

第 11 次作业

1. 概率导论第 7 章习题 1, 2, 3, 4.

2. 3 个白球和 3 个黑球分布在两个坛子中, 每个含有 3 个球. 如果第一个坛子中有 i 个白球, 就称此系统处于状态 i ($i = 0, 1, 2, 3$). 每次随机地将两个坛子中

一个球进行互换, 以 X_n 表示 n 步后系统的状态. 问: $\{X_n, n \geq 0\}$ 是否是

Markov 链? 如果是的话请计算其转移概率矩阵.

3. 假设明天是否下雨依赖之前三天(前天, 昨天, 今天)的天气条件, 如果前三天已经下雨, 明天下雨的概率为 0.8, 如果前三天无雨则明天下雨的概率为 0.2, 其他情形则明天以 0.6 的概率与前一天的天气一样. 请构建一个 Markov 链分析这个系统, 并给出相应的转移概率矩阵, 画出转移概率图.

4. $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一个状态为 0, 1, 2 的 Markov 链, 转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

如果 $P(X_0 = 0) = P(X_0 = 1) = 0.25$, 求 $E(X_3)$.

5. *证明: 如果 Markov 链的状态个数 $m < \infty$, 且状态 i 可达到状态 j , 那么状态 i 可以在 m 步内到达状态 j .

6. 证明: 如果状态 i 是常返的, 且状态 i 与状态 j 不是互通的, 则 $p_{ij} = 0$.

7. 下列数据是某种商品连续 24 个月的销售情况(其中 1 表示畅销, 0 表示滞销):

1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1

假设该商品销售情况近似满足时间齐性和 Markov 性.

(1) 请根据以上这 24 个月的数据给出销售状态的一步转移概率矩阵的近似.

(2) 假设影响销售的所有因素不变, 如果现在是滞销, 请预测之后的第三个月的销售情况.

8. (计算机实验) 模拟带吸收壁的 Random Walk 模型.

- (1) 分别取 $N=100$, $p=0.25$, $p=0.5$, $p=0.75$, 计算相应的终止时间, 并注明终止时所处位置 (0 还是 N).
- (2) 每组 (N, p) 值重复模拟 1000 次, 计算每组的平均终止时间和终止位置位于 0 的比例.