第11周作业

1、

6-12：

由泊松过程的分裂性质，每个披萨饼均可看成以概率$\frac{1}{n}$在顾客买一个饼时发生的特殊事件，因此每个披萨饼的到达率是$\frac{\lambda}{n}$
一个披萨饼没有被人买的概率为$P(k=0)=\frac{(\lambda/n)^0}{0!}e^{-\frac{\lambda}{n}}=e^{-\frac{\lambda}{n}}$
一个披萨饼被人买的概率为$P(k>0)=1-e^{-\frac{\lambda}{n}}$
对n个饼，购买个数$n\sim B(n,1-e^{-\frac{\lambda}{n}}),E(n)=n(1-e^{-\frac{\lambda}{n}})$

6-13

(a)

$$\text{总到达率为}\lambda=\lambda_A+\lambda_B$$
$$\text{在时间}t\text{内，到达数量}X\text{满足}P(X=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$
$$\text{当}k=9\text{时，}P(X=9)=\frac{((\lambda_A+\lambda_B)t)^9}{9!}e^{-(\lambda_A+\lambda_B)t}$$

(b)

$$X\sim P((\lambda_A+\lambda_B)t)$$
$$E(W)=\frac{2}{6}\times 1+\frac{3}{6}\times 2+\frac{1}{6}\times 3=\frac{11}{6}$$
$$\text{由}W\text{与}X\text{的独立性，}E(N)=E(X)E(W)=\frac{11}{6}(\lambda_A+\lambda_B)t$$

(c)

$$\text{由泊松过程的分裂性质，收到来自}A\text{的字数为3的信息到达率为}\frac{\lambda_A}{6}$$
$$\text{设}T_k\text{为第}k\text{次到达的时间，}f_{T_k}(t)=\Gamma(k,\frac{\lambda_A}{6})=\frac{(\lambda_A/6)^k t^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda_A t/6}$$
$$\text{代入}k=8,f_{T_k}(t)=\frac{(\lambda_A/6)^8 t^7}{7!}e^{-\lambda_A t/6}$$

(d)

$$\text{来自发报机}A\text{的概率为}\frac{\lambda_A}{\lambda_A+\lambda_B}$$
$$\text{在12条信息中，来自}A\text{的信息条数}Y\sim B(12,\frac{\lambda_A}{\lambda_A+\lambda_B})$$
$$\text{恰好有8条来自发报机}A\text{的概率}P(Y=8)=C_{12}^8(\frac{\lambda_A}{\lambda_A+\lambda_B})^8(\frac{\lambda_B}{\lambda_A+\lambda_B})^4$$

2、

(1)
在时间t,下标i过程没有到达的概率为$P(k=0)=e^{-\lambda_i t}$
所有事件都没到达的概率为$e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)t}$,记$\lambda=\sum_{i=1}^n\lambda_i,P=e^{-\lambda t}$
至少到达一个过程的$cdf=1-e^{-\lambda t},pdf=\lambda e^{-\lambda t}$

(2)
$a.N(0)=0$
$b.N(t)=\sum_{i=1}^n N_i(t)$为独立增量，因为其每个分量都是独立增量
$c.N(t+s)-N(s)=\sum_{i=1}^n N_i(t+s)-N_i(s)=\sum_{i=1}^n X_i,X_i\sim P(\lambda_i t)$
$X=\sum_{i=1}^n X_i\sim\ P(\sum_{i=1}^n\lambda_i t)$,因此$N(t+s)-N(s)\sim P(\sum_{i=1}^n\lambda_i t)$

(3)

$$设过程A的到达时刻是n个过程的到达时刻之和，A的到达率\lambda=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$
$$T\sim Exp(\lambda)$$
$$P(T=t)=\lambda e^{-\lambda t}$$

