Лекция 6. Предельные теоремы теории вероятностей

Законы больших чисел. Центральная предельная теорема. Начальные и центральные моменты. Распределения, используемые в статистике

6.1. Законы больших чисел

В данной лекции мы познакомимся с разделом теории вероятностей, посвящённым получению приближённых формул для вероятностей суммы большого числа случайных величин.

С некоторыми из этих приближённых формул мы уже познакомились в предыдущей лекции.

Теорема 6.1. *(Неравенство Чебышева.) Для случайной величины ξ при $\forall\ \varepsilon > 0$ верно неравенство:*

$$P\{|\xi - M(\xi)| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство проведём для непрерывной случайной величины ξ с плотностью $f(x)$, хотя теорема верна и для дискретных случайных величин. Оценим вероятность противоположного события:

$$P\{|\xi - M(\xi)| \geqslant \varepsilon\} = P\{\xi \geqslant M(\xi) + \varepsilon \text{ или } \xi \leqslant M(\xi) - \varepsilon\} =$$

$$= P\{\xi \leqslant M(\xi) - \varepsilon\} + P\{\xi \geqslant M(\xi) + \varepsilon\} = \int\limits_{-\infty}^{M(\xi)-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{M(\xi)+\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{M(\xi)-\varepsilon} \frac{\big(x - M(\xi)\big)^2}{\varepsilon^2} f(x)dx + \int\limits_{M(\xi)+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\big(x - M(\xi)\big)^2}{\varepsilon^2} f(x)dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{M(\xi)} \frac{\big(x - M(\xi)\big)^2}{\varepsilon^2} f(x)dx + \int\limits_{M(\xi)}^{+\infty} \frac{\big(x - M(\xi)\big)^2}{\varepsilon^2} f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(x - M(\xi)\big)^2 f(x)dx = \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Первое неравенство в этой цепочке объясняется тем, что подынтегральные функции умножили на выражение $\dfrac{\big(x - M(\xi)\big)^2}{\varepsilon^2}$, которое больше или равно 1, т.к. в области интегрирования x удовлетворяет неравенству $|x - M(\xi)| \geqslant \varepsilon$. Второе неравенство верно, т.к. при увеличении интервала интегрирования интеграл от неотрицательной функции не уменьшается.

Из полученного неравенства: $P\{|\xi - M(\xi)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \dfrac{D(\xi)}{\varepsilon^2}$; переходя к вероятности противоположного события, получаем неравенство Чебышева.

Пример 6.1. *В партии 10 лампочек вероятность отказа каждой из которых* 0,05. *Оценить вероятность того, что абсолютная величина отклонения числа отказавших ламп от математического ожидания меньше одного.*

►Пусть ξ — число отказавших лампочек; эта случайная величина имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 10$, $p = 0{,}05$.

$$M(\xi) = np = 0{,}5;\ D(\xi) = npq = 0{,}475.$$

По теореме 6.1 имеем:

$$P\{|\xi - 0{,}5| < 1\} \geqslant 1 - \frac{0{,}475}{1}.$$

$P\{|\xi - 0{,}5| < 1\} \geqslant 0{,}525$.◄

Замечание 6.1. *Неравенство Чебышева используется при доказательстве ряда теорем (иногда его называют лемма Чебышева), однако оно даёт довольно грубую оценку для приведённой вероятности. Так, в примере 6.1, раскрывая модуль, мы получили неравенство:*

$$P\{-0{,}5 < \xi < 1{,}5\} \geqslant 0{,}525.$$

Однако приведённый интервал может быть заведомо уменьшен, т.к. $\xi \geqslant 0$*:*

$$P\{-0{,}5 < \xi < 1{,}5\} = P\{0 \leqslant \xi < 1{,}5\}.$$

Теорема 6.2. *(Закон больших чисел в форме Чебышева.) Если* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *— независимые случайные величины с равномерно ограниченными дисперсиями* $\Big(D(\xi_i) \leqslant C, i = 1, 2, \ldots\Big)$, *то для* $\forall\ \varepsilon > 0$ *будет:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(\xi_i)\ \right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Доказательство. Обозначим $\zeta_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$. Пользуясь свойствами математического ожидания и дисперсии, получаем:

$$M(\zeta_n) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} M(\xi_i)}{n}, \quad D(\zeta_n) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} D(\xi_i)}{n^2} \leqslant \frac{n\cdot C}{n^2} = \frac{C}{n}.$$

На основании неравенства Чебышева для ζ_n получаем:

$$P\{|\zeta_n - M(\zeta_n)| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{D(\zeta_n)}{\varepsilon^2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 1 \geqslant P\left\{\left|\ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}M(\xi_i)}{n}\ \right| < \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, поскольку пределы левой и правой частей равны 1, получаем утверждение теоремы.

