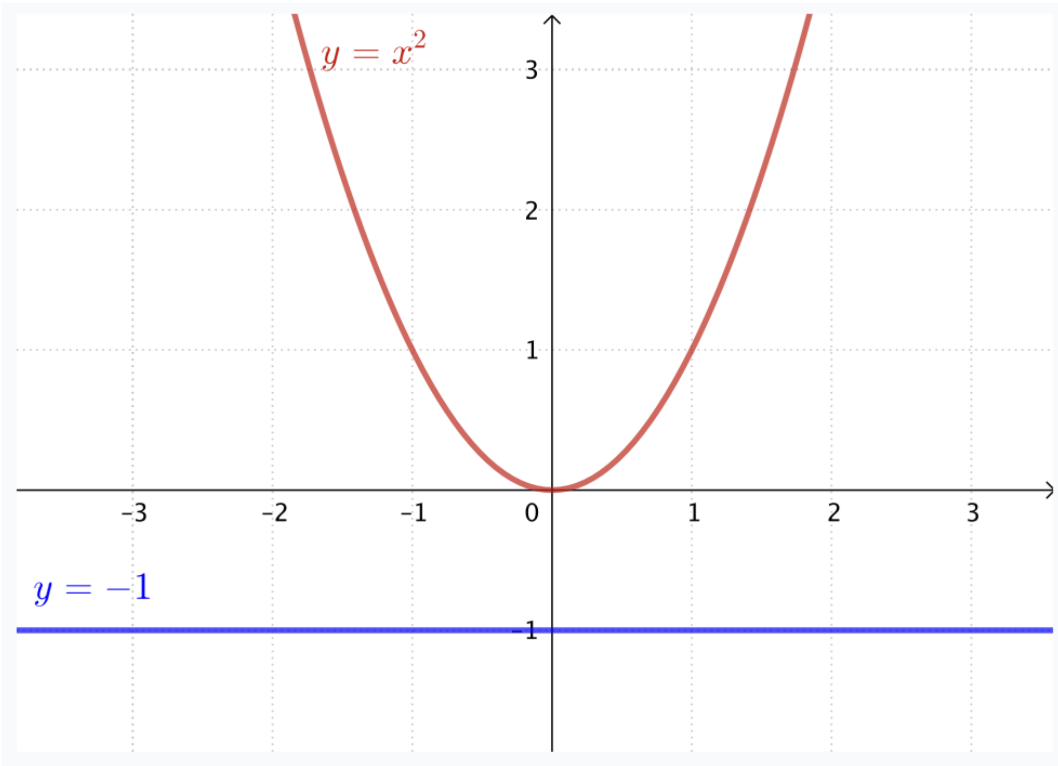
Мы увидели, что существует три случая:

1. Прямая и парабола имеют две точки пересечения, то есть уравнение имеет два решения.
2. Прямая является касательной к параболе, значит, уравнение имеет одно решение.
3. Прямая и парабола не имеют точек пересечения, значит, уравнение не имеет решений.

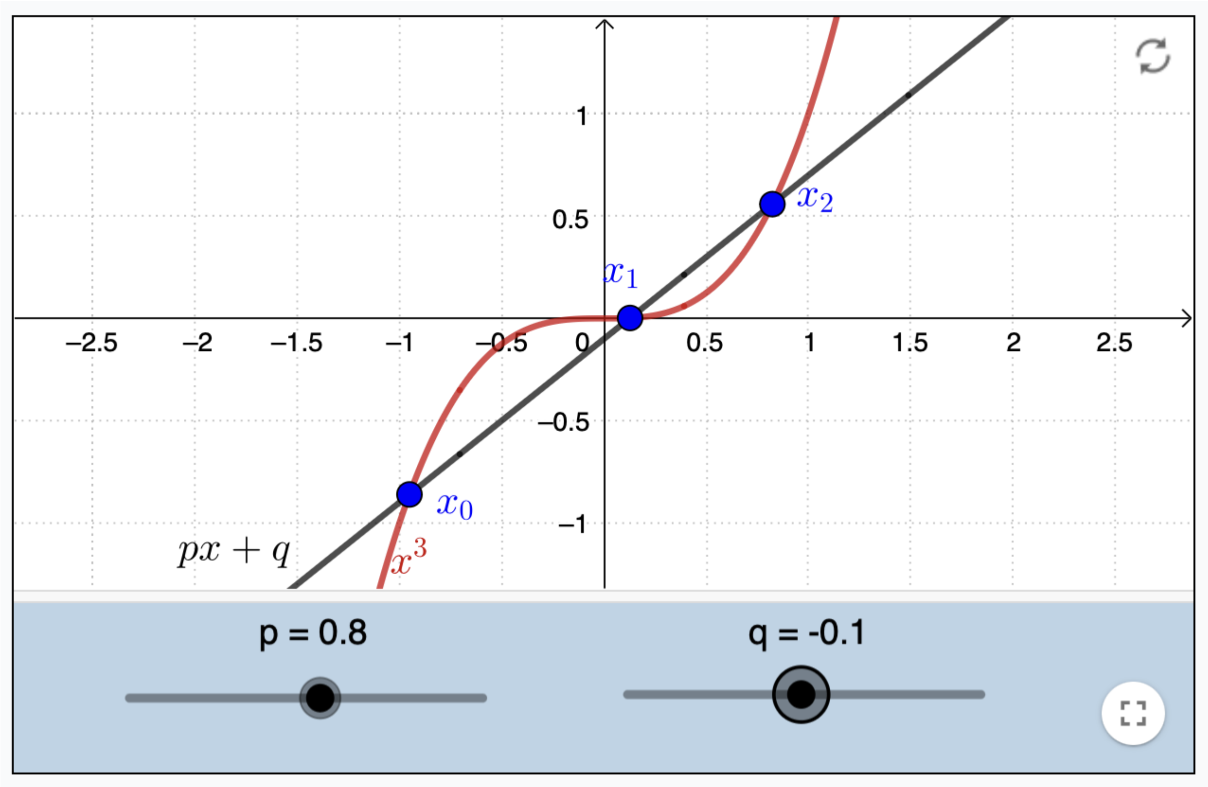
Удивительно, но это было известно еще с древних времен, даже без использования математических символов или компьютеров. На глиняных табличках, датируемых

примерно 2000 годом до н.э., нашли подтверждения того, что вавилонская цивилизация владела формулой, позволяющей ученым того времени решать квадратные уравнения. Поскольку отрицательные числа появились в математике позднее, вавилонские математики не рассматривали отрицательные решения квадратных уравнений.
Вернемся к решению уравнения (1) и рассмотрим случай при $k = 0$, $b = -1$. Используя формулу нахождения корней квадратного уравнения получим, что

$$x = \frac{0}{2} \pm \sqrt{\frac{0^2}{4} - 1} = \pm\sqrt{-1}.$$



В школе большинству из вас говорили, что квадратный корень из отрицательного числа извлечь нельзя. Тогда как мы можем интерпретировать данное значение? С геометрической точки зрения, парабола $y = x^2$ и прямая $y = -1$ не имеют точек пересечения, то есть и уравнение не имеет решений в действительных числах. Чаще всего утверждается, что «обнаружение» квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом (то есть в нашем случае таких, для которых $\frac{k^2}{4} + b < 0$) привело к появлению «нового» множества чисел – множества комплексных чисел $\mathbf{C}$, где число $i = \sqrt{-1}$ ($i^2 = -1$) получило название «мнимая единица». Однако, комплексные числа возникли в большей степени из-за необходимости решать именно кубические уравнения. Более того, во времена, когда появились кубические и квадратные уравнения, еще не было необходимости иметь решения для всех уравнений.
Так где же комплексные числа действительно приобрели значение? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим неполное кубическое уравнение вида $x^3 = px + q$. Геометрически это уравнение представляет собой пересечение кубической параболы $y = x^3$ с прямой $y = px + q$. Давайте понаблюдаем, что происходит при изменении p и q.



Мы видим, что вне зависимости от изменения параметров прямая имеет минимум одну точку пересечения с кубической параболой. Даже, если p и q — большие положительные или отрицательные числа, графики все равно имеют хотя бы одну точку пересечения, так как функция $y = x^3$ — непрерывно возрастает на всем отрезке $(-\infty; +\infty)$. Таким образом, данный случай отличается от квадратного уравнения (1), рассмотренного выше: мы не можем провести прямую, которая не будет пересекать кубическую параболу.

