第4周作业

1、

每个骰子出现1点的概率$p=\frac{1}{6}$，设X为掷6颗均匀骰子出现1点的次数，则$X\sim B(6,\frac{1}{6})$

$$\begin{aligned}P(X=2)&=C_6^2(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^4\\&=\frac{3125}{15552}\\&\approx 0.2009\end{aligned}$$

$E(X)=np=1,$令$\lambda=1,X\sim P(1)$则有

$$P(X=2)=\frac{1}{2!}e^{-1}\approx 0.1839$$

2、

记$p=2\times 10^{-6},n=10^6$,设X为访问该网站的人数，$X\sim B(10^6,2\times 10^{-6})$

$$\begin{aligned}P(X\geq 3)&=1-P(X=0,1,2)\\&=1-((1-p)^n+np(1-p)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}p^2(1-p)^{n-2})\\&=0.3233\end{aligned}$$

$E(X)=np=2=\lambda,$使用Poisson分布近似,$X\sim P(2)$

$$\begin{aligned}P(X=0,1,2)&=e^{-2}(\frac{2^0}{0!}+\frac{2^1}{1!}+\frac{2^2}{2!})\\&\approx 0.6767\end{aligned}$$

$$P(X\geq 3)=1-0.6767=0.3233$$

3、

假设昆虫在一段时间内产卵，不妨将这段时间分成n份，使得其每段时间最多产1个卵
则该昆虫在每段时间的产卵概率为$\frac{\lambda}{n}$，当$n\to\infty$，即为Poisson分布
由独立性，每段时间产卵并且该卵发育成成虫的概率是

$$
\begin{aligned}
P &= P(\text{产卵})P(\text{发育成成虫}) \\
&= \frac{\lambda}{n} \times p \\
&= \frac{\lambda p}{n}
\end{aligned}
$$

因此在n段时间中每段时间产生一个成虫的概率是$\frac{\lambda p}{n}$，由Poisson分布的定义，产生成虫数$k \sim P(p\lambda)$