Закон больших чисел в форме Чебышева утверждает, что для большого числа независимых случайных величин практически невозможны значительные отклонения их среднего арифметического от среднего арифметического их математических ожиданий.

Следствие 6.1. *Если в условиях теоремы 6.2* $M(\xi_1) = M(\xi_2) = \ldots = a$, *то для* $\forall\ \varepsilon > 0$ *будет:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\sum \xi_i}{n} - a\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Действительно, в этом случае $M(\zeta_n) = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} M(\xi_i)}{n} = \dfrac{na}{n} = a$.

Замечание 6.2. *На практике закон больших чисел в форме Чебышева применяют, например, в теории ошибок. Следует отметить,* *что результат любого измерения есть случайная величина. При этом различают грубые ошибки измерения, которые можно устранить, основываясь на физической природе измеряемого объекта, Так, если в ряду измерения роста группы людей встретилось значение* 17,8 *м. — это, очевидно, грубая ошибка измерения. Данный результат следует изъять, если нельзя его уточнить. Далее, бывают систематические ошибки измерения. Эти ошибки, как правило, вызываются неисправностью измерительного прибора; они не являются случайными и их можно устранить, проверив прибор и внеся поправку в измерения. Так, например, если часы спешат на 5 минут, то от измеренной величины нужно отнять* 5 *минут, чтобы получить верное время. Наконец, все остальные ошибки — случайные ошибки измерения, вызываются множеством различных факторов: дрожание стрелки прибора, неточное считывание показаний («косо взглянул» на стрелку), отклонения в условиях измерения и проч. Таким образом, результат измерения можно считать случайной величиной, равной сумме большого числа других случайных величин. В соответствии с теоремой 6.2 для уточнения результата нужно произвести n независимых измерений и усреднить их результат. Следует, однако, заметить, что все равно результат будет получен с точностью, не превышающей точности самого измерительного прибора, которая обычно указывается в технической документации на него.*

Теорема 6.3. *(Закон больших чисел в форме Бернулли.) В независимых испытаниях Бернулли с вероятностью p появления события A в каждом для $\forall\ \varepsilon > 0$ будет:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

здесь m — число появлений события A в n испытаниях.

Доказательство. Представим относительную частоту $\dfrac{m}{n}$ в виде отношения $\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}$, где случайная величина $\xi_i = 1$, если в i-м испытании появилось событие A (см. п. 91.1). Для случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ выполняется следствие 6.1, т.к. $M(\xi_1) = M(\xi_2) = \ldots =$, $= p$, $D(\xi_1) = D(\xi_2) = \ldots = pq \leqslant 1$. На основании следствия 6.1 получаем утверждение теоремы 6.3.

Теорема 6.3 даёт теоретическое обоснование статистическому определению вероятности, т.к. утверждает, что при большом числе независимых испытаний практически невозможны значительные отклонения относительной частоты события A от вероятности p его появления в каждом испытании.

Из законов больших чисел не следует, что при $n \to \infty$ предел последовательности случайных величин равен какому-то числу (среднему арифметическому математических ожиданий). Обычное понятие предела неприменимо к последовательности случайных величин.

Определение 6.1. *Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ \ldots, \xi_n, \ldots$ сходится по вероятности к числу a, если для $\forall\ \varepsilon > 0$ будет:*

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\xi_n - a| < \varepsilon\} = 1.$$

Итак, закон больших чисел в форме Чебышева утверждает, что при выполнении определённых условий среднее арифметическое n независимых случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий при $n \to \infty$.

Самостоятельно сформулируйте закон больших чисел в форме Бернулли, используя сходимость по вероятности.

6.2. Центральная предельная теорема

Известно, что нормальные случайные величины широко распространены на практике, что и объясняет их название. В чём причина этого? Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема, доказанная русским математиком А.М. Ляпуновым.

Теорема 6.4. *(Центральная предельная теорема.) Если случайная величина ζ_n является суммой большого числа n независимых случайных величин, удовлетворяющих условию Ляпунова, то ζ_n имеет распределение, близкое к нормальному:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\zeta_n - A_n}{B_n} < x\right\} = 0{,}5 + \Phi(x),$$

где $\quad \zeta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \quad A_n = M(\zeta_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} M(\xi_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i,$

$$B_n^2 = D(\zeta_n) = \sum_{i=1}^{n} D(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} b_i^2, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Условие Ляпунова заключается в следующем:

(1) Все случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют одинаковое распределение.

