Н.А.Берков

Теория вероятностей и математическая статистика

Конспект лекций

Москва 2018

Оглавление

Теория вероятностей и математическая статистика

Список литературы

1. Берков Н.А., Мартыненко А.И., Пушкарь Е.А., Шишанин О.Е. Курс математики для технических высших учебных заведений. Часть 4. Теория вероятностей и математическая статистика. – Спб: Лань, 2013.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1979.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1998.

4. Типовой и расчёт http://www.math.fel.mirea.ru/?q=node/204

Промежуточный контроль

1. Контрольная работа №1. (6 неделя)
2. Контрольная работа №2. (12 неделя)
3. Типовой расчёт. (еженедельный)
4. В конце семестра. **Экзамен**.

Лекция 1. Случайные события

Предмет теории вероятностей. Случайные события. Операции над ними. Относительная частота и её свойства. Статистическое определение вероятности. Классическая формула вероятности. Элементы комбинаторики. Понятие об аксиоматике теории вероятностей. Геометрическое определение вероятности.

1.1. Предмет теории вероятностей

Теория вероятностей является разделом математики, изучающим закономерности в случайных явлениях. Раздел теории вероятностей — математическая статистика, занимается оценкой характеристик этих закономерностей на основании наблюдений.

Рассмотрим пример. Очевидно, что при однократном бросании монеты невозможно точно предсказать, как она упадёт — орлом или решкой на верхней стороне. Однако было давно отмечено, что если много раз бросать симметричную монету, орел должен выпадать в 50% случаев, причём, чем больше число опытов, тем ближе (в определённом смысле) реальный результат к предсказанному.

Подобные «статистические» закономерности наблюдаются всегда, когда имеют дело с большим количеством однородных случайных явлений. Проявляющиеся при этом закономерности оказываются независимыми от индивидуальных особенностей отдельных случайных явлений, которые как бы взаимно погашаются и усреднённый результат оказывается практически не случайным. Эта подтверждённая опытом устойчивость массовых случайных явлений служит основой для применения вероятностных методов исследования. Методы теории вероятностей предназначены для предсказания среднего, суммарного результата случайных явлений и не дают возможности предсказать исход отдельного случайного явления, который остаётся неопределённым, случайным.

Цель применения вероятностных методов состоит в том, чтобы, не изучая отдельное случайное явление, что сложно и иногда невозможно, установить законы, проявляющиеся в массе этих явлений. Так, в примере с бросанием монеты вместо описания траектории движения отдельной монеты средствами механики, что очень сложно или практически невозможно, изучают долю случаев, в которых выпадает орёл.

1.2. Операции над случайными событиями

Определение 1.1. *Явление, которое может произойти или не произойти при осуществлении некоторого комплекса условий, называется **случайным событием**.*

Случайные события будем обозначать большими латинскими буквами: $A, B, C, \ldots$ Всякое осуществление комплекса условий, при которых изучается случайное событие, будем называть **испытанием**.

Рассмотрим некоторые классические для теории вероятностей примеры случайных событий.

Пример 1.1. *Испытание: **бросание монеты**.*
События:

- A — *выпадение «орла»,*
- B — *выпадение «решки».*

Пример 1.2. *Испытание:* **бросание игральной кости** *(кубика с пронумерованными от 1 до 6 гранями).*
События:

- C — *выпадение числа 6,*
- D — *выпадение чётного числа,*
- E — *выпадение нечётного числа,*
- F — *выпадение числа, меньшего 7,*
- G — *выпадение числа, большего 6.*

Пример 1.3. *Испытание:* **розыгрыш тиража лотереи.**
События:

- H — *на данный билет выпал выигрыш,*
- K — *данный билет без выигрыша.*

Пример 1.4. *Испытание:* **проверка работоспособности прибора.**
События:

- L — *прибор исправен,*
- M — *прибор не исправен.*

Пример 1.5. *Испытание:* **вынимание шара из урны.**

В урне (непрозрачный ящик) имеются шары пронумерованные или разных цветов, например — белые и чёрные. Случайным образом вынимается шар, который после осмотра возвращается или не возвращается в урну.

События:

- N — *вынутый шар белый,*
- P — *вынутый шар чёрный.*

Определение 1.2. *Событие называется* **достоверным** *(в дальнейшем Ω), если оно обязательно появится, и* **невозможным** *(в дальнейшем $\varnothing$), если оно никогда не появится в результате испытания.*

Замечание 1.1. *Часто достоверное событие обозначают буквой U, а невозможное — V.*

Определение 1.3. *События A и B называются* **несовместными**, *если они не могут появиться в одном испытании. Если событий больше двух, они могут быть* **попарно несовместными**, *если любые два из них несовместны.*

Противоположным *событию A называется событие $\overline{A}$, состоящее в непоявлении A.*

В приведённых примерах событие F является достоверным, G — невозможным, события A и B несовместны, также, как H и K. Событие B является противоположным к A: $B = \overline{A}$.