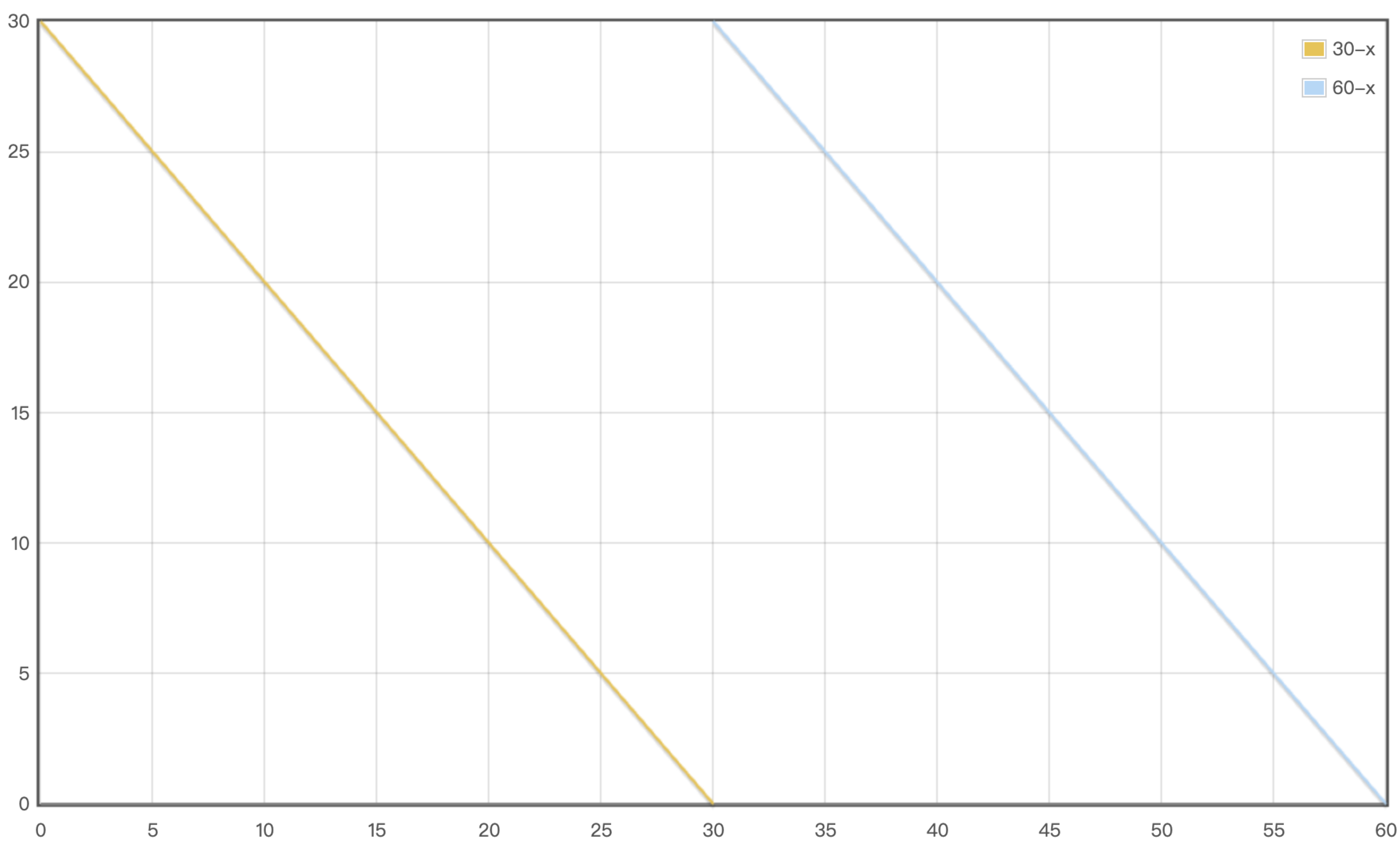
4、

$$
\begin{cases}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1 \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) = \frac{2}{3}
\end{cases}
$$

解得$a = \frac{1}{3}, b = 2$

5、

此人不同到达时间对应的等待时间如图：



(1)等待时间不超过10分钟对应的区间为$\{0\} \cup [20,30] \cup [50,60]$

$$P=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$$

(2)等待超过20分钟对应的区间为$(0,10) \cup (30,40)$

$$P=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$$

6、

设X为怀孕天数，则某人是孩子父亲 $\iff X>290或X<240$
令$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-270}{10}$，$X>290或X<240 \iff Y<-3或Y>2, Y \sim N(0,1)$
由正态分布积分可得，$P(Y<-3或Y>2) \approx 2.41\%$

7、

指数分布$E(X)=\frac{1}{\lambda}=3, \lambda=\frac{1}{3}$

$$P(X \geq 2.5)=\int_{2.5}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{3}}}{3} dx=e^{-\frac{2.5}{3}} \approx 0.4346$$

不换电池跑完全程的概率为0.4346

如果知道其报废前能跑里程的分布函数F，不换电池跑完全程的概率为$P(X \geq 2.5)=\int_{2.5}^{+\infty} F(x) dx$

8、

(1)
若一个人无罪，则$X \sim Exp(\lambda=1)$

$$\begin{aligned}\int_0^c e^{-x} dx &= 0.95 \\ 1-e^{-c} &= 0.95 \\ c &= ln(20) \\ &\approx 2.996\end{aligned}$$

(2)
若一个人有罪，则$X \sim Exp(\lambda=0.5)$

$$\int_{2.996}^{+\infty} 0.5e^{-0.5x}dx \approx 0.2236$$

将一个确实有罪的被告判为有罪的概率为0.2236

9、

记$X = lnY$，则$Y = e^X$
考虑Y的cdf：

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(e^X \leq y) \\ &= P(X \leq lny) \\ &= \int_{-\infty}^{lny} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \end{aligned}$$

Y的pdf为cdf的导数：

$$pdf = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(lny-\mu)^2}{2\sigma^2}} \times \frac{1}{y}$$

10、

(1)
如果$g(x)$单调增

$$\begin{aligned} P(g(X) \leq y) &= P(X \leq g^{-1}(y)) \\ &= F(g^{-1}(y)) \\ pdf &= \frac{d}{dy} F(g^{-1}(y)) \\ &= f(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))' \end{aligned}$$

如果$g(x)$单调减

$$\begin{aligned} P(g(X) \leq y) &= P(X \geq g^{-1}(y)) \\ &= 1 - F(g^{-1}(y)) \\ pdf &= -\frac{d}{dy} F(g^{-1}(y)) \\ &= -f(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))' \end{aligned}$$

(2)

$0 \leq Y = F(X) \leq 1$

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(F(X) \leq y) \\ &= P(X \leq F^{-1}(y)) \\ &= F(F^{-1}(y)) \\ &= y \end{aligned}$$

所以$Y \sim U(0,1)$

(3)

如果$Y \sim U(0,1)$，那么Y的pdf为$P(Y < y) = y$

$$\begin{aligned} P(F^{-1}(y) \leq y) &= P(y \leq F(y)) \\ &= F(y) \end{aligned}$$

(4)