(2) Все дисперсии $D(\xi_1), D(\xi_2), \ldots$ конечны и отличны от нуля.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} M\left|\xi_i - M(\xi_i)\right|^{2+\delta}}{\left(\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\right)^{\frac{2+\delta}{2}}} = 0$ для некоторого $\delta > 0$.

Условия Ляпунова приводят к тому, что в сумме $\dfrac{\zeta_n - A_n}{B_n}$ каждое слагаемое оказывает на сумму малое влияние. Мы примем эту теорему без доказательства.

Дискретные двумерные случайные величины. Двумерная функция распределения и плотность. Регрессия. Коэффициент корреляции. Прямые среднеквадратической регрессии

6.3. Дискретные двумерные случайные величины.

Распределение случайного вектора

Во многих реальных задачах мы имеем не одну, а несколько случайных величин в одном и том же эксперименте. Иногда их удобно рассматривать как единый объект. Это приводит нас к следующему определению.

Определение 6.2. *n -мерным случайным вектором называется набор $\xi = (\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n)$ случайных величин, заданных на одном и том же вероятностном пространстве (Ω, A, P).*

Фактически случайный вектор ξ есть отображение $\xi : \Omega \to R^n$

Приведём примеры многомерных случайных величин.

1. Результаты экзаменационной сессии студенческих групп характеризуется системой n случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — оценками по различным предметам.

2. Отклонение пули от центра мишени можно задавать как четырёхмерный случайный вектор: $\mathbf{X} = (\xi; \eta; \eta; \tau)$, где случайные величины: ξ, η, η, τ — отклонение пули вправо, вверх, влево, вниз, соответственно.

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, входящие в систему, могут быть дискретными и непрерывными.

Для простоты и большей наглядности, рассмотрим двумерные случайные векторы. Будем рассматривать точку на плоскости со случайными координатами $(\xi; \eta)$. Сначала рассмотрим случай, когда обе составляющие — дискретные случайные величины.

Определение 6.3. *Законом распределения дискретной двумерной случайной величины называют перечень возможных значений этой величины, т.е. пар чисел $(x_i; y_j)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, и их вероятностей $p_{ij} = P\{\xi = x_i; \eta = y_j\}$.*

Закон распределения задают в виде таблицы с двойным входом, в которой указывают все значения x_i, y_i и вероятности p_{ij}.

$\xi \backslash \eta$	y_1	$\ldots$	y_j	$\ldots$	y_m
x_1	p_{11}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$	p_{1m}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$	p_{im}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	$\ldots$	p_{nj}	$\ldots$	p_{nm}

Добавим к этой таблице ещё справа одну строку и снизу один столбец, в которые запишем суммы элементов.

Таблица 6.1

Распределение двумерной дискретной случайной величины						
$\xi \backslash \eta$	y_1	$\ldots$	y_j	$\ldots$	y_m	$P\{\xi = x_i\}$
x_1	p_{11}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$	p_{1m}	p_{1*}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$	p_{im}	p_{i*}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	$\ldots$	p_{nj}	$\ldots$	p_{nm}	p_{n*}
$P\{\eta = y_j\}$	p_{*1}	$\ldots$	p_{*j}	$\ldots$	p_{*m}	1

Так как события $\{\xi = x_i, \eta = y_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ попарно несовместны и в сумме дают достоверное событие, сумма всех вероятностей равна 1.

Зная двумерный закон распределения, можно найти закон распределения каждой составляющей (но не наоборот). Действительно:

$$\begin{gathered} P\{\xi = x_i\} = P\{\xi = x_i, \eta = y_1\} + P\{\xi = x_i, \eta = y_2\} + \ldots \\ \ldots + P\{\xi = x_i, \eta = y_m\} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = p_{i*}. \end{gathered} \tag{6.1}$$

Аналогично

$$P\{\eta = y_i\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = p_{*tj}. \tag{6.2}$$

Итак, сложив вероятности «по строкам» и записав их в последний столбец, мы получим распределение составляющей ξ (первый и последний столбец таблицы 6.1). Сложив вероятности по столбцам и записав их в последнюю строчку, мы получим распределение составляющей η (первая и последняя строки таблицы 6.1).

Зная распределение составляющих, можем найти числовые характеристики каждой из них:

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_{i*}, \qquad M(\eta) = \sum_{j=1}^{m} y_j p_{*j}. \tag{6.3}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.4. *Точка с координатами $\big(M(\xi); M(\eta)\big)$ называется центром распределения.*

Отметим, что таблица 6.1, кроме информации о распределении каждой составляющей, содержит также информацию об их взаимном влиянии.

