第13周作业

1、

该链上任意2点均可互达，因此其常返性相同
考虑0时刻目标在位置0的状态(左边有-1，-2，$\cdots$，右边有1，2，$\cdots$)
当$p=\frac{1}{2}$时：

$$
\begin{gathered}
P_{ii}^{(2)}=C_2^1 p(1-p) \\
P_{ii}^{(4)}=C_4^2 p^2(1-p)^2 \\
\cdots \\
P_{ii}^{(2n)}=C_{2n}^n p^n(1-p)^n
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
lnP_{ii}^{(2n)} &= ln(2n!)-2ln(n!)+2nln(\frac{1}{2}) \\
\text{由斯特林公式，}ln(n!) &= \frac{1}{2}ln(2\pi n)+n(ln(n)-1) \\
LHS &= \frac{1}{2}[ln(4\pi n)-ln((2\pi n)^2)]+2nln2+2nln(\frac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{2}ln(\frac{1}{\pi n}) \\
P_{ii}^{(2n)} &\sim \sqrt{\frac{1}{\pi n}} \\
\sum_{n=1}^{+\infty}P_{ii}^{(2n)} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{\frac{1}{\pi n}}=+\infty
\end{aligned}
$$

因此0状态是常返的，当$p\neq\frac{1}{2}$时

$$
\begin{aligned}
LHS &= \frac{1}{2}ln(\frac{1}{\pi n})+2nln2+nln(p(1-p)) \\
&= \frac{1}{2}ln(\frac{1}{\pi n})+nln(4p(1-p)) \\
4p(1-p)<1, &ln(4p(1-p))<0, lim_{n\to+\infty}nln(4p(1-p))=-\infty \\
LHS &\to -\infty \\
\iff P_{ii}^{(2n)} &\to 0, \sum_{n=1}^{+\infty}P_{ii}^{(2n)}<+\infty
\end{aligned}
$$

说明当$p\neq\frac{1}{2}$时，0状态是非常返的

2、

(1)
从状态0出发经过k步未回到状态0的概率$P(X > k) = 0.5^k$
$P(X \leq k) = 1 - 0.5^k$
在第k步首次返回的概率为$f_{ii}^{(k)} = P(X \leq k) - P(X \leq k-1) = 0.5^k$
平均步数$= k0.5^k = 2$

$$f_{ii} = \sum_{k=1}^{+\infty} f_{ii}^{(k)} = 0.5 + 0.5^2 + \cdots = 1$$

由定义知状态0是正常返的

(2)
对$\forall k \in N^*$，$P_{ii}^{(k)} > 0$
状态0是周期为1的

(3)
该链上任意2状态是互达的，因此都是正常返的
互达状态的周期相同，因此周期均为1

3、

(1)

$$\text{若}i\text{非常返，则从}i\text{出发，以概率}1 - f_{ii} > 0\text{回不到}i$$
$$\text{成功逃离的概率为}\sum_{k=1}^{+\infty} f_{ii}^{k-1}(1 - f_{ii}) = 1\text{(几何分布)}$$

若有限链均为非常返态，则所有状态都将被逃离(无法到达),这与状态总属于有限状态集矛盾

(2)
$Markov$链不可约 $\iff$ 所有状态均可互达 $\iff$ 所有状态的常返性相同，均为正常返

5、

(1)
1、2为常返态，3、4为非常返态
1、2可互达，且这2个状态的次态也为1、2，状态4无法到达，状态3有$\frac{1}{2}$的概率逃离

(2)
状态1可以自返，周期为1，状态2与1互达，也为正常返且周期为1

6、

(1)
假设对于状态有限的$Markov$链，存在零常返态i
考虑零常返态i的可达状态集$A(i) = j : i \to j$，则$A(i)$中所有态均与i互达

且$A(i)$所有态均为零常返的

由零常返的性质，若j为非常返或零常返，则$\forall i \in S$，都有$lim_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}=0$

固定i,取j遍历有限状态集中每一个状态，则$\sum\limits_{j\in A(i)} P_{ij}^{(n)}=0$，这与$A(i)$是$i$的所有可达状态矛盾

(2)

$$\text{不可约} \iff \text{所有状态可达} \iff \text{所有状态常返性相同，且至少有一个常返态}$$

且状态有限的$Markov$链不存在零常返态，所以所有状态均为正常返

8、

$$\vec{\beta}\underline{P}=\vec{\beta}$$
$$\underline{P}^T\vec{\beta}^T=\vec{\beta}^T$$
$$\text{求解}P^T\text{的特征向量和特征值，其中特征值为1对应的特征向量为}(\frac{1}{3}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{1}{3})$$
$$\text{平稳分布即为}(\frac{1}{3}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{1}{3})$$

9、

考虑题8中的$Markov$链