(4)

$$P(min\{t_k\}=t_i)=\frac{\lambda_i}{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k}$$
$$假设n=2，则过程1先发生的概率P(T_1<T_2)=\int_0^{+\infty}\int_{t_1}^{+\infty}\lambda_1e^{-\lambda_1t_1}\lambda_2e^{-\lambda_2t_2}dt_2dt_1=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$
$$当n=k成立，对n=k+1，由第(2)问可知前k个过程可视为到达率为\lambda=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i的Poisson过程,$$
$$第1个发生的事件在前k个的概率是\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_{k+1}},第1个发生的事件是第k+1的概率为\frac{\lambda_k}{\lambda+\lambda_k},其中\lambda=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i$$
$$由条件概率和假设，第一个发生的事件是第i个(i\le k)的概率为P=\frac{\lambda_i}{\lambda}\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_k}=\frac{\lambda_i}{\lambda+\lambda_k}$$
$$由数学归纳法可知对任意i\in N^+,P(min\{t_k\}=t_i)=\frac{\lambda_i}{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k}$$

3、

(1)

$$\begin{aligned}P(N(1)\le 3)&=P(N(1)=0)+P(N(1)=1)+P(N(1)=2)+P(N(1)=3)\\&=\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}+\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}+\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}+\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}\\&=(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^3}{6})e^{-\lambda}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}P(N(1)=1,N(3)=2)&=P(N(1)=1)P(N(3)-N(1)=1)\\&=P(N(1)=1)P(N(2)=1)\\&=\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}\times\frac{(2\lambda)^1}{1!}e^{-2\lambda}\\&=2\lambda^2e^{-3\lambda}\end{aligned}$$

(3)

$$P(N(1)\ge 1)=1-P(N(1)=0)=1-e^{-\lambda}$$

$$P(N(2)\ge 2,N(1)\ge 1)=P(N(1)=1)P(N(2)-N(1)\ge 1)+P(N(1)\ge 2)$$
$$=\lambda e^{-\lambda}\times(1-e^{-\lambda})+\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}$$
$$P(N(2)\ge 2|N(1)\ge 1)=\frac{(\lambda+\frac{\lambda^2}{2})e^{-\lambda}-\lambda e^{-2\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$$

(4)

$$当T_1=t_1,T_2=t_2,T_3=t_3,$$
$$pdf=\lambda e^{-\lambda t_1}\lambda e^{-\lambda(t_2-t_1)}\lambda e^{-\lambda(t_3-t_2)}=\lambda^3e^{-\lambda t_3}$$

(5)

$$
\begin{aligned}
E(N(t)N(t+s)) &= E(N(t)(N(t)+(N(t+s)-N(t)))) \\
&= E(N(t)(N(t)+N(s))) \\
&= E(N^2(t)+N(t)N(s)) \\
&= E(N^2(t))+E(N(t))E(N(s)) \\
&= (\lambda t)^2+\lambda t\lambda s \\
&= \lambda^2(t^2+ts)
\end{aligned}
$$

4、

$$
\text{设第}i\text{名患者开始诊断的时间为}T_i,\text{第}0\text{名患者}T_0=0 \\
\text{对}i\geq 1.T_i\sim Exp(\lambda),\lambda=\frac{1}{8}(min^{-1})
$$

$$
\text{等待总时间}T=T_1+T_2+\cdots=\sum_{i=1}^{N(t),t=4h}T_i \\
E(\sum_{i=1}^{N(t),t=4h}T_i)=E(E(\sum_{i=1}^{N(t),t=4h}T_i|N(t))) \\
E(\sum_{i=1}^{n}T_i|N(t)=n)=E(\sum_{i=1}^{n}U_i)=\frac{nt}{2}=2n(h) \\
E(2N(t))=2\lambda t=2\times\frac{240}{8}=60(h)
$$

5、

(1)

$$
\text{不独立，设第1次到达发生在时间}s,W_1=s
$$

$$
\begin{aligned}
&P(W_2>t|W_1=s)=P(N(s+t)-N(s)=0)=e^{m(s)-m(s+t)},\text{其中}m(t)=\int_0^t\lambda(t)dt \\
&P(W_2\leq t|W_1=s)=1-e^{m(s)-m(s+t)}(cdf) \\
&\qquad\qquad\quad f(t)=m'(s+t)e^{m(s)-m(s+t)}(pdf)
\end{aligned}
$$