Очевидно, что события A и $\overline{A}$ несовместны.

Определение 1.4. ***Суммой*** *двух событий $A + B$ называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.*

Определение 1.5. ***Произведением*** *двух событий $A \cdot B$ называется событие, состоящее в наступлении каждого из этих событий.*

Аналогично определяется сумма и произведение для случая, когда число слагаемых или сомножителей больше двух.

Пример 1.6. *Испытание: из колоды случайным образом извлекается одна карта.*
События:

- *R — появление дамы,*
- *S — появление карты пиковой масти.*

Тогда событие $R \cdot S$ — появление пиковой дамы, $R + S$ — появление карты или пиковой масти, или любой дамы, в том числе — пиковой дамы.

Операции над событиями обладают следующими свойствами, выводимыми из определений.

1.$A + B = B + A$,	$A \cdot B = B \cdot A$,	коммутативность.
2.$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$,		ассоциативность.
$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot B \cdot C$.		
3.$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$,		дистрибутивность сложения.
4.$A + \Omega = \Omega$,	$A \cdot \Omega = A$.	
5.$A + \varnothing = A$,	$A \cdot \varnothing = \varnothing$.	
6.$A + \overline{A} = \Omega$,	$A \cdot \overline{A} = \varnothing$.	
7.$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$,	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$,	законы де Моргана.

Замечание 1.2. *В соответствии с определением 1.2 события A и B несовместны $\iff$ $A \cdot B = \varnothing$. Заметим также, что в группе попарно несовместных событий одновременное наступление любых из этих событий невозможно, т.е. они несовместны.*

Определение 1.6. *Несколько событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ составляют* **полную группу**, *если в результате испытания обязательно появится одно из них:*

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Очевидно, что события A и $\bar{A}$ несовместны и образуют полную группу.

1.3. Относительная частота и её свойства

Рассмотрим n одинаковых испытаний, в каждом из которых может появиться некоторое событие A.

Определение 1.7. *Пусть в N испытаниях событие A появилось M раз.* **Относительной частотой** *или просто* **частотой** *события A в данной серии испытаний называется отношение числа испытаний, в которых событие A появилось, к общему числу испытаний:*

$$P^*(A) = \frac{M}{N}. \tag{1.1}$$

Пример 1.7. *Если игральная кость бросалась 10 раз ($N = 10$), а шестёрка выпадала 3 раза ($M = 3$), то частота события A (появления шестёрки) равна $P^*(A) = 3/10$.*

Относительная частота $P^*(A)$ обладает следующими свойствами:

(1) $0 \leqslant P^*(A) \leqslant 1$.
(2) $P^*(\Omega) = 1, \quad P^*(\varnothing) = 0$.
(3) Для несовместные событий A и B.

$$P^*(A + B) = P^*(A) + P^*(B). \tag{1.2}$$

Выведем эти свойства.

Свойства 1 и 2 получаются непосредственно из определения (1.1).

►Для доказательства свойства 3 обозначим
M — число появлений события A, L — число появлений события B, N — общее число проведённых испытаний.
Тогда: $P^*(A) = \dfrac{M}{N}, \quad P^*(B) = \dfrac{L}{N}, \quad P^*(A+B) = \dfrac{M+L}{N}$, если события A и B несовместны.
Отсюда следует свойство 3: $P^*(A + B) = P^*(A) + P^*(B)$.◄

Замечание 1.3. *Свойство 3 иногда называют* ***теоремой сложения частот****. В общем виде, для любых событий A и B относительная частота суммы двух событий равна сумме их частот минус частота их произведения:*

$$P^*(A+B) = P^*(A) + P^*(B) - P^*(A \cdot B). \tag{1.3}$$

►Пусть событие A появилось в M, а событие B в L испытаниях из N, а одновременно события A и B (т.е. A·B) в K испытаниях. Очевидно: $P^*(A+B) = \frac{M+L-K}{N} = \frac{M}{N} + \frac{L}{N} - \frac{K}{N} = P^*(A) + P^*(B) - P^*(A \cdot B)$.◄

В некоторых случаях возникает необходимость рассматривать несколько событий в их взаимосвязи, например, когда необходимо определить как влияет появление или непоявление одного события на частоту другого. В этом случае, кроме частоты события A во всей серии испытаний, вычисляют также частоту события A, учитывая только те испытания, в которых появилось другое интересующее нас событие B. Иными словами, перед определением частоты события A учитывают только те испытания, в которых кроме A появилось и B. Эта характеристика называется *условной частотой* события A при условии появления B и обозначается $P^*(A/B)$ или $P^*_B(A)$.