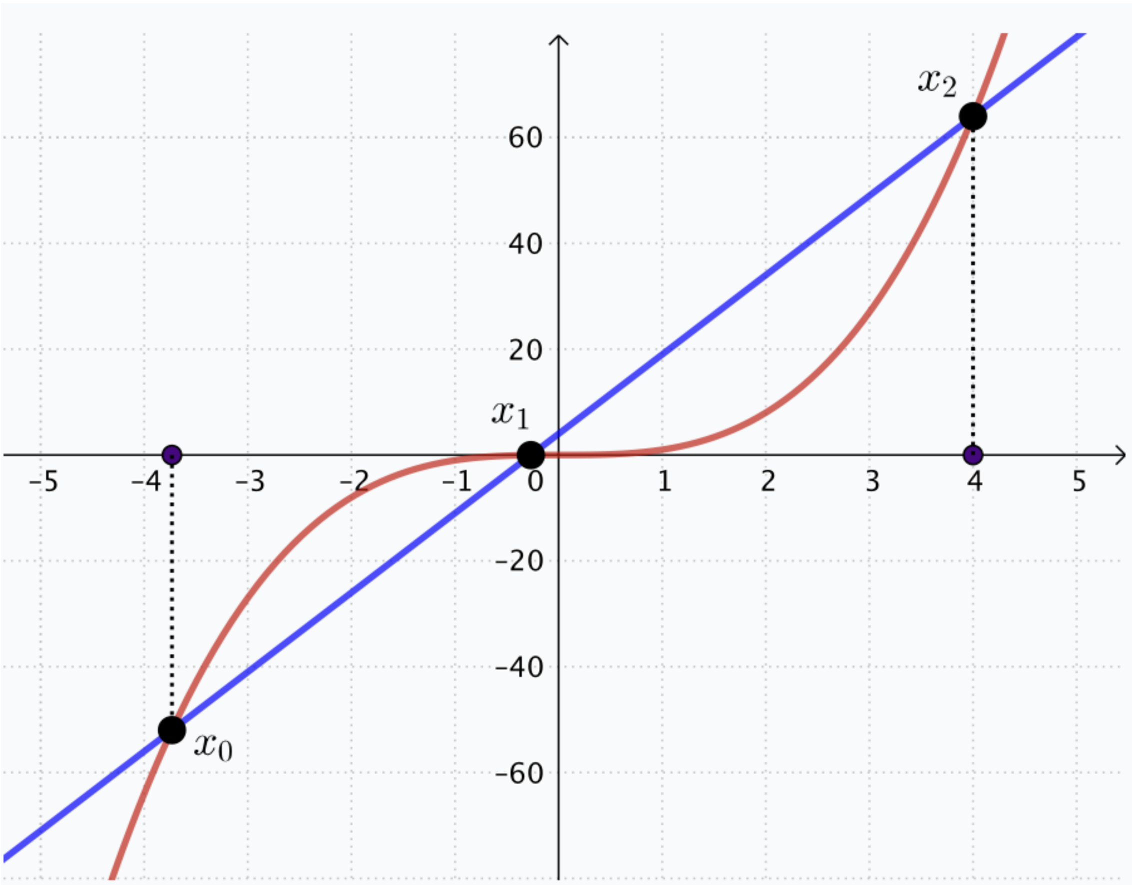
Решение кубических уравнений

Решение кубических уравнений было найдено в эпоху Возрождения итальянскими математиками. Сципион дель Ферро и Николо Тарталья, за которыми последовал Джероламо Кардано, показали, что неполное кубическое уравнение $x^3 = px + q$ имеет решение $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$. Данная формула известна как формула Кардана.

Упражнение. Решите уравнение $x^3 = 6x + 6$.

Происхождение комплексных чисел

Несколько лет спустя после открытия формулы Кардано итальянский инженер-архитектор Рафаэль Бомбелли обнаружил, что в этой формуле есть что-то странное и парадоксальное. Он рассмотрел уравнение $x^3 = 15x + 4$. Несложно увидеть, что $x = 4$ является корнем уравнения. (На самом деле, как мы видим на графике, уравнение имеет три корня, но Бомбелли не рассматривал отрицательные числа, поэтому и мы сейчас о них не говорим). Но, если мы применим формулу Кардана, получим, $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. С этим необычным значением столкнулся и Бомбелли. Если формула Кардана верна, это число должно быть равно 4. Однако, это предположение казалось ему не имеющим смысла, потому что внутри кубического корня извлекается квадратный корень из отрицательного числа, что было абсолютно невозможно в то время (а также и в наши дни над полем действительных чисел). В результате долгих размышлений Бомбелли увидел, что «странное» выражение на самом деле реально, но выражено в непривычной виде. Он предложил рассматривать $\sqrt{-1}$ как число и оперировать с ним, следуя арифметическим правилам, которые мы используем сегодня. Таким образом, он получил, что $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}$ и $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}$. Значит, $x = 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1} = 4$. Этот трюк работает не во всех случаях, однако он помог ученым приблизиться к пониманию комплексных чисел и научиться в какой-то мере оперировать ими.



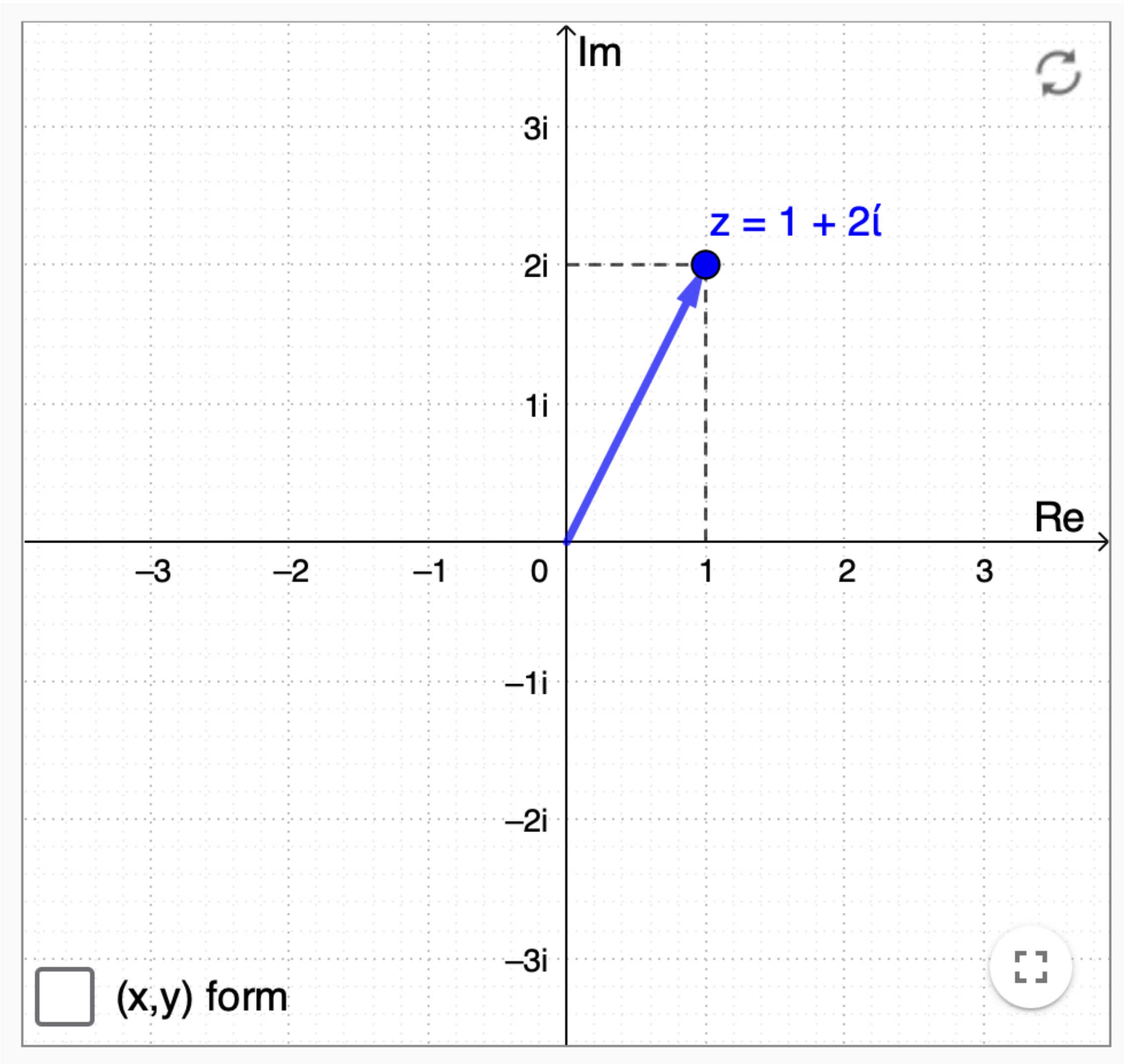
Формула Кардано заставила математиков столкнуться с извлечением квадратных корней из отрицательных чисел. Этот исторический прецедент – пример, опровергающий широко распространенное мнение о том, что математику «выдумали» математики. Чаще всего математика говорит сама за себя. С этого времени комплексные числа отчасти утратили свой мистический характер, хотя их полное признание пришло только в 1800-х годах.

Упражнение. Убедитесь, что $\sqrt[3]{2\pm\sqrt{-121}} = 2\pm\sqrt{-1}$.

1 Комплексные числа. Геометрическая интерпретация

Определение 1. *Комплексное число z называется выражение вида $z = a + bi$ (алгебраическая форма комплексного числа), где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2 = -1$.*

Числа a и b называют соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются $a = \mathrm{Re}\ z$, $b = \mathrm{Im}\ z$.
Комплексные числа, обозначаемые $\mathbf{C}$, расширяют концепцию одномерной числовой прямой до двумерной комплексной плоскости, используя горизонтальную ось для действительной части и вертикальную ось для мнимой части. Напрашивается аналогия с двумерными векторами. Комплексное число $a + bi$ может быть представлено точкой $(a; b)$ на комплексной плоскости или интерпретировано как двумерный вектор.



Определение 2. *Длина вектора называется модулем комплексного числа и обозначается $|z|$, так что $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.*

Определение 3. *Угол φ, образованный вектором с осью OX, называется аргументом комплексного числа z и обозначается $\varphi = Arg(z)$. Он определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π:*

$$Arg(z) = arg(z) + 2k\pi \ \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где $arg(z)$ есть главное значение $Arg(z)$, определяемое условиями

$$-\pi < arg(z) \leq \pi,$$

причем

$$arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{b}{a}\right), \text{ если } x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{b}{a}\right), \text{ если } x < 0,\ y \geq 0, \\ \text{-}\pi + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{b}{a}\right), \text{ если } x < 0,\ y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ если } x = 0,\ y > 0, \\ \text{-}\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ если } x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Когда $z \neq 0$, значение φ можно найти с помощью стандартной тригонометрии:

$$tg\varphi = \frac{b}{a}.$$

Также существует (и бывает полезно) другое представление комплексных чисел, а именно полярные координаты $(r;\varphi)$:

$$a = r\cos\varphi,\ \ b = r\sin\varphi \quad (r \geq 0)$$

Значит, комплексное число можно записать в виде:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
На данном этапе удобно ввести специальную экспоненциальную функцию. Полярная экспонента определяется следующим образом:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}.$$

Значит, комплексное число может быть записано в показательной форме $z = re^{i\varphi}$.

Определение 4. *Число $\overline{z} = a - bi$ называется комплексно-сопряженным числа z.*

Определение 5. *Два комплексных числа z_1 и z_2 равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а их аргументы либо равны, либо отличаются на величину, кратную 2π:*

$$|z_1| = |z_2|,\ \ Arg(z_1) = Arg(z_2) + 2\pi n \ \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Пусть даны два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$. Тогда:

1. $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$;
2. $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$;
3. $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$;
4. Следовательно, $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$;
5. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \overline{z}_2}{|z_2|^2} = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$ $(z_2 \neq 0)$.

