Лекция 5. Виды распределений

Биномиальное распределение. Распределение Пуассона. Гипергеометрическое и геометрическое распределения. Равномерное распределение. Экспоненциальное распределение

5.1. Биномиальное распределение

Пусть проведено n независимых испытаний с вероятностью p появления события A в каждом испытании (испытания Бернулли). Обозначим ξ – случайную величину, равную числу появлений события A в n испытаниях. По формуле Бернулли

$$P\{\xi = m\} = P(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } q = 1 - p, \; m = 0{,}1, \; \ldots, n. \quad (5.1)$$

Определение 5.1. *Распределение дискретной случайной величины, задаваемое нижеприведенной таблицей, называется биномиальным.*

ξ	0	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$	$n-1$	n
p	q^n	npq^{n-1}	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$\ldots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\ldots$	$np^{n-1}q$	p^n

Биномиальное распределение определяется двумя параметрами n и p.

Докажем, что сумма всех вероятностей равна 1.

Действительно, в соответствии с биномом Ньютона:

$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Но, с другой стороны: $(p+q)^n = \big(p + (1-p)\big)^n = 1$.

Найдем математическое ожидание и дисперсию такой случайной величины.

Рассмотрим производящую функцию данного распределения. Из общей формулы (3.5) для производящей функции дискретной случайной величины

$$\varphi_n(z) = (q_1 + p_1 z)(q_2 + p_2 z) \cdots (q_n + p_n z), \quad (3.5)$$

получаем формулу производящей функции для биномиального распределения:

$$\varphi_n(z) = (q + pz)^n. \quad (5.2)$$

$$\varphi_n(z)' = np(q+pz)^{n-1}, \qquad \varphi_n(z)'' = n(n-1)p^2(q+pz)^{n-2}.$$

Находим, $\varphi_n'(1) = np(q+p)^{n-1} = np$ и $\varphi_n''(1) = n(n-1)p^2(q+p)^{n-2} = n^2p - np^2$. Далее, подставляя эти значения в формулы (4.25) и (4.26), получаем

$$D(\xi) = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2 = n^2p - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) = npq.$$

Итак, для биномиально распределённой случайной величины ξ получим:

$$M(\xi) = np; \quad D(\xi) = npq. \tag{5.3}$$

Пример 5.1. *Монета брошена 4 раза. Написать закон распределения, найти математическое ожидание и дисперсию числа выпадений орла.*

►Найдём вероятности выпадения орла по формуле Бернулли при $n = 4$, $p = 0{,}5$:

$$P_4(0) = 0{,}5^4 \approx 0{,}0625; \quad P_4(1) = 4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5^3 = 0{,}25;$$
$$P_4(2) = C_4^2 \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^2 \approx 0{,}375;$$
$$P_4(3) = p_4(1) = 0{,}25; \quad P_4(4) = p_4(0) \approx 0{,}0625.$$

Искомый закон распределения задаётся таблицей:

ξ	0	1	2	3	4
p	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625

По формулам (4.25, 4.26) находим:
$M(\xi) = n \cdot p = 4 \cdot 0{,}5 = 2$; $D(\xi) = nqp = 4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 1$. ◄
Ответ: $M(\xi) = 2$, $D(\xi) = 1$.

Пример 5.2. *Производится двадцать выстрелов по мишени. Вероятность попадания при первом выстреле равно* 0,1, *а при каждом последующем выстреле производится корректировка прицела, поэтому вероятность попадания увеличивается на 10%. Написать закон распределения, найти математическое ожидание и дисперсию числа попаданий в мишень.*

Р е ш е н и е: Подсчитываем вероятности попаданий при каждом выстреле. Для этого используем формулу сложных процентов: $p_k = 0{,}1(1+0{,}1)^k, k = \overline{0,20}$. Получаем следующие значения массивов

попаданий в цель p и промахов $q = 1 - p$:
$(p)[0.1, 0.11, 0.121, 0.1331, \cdots]$

Применяем формулу (3.5) для $n = 20$ и полученных массивов p и q.