Определение 1.8. ***Условной частотой*** *события A при условии появления B $P^*(A/B) = P^*_B(A)$ называется отношение числа испытаний, в которых появились оба события A и B, к числу испытаний, в которых появилось событие B.*

Если в N испытаниях событие B появилось L раз, а событие A появилось совместно с событием B K раз, то

$$P^*(A/B) = \frac{K}{L}, \quad P^*(B) = \frac{L}{N} \quad , P^*(AB) = \frac{K}{N}\,. \tag{1.4}$$

Из формул (1.4) вытекает следующая теорема:

Теорема 1.1 (умножения частот)**.** ***Относительная частота произведения*** *двух событий равна произведению условной частоты одного из них при условии появления другого на относительную частоту другого события:*

$$P^*(AB) = P^*(B) \cdot P^*(A/B). \tag{1.5}$$

Если сомножителей больше двух, то:

$$\begin{aligned} P^*(A_1 \cdot A_2 \cdots A_k) = P^*(A_1) \cdot P^*(A_2/A_1) \cdot P^*(A_3/A_1 \cdot A_2) \cdots \\ \cdots P^*(A_k/A_1 \cdot A_2 \cdots A_{k-1}). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Сравнивая условные частоты $P^*(A/B)$ и $P^*(A/\overline{B})$, можно судить о взаимосвязи событий А и В. Если

$$P^*(A/B) = P^*(A/\overline{B}) = P^*(A) \ , \tag{1.7}$$

то частота события A не зависит от того, произошло или не произошло событие B. Это будет справедливо для так называемых «независимых событий» A и B, для которых условные частоты (1.7) равны частоте $P^*(A)$, которую можно назвать безусловной.

Для независимых событий формула (1.5) примет вид

$$P^*(AB) = P^*(A) \cdot P^*(B) \ , \tag{1.8}$$

а вместо (1.6) имеем формулу:

$$P^*\Big(\prod_{i=1}^{k} A_i\Big) = \prod_{i=1}^{k} P^*(A_i). \tag{1.9}$$

1.4. Статистическая вероятность

При небольшом числе испытаний частота может сильно колебаться и является поэтому плохой характеристикой случайного события. Однако по мере увеличения числа испытаний частота постепенно стабилизируется, т.е. принимает значения, мало отличающиеся от некоторого вполне определённого числа. Можно сказать, что чем больше число испытаний, тем реже будут встречаться значительные отклонения этой частоты от этого числа. Таким образом, с рассматриваемым событием можно связать некоторое число, около которого группируются частоты и которое является мерой объективной возможности появления данного события. Это число называется ***вероятностью события***. В некоторых учебниках это называется *статистическим определением вероятности*.

Свойство устойчивости частот, многократно проверенное экспериментально и подтверждающееся всем опытом практической деятельности людей, есть одна из наиболее характерных закономерностей, наблюдаемых в случайных явлениях.

Характеризуя вероятность события каким-то числом, мы не можем придать этому числу иного реального значения и иного практического смысла, чем относительная частота события при большом числе испытаний. Свойства так определённой вероятности должны быть аналогичны приведённым в пункте 1.3 свойствам относительной частоты.

Численная оценка степени возможности события посредством вероятности имеет практический смысл именно потому, что более вероятные события происходят в среднем чаще, чем менее вероятные.

Проверить такое предположение мы можем только для таких событий, вероятности которых можно вычислить другим путем (непосредственно). Многочисленные опыты, производившиеся со времен возникновения теории вероятности, подтверждают это предположение. Так, при большом n частота появления, например, цифры 6 на верхней грани игральной кости, близка к $1/6$, а частота появления «орла» при бросании монеты близка к 0,5.

Классическим примером, подтверждающим указанный принцип, являются приведенные в таблице 1.1 результаты опытов с многократным подбрасыванием монеты, выполненных Ж.Бюффоном[1] и К. Пирсоном[2].

Как видно, при большом числе испытаний относительная частота появления случайного события может рассматриваться как приближённое значение вероятности события A.

Как видно, при большом числе испытаний относительная частота появления случайного события $P^*(A)$ может рассматриваться как приближённое значение вероятности события A.

Таблица 1.1

Опыты	n	m	$P^*(A)$
Бюффона	4040	2048	0,5080
К.Пирсона	12000	6019	0,5016
К.Пирсона	24000	12012	0,5005

1.5. Классическое определение вероятности

В приложениях теории вероятностей имеется ряд задач, в которых вероятность можно вычислить с помощью так называемой ***классической формулы***. Это задачи, в которых результаты опытов обладают определённой симметрией и являются ***равновозможными***. Каждый из возможных результатов испытания назовем ***элементарным исходом*** или ***элементарным событием***.

[1]Бюффон Жорж Луи Леклерк (07.09.1707 – 16.04.1788) - французский естествоиспытатель.