   Действительная и мнимая часть комплексного числа z выражаются через сопряженные комплексные числа следующим образом:

$$Re\, z = \frac{\overline{z} + z}{2}, \;\; Im\, z = i\frac{\overline{z} - z}{2} = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Если записать комплексные числа z_1 и z_2 в тригонометрической форме, то их произведение будет иметь следующий вид:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|[cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

, то есть при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad Arg(z_1) + Arg(z_2).$$

Частное этих чисел в тригонометрической форме будет выглядеть так:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

$$\Longrightarrow |\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \;\; Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2).$$

Значит, при делении двух комплексных чисел их модулю делятся, а аргументы вычитаются.

Примеры решения задач

1. Показать, что $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

   Доказательство. По определению имеем $\overline{z_1 + z_2} = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) = (a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2) = \overline{z + 1} + \overline{z_2}$.

2. Найти действительные решения уравнения $(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i$.

   Решение. Выделим в левой части уравнения действительную и мнимую части: $(4x + 5y) + i(2x - 3y) = 13 + i$. Отсюда согласно определению равенства двух комплексных чисел получаем:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 13, \\ 2x - 3y = 1. \end{cases}$$

   Решая эту систему, находим

$$x = 2, \quad y = 1.$$

3. Найти модуль и аргумент комплексного числа

$$z = -\sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}.$$

Решение. Имеем

$$x = -\sin\frac{\pi}{8} < 0, \quad y = -\cos\frac{\pi}{8} < 0.$$

Тогда,

$$arg(z) = -\pi + arctg\left(ctg\frac{\pi}{8}\right) = -\pi + arctg\left[tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right] = -\pi + arctg\left(tg\frac{3}{8}\pi\right) =$$

$$= -\pi + \frac{3}{8}\pi = -\frac{5}{8}\pi.$$

Следовательно,

$$Arg(z) = -\frac{5}{8}\pi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots), \quad |z| = \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}} = 1.$$

4. Записать в тригонометрической форме комплексное число $z = -1 - i\sqrt{3}$.

Решение.

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2; \quad tg\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}, \;\; \varphi = -\frac{2}{3}\pi.$$

Следовательно,

$$-1 - i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right].$$

5. Найти все комплексные числа $z \neq 0$, удовлетворяющие условию $z^{n-1} = \overline{z}$.

Решение. Пусть $z = pe^{i\varphi}$. Тогда $\bar{z} = \rho e^{-i\varphi}$. Согласно условию,

$$\rho^{n-1}e^{i(n-1)\varphi} = \rho e^{-i\varphi} \text{ или } \rho^{n-2}e^{in\varphi} = 1,$$

откуда $\rho^{n-2} = 1$, т. е. $\rho = 1$, и in $\varphi = 2k\pi i$, т.е. $\varphi = \frac{2k\pi}{n}(k = 0{,}1{,}2, \ldots, n-1)$. Следовательно,

$$z_k = e^{i2\pi k/n} \quad (k = 0{,}1{,}2, \ldots, n-1).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите утверждение: $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

2. Докажите утверждение: $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.

3. Докажите утверждение: $\overline{\overline{z_1} - \overline{z_2}} = z_1 - z_2$.

4. Найдите действительные решения уравнения: $(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 6i$.

5. Найдите действительные решения уравнения: $(3x-i)(2+i)+(x-iy)(1+2i)=5+6i$.

6. Найдите действительные решения уравнения: $\dfrac{1}{z-i}+\dfrac{2+i}{1+i}=\sqrt{2}$, где $z=x+iy$.

7. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z=4+3i$.

8. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z=-\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}$.

9. Представьте число в тригонометрической форме -2.

10. Представьте число в тригонометрической форме $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

11. Представьте число в тригонометрической форме $\dfrac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\alpha-i\sin\alpha} \quad \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

12. Представьте число в показательной форме -2.

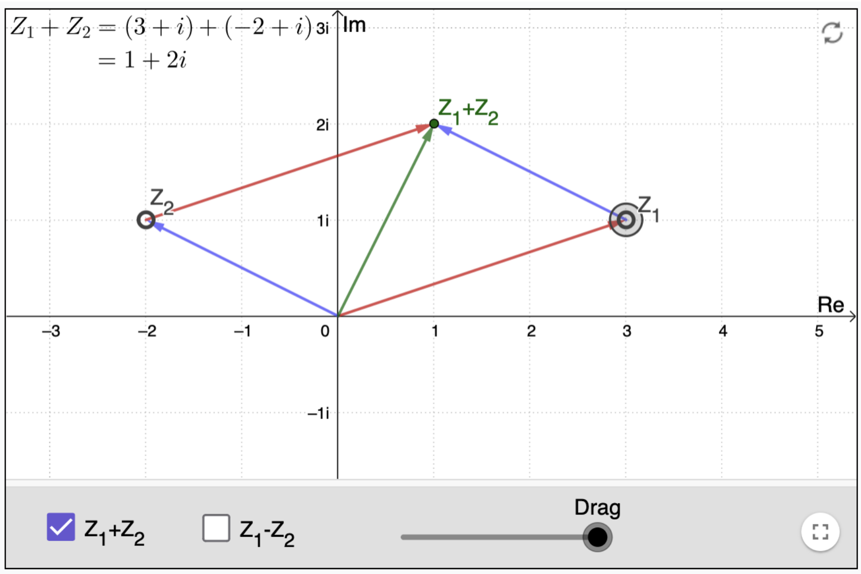
13. Представьте число в показательной форме i.

14. Представьте число в показательной форме $5+3i$.

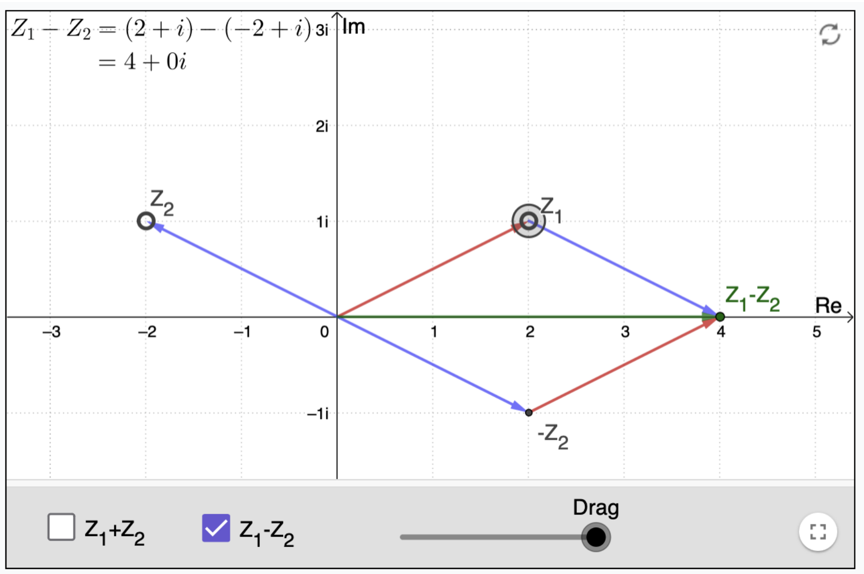
2 Алгебраические операции над комплексными числами

Геометрическая интерпретация сложения и вычитания комплексных чисел

Геометрически сложение двух комплексных чисел z_1 и z_2 может быть визуализирована как сложение векторов с помощью правила параллелограмма. Векторная сумма $z_1 z_2$ представлена диагональю параллелограмма, образованного двумя исходными векторами.



Самый простой способ представить разницу $z_1 z_2$ – это мыслить в терминах добавления отрицательного (противоположного по направлению) вектора $z_1 + (-z_2)$.



Упражнение. Какой может быть геометрическая интерпретация сложения 3 комплексных чисел? А n комплексных чисел?

Геометрическая интерпретация сложения и вычитания комплексных чисел

На прошлой лекции мы определили умножение двух комплексных чисел z_1 и z_2 следующим образом:

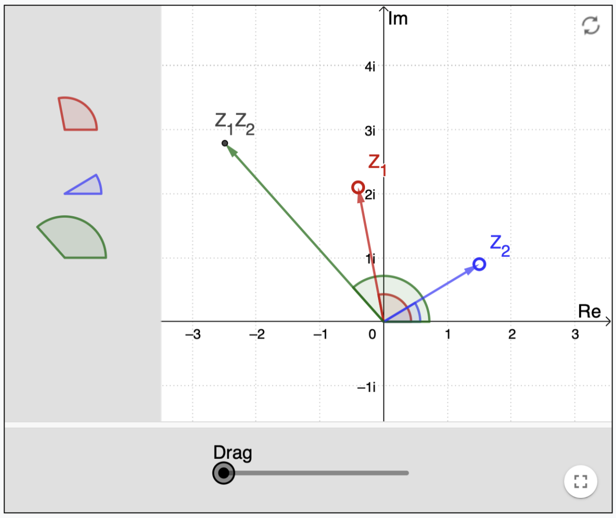
$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

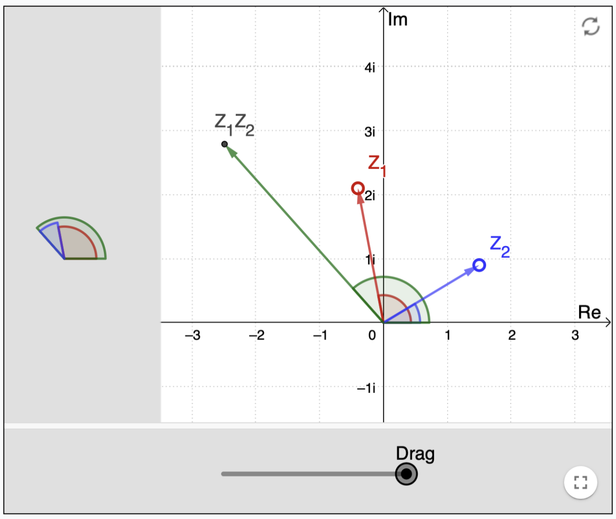
Для того, чтобы мы могли оценить, что происходит с числами геометрически, для начала нам необходимо перейти к полярным координатам:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

$$\Longrightarrow z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] =$$
$$= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Таким образом, число $z_1 z_2$ имеет модуль $r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$ и аргумент $\varphi_1 + \varphi_2$.