$$\varphi_n(z) = (q_1 + p_1 z)(q_2 + p_2 z) \cdots (q_n + p_n z). \qquad (3.5)$$

Для решения задачи используем Maxima-программу. На рис. 18 представлен график функции распределения данной задачи.

```
(%i1) kill(all)$  fpprintprec:4$N:20$
p:makelist(0.1*(1+0.1)^k,k,0,N-1);
(p) [0.1,0.11,0.121,0.1331,0.1464,0.1611,0.1772,0.1949,0.2144,0.2358,
0.2594,0.2853,0.3138,0.3452,0.3797,0.4177,0.4595,0.5054,0.556,0.6116]
(%i4) q:1-p;
(q) [0.9,0.89,0.879,0.8669,0.8536,0.8389,0.8228,0.8051,0.7856,0.7642,
0.7406,0.7147,0.6862,0.6548,0.6203,0.5823,0.5405,0.4946,0.444,0.3884]
(%i5) P:product((q[k]+p[k]*z),k,1,N);
(P) (0.1*z+0.9)*(0.11*z+0.89)*(0.121*z+0.879)*(0.1331*z+0.8669)*
(0.1464*z+0.8536)*(0.1611*z+0.8389)*(0.1772*z+0.8228)*
*(0.1949*z+0.8051)*(0.2144*z+0.7856)*(0.2358*z+0.7642)*
*(0.2594*z+0.7406)*(0.2853*z+0.7147)*(0.3138*z+0.6862)*
*(0.3452*z+0.6548)*(0.3797*z+0.6203)*(0.4177*z+0.5823)*
(0.4595*z+0.5405)*(0.5054*z+0.4946)*(0.556*z+0.444)*
*(0.6116*z+0.3884)
(%i6) Fi:expand(%);
(Fi) 7.322*10^-13*z^20+5.392*10^-11*z^19+1.841*10^-9*
*z^18+3.87*10^-8*z^17+5.616*10^-7*z^16+5.976*10^-6*z^15+
*4.835*10^-5*z^14+3.044*10^-4*z^13+0.001514*z^12+0.005997*
*z^11+0.01903*z^10+0.04841*z^9+0.09848*z^8+0.1592*
z^7+0.2025*z^6+0.1993*z^5+0.1481*z^4+0.08008*z^3+
+0.02961*z^2+0.006671*z+6.883*10^-4
(%i8) K:makelist(coeff(Fi,z^n),n,0,N)$  K[1]:coeff(Fi,z,0)$
(%i9) K;
(%o9) [6.883*10^-4,0.006671,0.02961,0.08008,0.1481,0.1993,0.2025,
0.1592,0.09848,0.04841,0.01903,0.005997,0.001514,3.044*10^-4,
4.835*10^-5,5.976*10^-6,5.616*10^-7,3.87*10^-8,1.841*10^-9,
5.392*10^-11,7.322*10^-13]
(%i10) plot2d([discrete, K], [x,1,20],[plot_format, gnuplot])$
(%i11) sum(K[i],i,1,N+1);
(%o11) 1.0
```

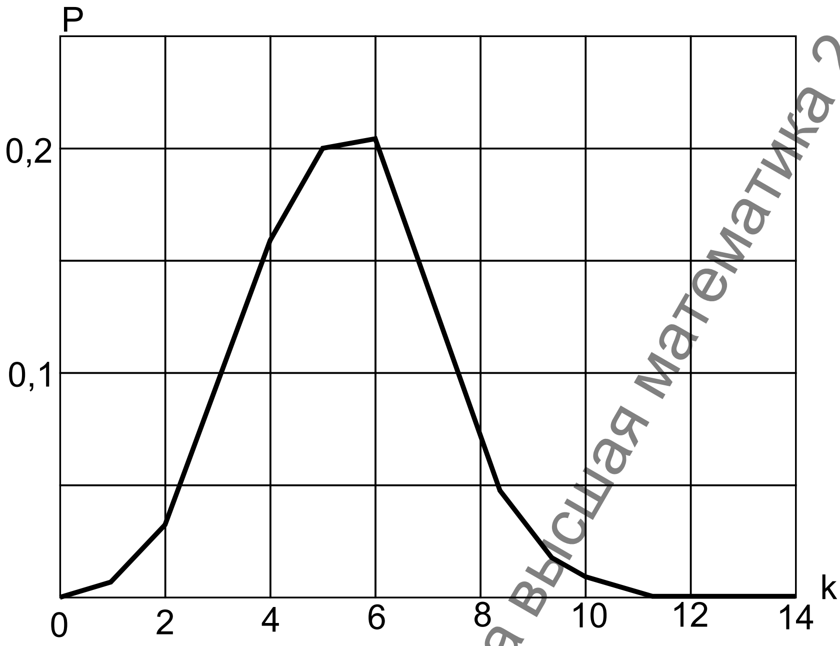

Рис. 18. *Распределение для примера 5.2*

5.2. Распределение Пуассона

Пусть в испытаниях Бернулли $n \to \infty$, $p \to 0$, так, что $np \to \lambda$. Тогда, как отмечалось ранее, вероятность $P_n(m)$ приближённо определяется с помощью формулы Пуассона:

$$P\{\xi = m\} = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0. \tag{5.4}$$