[2]Пирсон Карл (27.03.1857 – 27.04.1936) – английский математик

Например, при бросании монеты возможны два элементарных исхода: выпадение «орла» и выпадение «решки»; при бросании игральной кости возможны 6 элементарных исходов: выпадение числа 1, числа 2 и т.д. до 6; при однократном розыгрыше тиража лотереи элементарных исходов столько, сколько билетов лотереи участвует в тираже.

Определение 1.9. *Элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает, назовем исходами,* ***благоприятствующими*** *этому событию.*

Так, при бросании игральной кости событию D: «выпало чётное число очков» благоприятствуют 3 элементарных исхода — выпадение 2, 4 или 6 очков.

Таким образом, событие D наблюдается, если в испытании наступает один из элементарных исходов, благоприятствующих ему; в этом смысле событие D «подразделяется» на несколько элементарных событий, сами же элементарные события в данной задаче не подразделяются на другие события.

Будем рассматривать ***равновозможные*** элементарные события, образующие ***полную группу попарно несовместных событий.***

Определения последних двух терминов приведены выше, что же касается равновозможности, то, как правило, это свойство элементарных событий очевидно вытекает из их «***равноправности***». Так, например, если игральная кость симметричная, то выпадение любого числа очков от 1 до 6 равновозможно.

Описанная схема носит название схемы случаев, а сами элементарные события, обладающие перечисленными свойствами, называются случаями. Вычисление вероятности по формуле (1.10) верно только для схемы случаев, которая неприменима, например, если число возможных исходов бесконечно.

Определение 1.10. *Вероятность события A равна отношению числа благоприятствующих этому событию исходов (m) к общему числу всех исходов данного испытания (n):*

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.10}$$

Формулу (1.10) принято называть «***классическим определением вероятности***».

Из этой формулы вытекают следующие свойства вероятности, аналогичные свойствам $P^*(A)$:

Вероятность случайного события заключена между 0 и 1:

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1. \tag{1.11}$$

Действительно, для любого события $0 \leqslant m \leqslant n$, поэтому: $0 \leqslant m/n \leqslant 1$.

Вероятность достоверного события равна единице:

$$P(\Omega) = 1. \tag{1.12}$$

Действительно, в случае достоверного события $m = n$ и $P(\Omega) = n/n = 1$.

Вероятность невозможного события равна нулю:

$$P(\varnothing) = 0. \tag{1.13}$$

Действительно, в случае невозможного события $m = 0$ и $P(\varnothing) = 0/n = 0$.

Замечание 1.4. *Заметим, что обратные утверждения, вообще говоря, не всегда справедливы. То есть события с нулевыми вероятностями не обязательно невозможны, а события с вероятностью, равной единице, не обязательно достоверны. Так, например, если производить стрельбу по мишени, то при каждом выстреле пуля попадает в какую-то точку (размер пули не учитывается). Поэтому событие A (попадание пули в данную точку) есть возможное событие. Однако число точек в мишени, в которые может попасть пуля при выстреле, настолько велико, что частота попадания в одну и ту же точку стремится к нулю. А это значит, что вероятность $P(A) = 0$.*

Следующее очень важное свойство называется: «Теорема сложения вероятностей для несовместных событий».

Теорема 1.2. *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей :*

$$P(A + B) = P(A) + P(B), \text{ если } A \cdot B = \varnothing. \tag{1.14}$$

►Действительно, обозначим m — число исходов, благоприятствующих событию A, l — число исходов, благоприятствующих событию B, n — общее число исходов данного испытания. Тогда:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad P(B) = \frac{l}{n}, \quad P(A + B) = \frac{m + l}{n},$$

если события несовместны. Отсюда следует равенство (1.14):

$P(A+B) = P(A) + P(B)$.◄

Непосредственным следствием этой теоремы является следующая теорема:

Теорема 1.3. *Вероятность противоположного к A события равна единице минус вероятность события A:*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{1.15}$$

►Действительно, событие A и $\overline{A}$ несовместны, а их сумма есть достоверное событие: $A \cdot \overline{A} = \varnothing$, $A + \overline{A} = \Omega$. Поэтому:

$1 = P(A+\overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \implies P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. ◄

С помощью классического определения вероятности можно вычислить вероятности в тех задачах, где применима схема случаев.

Пример 1.8. *Найти вероятность того, что при бросании игральной кости выпадает чётное число очков.*

►В соответствии с классическим определением вероятности $P(A) = \dfrac{m}{n}$. В данном примере общее число возможных исходов $n = 6$, количество исходов, благоприятствующих наступлению события A, $m = 3$ (это выпадение 2, 4 и 6 очков). Окончательно: $P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5$.◄

Ответ: $P(A) = 0{,}5$.