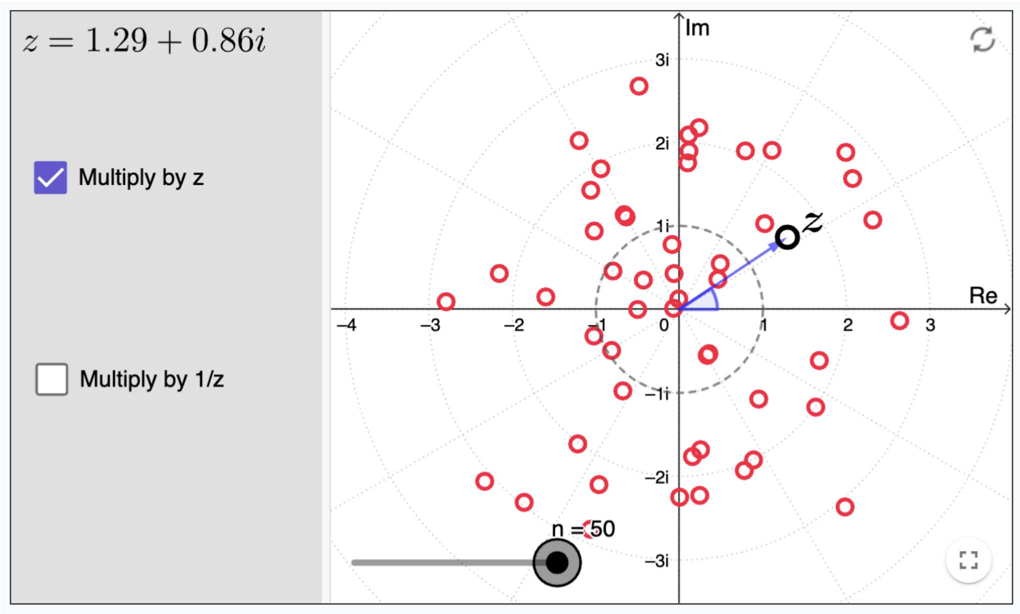
Упражнение. Какой будет геометрическая интерпретация деления двух комплексных чисел?

Умножение комплексных чисел как растяжение (сжатие) и вращение

На рисунке ниже случайным образом определяется набор точек на комплексной плоскости. Затем каждая точка умножается на заданное комплексное число z. Изменяя положение числа z, проанализируем:

1) что происходит, когда z находится внутри и снаружи единичного круга;

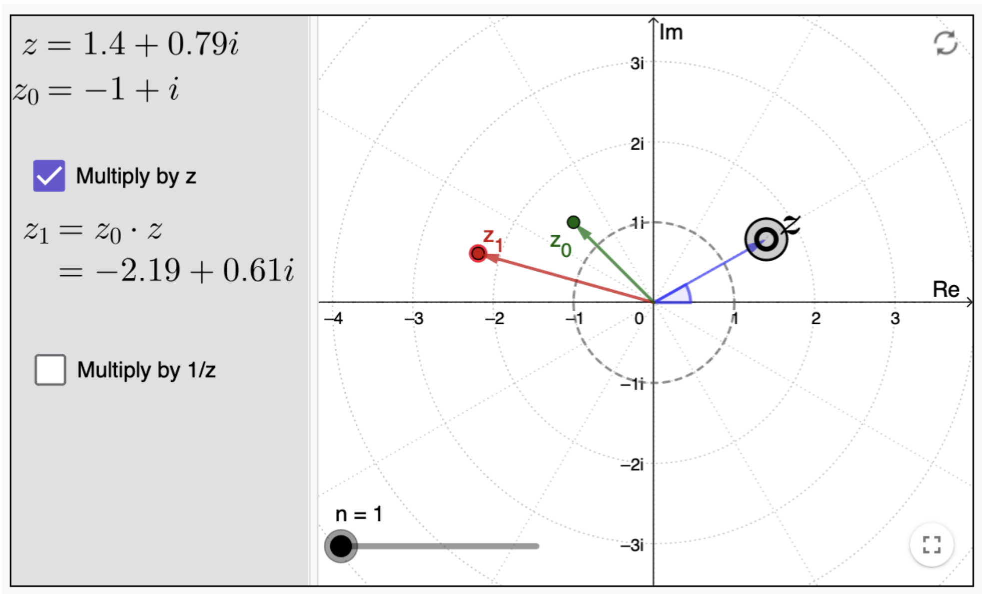
2) что произойдет, если z перемещается только по единичному кругу?



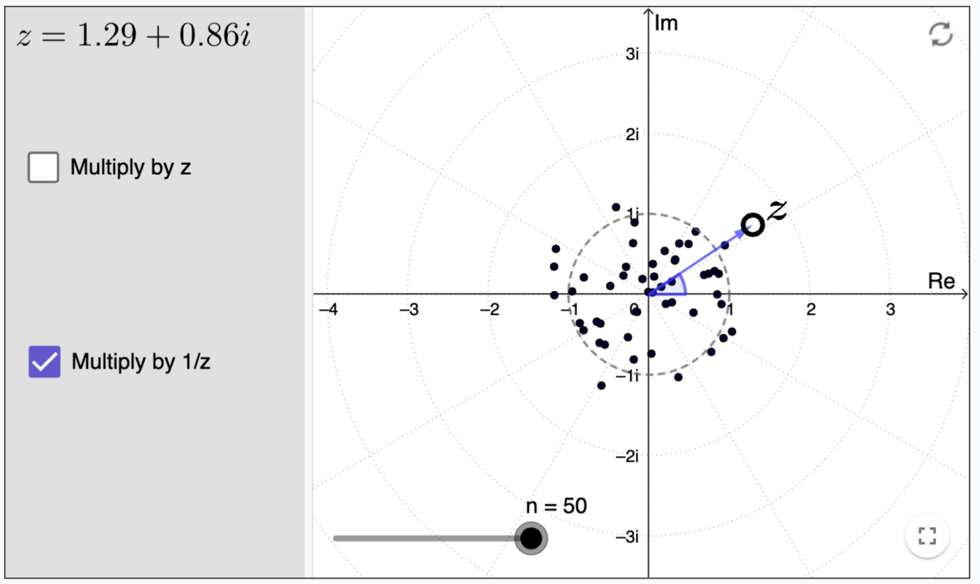
Мы увидели, что геометрическая интерпретация умножения комплексных чисел заключается в растяжении (или сжатии) и вращении векторов на плоскости.

Если мы установим n $= 1$, то будут отображаются три комплексных числа: z_0, z и $z_1 = z_0 \cdot z$, представленных в виде векторов. Если z_0 и z отличны от нуля, то модуль z_1 равен $|z_0 \cdot z|$, а аргумент z_1 равен $Arg(z_0 + z)$.

Если $|z| > 1$, то мы имеем дело с растяжением, если $|z| < 1$, то это случай сжатия.



Аналогично мы можем рассмотреть и умножение на $\frac{1}{z}$, то есть деление на z.



Степень комплексного числа. Корень $n-$ой степени из комплексного числа

Возведение комплексного числа z в натуральную степень производится по формуле:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi,$$

то есть $|z^n| = |z|^n$, $Arg(z^n) = nArg(z) + 2\pi k \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \dots)$.
Отсюда следует формула Муавра:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos{(n\varphi)} + i\sin{(n\varphi)}$$

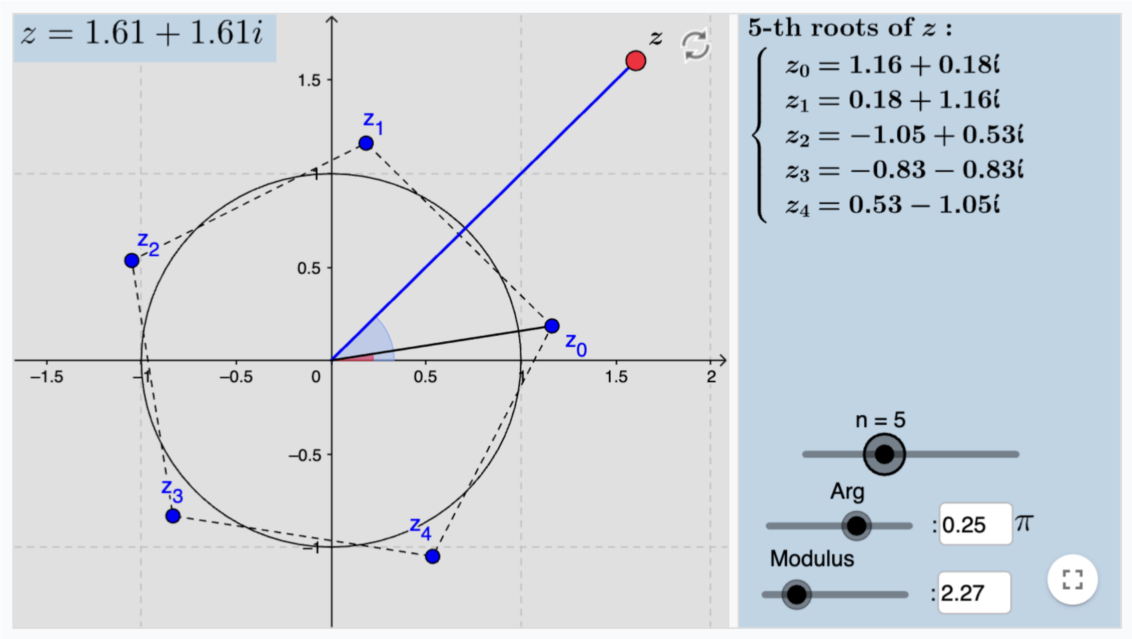
.