Определение 5.2. *Распределение дискретной случайной величины, задаваемое формулой (5.4), называется распределением Пуассона или пуассоновским распределением.*

Запишем закон распределения Пуассона в виде таблицы:

ξ	0	1	2	$\dots$	m	$\dots$
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	$\dots$	$\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$	$\dots$

Распределение Пуассона определяется одним параметром λ.

Докажем, что сумма всех вероятностей равна 1.

Действительно, используя разложение в ряд Тейлора для e^{λ}, получим:

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Найдём математическое ожидание и дисперсию такой случайной величины.

Найдём ***производящую функцию*** данной случайной величины.

$$\varphi_{\xi}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} m p_m z^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} z^m = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} z^m = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}.$$

$$\varphi'_{\xi}(z) = \lambda e^{\lambda(z-1)}, \qquad \varphi''_{\xi}(z) = \lambda^2 e^{\lambda(z-1)}.$$

$$\varphi'_{\xi}(1) = \lambda, \qquad \varphi''_{\xi}(1) = \lambda^2.$$

Следовательно,

$M(\xi) = \varphi'_{\xi}(1) = \lambda.$

$D(\xi) = \varphi''_{\xi}(1) + \varphi'_{\xi}(1) - \left(\varphi'_{\xi}(1)\right)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$

Итак, для случайной величины, имеющей распределение Пуассона, получим:

$$M(\xi) = D(\xi) = \lambda. \tag{5.5}$$

5.3. Геометрическое распределение

Пусть производится ряд независимых испытаний («попыток») для достижения некоторого результата (события A), и при каждой попытке событие A может появиться с вероятностью p. Тогда число попыток ξ до появления события A, включая удавшуюся, является дискретной случайной величиной, возможные значения которой принимают значения: $m = 1, 2, \ldots, m, \ldots$ Вероятности их по теореме умножения вероятностей для независимых событий равны

$$P(\xi = m) = pq^{m-1}, \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{5.6}$$

где $0 < p < 1, \quad q = 1 - p$.

Ряд распределения ξ имеет вид

ξ	1	2	3	$\ldots$	m	$\ldots$
P	p	pq	pq^2	$\ldots$	pq^{m-1}	$\ldots$

Как видно, вероятности $P_m = P(\xi = m) = pq^{m-1}, \quad m = 1, 2, \ldots,$ образуют для ряда последовательных значений бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q (потому распределение и называется геометрическим). Сумма вероятностей возможных значений случайной величины будет равна

$$S = p + pq + pq^2 + \ldots + p + pq^{m-1} + \ldots = \frac{p}{1-q} = 1.$$

Примеры случайных величин, распределенных по геометрическому закону: число выстрелов до первого попадания, число испытаний устройства до первого отказа, число бросаний монеты до первого выпадения герба (или решки) и т.п. Найдем математическое ожидание и дисперсию при геометрическом распределении.

Найдём ***производящую функцию*** данной случайной величины.

$$\varphi_\xi(z) = \sum_{m=1}^{\infty} pq^{m-1}z^m = pz\sum_{m=1}^{\infty}(qz)^{m-1} = pz\frac{1}{1-zq}.$$

$$\varphi'_\xi(z) = \frac{p}{(1-zq)^2}, \qquad \varphi''_\xi(z) = \frac{2pq}{(1-qz)^3}.$$

$$\varphi'_\xi(1) = \frac{1}{p}, \qquad \varphi''_\xi(1) = \frac{2pq}{p^3}.$$

$$D(\xi) = \varphi''_\xi(1) + \varphi'_\xi(1) - \left(\varphi'_\xi(1)\right)^2 = \frac{2pq}{p^3} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Получили:

$$M(\xi) = \frac{1}{p}, \qquad D(\xi) = \frac{q}{p^2}. \tag{5.7}$$

Пример 5.3. *Детали, количество количество которых неограничено, поочередно проверяют до появления бракованной. Вероятность брака для каждой детали одинакова и равна* 0,4. *Какова вероятность, что будет проверено более пяти деталей. Построить ряд распределения дискретной случайной величины ξ — числа проверенных деталей. Найти математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma(\xi)$ случайной величины ξ.*

►Используем формулу для геометрического распределения (5.6) при $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$.