Пример 1.9. *Шифрзамок состоит из 4-х колёсиков по 10 цифр на каждом. Найти вероятность открыть замок с первой попытки при случайном наборе шифра.*

►Общее число возможных комбинаций из 4-х цифр $n = 10^4$ — все числа от 000 до 9999. Благоприятствующих исходов — один, $m = 1$.◄

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{10^4} = 0{,}0001$.

Пример 1.10. *Найти вероятность того, что при случайном выборе карты из колоды в 36 карт появится дама.*

►Общее число возможных исходов $n = 36$, благоприятствующих исходов — четыре: $m = 4$.

$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0{,}111$.◄

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{9}$.

Для решения более сложных задач познакомимся с некоторыми элементами комбинаторики.

1.6. Элементы комбинаторики

Для непосредственного подсчёта вероятности появления события на основе классического определения применяются, как правило, формулы комбинаторики (раздела математики, изучающего вопросы о том, сколько различных комбинаций (соединений) можно составить из заданного числа объектов).

Большинство задач комбинаторики решается с помощью двух основных правил: правила суммы и правила произведения.

Правило суммы. Если элемент a из некоторого конечного множества можно выбрать n_1 способами, а другой элемент b можно выбрать n_2 способами, то выбор «или a или b» можно осуществить n_1+n_2 способами.

При этом способы выбора элементов a и b не должны совпадать между собой. В противном случае будет $n_1 + n_2 - l$ способов выбора, где l – число совпадений.

Правило произведения. Пусть даны два упорядоченных множества A и B: A содержащее n_1 элементов $(a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}) \in A$ и B, содержащее n_2 элементов $(b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}) \in B$. Тогда можно образовать ровно $n_1 n_2$ различных пар (a_i, b_j), $i = \overline{1, n_1}$, $j = \overline{1, n_2}$, содержащих по одному элементу из каждого множества.

Это правило можно обобщить на случай любого конечного числа упорядоченных множеств.

Пример 1.11. *Имеются 3 партии деталей. В первой 12, во второй – 14, в третьей – 5 деталей. Сколько можно образовать комплектов из трёх деталей, содержащих по одной детали из каждой партии?*

►Полагая $n_1 = 12$, $n_2 = 14$ и $n_3 = 5$ по правилу произведения комбинаторики получим $n = n_1 n_2 n_3 = 12 \cdot 14 \cdot 5 = 840$ комплектов.◄

Пример 1.12. *Сколько паролей состоящих их двух символов можно получить из имеющихся трёх букв a, b, c, если: а) буквы не повторяются? б) если буквы повторяются?*

►а) $n_1 = 3, n_2 = 2$. Следовательно, $n = 2 \cdot 3 = 6$.
Перечислим их: $\{ab, ac, ba, bc, ca, cb\}$.

б) Так как символы могут повторятся, то $n_1 = 3, n_2 = 3$.
Следовательно, $n = 3 \cdot 3 = 9$: $\{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$.◄

Пример 1.13. *Четырёхзначный пароль состоит из двух частей по два символа в каждой (без повторений символов). При этом первая часть набирается из четырёх букв a,b,c,d, а вторая из трёх цифр 1,2,3. Сколько различных паролей можно набрать?*

►По правилу умножения первая часть пароля имеет $4 \cdot 3 = 12$ комбинаций: $ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc$,
а вторая — $3 \cdot 2 = 6$ комбинаций: $12, 13, 21, 23, 31, 32$.
Ещё раз применяем правило умножения $n = 12 \cdot 6 = 72$.◄

Определение 1.11. ***Факториалом*** *натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ ($n!$ читается «эн факториал»).* ***Факториал нуля*** *считается равным единице: $0! = 1$.*

Определение 1.12. ***Перестановками*** *называются различные способы упорядочивания n различных предметов (пронумерованных карточек) при их расположении слева направо.*

Можно доказать, что число перестановок

$$P_n = n!. \tag{1.16}$$

Действительно, первый из этих n предметов можно расположить на любом из n мест (n возможных способов расположения), для второго остаётся $n-1$ свободное место. Каждый способ расположения первого предмета может сочетаться с одним из способов расположения второго, значит эти два предмета можно расположить $n(n-1)$ способами. Повторяя это рассуждение, получим формулу (1.16).

Пример 1.14. *Найти вероятность того, что при случайном раскладе карточек с буквами $\boxed{Р}$ $\boxed{И}$ $\boxed{М}$ получится слово «МИР».*

►Общее число возможных исходов $n = 3! = 6$, число благоприятных исходов $m = 1$. В соответствии с классическим определением вероятности $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{6} \approx 0{,}167$.◄

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{6}$.