Корень $n-$ой степени из комплексного числа z имеет n различных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, $\varphi = arg(z)$.
Точки, соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного $n-$угольника, вписанного в окружность радиуса $R = \sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.
Корень $n-$ой степени из действительного числа a также имеет n различных значений. Среди этих значений действительных будет два, одно или ни одного в зависимости от четности или нечетности n и знака числа a.
Также, используя формулу Эйлера ($e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$), комплексное число z может быть записано в экспоненциальной форме как $z = r\ \exp{(i\varphi)}$.
Таким образом, корень $n-$ой степени из ненулевого комплексного числа z также может быть выражен в следующей форме:

$$z = \sqrt[n]{\exp i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)},$$



где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Примеры решения задач

1. Вычислите $(-1 + i\sqrt{3})^{60}$.

   Решение. Представим число в тригонометрической форме:

   $$-1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right).$$

   Применяя приведенную формулу возведения в степень, получим:

   $$(-1+i\sqrt{3})^{60} = 2^{60}\left(\cos\left(60\cdot\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(60\cdot\frac{2}{3}\pi\right)\right) = 2^{60}(\cos(40\pi)+i\sin(40\pi)) = 2^{60}.$$

2. Доказать, что многочлен $f(x) = (cos\alpha + x\sin\alpha)^n - \cos n\alpha - x\sin n\alpha$ делится на x^2+1.

   Решение. $x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$, следовательно, по формуле Муавра:

   $f(i) = (cos\alpha + i\sin\alpha)^n - \cos n\alpha - i\sin n\alpha = \cos n\alpha + i\sin n\alpha - \cos n\alpha - i\sin n\alpha = 0.$

   Аналогично, $f(-i) = 0$. Значит, $f(x)$ делится на x^2+1.

3. Найдите все значения $\sqrt[4]{1-i}$.

   Решение. Приведем комплексное число $1-i$ к тригонометрическому виду:

   $$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

   Следовательно,

   $$\sqrt[4]{1-i} = \sqrt[8]{2}\left(cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4} + isin\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4}\right).$$

полагая $k = 0, 1, 2, 3$, найдем

$$(k=0)\ \sqrt[4]{1-i} = \sqrt[8]{2}\left(cos\frac{\pi}{16} - isin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$(k=1)\ \sqrt[4]{1-i} = \sqrt[8]{2}\left(cos\frac{7\pi}{16} + isin\frac{7\pi}{16}\right),$$

$$(k=2)\ \sqrt[4]{1-i} = \sqrt[8]{2}\left(cos\frac{15\pi}{16} + isin\frac{15\pi}{16}\right),$$

$$(k=3)\ \sqrt[4]{1-i} = \sqrt[8]{2}\left(cos\frac{23\pi}{16} + isin\frac{23\pi}{16}\right).$$

4. Какое множество точек на плоскости комплексного переменного z определяется условием $Im\ z^2 > 2$?

   Решение. Пусть $z = a + bi$, тогда $z^2 = (a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + i2ab$. Следовательно, $Im\ z^2 = 2ab$. По условию $2ab > 2$ или $ab > 1$. Это неравенство определяет множество точек в первом и третьем квадрантах, соотверственно над и под гиперболой $ab = 1$.

5. Какая кривая определяется уравнением $Re\left(\frac{1}{z}\right) = 0{,}25$?

   Решение. Пусть $z = a + bi$, тогда

$$Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}}}{2} = \frac{z + \overline{z}}{2z\overline{z}} = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

   По условию:

$$\frac{a}{a^2 + b^2} = \frac{1}{4} \Longleftrightarrow a^2 + b^2 - 4a = 0.$$

   Значит, это окружность $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

6. Какая прямая на плоскости XOY определяется уравнением $z\overline{z} + i(z - \overline{z}) - 2 = 0$?

   Решение. Пусть $z = a + bi$, тогда $\overline{z} = a - bi$, $z\overline{z} = a^2 + b^2$. Тогда уравнение примет вид:

$$a^2 + b^2 - 2b - 2 = 0$$

$$a^2 + (b - 1)^2 = 3$$

   Это окружность радиуса $R = \sqrt{3}$ с центром в точке $(0, 1)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите действительные корни уравнения $\cos x + i \sin x = 0{,}5 + 0{,}75i$.
2. Вычислить $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{40}$.
3. Вычислить $(2 - 2i)^7$.
4. Вычислить $(\sqrt{3} - 3i)^6$.

5. Вычислить $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^8$.

6. Найдите значения корня $\sqrt[3]{i}$.

7. Найдите значения корня $\sqrt[3]{-1+i}$.

8. Найдите множество точек плоскости комплексного переменного z, которое определяется заданным условием $|z-5i|=8$.

9. Найдите множество точек плоскости комплексного переменного z, которое определяется заданным условием $|z-1|<|z-i|$.

10. Какая линия определяется уравнением $Im\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{1}{2}$.

11. Какая линия определяется уравнением $z^2+\overline{z}^2=1$.

12. Какая линия определяется уравнением $3|z|-Re\ z=12$.

13. Написать в комплексной форме уравнение окружности $x^2+y^2+2x=0$.

14. Решите уравнение $z^3+3z^2+3z+3=0$.

15. Решите уравнение $z^4-4z^3+6z^2-4z-15=0$.

16. В какой вектор перейдет вектор $-\sqrt{3}-i$ после поворота на $120°$?

17. Найдите угол, на который нужно повернуть вектор $3\sqrt{2}+i2\sqrt{2}$, чтобы получить вектор $-5+i$.

18. Решите уравнение $(x+i)^n-(x-i)^n=0$, где x – действительное число.

19. Найдите сумму $\cos x+cos(2x)+\cdots+cos(nx)$.

3 Комплексная экспонента

Сложная функция
Пусть S – множество комплексных чисел. Говорят, что функция f определена на S, если каждому комплексному числу $z \in S$ присваивается комплексное число w. Число w называется значением функции f в z и обозначается $f(z)$: $w = f(z)$. Множество S называется областью определения функции f.
Таким образом, функция $w = f(z)$ осуществляет отображение точек комплексной плоскости z на соответствующие точки комплексной плоскости w.

Определение 6. *Если каждой точке $z \in S$ поставлено в соответствие только одно значение w, то функция, определенная в области S, является однозначной. Если каждой точке $z \in S$ поставлено в соответствие несколько значений w, то функция является многозначной.*

Многозначную функцию можно рассматривать как совокупность однозначных функций, каждый элемент которой называется ветвью функции. Обычно мы рассматриваем один конкретный элемент как основную ветвь многозначной функции, а значение функции, соответствующее этой ветви, – как основное значение.
Например, функция $w = z^2$ является однозначной. С другой стороны, если $w = z^{\frac{1}{2}}$, то каждому значению z соответствует два значения w. Значит, эта функция является многозначной (в данном случает двузначной).
Пусть $z = a + bi$ и $w = u + iv$, тогда зависимость $w = f(z)$ между комплексной функцией w и комплексной переменной z может быть описана с помощью двух действительных фуункций u и v действительных переменных a и b: $u = u(a,b)$, $v = v(a,b)$. То есть $f(z) = u(a,b) + iv(a,b)$.
Также данное равенство можно записать, используя полярные координаты. Тогда $u + iv = f(re^{i\varphi})$ и $f(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$.
Рассмотрим другой пример: если $f(z) = z^2$, то $f(a + bi) = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$. Следовательно,

$$u(a,b) = a^2 - b^2 \quad \text{и} \quad v(a,b) = 2ab.$$

В терминах полярных координат это будет выглядеть следующим образом:

$$u(r,\varphi) = r^2\cos(2\varphi) \quad \text{и} \quad v(r,\varphi) = r^2\sin(2\varphi).$$

Упражнение. Что происходит, когда функция v всегда имеет нулевое значение?
Примером сложной функции является полиномиальная функция:

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

где $a_n, \ldots, a_0$ – комплексные константы (причем, $a \neq 0$) и n является положительным целым числом, называемым степенью многочлена $p(z)$.
Также примером сложной функции являются и дробно-рациональные функции:

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0},$$

где $p(z)$ и $q(z)$ – многочлены и $q(z) \neq 0$.

Экспоненциальная функция как пример сложной функции
Если $z = a + bi$, экспоненциальная функция $e^z = e^a e^{bi}$. Так как $e^{ib} = \cos b + i \sin b$, то $e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$.
Функция e^z является показательной и определяется и определяется как сумма абсолютно сходящегося на всей комплексной плоскости степенного ряда:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} \ldots.$$

Комплексная экспонента обладает следующими свойствами:

1. $e^{a+i\cdot 0} = e^a$ – данное свойство показывает, что «новое» определение экспоненты, примененное для действительных чисел, совпадает со «старым» (известным нам еще со школы);

2. для любого $z \in \mathbb{C}:\ e^z \neq 0$;

3. для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}:\ e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2 x}$.
   В частности, 1) $e^z \cdot e^{-z} = e^0 \iff e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$;
   2) $e^z \cdot e^z = e^{2z} = (e^z)^2$.

4. $e^{z+2\pi k i} = e^z \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, то есть e^z является периодической функцией с периодом $2\pi i$.