$P(\xi = k) = 0{,}6 \cdot 0,4^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots$

$P(\xi = 1) = 0{,}6; \quad P(\xi = 2) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24;$

$P(\xi = 3) = 0{,}6 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}096; \quad P(\xi = 4) = 0{,}6 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}0384;$

$P(\xi = 5) = 0{,}6 \cdot 0{,}4^4 = 0{,}01536.$

Найдём сумму первых пяти членов ряда распределения вероятностей

$\sum\limits_{i=1}^{5} P(\xi = i) = 0{,}6 + 0{,}24 + 0{,}096 + 0{,}0384 + 0{,}01536 = 0{,}98976.$

Отсюда, вероятность того, что будет проверено более пяти деталей, равна

$P(\xi \geqslant 6) = 1 - P(\xi < 6) = 1 - 0{,}98976 = 0{,}01024.$

$M(\xi) = \dfrac{1}{p} = 1/0{,}6 = 5/3, \qquad D(\xi) = \dfrac{q}{p^2} = 0{,}4/0{,}6^2 = 10/9 \approx 1{,}1111.$

$\sigma(\xi) = \sqrt{10/9} \approx 1{,}054.$ ◄

Теперь немножко изменим условие данной задачи. Пусть теперь число деталей будет ограниченным.

Пример 5.4. *Для проверки выбрали 6 деталей и поочередно проверяют их до появления бракованной. Вероятность брака для каждой детали одинакова и равна* 0,4. *Построить ряд распределения дискретной случайной величины ξ — числа проверенных деталей. Найти математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma(\xi)$ случайной величины ξ.*

►Для для значений $\xi < 6$, используем формулу для геометрического распределения (5.6) при $p = 0{,}6,\ q = 0{,}4$.
$P(\xi = k) = 0{,}6 \cdot 0,4^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots 5.$
$P(\xi = 1) = 0{,}6; \quad P(\xi = 2) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24;$
$P(\xi = 3) = 0{,}6 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}096; \quad P(\xi = 4) = 0{,}6 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}0384;$
$P(\xi = 5) = 0{,}6 \cdot 0{,}4^4 = 0{,}01536.$

Найдём теперь вероятность того, что будет проверено 6 деталей. В отличии от предыдущих значений, данное событие представляет сумму двух событий: 1) бракованная деталь обнаружена на шестой проверке; 2) бракованных деталей в партии не было, следовательно, также было сделано 6 проверок.

$P(\xi = 6) = 0{,}6 \cdot 0{,}4^5 + 0{,}4^6 = 0{,}01024.$

Найдём сумму ряда распределения вероятностей

$$\sum_{i=1}^{6} P(\xi = i) = 0{,}6 + 0{,}24 + 0{,}096 + 0{,}0384 + 0{,}01536 + 0{,}01024 = 1.$$

Найдём числовые характеристики данной случайной величины.

$M(\xi) = 1 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}24 + 3 \cdot 0{,}096 + 4 \cdot 0{,}0384 + 5 \cdot 0{,}01536 + 6 \cdot 0{,}01024 = 1{,}95984.$

$M(\xi^2) = 1 \cdot 0{,}6 + 4 \cdot 0{,}24 + 9 \cdot 0{,}096 + 16 \cdot 0{,}0384 + 25 \cdot 0{,}01536 + 36 \cdot 0{,}01024 = 3{,}79104.$

$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = 1{,}03397; \quad \sigma(\xi) = \sqrt{D} = 1{,}0178.$ ◄

5.4. Гипергеометрическое распределения

С гипергеометрическими распределениями мы встречались когда решали задачу о выборке. Гипергеометрическое распределение широко используется в практике статистического приемочного контроля качества продукции, в задачах организации выборочных обследований и др.

Таблица распределения имеет вид:

ξ	0	1	2	...	l
p	$\frac{C_L^0 C_{K-L}^k}{C_K^k}$	$\frac{C_L^1 C_{K-L}^{k-1}}{C_K^k}$	$\frac{C_L^2 C_{K-L}^{k-2}}{C_K^k}$	...	$\frac{C_L^l C_{K-L}^0}{C_K^k}$

Здесь $k \leqslant K$, $l = min(k; L)$, $L \leqslant K$ и сумма всех вероятностей равна единице.

