

Linear Algebra

Melchizedek

2023 年 10 月 15 日

Chapter 1 Vector, Vector space, and Linear

欢迎来到我们线性代数课程的第一章, 本章我们会从之前所学的对向量的朴素认知出发发展出什么是 vector space 进而延伸到对 linear 的思考和定义。

在我们高中的学习过程中, 我们已经接触到了一种特殊的量——向量(或矢量)。在过去的学习中我们认为这种量不只有数值大小, 还有方向。我们一般会将他们写成 (a,b,c) 的形式。例如 (6,1,2) 就代表着一个在 x 方向延伸六个单位长度, 在 y 方向延伸一个单位长度, 在 z 方向延伸了两个单位长度的向量。但是这种表述方式并不够规范, 我们也不好表示一组有着某些抽象关系的向量, 例如所有从原点发出的向量。毕竟像 $\{(x, y, z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$ 的表达并不算简单, 在我们引入更多坐标轴变量的时候也会更费墨水, 因此我们想要引入一些特殊的符号来更加方便的表述这样的 list (有序列)。

我们首先严谨的定义一下什么是 list 和 list 的 length。我们说 n 个数构成了一个 length 为 n 的 list 当且仅当这 n 个数以一种有序的方式排列在一起组合成一个元素。我们一般将这种有序列写作 $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ 。

在此基础上, 我们便可以定义在任意 n 下所有长度为 n 的 list 的集合了我们定义 \mathbb{R}^n 为所有长度为 n 的 list 的集合, 即

$$\mathbb{R}^n \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) : \forall i \in \mathbb{Z} x_i \in \mathbb{R}\}$$

而我们称其中的 x_i 为 the i-th coordinate。

例如

$$\mathbb{R}^4 \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \forall i \in \mathbb{Z} x_i \in \mathbb{R}\}$$

现在我们非常神奇地发现, 我们之前所学过的所谓 vector 都是属于 \mathbb{R}^2 或 \mathbb{R}^3 的 list。回忆我们曾经学过的向量的加法, 比如 $(6,1,2)+(12,1,9)=(6+12,1+1,9+9)$ 加法的方式就是简单的将不同 coordinate 上的元素分别相加。

那么类比的, 我们就可以定义任意 n 下 \mathbb{R}^n 中元素的加法:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x + y = z \text{ where } z_i = x_i + y_i \forall i$$

我们可以显然的发现, 这里的加法是符合交换律的, 在这里我们就不做证明, 留待读者自证。再根据我们对零的一般感知, 也就是所有数加 0 都是它本身, 我们可以定义在 \mathbb{R}^n 中的 0:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n x + 0 = x$$

我们可以显然的发现在所有 \mathbb{R}^n 中 0 都是唯一的并且 $0=(0,0,0,\dots,0)$

当然, 我们的数学家不愿意止步于此。我们希望将我们熟悉的欧几里得空间也就是 \mathbb{R}^n 中的朴素认知拓展推广到更加抽象的一般集合中。再根据我们对 vector 也就是向量的朴素认知

将其推广到一般集合中的一般元素。我们便有了更加抽象和一般化的对 vector space 和 vector 的定义:

我们说一个集合 \mathcal{V} 是 vector space 当且仅当它满足以下所有性质: 1. Commutativity: $\forall u, v \in \mathcal{V} \ u + v = v + u$ 2. Associativity: $\forall u, v, w \in \mathcal{V} \ u + (v + w) = (v + u) + w$ and $\forall a, b \in \mathbb{R} \ a(bv) = (ab)v$ 3. Additive identity: $\exists 0 \in \mathcal{V} \ \forall v \in \mathcal{V} \ v + 0 = v$ 4. Additive inverse: $\forall v \in \mathcal{V} \ \exists u \in \mathcal{V} \ v + u = 0$ 5. Multiplicative identity: $\forall v \in \mathcal{V} \ 1v = v$ 6. Distributive properties: $\forall u, v \in \mathcal{V} \ \forall a, b \in \mathbb{R} \ a(v + u) = av + au \ (a + b)v = av + bv$

而我们定义所有属于 \mathcal{V} 这个 vector space 的元素都是 vector。

我们可以很简单的验证 \mathbb{R}^n 是一个 vector space。

而我们也可以举出一些更加奇怪的 vector space 的例子: 如果我们定义 $P(n) = \{\sum_{i=0}^n p_i t^i : \forall p_i \in \mathbb{R}\}$ 那么我们可以发现 $P(n)$ 也是一个 vector space。

自然的, 我们会思考, 像 $P(n)$ 和 \mathbb{R}^n 的这些 vector space 之间会不会有一种内在联系呢? 显然我们会发现任意一个 $\sum_{i=0}^n p_i t^i$ 的多项式都可以被 (p_1, p_2, \dots, p_n) 唯一确定的表示, 我们将这种关系称为 isomorphism。对于这一关系的定义完善我们先按下不表, 在之后的课程中再进行介绍。