第 10 次作业

1. 概率导论第 6 章习题 11，12，13.

2. 设$\{N_i(t), t\geq 0\}$（$i=1,\cdots,n$）是n个相互独立的 Poisson 过程，到达率分别为λ_i（$i=1,\cdots,n$），记T是全部n个过程中的第一个事件发生的时刻.

    （1） 求T的分布.

    （2） 证明：$\{N(t)=\sum_{i=1}^{n} N_i(t), t\geq 0\}$是 Poisson 过程，到达率为$\lambda=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$.

    （3） 利用（2）中结论验证你得到的（1）的结论.

    （4） 求当n个过程中只有一个事件发生时，其属于$\{N_1(t), t\geq 0\}$的概率.

3. 设$\{N(t), t\geq 0\}$是到达率为λ的 Poisson 过程.

    （1） 求$P(N(1)\leq 3)$.

    （2） 求$P(N(1)=1, N(3)=2)$.

    （3） 求$P(N(2)\geq 2\,|\,N(1)\geq 1)$.

    （4） 设T_1, T_2, T_3为前三次事件发生时刻，求T_1, T_2, T_3的联合分布.

    （5） 设$s>0$，计算$E(N(t)N(t+s))$.

4. 设某医院专家门诊从早上 8:00 开始就有大量患者等候，每次专家只能为一名患者诊疗，每名患者的平均诊疗时间为8分钟，假设每名患者的诊疗时间服从指数分布且相互独立. 从 8:00 到 12:00 门诊结束时接受过诊疗的患者在医院平均停留了多长时间？

5. 设$\{N(t), t\geq 0\}$是到达率为$\lambda(t)$的非齐次 Poisson 过程，W_i（$i=1,2,\cdots$）是事件发生的间隔时间.

    （1） W_i（$i=1,2,\cdots$）是否相互独立？

（2） W_i（$i=1,2,\cdots$）是否具有相同分布？

（3） 证明： $P(N(t+s)-N(s)=n)=\dfrac{(m(t+s)-m(s))^n}{n!}e^{-(m(t+s)-m(s))}$，

$n=0,1,\cdots$， $\forall t>0, s\geq 0$，这里 $m(t)=\int_0^t \lambda(\tau)d\tau$.

6. 设某较偏僻路口每天通过的车辆数在早晚高峰时段（7:00-8:00,17:00-18:00）为平均每分钟 5 辆，在其他时间为平均每分钟 1 辆.
   （1） 上午 7:30-11:30 平均有多少辆车经过此路口？
   （2） 这段时间经过此路口的车辆数超过 500 的概率为多少？

7. 设 $\{N(t), t\geq 0\}$ 是到达率为 λ 的 Poisson 过程，X_i（$i=1,2,\cdots$）独立同分布，且与 $\{N(t), t\geq 0\}$ 相互独立，$Z(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$.

   （1） 证明：$\{Z(t), t\geq 0\}$ 具有独立增量性.

   （2） 证明：若 $E(X_i)<+\infty$，则 $E(Z(t))=\lambda t E(X_i)$.

   （3） 证明：若 $E(X_i^2)<+\infty$，则 $Var(Z(t))=\lambda t E(X_i^2)$.

8. （计算机实验）

   (1) 利用 $N(t)\sim P(\lambda t)$ 生成时间 $(0,t]$ 内事件发生次数；

   (2) 记（1）中生成的结果为 $N(t)=n$，生成服从均匀分布的独立随机变量序列 U_i（$i=1,\cdots,n$）；

   (3) 令 $T_i=U_{(i)}$（$i=1,\cdots,n$）来表示 Poisson 过程每次到达的时刻.

   分别考虑 $\lambda=1,2,5$，生成时间 $(0,10]$ 上的 Poisson 过程，在时间轴上标注相应的到达时刻，并绘制对应的 $N(t)$ 的图像.

（4）对于每次事件的发生以概率 p 标记为“I 型事件”，以概率 $1-p$ 标记为“II 型事件”.

考虑 $p=0.3$，分别绘制两类事件对应的 Poisson 过程 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 的图像.