Типичное толкование: случайная величина ξ равна числу белых шаров, попавших в выборку без возвращения k шаров из урны, содержащей K шаров, из которых L белых.

$$P(\xi = m) = \frac{C_L^m \cdot C_{K-L}^k}{C_K^k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, l.$$

$$M(\xi) = k \cdot \frac{L}{K}.$$

Рассмотренные распределения являются распределениями дискретных случайных величин. Далее рассмотрим некоторые распределения непрерывных случайных величин.

5.5. Равномерное распределение

Определение 5.3. *Распределение непрерывной случайной величины называется равномерным на $[a;b]$, если плотность распределения постоянна и отлична от 0 на этом отрезке и равна нулю вне его:*

$$f(x) = \begin{cases} C & \textit{при} \quad x \in [a;b], \\ 0 & \textit{при} \quad x \notin [a;b]. \end{cases}$$

Используя 6 свойство плотности распределения (п. 4.18), найдём константу C.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \implies \int\limits_a^b Cdx = 1 \implies$$

$$\implies Cx\Big|_a^b = 1 \implies C(b-a) = 1 \implies C = \frac{1}{b-a}.$$

Итак, плотность равномерно распределённой на $[a;b]$ случайной величины определяется по формуле:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad x \in [a;b], \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [a;b]. \end{cases} \tag{5.8}$$

С помощью свойства 4 плотности (п. 4.18) найдем функцию распределения:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

При $x < a$ $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0;$

при $a \leqslant x \leqslant b$ $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{a} 0dt + \int\limits_a^x \frac{1}{b-a}dt = \frac{x-a}{b-a};$

при $x > b$ $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{a} 0dt + \int\limits_a^b \frac{1}{b-a}dt + \int\limits_b^x 0dt = \frac{b-a}{b-a} = 1.$

Итак, мы получили функцию распределения равномерно распределённой на $[a; b]$ случайной величины:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ 1 & \text{при} \quad b < x. \end{cases} \tag{5.9}$$

Равномерное распределение определяется двумя параметрами a и b. Графики плотности и функции распределения равномерной на [a;b] случайной величины представлены на рис. 19.

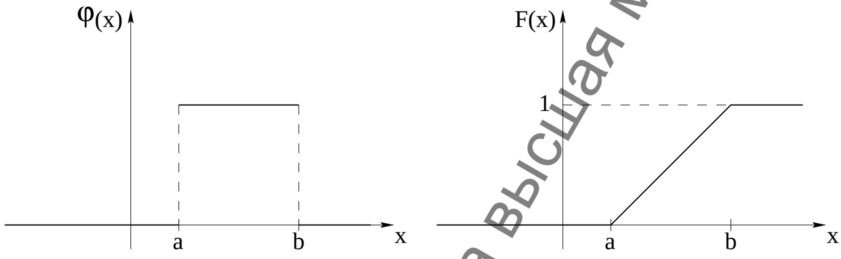

Рис. 19. *Плотность и функция распределения равномерного распределения*

Найдём математическое ожидание и дисперсию:

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int\limits_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_b^a = \frac{(b-a)^2}{2 \cdot (b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(\xi))^2 = \int\limits_a^b \frac{x^2}{b-a}dx - \frac{(a+b)^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_a^b - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^3}{3 \cdot (b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} =$$

$$= \frac{4 \cdot (a^2 + ab + b^2) - 3 \cdot (a+b)^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Итак, для равномерно распределённой на $[a; b]$ случайной величины получим:

$$M(\xi) = \frac{a+b}{2}; \quad D(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{5.10}$$

Замечание 5.1. *Найдём $P\{x \leqslant \xi < x + \Delta x\}$ при условии, что $a \leqslant x < x + \Delta x \leqslant b$. Пользуясь свойством 5 плотности (п. 4.18), получаем:*

$$P\{x \leqslant \xi < x+\Delta x\} = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(x)dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} \frac{1}{b-a}dt = \frac{x+\Delta x - x}{b-a} = \frac{\Delta x}{b-a}.$$

Как видим, эта вероятность не зависит от x, т.е. от положения промежутка внутри $[a; b]$, а только от длины промежутка Δx. Этим объясняется название распределения — равномерное. Вероятность распределена «равномерно» по отрезку $[a; b]$ (плотность постоянна). Очевидно, что в этом случае среднее значение случайной величины равно середине отрезка: $M(\xi) = \frac{a+b}{2}$.

