线性代数笔记

M.

From Oct. 12 2023
To October 16, 2023

Contents

Chapter 1

Vector, Vector space, and Linear

欢迎来到我们线性代数课程的第一章, 本章我们会从之前所学的对向量的朴素认知出发发展出什么是 vector space，进而延伸到对 linear 的思考和定义。

1.1 Vector and Vector space

在我们高中的学习过程中, 我们已经接触到了一种特殊的量——向量（或矢量）。在过去的学习中我们认为这种量不只有数值大小, 还有方向。我们一般会将他们写成 (a,b,c) 的形式。例如 (6,1,2) 就代表着一个在 x 方向延伸六个单位长度, 在 y 方向延伸一个单位长度, 在 z 方向延伸了两个单位长度的向量。但是这种表述方式并不够规范, 我们也不好表示一组有着某些抽象关系的向量, 例如所有从原点发出的向量。毕竟像 $\{(x, y, z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$ 的表达并不算简单, 在我们引入更多坐标轴变量的时候也会更费墨水, 因此我们想要引入一些特殊的符号来更加方便的表述这样的 list（有序列）。

我们首先严谨的定义一下什么是 list 和 list 的 length。

Definition 1.1 我们说 n 个数构成了一个 length 为 n 的 list 当且仅当这 n 个数以一种有序的方式排列在一起组合成一个元素。我们一般将这种有序列写作 $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ 。

在此基础上, 我们便可以定义在任意 n 下所有长度为 n 的 list 的集合了我们定义 $\mathbb{R}^n$ 为所有长度为 n 的 list 的集合, 即

Definition 1.2

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) : \forall i \in \mathbb{Z}\ x_i \in \mathbb{R}\}$$

称其中的 x_i 为 the i-th coordinate。

例如:

$$\mathbb{R}^4 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \forall i \in \mathbb{Z}\ x_i \in \mathbb{R}\}$$

现在我们非常神奇地发现, 我们之前所学过的所谓 vector 都是属于 $\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$ 的 list。回忆我们曾经学过的向量的加法, 比如 (6,1,2)+(12,1,9)=(6+12,1+1,9+9) 加法的方式就是简单的将不同 coordinate 上的元素分别相加。

那么类比的, 我们就可以定义任意 n 下 $\mathbb{R}^n$ 中元素的加法:

Definition 1.3 在 $\mathbb{R}^n$ 中符号 "+" 可以由以下公式定义，我们将这种运算称为**加法**:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x + y \ = z \text{ where } z_i = x_i + y_i \forall i$$

我们可以显然的发现, 这里的加法是符合交换律的, 在这里我们就不做证明, 留待读者自证。而根据我们对零的一般感知, 也就是所有数加 0 都是它本身, 我们可以定义在 $\mathbb{R}^n$ 中的 0:

Definition 1.4 我们定义 $\mathbb{R}^n$ 中的 $\mathbf{0}$ 为:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \ \ x + 0 = x$$

我们可以显然的发现在所有 $\mathbb{R}^n$ 中 **0 都是唯一的并且 0=(0,0,0,···,0)**.

当然, 我们的数学家不愿意止步于此。我们希望将我们熟悉的欧几里得空间也就是 $\mathbb{R}^n$ 中的朴素认知拓展推广到更加抽象的一般集合中。再根据我们对 vector 也就是向量的朴素认知将其推广到一般集合中的一般元素。我们便有了更加抽象和一般化的对 vector space 和 vector 的定义:

Definition 1.5 我们说一个集合 $\mathcal{V}$ 是一个 **vector space** 当且仅当它满足以下所有性质:
1. Commutativity: $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} \ \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2. Associativity: $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V} \ \mathbf{u} + (v + w) = (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{w}$ and $\forall a, b \in \mathbb{R} \ a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$
3. Additive identity: $\exists \mathbf{u} \in \mathcal{V} \ \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \ \mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{v}$ 将$\mathbf{u}$记作0
4. Additive inverse: $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \ \exists \mathbf{u} \in \mathcal{V} \ \mathbf{v} + \mathbf{u} = 0$
5. Multiplicative identity: $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \ 1\mathbf{v} = \mathbf{v}$
6. Distributive properties: $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} \ \forall a, b \in \mathbb{R} \ a(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{u} \ (a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v}$ and $+ b\mathbf{v}$

同时定义所有属于 $\mathcal{V}$ 这个 vector space 的元素都是 **vector**。

在这个定义中，我们默认了数乘，也就是 $\forall a \in \mathbb{R} \ \ \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \ \ a\mathbf{v} \in \mathcal{V}$，的存在性。这也是我们讨论线性代数的基础之一。

我们可以很简单的验证 $\mathbb{R}^n$ 是一个 vector space。

而我们也可以举出一些更加奇怪的 vector space 的例子:
如果我们定义 $P(n) \ = \{\sum_{i=0}^{n} p_i t^i : \forall p_i \in \mathbb{R}\}$ 那么我们可以发现 P(n) 也是一个 vector space。

自然的，我们会思考，像 P(n) 和 $\mathbb{R}^n$ 的这些 vector space 之间会不会有一种内在联系呢? 显然我们会发现任意一个 $\sum_{i=0}^{n} p_i t^i$ 的多项式都可以被 $(p_1, p_2, ..., p_n)$ 唯一确定的表示，我们将这种关系称为 **isomorphism**。对于这一关系的定义完善我们先按下不表，继续我们对于 Vector space 本身的探讨。

1.2 Linear Combination and Span

在上一个小节，我们介绍了什么是 vector space。而在这一章节中，我们将会从一个重要的概念——linear 出发，探讨我们该如何构建一个 vector space 以及 vector 的一些重要形式。

当我们提及 linear 也就线性的时候，我们第一时间想到的一定会是线性函数（linear function），也就是我们从初中开始接触到的一次函数。根据对线性函数的直观印象，我们可以简单地认为，线性本质上就是对不同的元素进行加法和数乘的运算。而我们在上一章节中已经定义了 vector space，也就是说，我们可以将线性函数初中学习的最基础的多元一次函数拓展到 vector space 上，看作是对 vector space 中的元素进行加法和数乘的运算。而我们将这种对 vector space 中的多个元素进行加法和数乘的运算称为 **linear combination**。

Definition 1.6 $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k \in \mathcal{V}$ $\forall a_1, a_2, ..., a_k \in \mathbb{R}$ 我们称形如 $\sum_{i=1}^{k} a_k \mathbf{v}_k$ 的表达式为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ 的一个 **linear combination**。
如果 $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ 是由通过关系式 $\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n$ 获得的，那么我们说 $\mathbf{u}$ 可以被 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ 的 **linear combination** 表示。