第14周作业

1、

$$\vec{\pi}' = \vec{\pi}\underline{\mathrm{P}}$$
$$\pi_i' = \sum_{k=1}^{M}\frac{P_{ki}}{M} = \frac{1}{M}$$
$$\pi' = \pi$$
$$\text{因此}\vec{\pi} = \frac{1}{M}(1,\cdots,1)\text{为平稳分布}$$

2、

$$\text{状态转移矩阵为}\underline{\mathrm{P}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{\beta} = \vec{\beta}\underline{\mathrm{P}}$$
$$\vec{\beta} = [\frac{9}{23} \quad \frac{14}{23}]$$
$$\text{长期来看滞销概率为}\frac{9}{23}\text{，畅销概率为}\frac{14}{23}$$

3、

(1)

$$X_{n+1} - X_n = Y - Z$$
$$Y \sim P(\lambda), Z \sim B(X_n, p)$$
$$Y\text{、}Z\text{与}X_{n-1}\text{时刻及以前的时刻无关，符合无后效性}$$

(2)

$$\text{设其平稳为}\vec{\beta}, \vec{\beta} = \vec{\beta}\underline{\mathrm{P}}$$

$$X_0\text{为平稳分布，}E(X_0)=\sum_{i=0}^{+\infty} i\beta_i$$
$$X_1\text{与}X_0\text{同分布，}E(X_1)=E(X_0)$$
$$=E(X_0)+E(Y)-E(Z)$$
$$E(Y)=E(Z)$$
$$E(Z)=\lambda,\text{其中}Z\sim B(X_0,p),X_0\sim P(\alpha)$$
$$\text{由随机过程的复合，}Z sim P(p\alpha)$$
$$E(Z)=p\alpha=\lambda,\alpha=\frac{\lambda}{p}$$

(3)

$$\text{该}Markov\text{链不可约，仅存在唯一平稳分布，即(2)中到达率为}\frac{\lambda}{p}\text{的泊松过程}$$

4、

该随机游走显然没有后效性，可视为$Markov$链,
假设该无向网络没有孤立点，由无向性可知有边连接的2点可互达，
因此整个网络为等价类（若一个点与该等价类中任一点不连通，则是孤立点）
对于不可约链，存在唯一平稳分布

$$\text{考虑分布}\pi_i=\frac{\sum_j w_{ij}}{2\sum_{i,j} w_{ij}}$$
$$\pi_i P_{ij}=\frac{\sum_j w_{ij}}{2\sum_{i,j} w_{ij}}\times\frac{w_{ij}}{\sum_j w_{ij}}=\frac{w_{ij}}{2\sum_{i,j} w_{ij}}=\pi_j P_{ji}$$

因此分布$\vec{\pi}=(\pi_i)$为平稳分布

5、

(1)

$$\text{当}X_n=i\text{时，}X_{n+1}=i+1\text{或}i-1,$$
$$P(X_{n+1}=i+1|X_n=i)=\frac{M-i}{M},$$
$$P(X_{n+1}=i-1|X_n=i)=\frac{i}{M}$$

$$P(X_{n+1}=i+1|X_n=i,X_{n-1}=j,\cdots,X_0=0)=\frac{M-i}{M}=P(X_{n+1}=i+1|X_n=i)$$
$$P(X_{n+1}=i-1|X_n=i,X_{n-1}=j,\cdots,X_0=0)=\frac{i}{M}=P(X_{n+1}=i-1|X_n=i)$$
$$X_n\text{无后效性，为}Markov\text{链}$$