Пример 5.5. *Плотность распределения постоянна на отрезке* $[0; 4]$ *и равна нулю вне его. Найти плотность и функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию.*

►В соответствии с определением 5.3 эта случайная величина имеет равномерное распределение на отрезке $[0; 4]$. Следовательно:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & \text{при} \quad x \in [0; 4], \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [0; 4]. \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \dfrac{x}{4} & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ 1 & \text{при} \quad x > 4, \end{cases}$$

$M(\xi) = 2; \quad D(\xi) = \dfrac{(4-0)^2}{12} = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}333.$◄

Ответ $M(\xi) = 2$; $D(\xi) = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}333$.

5.6. Экспоненциальное распределение

Определение 5.4. *Распределение непрерывной случайной величины называется экспоненциальным (показательным), если плотность распределения имеет вид:*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \textit{при} \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \textit{при} \quad x < 0, \quad \textit{где } \lambda > 0. \end{cases} \tag{5.11}$$

Экспоненциальное распределение определяется одним параметром $\lambda > 0$.

Найдем функцию распределения:

$$\text{при } x \geqslant 0 \quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}dt = -e^{-\lambda t}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x};$$

$$\text{при } x < 0 \quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

Итак, функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \tag{5.12}$$

Графики плотности и функции распределения экспоненциального распределения представлены на рис. 20.

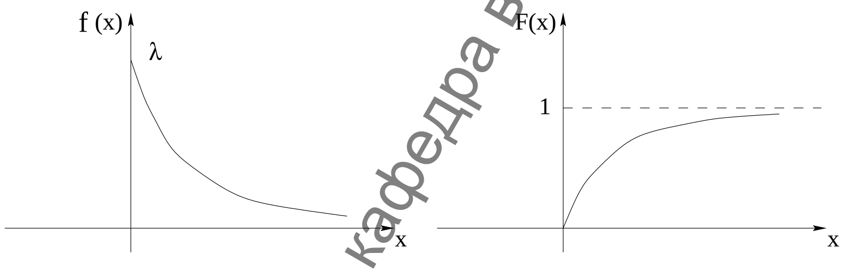

Рис. 20. *Плотность и функция распределения экспоненциального распределения*

Найдём математическое ожидание и дисперсию.

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int\limits_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dt = \lambda \int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^{-\lambda x} & v = -\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} \end{array} \right] = -xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Самостоятельно проведите выкладки и докажите, что:

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \frac{1}{\lambda^2} = \int\limits_{0}^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Итак, для экспоненциально распределённой случайной величины получим:

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{5.13}$$

Замечание 5.2. *Можно доказать, что если через независимые случайные промежутки времени $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$, имеющие экспоненциальное распределение с параметром λ, происходит какое-либо событие (например, поступает вызов на телефонную станцию или приходит покупатель в магазин), то количество этих событий, произошедших за любой промежуток времени t, является случайной величиной, имеющей пуассоновское распределение с параметром $a = \lambda t$.*

5.7. Нормальное распределение.

Плотность и функция распределения. Вероятность заданного отклонения. Стандартная нормальная случайная величина

5.7.1. *Плотность и функция распределения.* Рассмотрим ещё одно распределение непрерывной случайной величины, имеющее большое теоретическое и прикладное значение.

Определение 5.5. *Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и σ, если её плотность распределения имеет вид:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{5.14}$$

Этот факт будем записывать так: $\xi \sim N(a; \sigma)$.
Нормальное распределение определяется двумя параметрами a и σ.

Докажем, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Действительно:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left[\begin{array}{c} \frac{(x-a)}{\sigma} = t \implies x = \sigma t + a \\ dx = \sigma dt \end{array} \right] =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Используя несобственные двойные интегралы можно доказать, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}. \tag{5.15}$$

Этот интеграл называется интегралом Пуассона. Подставив этот результат в последнее выражение, получим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Найдем функцию распределения:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Выразим функцию распределения нормального закона $F(x)$ через функцию Лапласа, введённую ранее (формула 3.7), для чего сделаем замену переменных:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \left[\begin{array}{c} \frac{(t-a)}{\sigma} = z \implies z = \sigma z + a \\ dt = \sigma dz \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{5.16}$$

Здесь использовался тот факт, что из четности подынтегральной функции в интеграле Пуассона следует:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

Итак, для функции распределения нормального закона получим выражение:

$$F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \tag{5.17}$$

Найдём математическое ожидание нормально распределённой случайной величины.