Пример 1.15. *Найти вероятность того, что при случайном раскладе карточек с буквами $\boxed{А}$ $\boxed{А}$ $\boxed{П}$ $\boxed{П}$ получится слово «ПАПА».*

◄Поскольку, в отличие от примера 1.14, здесь имеются карточки с одинаковыми буквами, пронумеруем их: $\boxed{\text{А}_1}$ $\boxed{\text{А}_2}$ $\boxed{\text{П}_1}$ $\boxed{\text{П}_2}$. Общее

число возможных исходов $n = 4! = 24$, благоприятными будут исходы, в которых буква А стоит на 2-м и 4-м местах (таких исходов $2! = 2$), а буква П стоит на 1-м и 3-м местах (таких исходов тоже $2! = 2$). Каждый способ расположения букв А может сочетаться с любым способом расположения букв П. Таким образом, число благоприятных исходов $m = 2! \cdot 2! = 4$. Окончательно:
$P(A) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$.◄

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{6} \approx 0{,}167$.

Определение 1.13. ***Размещениями*** *из n по m называются различные способы выбора m предметов из n, отличающиеся самими предметами или порядком их расположения в выборке.*

Можно доказать, что число размещений из n по m, обозначаемое A_n^m, определяется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (1.17)$$

►Доказательство проведем для A_n^3. Первый из n предметов можно разместить на любом из n мест, т.е. n способами, для второго остаётся $(n-1)$ способ размещения и, поскольку каждый способ размещения первого предмета может сочетаться с любым способом размещения второго, первые два предмета можно разместить $n(n-1)$ способами. Для третьего предмета остаётся (n-2) места, поэтому всего 3 предмета можно разместить $n(n-1)(n-2)$ способами: $A_n^3 = n(n-1)(n-2)$. Несложными преобразованиями доказывается и вторая из формул (1.17):

$$\frac{n!}{(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot \ldots \cdot 1}{(n-3) \cdot \ldots \cdot 1} = n(n-1)(n-2). \qquad (1.18)$$

◄

Размещения обладают следующими свойствами:

$$A_n^n = n! = P_n, \quad A_n^0 = 1, \quad A_n^1 = n. \qquad (1.19)$$

Действительно, число способов размещения n различных предметов на n местах (A_n^n) равно числу различных способов их упорядочивания, т.е. равно числу перестановок (P_n). 0 предметов можно разместить на n местах единственным способом («ничего не размещать»), а 1 предмет — n способами (или на 1-м месте, или на 2-м и т.д.). Указанные свойства вытекают также из формулы (1.17).

Размещения с повторениями вычисляются по формуле:

$$A_n^m = n^m. \tag{1.20}$$

Пример 1.16. *На карточках написаны буквы:* $\boxed{А}$ $\boxed{Б}$ $\boxed{Д}$ $\boxed{Е}$ $\boxed{О}$ $\boxed{П}$. *Найти вероятность того, что при случайном выборе 4-х из этих карточек и расположении слева направо получится слово: «ОБЕД».*

►Общее число возможных исходов $n = A_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$, т.к. порядок букв в слове наряду с их количеством определяет его смысл. Число благоприятных исходов $m = 1$.

Окончательно $P(A) = \dfrac{1}{360} \approx 0{,}003$.◄

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{360} \approx 0{,}003$.

Пример 1.17. *Ребенок играет с 10-ю буквами магнитной азбуки А, А, А, Б, Б, Б, Б, О, О, О. Найти вероятность того, что вынув наугад и разложив последовательно на доске 6 букв, он получит слово «БАОБАБ».*

►Число всех случаев n равно числу размещений из 10 элементов по 6: $n = A_{10}^6 = \dfrac{10!}{(10-6)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.

Число случаев m, благоприятствующих событию А, найдем, учитывая, что слово «БАОБАБ» не изменится, если две его буквы А выбирать из трёх данных букв А различными способами.

Число их равно A_3^2. Аналогично и для букв Б и О.

Поэтому $m = A_3^2 \cdot A_4^3 \cdot A_3^1$. Следовательно,

$P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{A_3^2 \cdot A_4^3 \cdot A_3^1}{A_{10}^6} = \dfrac{1}{350}$.◄

Если в множестве из n элементов имеются k различных элементов, n_1 одинаковых элементов одного типа, n_2 одинаковых элементов другого типа, n_i — число одинаковых элементов i–го типа, то можно показать, что число перестановок с повторениями из n элементов равно

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}. \tag{1.21}$$

Если в множестве из n элементов имеются m повторяющихся элементов, то число размещений с повторениями из n элементов по m элементов равно

$$\overline{A}\,_n^m = n^m. \tag{1.22}$$

Пример 1.18. *Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 2, 2, 2, 5, 5, 7.*

►Используем формулу (1.21). Здесь три двойки, две пятерки и одна семерка. Поэтому $n = 6, n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 1$. Получаем $P_6(3,2,1) = \dfrac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = \dfrac{6\cdot 5\cdot 4}{2} = 60$.◄