Далее рассмотрим тригонометрические функции $cosz$ и $sinz$. Определим их через степенные ряды, которые абсолютно сходятся при любом комплексном значении z:

$$sinz = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

$$cosz = z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots.$$

Функции $sinz$ и $cosz$ – периодические с действительным периодом 2π и имеют только действительные нули $z = k\pi$ и $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ соответственно, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.
Для функций e^z, $sinz$ и $cosz$ имеют место формулы Эйлера

$$e^{iz} = cosz + isinz, \ \ e^{-iz} = cosz - isinz,$$

следовательно,

$$cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \ \ sinz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Используя знакомые нам тригонометрические соотношения, определим функции tgz и $ctgz$:

$$tgz = \frac{sinz}{cosz}, \ \ ctgz = \frac{cosz}{sinz}.$$

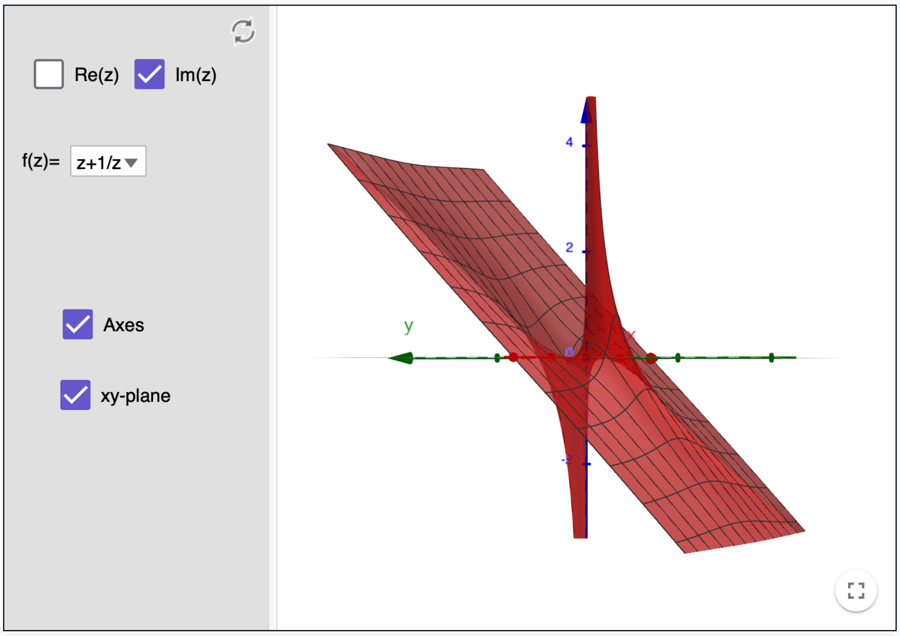
Гиперболические синус и косинус комплексной переменной определяются так, как они определены и для действительной переменной:

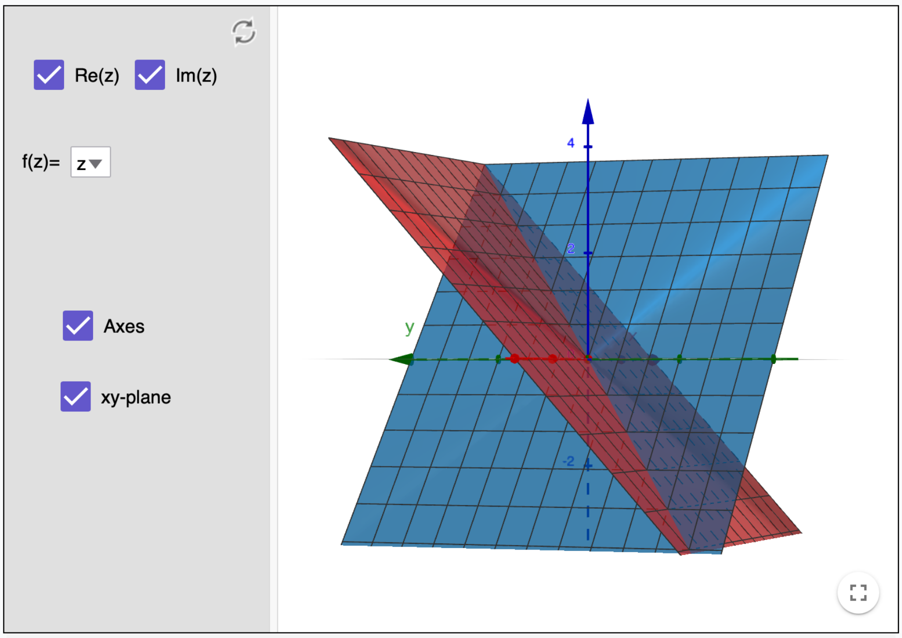
$$sinh(z) = sh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \ \text{ и } \ cosh(z) = ch(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

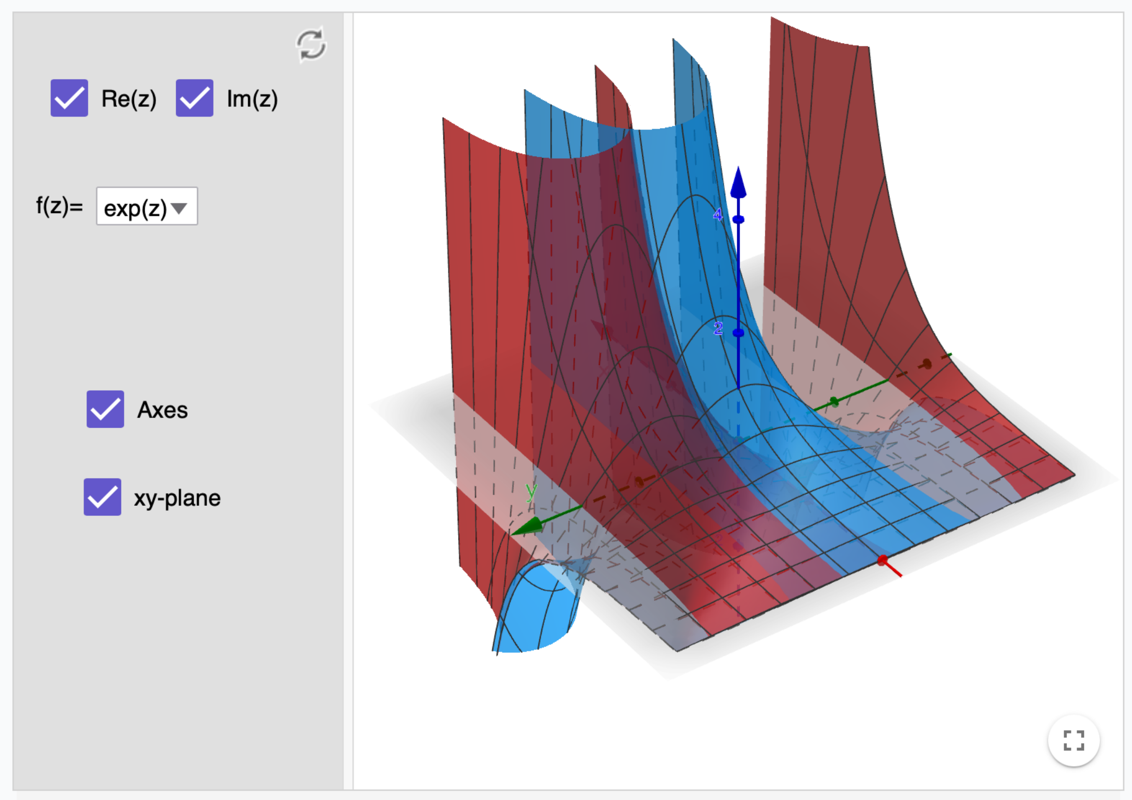
Остальные гиперболические функции определяются в терминах гиперболических синуса и косинуса с соотношениями:

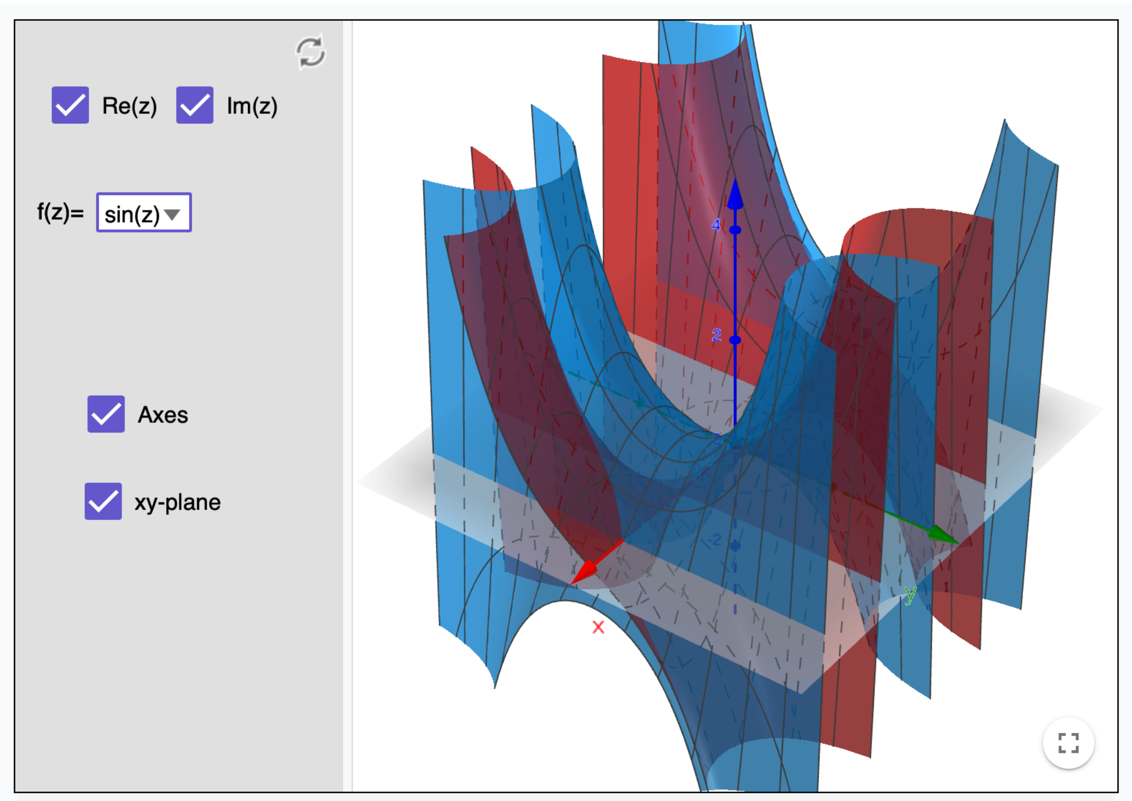
$$tgh(z) = th(z) = \frac{sh(z)}{ch(z)} \quad \text{и} \quad ctgh(z) = cth(z) = \frac{ch(z)}{sh(z)}.$$

Ниже приведены динамические чертежи, с помощью которых можно изучить представление действительной и мнимой части некоторых сложных функций:






Re(z)
Im(z)
f(z)=
exp(z)
Axes
xy-plane


Re(z)
Im(z)
f(z)=
sin(z)
Axes
xy-plane

Примеры решения задач

1. Найти действительную и мнимую части функции $w = z^3 - i\overline{z}$.