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left[\begin{array}{c} \frac{(x-a)}{\sigma} = t \implies x = \sigma\sigma t + a \\ dx = \sigma t \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + a) e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = 0 + a = a.$$

Самостоятельно докажите, что дисперсия равна σ^2, т.е.

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx - a^2 = \sigma^2.$$

Итак, для случайной величины ξ, имеющей нормальное распределение, параметры a и σ имеют простой вероятностный смысл:

$$M(\xi) = a; \quad D(\xi) = \sigma^2; \quad \sigma(\xi) = \sigma. \tag{5.18}$$

Графики плотности и функции распределения нормального закона приведены на рис. 21. График плотности нормального распределения иногда называют кривой Гаусса.

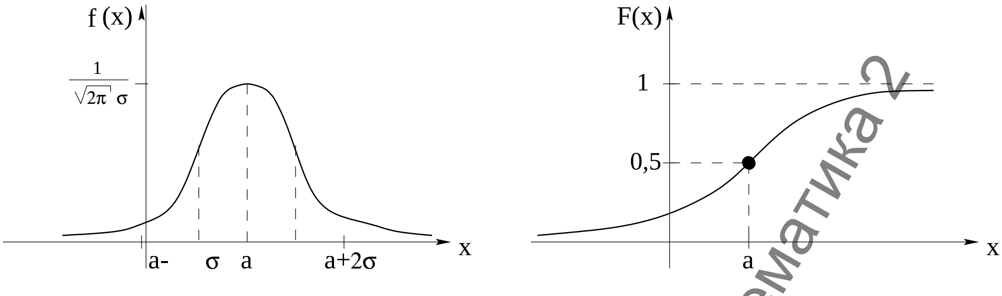

Рис. 21. *Плотность и функция распределения нормального распределения*

В соответствии со свойством 2 функции распределения получаем формулу для вычисления вероятности попадания нормальной случайной величины в заданный интервал:

$$P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \left(0{,}5 + \Phi\Big(\frac{x_2 - a}{\sigma}\Big)\right) -$$
$$-\left(0{,}5 + \Phi\Big(\frac{x_1 - a}{\sigma}\Big)\right) = \Phi\Big(\frac{x_2 - a}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{x_1 - a}{\sigma}\Big),$$

$$P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = \Phi\Big(\frac{x_2 - a}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{x_1 - a}{\sigma}\Big). \qquad (5.19)$$

В частности, если интервал полубесконечный, учитывая тот факт, что $\Phi(+\infty) = 0{,}5,\ \Phi(-\infty) = -0{,}5$, получаем:

$$P\{\xi < x_2\} = \Phi\Big(\frac{x_2 - a}{\sigma}\Big) + 0{,}5,$$
$$P\{x_1 \leqslant \xi\} = 0{,}5 - \Phi\Big(\frac{x_1 - a}{\sigma}\Big).$$

5.8. Вероятность заданного отклонения для нормального распределения

Пользуясь формулой (5.19), можно получить формулу для вычисления вероятности заданного отклонения нормальной случайной величины от математического ожидания:

$$P\{|\xi - a| < \varepsilon\} = P\{-\varepsilon < \xi - a < \varepsilon\} = P\{a - \varepsilon < \xi < a + \varepsilon\} =$$
$$= \Phi\Big(\frac{a + \varepsilon - a}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a - \varepsilon - a}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\Big) = 2\Phi\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma}\Big).$$

Окончательно имеем:

$$P\{|\xi - a| < \varepsilon\} = 2\Phi\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma}\Big). \tag{5.20}$$

Замечание 5.3. *Познакомившись с нормальным распределением, заметим, что локальная и интегральные теоремы Лапласа дают приближения для вероятностей биномиально распределённой случайной величины через соответствующие вероятности нормально распределённой случайной величины. Аналогично, с помощью формулы (5.19) получается приближённая формула (3.10) для вероятности отклонения частоты от вероятности в испытаниях Бернулли.*

Пример 5.6. $\xi \sim N(20; 10)$. *Найти* $P\{|\xi - 20| < 3\}$ *и* $P\{|\xi - 10| < 3\}$.

►По формуле (5.19) определяем

$$P\{|\xi - 20| < 3\} = 2\Phi\Big(\frac{3}{10}\Big) \approx 2 \cdot 0{,}1179 = 0{,}2358.$$

Значение $\Phi(0{,}3) = 0{,}1179$ находим по таблице приложения 2.