Определение 1.14. ***Сочетаниями*** *из n по m называются различные способы выбора m предметов из n, отличающиеся самими предметами.*

Число сочетаний из n по m определяется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{1.23}$$

Действительно, число размещений из n по m (A_n^m) в $m!$ раз больше числа сочетаний C_n^m, т.к. в сочетаниях не учитываются различные перестановки m предметов на занимаемых ими местах (порядок расположения предметов для сочетаний несущественен):

$$A_n^m = C_n^m \cdot m! \;\Rightarrow\; C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Сочетания обладают следующими свойствами:

(1) $C_n^m = C_n^{n-m}$,

(2) $C_n^0 = C_n^n = 1, \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n$,

(3) $\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i = \left(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n\right) = (1+1)^n = 2^n$.

Первое и второе свойства непосредственно вытекают из формулы 1.23 или определения 1.14 (сделайте это самостоятельно).

►Для доказательства третьего свойства напомним формулу бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}. \tag{1.24}$$

Полагая $a = b = 1$, получаем свойство 3.◄

Число сочетаний с повторениями из n элементов по m элементов определяется формулой

$$\overline{C}\,_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}. \tag{1.25}$$

Пример 1.19. *Найти вероятность того, что при случайном выборе 5 шаров из урны, содержащей 10 шаров, из которых 3 белых и 7 красных, среди выбранных окажется 2 белых и 3 красных.*

►Запишем условия кратко:

$10ш = 3б + 7кр,$
$5ш = 2б + 3кр$.

Будем предполагать, что шары в урне пронумерованы от 1 до 10, причём шары с 1 по 3 — белые, а с 4 по 10 — красные. Общее число возможных исходов n равно числу способов, которыми из 10 шаров можно выбрать 5:

$$n = C_{10}^5 = \frac{10!}{5! \cdot (10-5)!} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252.$$

Число благоприятствующих исходов m равно числу способов, которыми из 3 белых шаров можно выбрать 2 белых, а из 7 красных шаров можно выбрать 3 красных. Так как каждый способ выбора белых шаров может сочетаться с любым способом выбора красных, получаем:

$$m = C_3^2 \cdot C_7^3 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 105.$$

Окончательно: $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{C_3^2 \cdot C_7^3}{C_{10}^5} = \dfrac{105}{252} \approx 0{,}417$ ◄.

Ответ: $P(A) \approx 0{,}417$.

Данную задачу можно записать в общем виде. В урне находятся n белых и m чёрных шаров. Из урны случайным образом выбрали $k+l$ шаров. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно k белых и l чёрных шаров.

$$P(A) = \frac{C_n^k \cdot C_m^l}{C_{n+m}^{k+l}}. \tag{1.26}$$

Замечание 1.5. *Вместо урны может быть любой другой объект (колода карт, экзаменационные билеты, книги, карандаши и т.д.), а вместо шаров другие предметы, причём их может быть несколько.*

Задачу можно обобщить на k групп. Пусть имеется n_1 предметов первого типа, n_2 предметов второго типа,..., n_k предметов k-го типа. Из этих $N = n_1 + n_2 + \cdots n_k$ предметов выбирают M предметов. Найти вероятность того, что среди выбранных предметов будет m_1 предметов первого типа, m_2 предметов второго типа,..., m_k предметов k-го типа. Очевидно, что $M = m_1+m_2+\cdots m_k$. Тогда вероятность искомого события A будет равна

$$P(A) = \frac{C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} \cdots C_{n_k}^{m_k}}{C_N^M}. \tag{1.27}$$

Пример 1.20. *Найти вероятность того, что при случайном выборе 10 шаров из урны, содержащей 20 шаров, из которых 6 белых и 14 чёрных , среди выбранных окажется 4 белых и 6 чёрных.*

►Решение данной задачи можно записать в виде $P(A) = \dfrac{C_6^4 \cdot C_{14}^6}{C_{20}^{10}}$.

Для получения числового значения применяем формулу (1.23)
$\dfrac{C_6^4 \cdot C_{14}^6}{C_{20}^{10}} = \dfrac{6! \cdot \quad 14! \quad \cdot 10! \cdot 10!}{4! \cdot 2! \; 6! \cdot 8! \; \cdot 20!}$. После сокращения получаем
$P(A) = \dfrac{315}{1292}$.◄

В современную эпоху развития компьютерной техники, когда большинство студентов имеют смартфоны, позволяющие применять стандартные пакеты компьютерной математики, необходимо обучать их использовать эти пакеты и доводить решение, даже сложных задач, до числового значения. На смартфонах можно использовать как коммерческие пакеты, так и свободные. Заставлять студента покупать коммерческие пакеты преподаватель не имеет право, поэтому в дальнейшем будут приведены примеры программ для свободного пакета maxima, работающего в операционных системах Android, Windows и Linux. Студент может, прямо на первом занятии, её скачать и установить за 5 минут. В дальнейшем пакет maxima и коммерческий пакет MathCad часто будут использоваться для вычислений и графического представления различных функций.