   Решение. Полагая, что $z = a + bi$ и $w = u + iv$, получим:

   $$u + iv = (a + bi)^3 - i(a - bi) = (a^3 - 3ab^2 - b) + i(3a^2b - b^3 - a).$$

   Следовательно,

   $$w = z^3 - i\overline{z} \iff \begin{cases} u = a^3 - 3ab^2 - b, \\ v = 3a^2b - b^3 - a. \end{cases}$$

2. В какую кривую отображается единичная окружность $|z| = 1$ с помощью функции $w = z^2$?

   Решение. Так как по условия $|z| = 1$, то $|w| = |z|^2 = 1$. Значит, образом окружности $|z| = 1$ в плоскости z является окружность, $|w| = 1$ в плоскости w, проходимая дважды. Это следует из того, что поскольку $w = z^2$, то $Arg(w) = 2Arg(z) + 2\pi k$, так как когда точка z описывает полную окружность $|z| = 1$, то ее образ описывает окружность $|w| = 1$ дважды.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти действительную и мнимую части функции $w = \overline{z} - iz^2$.
2. Найти действительную и мнимую части функции $w = i - z^3$.
3. Найти действительную и мнимую части функции $w = \dfrac{iz+1}{1+\overline{z}}$.
4. Установить, на какую линию плоскости w с помощью функции $w = \dfrac{1}{z}$ отображается линия плоскости z $|z| = \dfrac{1}{2}$.
5. Установить, на какую линию плоскости w с помощью функции $w = \dfrac{1}{z}$ отображается линия плоскости z $Re\, z = Im\, z$.
6. Найти образы координатных осей OX и OY при отображении $w = \dfrac{z+1}{z-1}$.
7. Выделить действительную и мнимую части у функции $w = z + z^2$.
8. Выделить действительную и мнимую части у функции $w = e^{-z}$.
9. Выделить действительную и мнимую части у функции $w = sinz$.
10. Найдите значение модуля и аргумента функции $w = shz$, $z_0 = 1 + i\dfrac{\pi}{2}$.
11. Найдите значение модуля и аргумента функции $w = ze^z$, $z_0 = \pi i$.
12. Записать в алгебраическом виде комплексное число $e^{i\pi/4}$.

13. Решите уравнение $e^{-z} + 1 = 0$.

14. Решите уравнение $e^{z} + i = 0$.

15. Решите уравнение $e^{ix} = cos(\pi x)$.

16. Решите уравнение $e^{2z} + 2e^{z} - 3 = 0$.

4 Комплексный логарифм

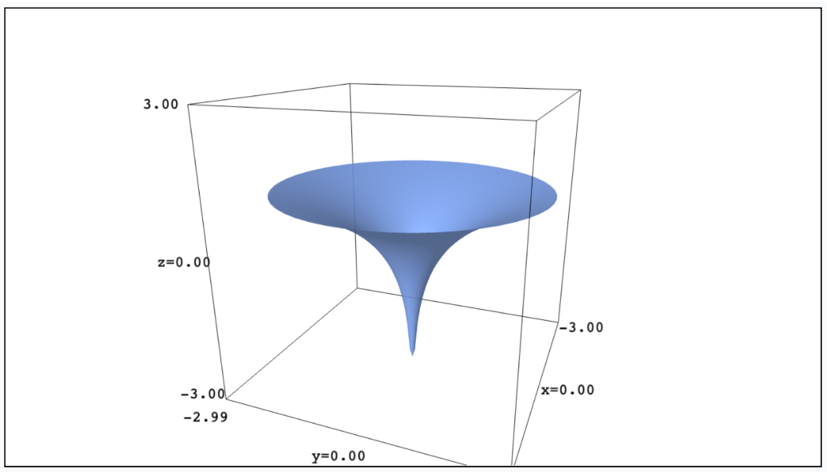
Комплексный логарифм является комплексным расширением привычного нам натурального логарифма. В терминах полярных координат $z = re^{i\varphi}$ комплексный логарифм имеет следующий вид:

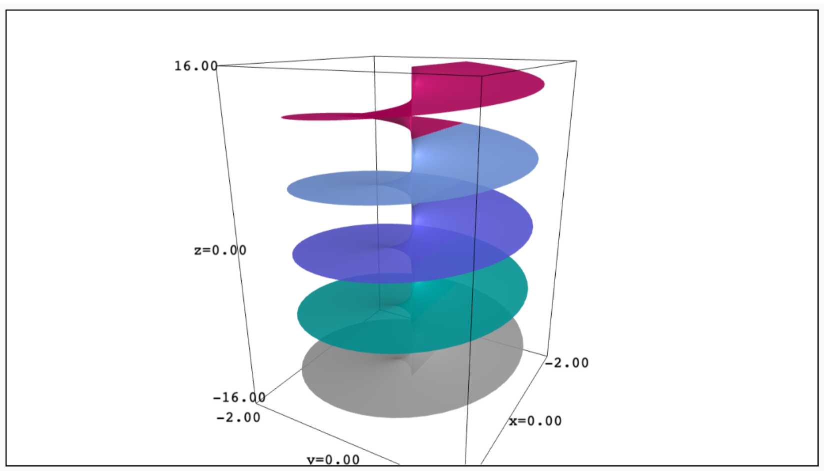
$$\ln z = \ln\left(re^{i\varphi}\right) = \ln r + \ln e^{i\varphi} = \ln r + i\varphi.$$

Многозначная логарифмическая функция ненулевой комплексной переменной z определяется формулой: $Lnz = \ln z + 2k\pi i$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.
Некоторые основные свойства логарифма:

1. $\ln z_1 z_2 = \ln z_1 + \ln z_2$;
2. $\ln \dfrac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2$.

На рисунках ниже показаны действительная и мнимая часть логарифмической функции. Это помогает нам наглядно увидеть многозначную природу функции.





Примеры решения задач

1. Вычислите логарифм числа $z = -1 - \sqrt{3}i$.

   Решение. Если $z = -1 - \sqrt{3}i$, тогда $r = 2$, $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$. Следовательно,
$$\ln(-1 - \sqrt{3}i) = \ln 2 + i\left(-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right) = \ln 2 + 2\left(n - \frac{1}{3}\right)\pi i, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

2. Вычислить e^{Lnz} и Lne^z при $z = 4i$.

   Решение. $Lne^z = Ln(e^{4i}) = 4i + 2n\pi i$, где $n \in \mathbb{Z}$. Но с другой стороны, $e^{Lnz} = e^{Ln4i} = 4i$.

3. Найдите значение модуля функции $w = sinz$ в точке $z = \pi + i\ln(2 + \sqrt{5})$.

   Решение. Пусть $z = a + bi$, тогда $w = sin(a) \cdot ch(b) + i\, sh(b) \cdot cos(a)$.
   Модуль функции $sinz$ равен:

   $|sinz| = \sqrt{sin^2 a \cdot ch^2 b + sh^2 b \cdot cos^2 a} = \sqrt{sin^2 a \cdot ch^2 b + sh^2 b(1 - sin^2 a)} = \sqrt{sin^2 a + sh^2 b}$.

   Так как $z = \pi + i\ln(2 + \sqrt{5})$, то

   $$|sin(\pi + i\ln(2 + \sqrt{5}))| = sh(\ln(2 + \sqrt{5})) = \frac{e^{\ln 2 + \sqrt{5}} - e^{-\ln 2 + \sqrt{5}}}{2} = \frac{2 + \sqrt{5} - \frac{1}{2 + \sqrt{5}}}{2} = 2.$$

   Этот пример показывает, что тригонометрическая функция $sinz$ в комплексной области может принимать значения, по модулю большие 1.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите значение модуля и аргумента функции $w = cosz$, $z_0 = \dfrac{\pi}{2} + i\ln 2$.
2. Найдите значение модуля и аргумента функции $w = ch^2 z$, $z_0 = i\ln 3$.
3. Найдите логарифм e.
4. Найдите логарифм i.
5. Найдите логарифм $3 - 2i$.
6. Вычислите 1^i.
7. Вычислите $(-1)^{\sqrt{2}}$.
8. Вычислите $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)^{1+i}$.
9. Найдите модуль и аргумент 10^i.
10. Записать в алгебраическом виде комплексное число $\ln(1 - i)$.
11. Решите уравнение $\ln(z + i) = 0$.
12. Решите уравнение $\ln(i - z) = 1$.

5 Функции комплексного переменного. Предел функции комплексного переменного

Пусть дана последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$$

Определение 7. *Комплексное число a называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если для любого положительного числа ε можно указать такой номер $N = N(\varepsilon)$, начиная с которого все элементы z_n этой последовательности удовлетворяют неравенству*

$$|z_n - a| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant N(\varepsilon).$$

Последовательность $\{z_n\}$, имеющая предел a, называется сходящейся к числу a, что записывается в виде $\lim_{n\to\infty} z_n = a$.
Каждой последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ соответствуют две последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, где $z_n = x_n + iy_n, n = 1,2,\ldots$.

Теорема 1. Последовательность $\{z_n = x_n + iy_n\}$ сходится к числу $a = \alpha + i\beta$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \beta$$

Определение 8. *Последовательность $\{z_n\}$ называется ограниченной, если существует положительное число M такое, что для всех элементов z_n этой последовательности выполняется неравенство $|z_n| \leqslant M$.*

Теорема 2. Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Свойства сходящихся последовательностей комплексных чисел:
Если $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} \tau_n = b$, то

1. $\lim_{n\to\infty} (z_n \pm \tau_n) = a \pm b$;
2. $\lim_{n\to\infty} (z_n\tau_n) = ab$;
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{\tau_n} = \frac{a}{b} \quad (\tau_n \neq 0, b \neq 0)$.

Достаточное условие сходимости последовательности комплексных чисел
Пусть $z_n = \rho_n e^{i\varphi_n}$, где $\rho_n = |z_n|, \varphi_n = \arg z_n$. Тогда, если $\lim_{n\to\infty} \rho_n = \rho_0$, $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi_0$, то $\lim_{n\to\infty} z_n = \rho_0 e^{i\varphi_0}$.

Определение 9. *Пусть имеем последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел*

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots.$$

Если для любого сколь угодно большого числа $M > 0$ существует натуральное число N такое, что все члены z_n последовательности с номерами $n > N$ удовлетворяют неравенству $|z_n| > M$, то говорлтт, что последовательность $\{z_n\}$ сходится к бесконечно удаленной точке или, просто, к бесконечности, и пишут $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$.

