

第3次作业

1. 给出 5 个不同的随机变量的例子，并指明随机变量的类型和相关的样本空间.
2. **已知 $F(x) = P(X \leq x)$ 是随机变量 X 的分布函数.

(1) 证明: $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$

(2) 证明: $F(x)$ 右连续.

(3) 求 $P(a \leq X \leq b).$

3. 设样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3)$, 定义 X, Y 如下:

$$X(\omega_1) = 1, X(\omega_2) = 2, X(\omega_3) = 3, Y(\omega_1) = 2, Y(\omega_2) = 3, Y(\omega_3) = 1.$$

(1) 试证明 X, Y 这两个随机变量分布相同;

(2) 求 $X + Y, Y - X$ 的概率分布.

4. *已知 X 为离散型随机变量, 证明: $\text{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X)$; 你中学学到的方差是否与课上的定义相一致? 请简要说说你的理解.

5. 假设袋中有 a 个黑球, b 个白球. 每次取出一个球, 取到白球则停止, 记 X 为此时已取出球的个数.

(1) 每次取球后不放回, 求 X 的分布;

(2) 每次取球后放回, 求 X 的分布和期望.

6. 是否存在离散随机变量 X, Y , 满足 $E(X) > 100E(Y)$, 但 Y 以至少 0.99 的概率大于 X ? (需说明理由)

7. 假设一个 Bernoulli 试验成功的概率为 $p \in (0, 1)$, 不断独立地重复该试验, 令 X 表示出现第一次试验成功所需要的试验次数.

(1) 求 X 的分布.

(2) 求 X 的期望和方差.

8. 某项调查表明, 60%的消费者曾通过某电商平台购买商品. 假定随机抽取 25 名消费者, 并对他们的购买习惯进行调查.

(1) 至少 15 名消费者曾通过该电商平台购买商品的概率是多少?

(2) 大于 20 名消费者曾通过该电商平台购买商品的概率是多少?

(3) 不足 10 名消费者曾通过该电商平台购买商品的概率是多少?

9. 利用定义计算二项分布 $B(n, p)$ 的期望与方差.

10. 假设湖中有 N 条鱼, 捕获 M 条做了记号后放回, 充分混合后再捕获 n 条上来, 记 X 为其中带有记号的鱼的数量.

(1) 求 $P(X = m)$;

(2) 若 N 的具体值未知, 而再捕获上来的当中有 m 条带有记号, 给出你对湖中鱼总

数 N 的估计值:

(3) 求使得 $P(X = m)$ 值最大的 N 的值 (M, n, m 的值固定), 并比较与 (2) 中的估计值作比较.

(4) *这个例子体现的极大似然估计思想你能够理解吗? 试谈谈你对这一思想的理解.

11. (计算机实验) 绘制第 8 题的二项分布图.

(1) x 为何值时有最大概率?

(2) 计算该分布的期望值 (记为 μ), 并比较期望值和最大概率对应的 x 值的大小.

(3) 计算该分布的方差 (记为 σ^2).

(4) 通过该电商平台购买商品的消费者人数介于 $\mu \pm 2\sigma$ 的概率有多大?