W_2的分布受到W_1影响，不独立

(2)

$$
f(t)=1-e^{-m(t)},(W_1\text{的}pdf)\text{，与}W_2\text{的}pdf\text{不同} \\
\text{因此没有相同分布}
$$

6、

(1)

$$
E(n)=30\times 5+210\times 1=360
$$

(2)

$$平均到达率为\lambda = 5\times\frac{1}{8}+1\times\frac{7}{8}=\frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}P(N(t)>500) &= 1-\sum_{k=0}^{500}P(N(t)=k)\\ &= 1-\sum_{k=0}^{500}\frac{360^k}{k!}e^{-360}\\ &\approx 1.3\times 10^{-12}\end{aligned}$$

7、

(1)

$$Z(t+s)-Z(s)=\sum_{i=N(t)}^{N(t+s)}X_i$$

$$因为X_i同分布，LHS=\sum_{i=N(0)}^{N(s)}X_i，这与t无关，有独立增量性$$

(2)

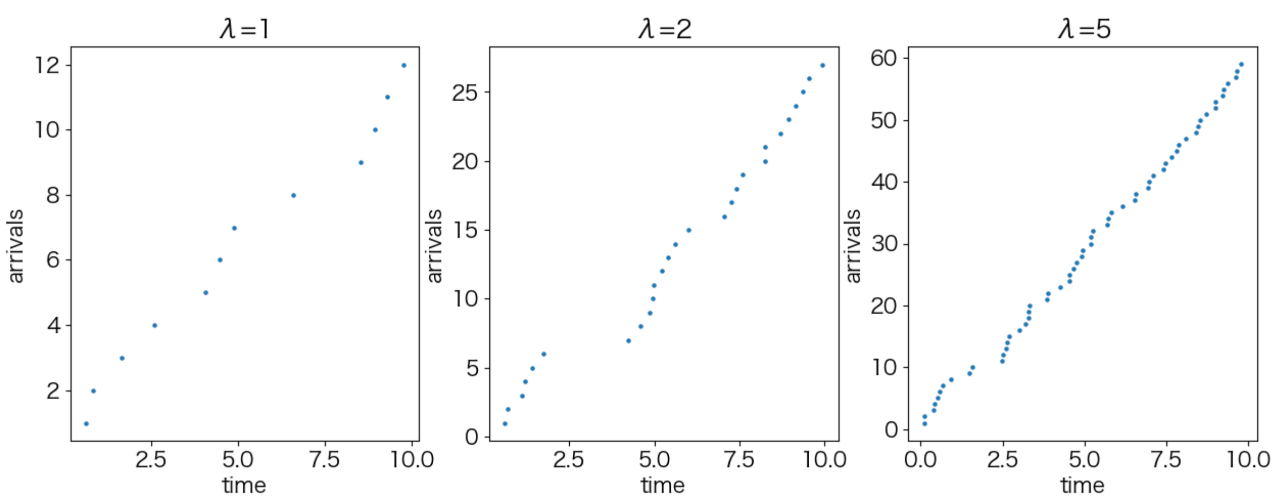
$$E(Z(t))=E(E(Z(t)|N(t)=n))=E(nE(X_i))=\lambda tE(X_i)$$

(3)