注：本人没想到有什么应用

对于随机变量X，$F(X) \sim U(0,1)$

(5)

不成立，因为如果不严格单调，那么$F^{-1}(y)$不一定存在

11、

(1)

$$\begin{gathered} P(Y = 1) = p_1 \\ P(Y = 2) = p_2 \\ \cdots \\ P(Y \leq x) = \sum_{i=1}^{x} p_i \end{gathered}$$

(2)

可以，该$cdf: P(Y \leq x) = \sum_{i=1}^{x} p_i$满足一般的离散随机变量分布的累积分布函数

12、

断开点坐标x的分布：$x \sim U(0,1)$
包含固定点P_0的长度

$$L = \begin{cases} 1-x, x < p_0 \\ x, x \geq p_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(L) &= \int_{-\infty}^{\infty} L \times 1dx \\ &= \int_0^{p_0} (1-x)dx + \int_{p_0}^1 xdx \\ &= x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^{p_0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{p_0}^1 \\ &= p_0 - \frac{p_0^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{p_0^2}{2} \\ &= -p_0^2 + p_0 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

13、

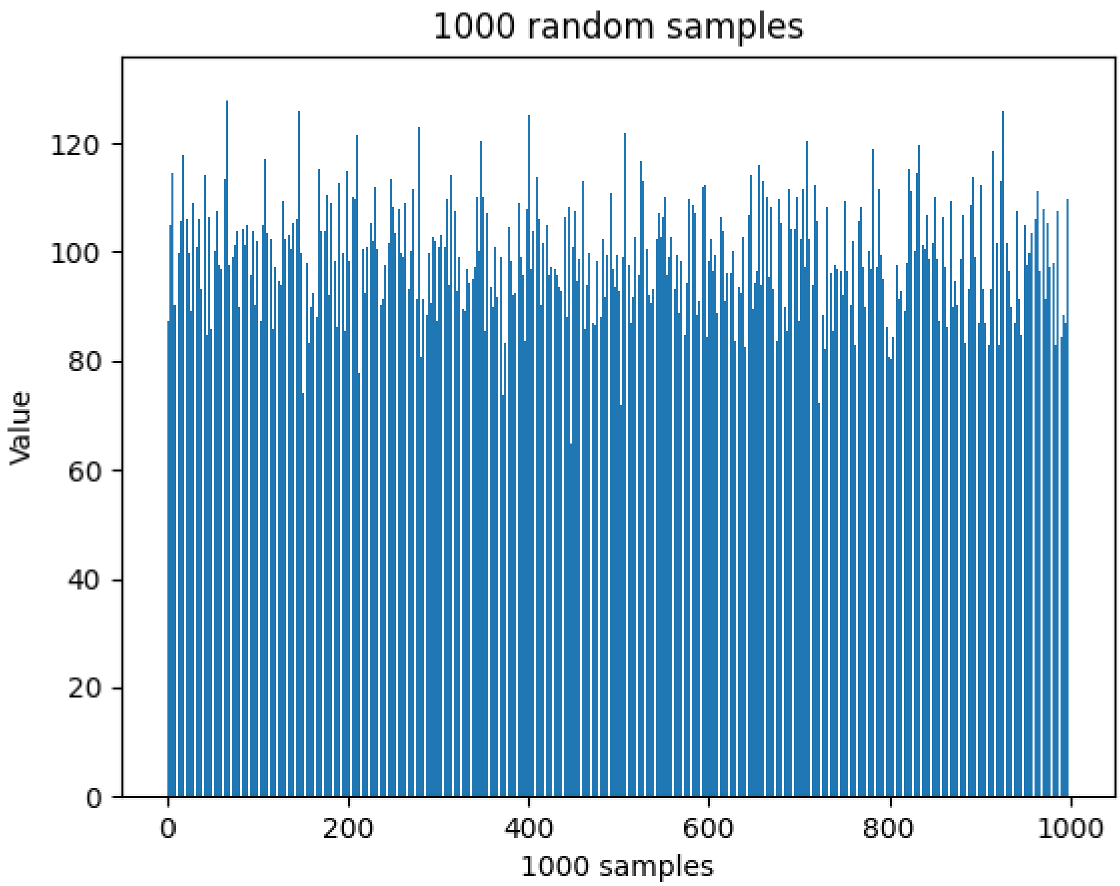
$$E(X) = 0.5\int_0^1 dx + 0.5\int_3^4 dx = 2$$
$$Var(X) = 0.5(\int_0^1 (x-2)^2dx + \int_3^4 (x-2)^2dx) = \frac{7}{3}$$