Для нахождения $P\{|\xi - 10| < 3\}$ нельзя применить формулу (5.20), т.к. $a = 20 \neq 10$. Эту вероятность найдём по формуле (5.19):
$P\{|\xi - 10| < 3\} = P\{-3 < \xi - 10 < 3\} = P\{7 < \xi < 13\} =$
$= \Phi\Big(\frac{13 - 20}{10}\Big) - \Phi\Big(\frac{7 - 20}{10}\Big) = \Phi(1{,}3) - \Phi(0{,}7) \approx$
$\approx 0{,}4032 - 0{,}2580 = 0{,}1452.$◄

Ответ: $P\{|\xi - 20| < 3\} \approx 0{,}236$; $P\{|\xi - 10| < 3\} \approx 0{,}145$.

Применим формулу (5.20) для вычисления вероятности отклонения при $\varepsilon = 3\sigma$.

$$P\{|\xi - a| < 3\sigma\} = 2\Phi\Big(\frac{3\sigma}{\sigma}\Big) = 2\Phi(3) \approx 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973.$$

Мы получили известное в технике «правило трёх сигм»: *для нормально распределённой случайной величины практически невозможно её отклонение от математического ожидания по абсолютной величине более трёх* σ.

На практике в менее ответственных случаях можно также применять аналогичное «правило двух сигм»:

$$P\{|\xi - a| < 2\sigma\} = 2\Phi(2) \approx 0{,}9544.$$

При построении функции плотности для нормально распределённой случайной величины применяют ещё и «правило сигма»:

$$P\{|\xi - a| < \sigma\} = 2\Phi(1) \approx 0{,}6826.$$

5.9. Стандартная нормальная случайная величина

Теорема 5.1. *Если* $\xi \sim N(a;\sigma)$, *то* $\zeta = k\xi + b \sim N(ka + b;\ |k|\ \sigma)$.

►Найдём функцию распределения $F_\zeta(x)$ случайной величины ζ при $k > 0$:

$$F_\zeta(x) = P\{\zeta < x\} = P\{k\xi + b < x\} = P\Big\{\xi < \frac{x-b}{k}\Big\} =$$
$$= 0{,}5 + \Phi\left(\frac{\frac{x-b}{k} - a}{\sigma}\right) = 0{,}5 + \Phi\Big(\frac{x - (ka + \sigma)}{k\sigma}\Big).$$

Таким образом, доказано, что $\zeta \sim N(ka + \sigma;\ k\sigma)$ при $k > 0$. Проведем аналогичные выкладки при $k < 0$:

$$F_\zeta(x) = P\{\zeta < x\} = P\{k\xi + b < x\} = P\Big\{\xi > \frac{x-b}{k}\Big\} =$$
$$= 1 - P\Big\{\xi < \frac{x-b}{k}\Big\} = 1 - 0{,}5 - \Phi\left(\frac{\frac{x-b}{k} - a}{\sigma}\right) =$$
$$= 0{,}5 - \Phi\Big(\frac{x - (ka + b)}{k\sigma}\Big) = 0{,}5 + \Phi\Big(\frac{x - (ka + b)}{-k\sigma}\Big),$$

т.е. при $k < 0$ $\zeta \sim N(ka + \sigma;\ -k\sigma)$. Обобщая эти два вывода, получим утверждение теоремы.◄

Теорема 5.2. *Если* $\zeta \sim N(a;\ \sigma)$, *то* $\xi_{cm} = \dfrac{\zeta - a}{\sigma} \sim N(0;1)$.

Действительно, так как $\xi_{\text{ст}} = \dfrac{\zeta}{\sigma} - \dfrac{a}{\sigma}$, то по теореме 5.1 для $k = \dfrac{1}{\sigma}$, $b = -\dfrac{a}{\sigma}$, получаем, что $\xi_{\text{ст}}$ имеет нормальное распределение с параметрами

$$\frac{1}{\sigma} \cdot a - \frac{a}{\sigma} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sigma} \cdot \sigma = 1.$$

Определение 5.6. *Случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами* $a = 0$ *и* $\sigma = 1$, *называется стандартной (нормированной) нормальной случайной величиной , а её распределение — стандартным (нормированным) нормальным.*

Плотность и функция стандартного нормального распределения даются формулами:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad F_{\text{CT}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 0{,}5 + \Phi(x). \qquad (5.21)$$