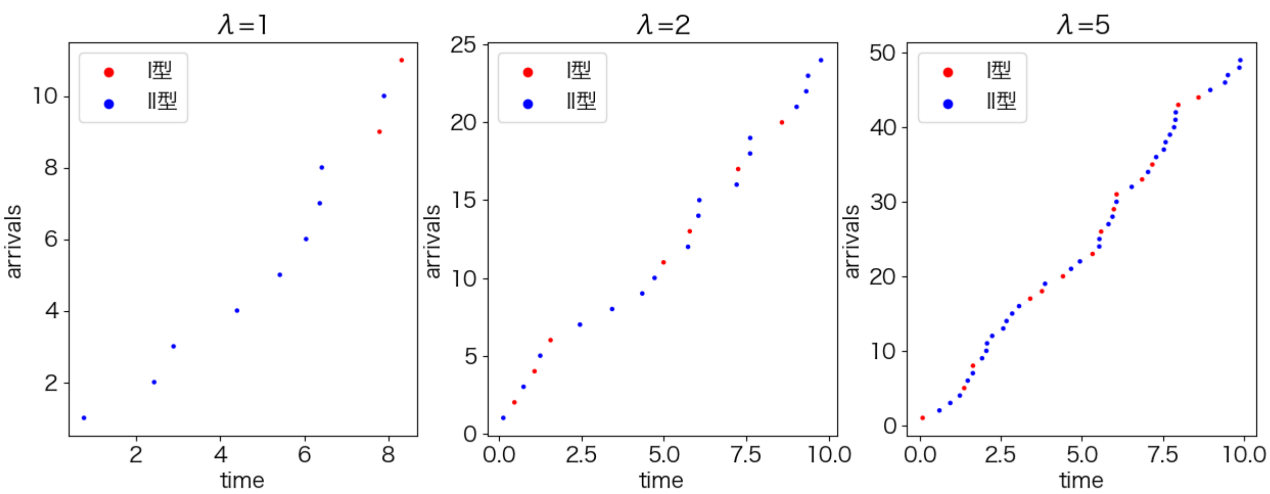
$$\begin{aligned}Var(Z(t)) &= E(Z^2(t))-E^2(Z(t))\\ &= E(\sum_{1\le i,j\le N(t)}X_iX_j)-E(Z(t))^2\\ &= E(N^2(t)E^2(X_i))-(\lambda tE(X_i))^2\\ &= E(X_i)^2\sum_{k=0}k^2\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}-(\lambda tE(X_i))^2\\ &= E(X_i)^2\sum_{k=0}(1+\frac{1}{k-1})\frac{(\lambda t)^k}{(k-2)!}e^{-\lambda t}-(\lambda tE(X_i))^2\\ &= E(X_i)^2\sum_{k=0}(\frac{(\lambda t)^k}{(k-2)!}+\frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!})e^{-\lambda t}-(\lambda tE(X_i))^2\\ &= E(X_i)^2[(\lambda t)^2+\lambda t]-(\lambda tE(X_i))^2\\ &= \lambda tE(X_i)^2\end{aligned}$$

8、

(3)



(4)




```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib as mpl
mpl.rcParams['font.sans-serif'] = ['Hiragino Sans GB']
mpl.rcParams['font.size'] = 15
mpl.rcParams['axes.unicode_minus'] = False

def poisson_arrival_time(t, lamda):
    N = np.random.poisson(t * lamda)
    arrival_time = np.random.uniform(0, t, size=N)
    arrival_time = np.sort(arrival_time)
    return arrival_time

fig, axs = plt.subplots(1, 3, figsize=(15, 5))
axes = axs.flatten()

lambdas = [1, 2, 5]

def highlight_points(p, len):
    highlights = []
    for i in range(len):
        rand = np.random.uniform(0, 1)
        if rand < p:
            highlights.append(True)
        else:
            highlights.append(False)
    return highlights

for i in range(len(lambdas)):
    arrival_time = poisson_arrival_time(10, lambdas[i])
    height = np.arange(1, len(arrival_time) + 1)
    axes[i].scatter(arrival_time, height, marker='o', s=5)
    axes[i].set_title(f'λ={lambdas[i]}')
    axes[i].set_xlabel("time")
    axes[i].set_ylabel("arrivals")

plt.savefig('3.png')
for ax in axes:
    ax.clear()

for i in range(len(lambdas)):
    arrival_time = poisson_arrival_time(10, lambdas[i])
    highlights = highlight_points(0.3, len(arrival_time))
    colors = ['red' if h else 'blue' for h in highlights]
    height = np.arange(1, len(arrival_time) + 1)
    axes[i].scatter(arrival_time, height, marker='o', s=5, c=colors)

    axes[i].scatter([], [], color='red', label='I型')
    axes[i].scatter([], [], color='blue', label='II型')

    axes[i].legend()
```

```
    axes[i].set_title(f'λ={lambdas[i]}')
    axes[i].set_xlabel("time")
    axes[i].set_ylabel("arrivals")

plt.savefig('4.png')
```