

第2次作业

1. *证明: $P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$
(提示: 将事件 $A+B+C$ 表示成适当的互斥事件之和).
2. 假设 $P(B) > 0$, 证明 $P(\cdot|B)$ 是概率函数.
3. 判断下列结论是否正确, 并简要说明理由:
 - (1) $P(A) \geq P(A|B)$.
 - (2) 不存在既互斥也相互独立的事件 A, B .
 - (3) 若 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$, 则 A, B, C 独立.
4. *假设 A_i 表示掷 2 骰子的点数之和为 i 的倍数 ($i = 2, 3, 5$), 请分别判断 A_2 与 A_3 以及 A_2 与 A_5 的独立性并说明理由.
5. 举例说明条件独立不意味着独立, 反之亦然.
6. 假设 A 是小概率事件, $P(A) = \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < 1$), 不断独立地重复此试验, 证明: 事件 A 迟早要发生的概率为 1.
7. *假设有 3 张形状相同的卡片, 其中一张两面都是黑色, 一张两面都是红色, 另一张是一面红一面黑, 随机取出一张放在桌上, 朝上的面为红色, 那么另一面是黑色的概率是多少?
8. n 个人按任一顺序依次抓阄 (其中只有一个为“中”), 请评价以下两种抓阄方式是否公平并说明理由:
 - (1) 所有人都抓完阄后再同时打开;
 - (2) 每个人抓完阄后立即打开, 当某个人抓到“中”时, 整个抓阄过程结束 (后面的人就不必抓了).
9. *假设某医生考虑如下诊断方案: 若有 80% 的可能确定病人患此病就会建议病人手术; 否则推荐做进一步的检查, 该检查昂贵且痛苦. 现在该医生仅仅有 60% 的把握认为小明患此病, 因此推荐做了进一步的检查, 该检查对于确有此病的患者给出阳性结果, 而对健康人却不会给出阳性结果. 小明的检查结果呈阳性, 正当要建议手术时, 小明告诉医生他患有糖尿病. 这个消息带来了麻烦, 尽管它并不影响医生一开始对小明患病的 60% 的把握, 但却影响了这个进一步检查项目的效果, 该检查对于患有糖尿病却不患有这种疾病的人来说会有 30% 的可能给出阳性结果. 问: 此时医生是否应该仍旧建议手术?
10. *某人参与一个游戏, 每次输赢 1 元, 赢的概率为 $p > 0$, 且每次游戏之间相互独立, 假设初始资金为 k 元, 输光或者资金达到 n 元离场 ($n > k$).
 - (1) 此人输光离场的概率为多少?
 - (2) 如果 $p \leq 0.5$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 求其输光离场概率的极限.
11. *有一个生物, 1 分钟后有三种可能结果: 死掉、保持原状或者分裂成两个, 出现的概率都相同, 而此后活着的该种生物都将以这种方式相互独立地进行下去, 那么这种生物最

终灭亡的概率是多少？

12. *根据症状检查, 某患者患有病症 A, B, C 中的一种, 有 80% 可能患有病症 A, 患有病症 B, C 的可能都为 10%. 现在有甲乙两种药物治疗方案, 治愈率如下表所示:

	A	B	C
甲	80%	5%	10%
乙	60%	90%	90%

你会给出哪种治疗方案建议? 请说明理由. 另外一种方案有没有可以被建议的理由?

13. *假设有两个同样的袋子, 分别标记为 1 号和 2 号, 1 号袋子中有 4 个黑球和 1 个白球, 2 号袋子中有 2 个黑球和 3 个白球. 袋子标号不小心掉了, 随机选中一个袋子进行取球试验, 每次从中取出一个球, 事件“第 k 次取出的是黑球”记为 B_k .

- (1) 求第 1 次取出的是黑球的概率 $P(B_1)$;
- (2) 若取出第 1 个球但不看其颜色, 请分别在将第 1 个球放回和不放回袋子两种情形下求 $P(B_2)$, 比较 $P(B_2)$ 与 $P(B_1)$ 并尝试解释二者为什么会有这样的关系;
- (3) 若取出的第 1 个球是黑球, 将其放回袋子, 求第 2 次取出的仍是黑球的概率, 比较 $P(B_2 | B_1)$ 与 $P(B_2)$ 并尝试给出二者大小关系的直观解释;
- (4) 若每次取球后都将球放回, 已知前 n 次取出的都是黑球, 求第 $n+1$ 次取出的是黑球的概率 $P(B_{n+1} | B_1 B_2 \cdots B_n)$, 进一步令 $n \rightarrow \infty$, 这个概率的极限是多少? 怎么直观理解这个极限结果?
- (5) 若每次取球后都将球放回, 已知前 n 次取出的都是黑球, 请问刚开始选的袋子是 1 号的概率为多少? 进一步令 $n \rightarrow \infty$, 这个概率的极限是多少? 怎么直观理解这个极限结果?

14. ** (选做题) A、B 两队将要进行一次冠亚军决赛, 甲是 A 队的支持者, 愿意以 20 元对 5 元与别人赌 A 队获胜, 而乙是 B 队的支持者, 但相对保守, 愿意 15 元对 10 元与别人赌 B 队获胜.

- (1) 假设你有 100 元, 你会选择谁作为对手方参与这个打赌游戏? 是否有必定获利的策略?
- (2) 如果你与甲作为对手, 在甲的心中你的获胜概率 (i. e. 甲心目中 B 队获胜概率 $P_{\text{甲}}(B)$) 是多少? 类似地, 乙心目中 A 队获胜概率 $P_{\text{乙}}(A)$ 是多少? 比较 $P_{\text{甲}}(B) + P_{\text{乙}}(A)$ 与 1 的大小, 你对此有什么看法?

15. (计算机实验) 假设一枚硬币正面朝上的概率为 $p = 0.3$, 抛掷 $n = 1000$ 次, 每次记录正面朝上的相对频率.

- (1) 画出这些相对频率的散点图.
- (2) 重复上述试验 100 次画出正面向上次数的直方图
- (3) 计算上述 100 次试验正面朝上次数的平均值, 并将其与 np 相比较.
- (4) 尝试不同的 p 和 n 值.