Официальный интернет — адрес для скачивания свободного пакета maxima:
https://sourceforge.net/projects/maxima/files/Maxima-Windows

Maxima-программа, решающая поставленную задачу, имеет вид:
(%i1) P:binomial(6, 4)*binomial(14, 6)/binomial(20, 10);
$(P)\dfrac{315}{1292}$

При многократном использовании встроенной функции binomial программу можно укоротит, заменив имя функции на более короткое. Например, C(n,m):=binomial(n, m);
И тогда во все командах можно использовать данную функцию
P:C(6, 4)*C(14, 6)/C(20, 10);P,numer;

Для вычисления числа размещений можно ввести функцию:
A(n,m):= n!/(n-m)!;

Если результат необходимо получить в виде приближённого десятичного числа, то подаём такую команду:

(%i1) P,numer;

(%io) 0.2438080495356

Ответ: $P(A) = \dfrac{315}{1292} \approx 0{,}244$.

1.7. Понятие об аксиоматике теории вероятностей

В первой половине XX в. нашим соотечественником А. Н. Колмогоровым было предложено строгое аксиоматическое построение теории вероятностей. Теория вероятностей строится на основании ряда аксиом, некоторые из которых приведены ниже.

(1) Вводится понятие случайных событий и операций над ними, включая сумму бесконечного числа случайных событий.
(2) $P(A) \geqslant 0$.
(3) Для достоверного события Ω, $P(\Omega) = 1$.
(4) Для попарно несовместных событий $A_1, \ldots, A_n, \ldots$, вероятность суммы (конечной или бесконечной) равна сумме вероятностей:
$$p\Big(\sum_i A_i\Big) = \sum_i p(A_i).$$

Из этих аксиом выводятся уже известные нам свойства:
$$0 \leqslant p(A) \leqslant 1,\ p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$
и все остальные теоремы теории вероятностей.

Для схемы случаев вычисление вероятности сводится к уже известному классическому определению вероятности. Однако такое построение позволило получить строгий математический подход и решать любые задачи, относящиеся к сфере действия теории вероятностей.

1.8. Геометрическое определение вероятности

Классическое определение вероятности неприменимо к испытаниям в которых элементарные исходы опыта не равновозможны и когда число элементарных исходов бесконечно. Задачи, связанные с такими испытаниями, сводятся к случайному бросанию точки в некоторую область. Пусть на плоскости имеется некоторая область F и в ней подобласть f. Предполагая, что вероятность попадания случайной точки в подобласть f не зависит ни от ее формы, ни от ее расположения в области F, а пропорциональна площади f, определим вероятность попадания случайной точки в заданную подобласть как отношение мер областей:

$$P(M \in F) = \frac{mes\,f}{mes\,F}.$$

Здесь mes — мера области: в одномерном случае – длина отрезка, в двумерном – площадь, в трёхмерном — объём. Определённая таким образом вероятность называется геометрической вероятностью.

Пример 1.21. *Два друга решили встретиться на автобусной остановке с 14:00 до 15:00 часов, при этом договорились ожидать только в течение 5 минут. Какова вероятность встречи друзей?*

►Обозначим за x и y время прихода первого и второго друга, соответственно, $0 < x, \quad y < 60$ (минут). В прямоугольной системе координат этому условию удовлетворяют точки, лежащие внутри квадрата $OABC$. Друзья встретятся, если между моментами их прихода пройдет не более 5 минут, то есть $|y - x| < 5$.

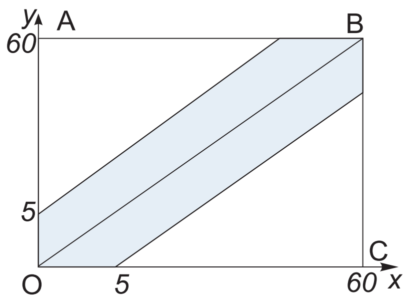

Рис. 1. Задача о встрече

Задача сводится к решению системы неравенств.
$y - x < 5, \quad x - y < 5, \quad x \in [0, 60], y \in [0, 60].$

Этим неравенствам удовлетворяют точки, лежащие внутри закрашенной области G, рис. 1. Тогда вероятность встречи равна отношению площадей области G и квадрата $OABC$, то есть

$$P(A) = \frac{S_G}{S_{OABC}} = \frac{60^2 - 55^2}{60^2} = \frac{5 \cdot 115}{60^2} = \frac{23}{144} = 0{,}16.◄$$

Ответ: 0,16.