Пополняя плоскость комплексного переменного так введенной бесконечно удаленной точкой $z = \infty$, получаем расширенную плоскость комплексного переменного.

Определение 10. *Окрестностью бесконечно удаленной точки называется совокупность всех точек z, удовлетворяющих неравенству $|z| > R$ (с присоединением бесконечно удаленной точки), т.е. совокупность всех точек z, лежащих вне крута с центром в начале координат достаточно большого радиуса R.*

Определение 11. *Окрестностью точки z_0 плоскости комплексной переменной z называется всякая область, содержащая эту точку; δ окрестностью точки z_0 называется множество всех точек z, лежащих внутри круга радиуса δ с центром в точке z_0, т. е. множество всех точек z, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$.*

Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности Ω точки z_0, кроме, быть может, самой точки z_0.

Определение 12. *Число A называется пределом функции $f(z)$ в точке z_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек $z \in \Omega$, удовлетворяющих условию $0 < |z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство*

$$|f(z) - A| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A.$$

Здесь предполагается, что z_0 и A - конечные точки комплексной плоскости.
Также существует еще одно определение предела функции в точке. Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности Ω точки z_0, кроме, быть может, самой точки z_0.

Определение 13. *Если для любой последовательности $\{z_n\}, z_n \neq z_0$, сходящейся к точке z_0, соответствующая ей последовательность значений функции $\{f(z_n)\}$ сходится к одному и тому же комплексному числу A, то число A называют пределом функции $f(z)$ в точке z_0 :*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A.$$

Здесь конечность z_0 и A не предполагается.

Существование предела $\lim_{z \to z_0} f(z)$, где

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z_0 = x_0 + iy_0,$$

равносильно существованию двух пределов

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) \text{ и } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y),$$

причем

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) + i \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y).$$

Пределы функций комплексного переменного обладают следующими свойствами. Пусть существуют пределы

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A, \quad \lim_{z \to z_0} g(z) = B,$$

тогда справедливо:

1. $\lim_{z \to z_0}(f(z) \pm g(z)) = A \pm B$,
2. $\lim_{z \to z_0}(f(z) g(z)) = A \cdot B$,
3. $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{A}{B}, \quad B \neq 0.$

Определение 14. *Функция $f(z)$, заданная в области D, называется непрерывной в точке $z_0 \in D$, если*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Иными словами: функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек $z \in D$, удовлетворяющих условию $|z - z_0| < \delta$, имеет место неравенство $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.
Для непрерывности функции комплексной переменной

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ необходимо и достаточно, чтобы ее действительная и мнимая части, т. е. функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, были непрерывны в точке (x_0, y_0) по совокупности переменных x и y.

Определение 15. *Функция $f(z)$ комплексного переменного называется непрерывной в области D, если она непрерывна в каждой точке этой области.*

Сумма, разность и произведение двух функций комплексного переменного $f(z)$ и $g(z)$, непрерывных в области D, также являются непрерывными функциями в этой области, а функция $f(z)/g(z)$ непрерывна в тех точках области D, где $g(z) \neq 0$.
Если функция $f(y)$ непрерывна в точке z_0, а функция $F(\tau)$ непрерывна в точке $\tau_0 = f(z_0)$, то сложная функция $F[f(z)]$ непрерывна в точке z_0.

Примеры решения задач

1. Доказать, что последовательность

$$z_n = \frac{n - i}{n + 1}, \quad n = 1,2, \ldots$$

имеет пределом число $a = 1$.

Решение. Пусть задано произвольное число $\varepsilon > 0$. Покажем, что существует такой номер N, что $|z_n - 1| < \varepsilon$, как только $n \geqslant N$. Так как

$$|z_n - 1| = \left| \frac{n - i}{n + 1} - 1 \right| = \left| \frac{1 + i}{n + 1} \right| = \frac{\sqrt{2}}{n + 1}$$

то неравенство $|z_n - 1| < \varepsilon$ будет выполнено, если $\dfrac{\sqrt{2}}{n+1} < \varepsilon$, т. е. при $n > \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon} - 1$. Значит, в качестве N можно взять

$$N = N(\varepsilon) = \left[\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} - 1\right] + 1$$

Здесь символ $[x]$ означает целую часть действительного числа x.

2. Пусть последовательность $\{z_n\}$ имеет предел . Доказать, что последовательность $\{|z_n|\}$ имеет предел, равный $|a|$.

   Решение. Действительно, так как $\lim_{n\to\infty} z_n = a$, то

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - a| = 0.$$

   С другой стороны, для любых двух комплексных чисел z_n и а имеет место неравенство

$$z_n| - |a \leqslant |z_n - a|\,.$$

   Следовательно, получаем, что $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |a|$.

3. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z, \qquad \text{где} \qquad z = x + iy.$$

   Доказательство. Обозначим

$$z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

   Тогда,

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x^2 + y^2 + 2xn}{n^2}\right)^{n/2} = e^x.$$

   Так как

$$\varphi_n = \arg\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \operatorname{arctg}\frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}} = \operatorname{arctg}\frac{y}{n+x},$$

   то

$$\arg z_n = \arg\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = n\arg\left(1 + \frac{z}{n}\right) = n\operatorname{arctg}\frac{y}{n+x}.$$

   Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n = \lim_{n\to\infty} n\operatorname{arctg}\frac{y}{n+x} = y.$$

   Пользуясь достаточным условием сходимости последовательности комплексных чисел, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x e^{iy} = e^{x+iy} = e^z.$$

4. Доказать, что последовательность

$$z_n = \arg \frac{(-1)^n}{n}, \quad n = 1{,}2, \ldots$$

расходится.

Доказательство. Так как

$$z_n = \arg \frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \quad \text{четном}, \\ \pi & \text{при} \quad n \quad \text{нечетном}, \end{cases}$$

то последовательность $\{z_n\}$ имеет вид $\pi, 0, \pi, 0, \ldots$ и предела не имеет.

5. Пусть

$$x_n = 1 + \rho \cos \alpha + \rho^2 \cos 2\alpha + \ldots + \rho^n \cos n\alpha, \text{ где } 0 < \rho < 1, n = 1{,}2, \ldots.$$

Найти $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Решение. Возьмем

$$y_n = \rho \sin \alpha + \rho^2 \sin 2\alpha + \ldots + \rho^n \sin n\alpha$$

и рассмотрим предел последовательности комплексных чисел

$$z_n = x_n + iy_n = 1 + \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha) + \rho^2(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) + \ldots$$
$$\ldots + \rho^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha).$$

Введем замену:

$$t = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha), \quad |t| = \rho < 1.$$

Пользуясь формулой Муавра и формулой суммы членов геометрической прогрессии, получим

$$z_n = 1 + t + t^2 + \ldots + t^n = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t},$$

но $|t| < 1$, значит, $\lim_{n\to\infty} z_n = \dfrac{1}{1-t}$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \operatorname{Re} \frac{1}{1-t} = \operatorname{Re} \frac{1}{1 - \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)} = \frac{1 - \rho \cos \alpha}{(1 - \rho \cos \alpha)^2 + \rho^2 \sin^2 \alpha} = \frac{1 - \rho \cos \alpha}{1 - 2\rho \cos \alpha + \rho^2}.$$

6. Дана линейная функция $w = f(z) = az + b$, где a и b – комплексные постоянные. Доказать, что в точке z_0 она имеет предел, равный $w_0 = az_0 + b, a \neq 0$.

Доказательство. Действительно, возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как

$$|f(z) - w_0| = |(az + b) - (az_0 + b)| = |az - az_0| = |a| \cdot |z - z_0|,$$

то, выбрав в качестве $\delta(\varepsilon) > 0$ число $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$, будем иметь $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ при $0 < |z - z_0| < \delta$. Это означает, что $w_0 = az_0 + b$ есть предел функции $f(z) = az + b$ в точке z_0.

Но

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = az_0 + b = f(z_0),$$

следовательно, мы доказали, что в любой точке z_0 линейная функция непрерывна.

7. Показать, что функция $w = z^2$ непрерывна при любом значении z.

   Решение. Возьмем произвольную точку z_0 и произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как значение функции $f(z) = z^2$ в точке z_0 равно $f(z_0) = z_0^2$, то покажем, что существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|z^2 - z_0^2| < \varepsilon$ при $|z - z_0| < \delta$.
   Если $z \to z_0$, то найдется такое число $M > 0$, что $|z| < M$ и $|z_0| < M$. Тогда $|z^2 - z_0^2| = |(z + z_0)(z - z_0)| = |z + z_0| \cdot |z - z_0| < (|z| + |z_0|)|z - z_0| < 2M|z - z_0|$.
   Если положить $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$, то из неравенства $|z - z_0| < \delta$ будет следовать, что

   $$\left|z^2 - z_0^2\right| < 2M\delta \leqslant \varepsilon,$$

   то есть при любом z_0 функция $w = z^2$ является непрерывной.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите предел последовательности $z_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) e^{i\pi/n}$.
2. Найдите предел последовательности $z_n = (1 + 3i)^n$.
3. Найдите предел последовательности $z_n = \dfrac{e^{in}}{n^2}$.
4. Найдите предел последовательности $z_n = \dfrac{n + 2i}{3n + 7i}$.
5. Найдите предел последовательности $z_n = n \cos \dfrac{n\pi}{2} + in \sin \dfrac{n\pi}{2}$.
6. Пользуясь определением предела, покажите, что $\lim_{z \to 1} \dfrac{2z + 1}{z + 2} = 1$.
7. Вычислите $\lim_{z \to -i} \dfrac{z^2 + 3iz - 2}{z + i}$.
8. Вычислите $\lim_{z \to -i\pi/2} \dfrac{e^{2z} + 1}{e^z + i}$.
9. Доказать, что функция $f(z) = \overline{z}$ непрерывна на всей комплексной плоскости.
10. Доказать, что функция $f(z) = Rez$ непрерывна на всей комплексной плоскости.
11. Доказать, что функция $f(z) = Imz$ непрерывна на всей комплексной плоскости.