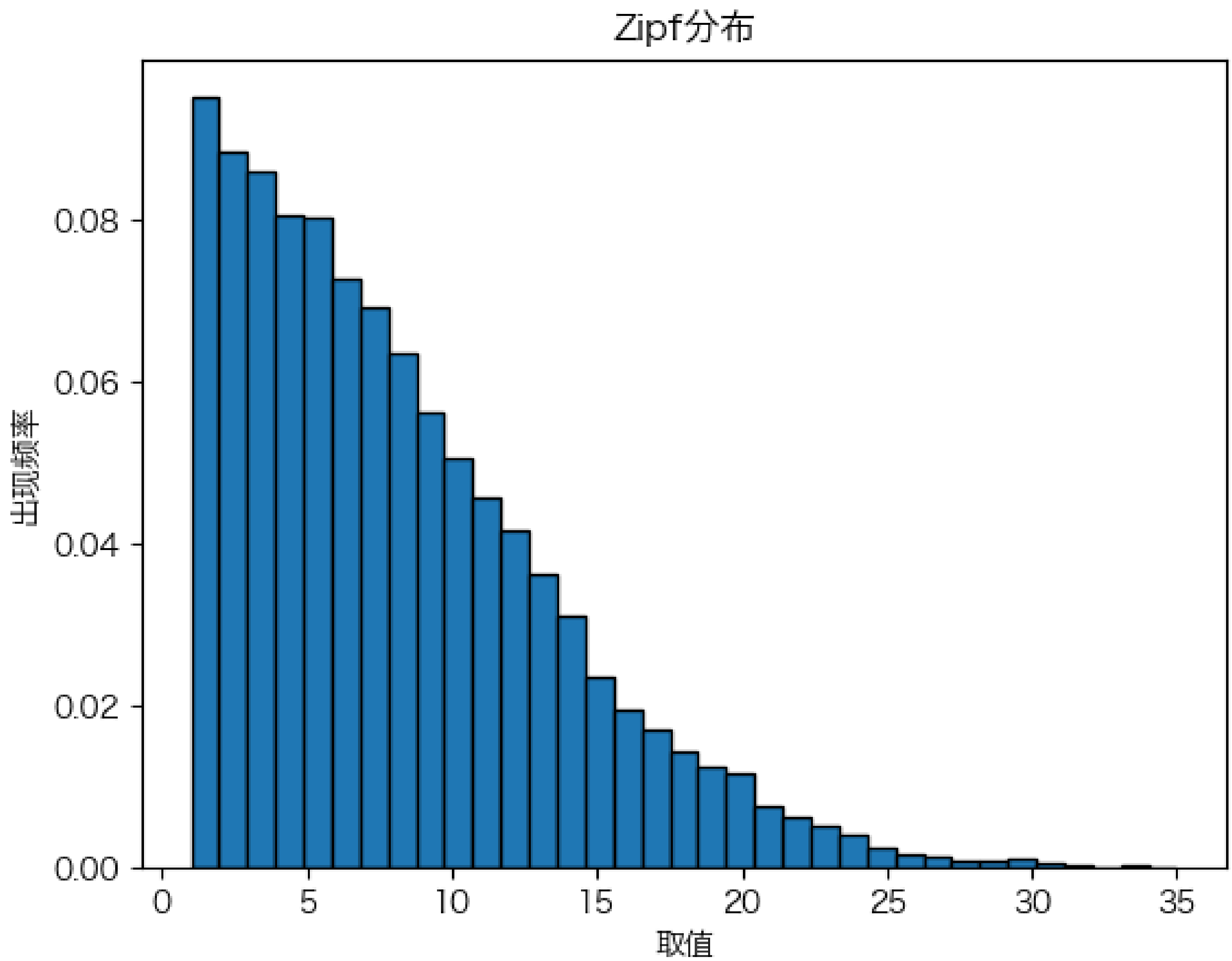
(2)

$$P(i\rightarrow i+1)=P(X_{n+1}=i+1|X_n=i)=\frac{M-i}{M},$$
$$P(i\rightarrow i-1)=P(X_{n+1}=i-1|X_n=i)=\frac{i}{M}$$
$$\pi_i\times P(i\rightarrow i+1)=\begin{pmatrix} M \\ i \end{pmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)^M\times\frac{M-i}{M}$$
$$\pi_{i+1}\times P(i+1\rightarrow i)=\begin{pmatrix} M \\ i+1 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)^M\times\frac{i+1}{M}=\pi_i\times P(i\rightarrow i+1)$$
$$\text{因此，对可一步转移的状态}i\text{、}j,\pi_iP_{ij}=\pi_jP_{ji}$$
$$\text{对不可一步转移的状态}i\text{、}j,P_{ij}=P_{ji}=0,\pi_iP_{ij}=\pi_jP_{ji}\text{仍成立}$$
$$\text{分布}\vec{\pi}\text{满足可逆性，是平稳分布}$$

(3)

$$\text{该过程可类比二项分布}B(M,\frac{1}{2})\text{，每个球以概率}\frac{1}{2}\text{出现在左边或右边}$$

6、




```
import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib as mpl
mpl.rcParams['font.sans-serif'] = ['Hiragino Sans GB']
mpl.rcParams['font.size'] = 10
mpl.rcParams['axes.unicode_minus'] = False

def Zipf(a=1, iter_epoch=100):
    state = 1
    for i in range(iter_epoch):
        a_add1 = math.pow(min(i / (i + 1), 1), a)
        if i > 1:
            a_sub1 = math.pow(min(i / (i - 1), 1), a)
        if state == 1:
            rand = np.random.uniform(0, 1)
            if rand < a_add1 * 0.5:
                state += 1

        else:
            rand = np.random.uniform(0, 1)
            if rand < a_add1 * 0.5:
                state += 1
```

```
            elif rand > 1 - a_sub1 * 0.5:
                state -= 1

    return state

samples = []

for i in range(10000):
    samples.append(Zipf(1, iter_epoch=100))
plt.hist(samples, bins=len(set(samples)), edgecolor='black', density=True)

plt.title('Zipf分布')
plt.xlabel('取值')
plt.ylabel('出现频率')
plt.savefig("6.png")
plt.show()
```