第10周作业

2、

$$
\begin{gathered}
X(t)=0 \iff Y(t)\text{为奇数} \\
X(t)=1 \iff Y(t)\text{为偶数} \\
P(X(t)=0)=\sum_k \frac{(\lambda t)^{2k+1}}{(2k+1)!}e^{-\lambda t}=\frac{e^{\lambda t}-e^{-\lambda t}}{2}e^{-\lambda t}=\frac{1-e^{-2\lambda t}}{2} \\
P(X(t)=1)=\sum_k \frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!}e^{-\lambda t}=\frac{e^{\lambda t}+e^{-\lambda t}}{2}e^{-\lambda t}=\frac{1+e^{-2\lambda t}}{2}
\end{gathered}
$$

3、

第6章第8题：

$$
\begin{aligned}
\text{在早上8点}-9\text{点，}P(\text{发生事故次数}=k) &= \frac{(5\times 1)^k}{k!}e^{-5\times 1} \\
&= \frac{5^k}{k!}e^{-5} \\
\text{在早上9点}-11\text{点，}P(\text{发生事故次数}=m) &= \frac{(3\times 2)^m}{m!}e^{-3\times 2} \\
&= \frac{6^m}{m!}e^{-6} \\
P(\text{发生事故总次数}=n) &= \sum_0^n \frac{5^k}{k!}e^{-5}\frac{6^{n-k}}{(n-k)!}e^{-6} \\
&= e^{-11}\frac{6^n}{n!}\sum_0^n C_n^k(\frac{5}{6})^k \\
&= e^{-11}\frac{6^n}{n!}(\frac{11}{6})^n \\
&= \frac{11^n}{n!}e^{-11}
\end{aligned}
$$

第9题：

$$
\begin{gathered}
5\text{个网球场，平均等待时间}40\text{分钟} \iff 1\text{个网球场，平均等待时间}8\text{分钟} \\
\text{期望等待时间}t=8(k+1)
\end{gathered}
$$

第10题：

(a)

$$
\begin{aligned}
P(\text{首次钓到鱼的时间} > 2h) &= P(N(2h)=0) \\
&= \frac{(0.6\times 2)^0}{0!}e^{-0.6\times 2} \\
&= e^{-1.2}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\text{钓鱼总时间在2}\sim\text{5小时} &\iff \text{第一条鱼钓得时间在2}\sim\text{5小时} \\
P(N(2h)=0) &= e^{-1.2} \\
P(N(5h)-N(2h)>1) &= 1-P(N(3h)=0) \\
&= 1-\frac{(0.6\times 3)^0}{0!}e^{-0.6\times 3} \\
&= 1-e^{-1.8} \\
\text{且}P(N(2h)=0)\text{与}&P(N(5h)-N(2h)=1)\text{是独立增量} \\
P &= e^{-1.2}\times(1-e^{-1.8}) \\
&= 0.251
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
P(N(2h)=1) &= \frac{(0.6\times 2)^1}{1!}e^{-0.6\times 2} = 1.2e^{-1.2} \\
P(N(2h)\geq 2) &= 1-P(N(2h)=0)-P(N(2h)=1) \\
&= 1-e^{-1.2}-1.2e^{-1.2} \\
&= 0.337
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{gathered}
\text{在前2小时，钓鱼条数的期望是}0.6\times 2=1.2 \\
\text{继续钓下去的概率是}e^{-1.2}\text{，期望条数是}1\times e^{-1.2}=e^{-1.2} \\
\text{钓鱼期望数}=1.2+e^{-1.2}=1.501
\end{gathered}
$$

(e)

$$
\begin{gathered}
\text{他在前4小时没有钓到鱼，从第4小时开始，钓上第1条鱼时间}t\sim Exp(0.6) \\
E(t)=\frac{1}{0.6}=\frac{5}{3} \\
\text{在已经钓鱼4小时条件下的总钓鱼时间期望为}=4+\frac{5}{3}=5.667
\end{gathered}
$$

第11题：

(a)

$$\text{单位时间内买书后离开的顾客服从强度为}p\lambda\text{人}/\text{小时的泊松分布}$$
$$\text{卖出第一本书的时间}T \sim Exp(p\lambda)$$

(b)

$$P(N(1h)=0) = \frac{(p\lambda)^0}{0!}e^{-p\lambda}$$
$$= e^{-p\lambda}$$

(c)

$$\text{单位时间内买书后离开的顾客服从强度为}p\lambda\text{人}/\text{小时的泊松分布}$$
$$E(\text{单位时间内买书后离开的顾客}) = p\lambda$$

4、