14、

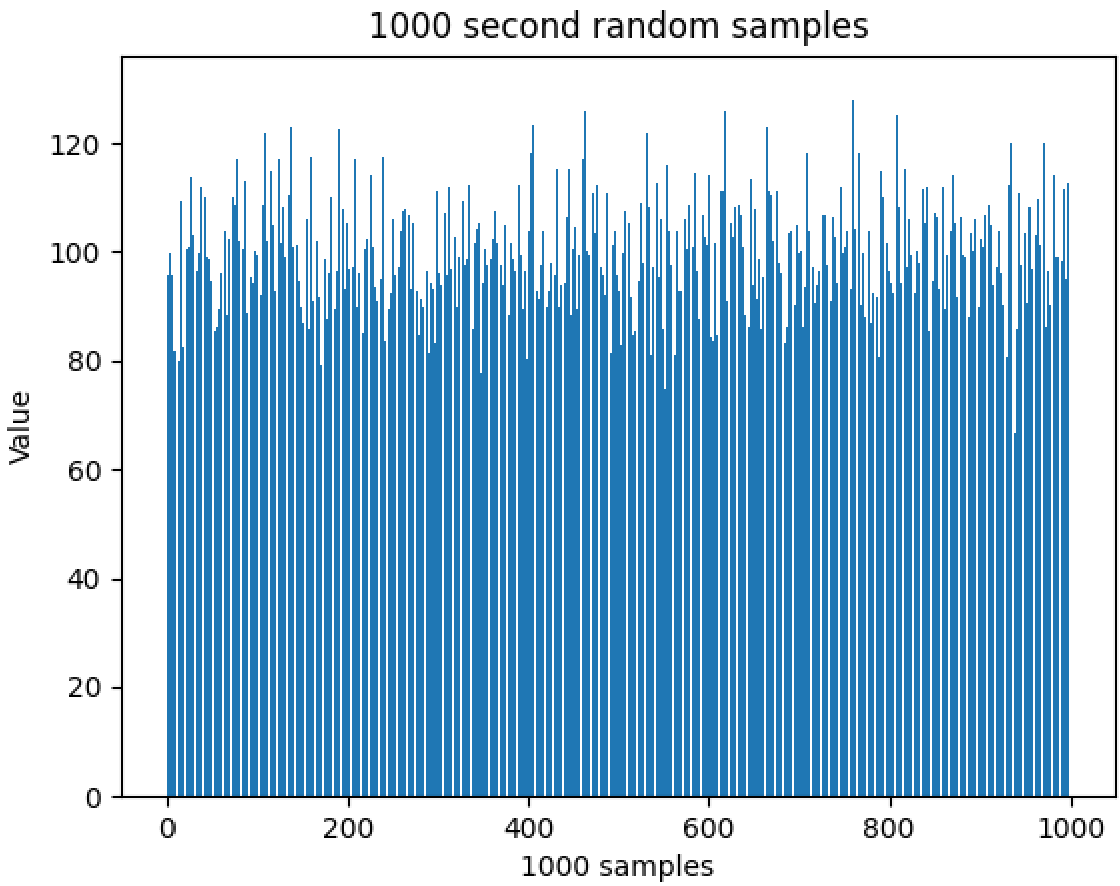
β分布的pdf：$f(x;\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{(\alpha-1)}(1-x)^{(\beta-1)}$
期望$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$
方差$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

15、

(1)


1000 random samples
Value
120
100
80
60
40
20
0
0
200
400
600
800
1000
1000 samples

(2)



(3)

$$\mu_1 = 99.777, Var_1 = 99.069$$
$$\mu_2 = 99.720, Var_2 = 100.631$$

二者相对接近

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

mean = 100
std_dev = np.sqrt(100)  # 标准差为方差的平方根，此处方差为100
num_samples = 1000

random_samples = np.random.normal(mean, std_dev, num_samples)
# print(random_samples)

plt.bar(range(0, 1000), random_samples)
plt.title("1000 random samples")
plt.xlabel("1000 samples")
plt.ylabel("Value")
plt.savefig("1.png")
plt.clf()

mean1 = np.mean(random_samples)
var1 = np.var(random_samples)

second_samples = []
for i in range(1000):
    select_sample = np.random.randint(0, 1000)
    second_samples.append(random_samples[select_sample])
mean2 = np.mean(second_samples)
var2 = np.var(second_samples)

plt.bar(range(0, 1000), second_samples)
plt.title("1000 second random samples")
plt.xlabel("1000 samples")
plt.ylabel("Value")
plt.savefig("2.png")

print(f"mean1={mean1}, var1={var1}")
print(f"mean2={mean2}, var2={var2}")
```