Найдём, например, условные вероятности $P\{\eta = y_j/\xi = x_i\}$ и $P\{\xi = x_i/\eta = y_j\}$. Из формулы (2.3) следует, что

$$P(B/A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}. \tag{6.4}$$

Поэтому

$$P\{\eta = y_j/\xi = x_i\} = \frac{P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}}{P\{\xi = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i*}}. \tag{6.5}$$

Аналогично:

$$P\{\xi = x_i/\eta = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{*j}}. \tag{6.6}$$

Очевидно, что $\sum\limits_{j=1}^{m} P\{\eta = y_j/\xi = x_i\} = 1$ для $i = 1, \ldots, n$, так же, как и $\sum\limits_{i=1}^{n} P\{\xi = x_i/\eta = y_j\} = 1$ для $j = 1, \ldots, m$ (докажите самостоятельно).

Вероятности $P\{\eta = y_j/\xi = x_i\}$ для $j = 1, \ldots, m$ образуют условное распределение случайной величины η при фиксированном значении ξ. В частности, можно найти условное математическое ожидание η при фиксированном значении ξ:

$$M(\eta/\xi = x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j P\{\eta = y_j/\xi = x_i\} \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n \tag{6.7}$$

и условное математическое ожидание ξ при фиксированном значении η:

$$M(\xi/\eta = y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i P\{\xi = x_i/\eta = y_j\} \quad \text{для} \quad j = 1, \ldots, m. \tag{6.8}$$

Замечание 6.3. *Легко показать, что для независимых дискретных случайных величин ξ и η*

$$P\{\eta = y_j/\xi = x_i\} = P\{\eta = y_j\} \quad и \quad P\{\xi = x_i/\eta = y_j\} = P\{\xi = x_i\}.$$

Другими словами, закон распределения каждой из них не зависит от значений, принимаемых другой.

Действительно, по определению 4.12 для независимых дискретных случайных величин ξ и η вероятность $p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$, поэтому:

$$P\{\eta = y_j/\xi = x_i\} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} = \frac{p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}}{p_{i\cdot}} = p_{*j}\,. \tag{6.9}$$

Аналогично получаем:

$$P\{\xi = x_i/\eta = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} = \frac{p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}}{p_{\cdot j}} = p_{i*}\,. \tag{6.10}$$

Пример 6.2. *Дискретная двумерная случайная величина задана таблицей 6.2.*

Таблица 6.2

Условие примера 6.2			
$\xi\backslash\eta$	1	3	5
1	0,1	0,2	0,3
2	0,0	0,3	0,1

Проверить независимость случайных величин ξ и η. Найти безусловное и условное математическое ожидание η при условии $\xi = 2$, а также безусловное и условное математическое ожидание ξ при условии $\eta = 1$. Найти математическое ожидание и дисперсию произведения $\xi\eta$.

►Сначала проверим зависимы ли случайные величины ξ и η.

Просуммируем вероятности по строкам и столбцам таблицы 6.2, и допишем их в таблицу распределения (в последний столбец и строку) (см. табл. 6.3).

Таблица 6.3

Решение примера 6.2				
$\xi\backslash\eta$	1	3	5	$P\{\xi = x_i\}$
1	0,1	0,2	0,3	0,6
2	0,0	0,3	0,1	0,4
$P\{\eta = y_i\}$	0,1	0,5	0,4	1

Проверяем выполнимость условий независимости
$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_{i*}p_{*j}$.

Мы видим, что уже для первой ячейки $(\xi = 1, \eta = 1)$ таблицы это условие не выполняется: $0{,}1 \neq 0{,}6 \cdot 0{,}1$. Следовательно, ξ и η зависимы.

Найдём теперь безусловные распределения случайных величин ξ и η. Искомые безусловные математические ожидания получатся как обычно для дискретных распределений:

$$M(\xi) = 1 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}4 = 1{,}4,$$
$$M(\eta) = 1 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}4 = 3{,}6.$$

Далее, по формулам (6.5) и (6.6) найдём условные распределения $P\{\eta = y_j/\xi = 2\}$ и $P\{\xi = x_i/\eta = 1\}$:

$$P\{\eta = y_j/\xi = 2\} = \frac{P\{\eta = y_j,\ \xi = 2\}}{P\{\xi = 2\}} = \frac{P\{\eta = y_j,\ \xi = 2\}}{0{,}4},$$
$$P\{\xi = x_i/\eta = 1\} = \frac{P\{\xi = x_i,\ \eta = 1\}}{P\{\eta = 1\}} = \frac{P\{\xi = x_i,\ \eta = 1\}}{0{,}1}.$$

Результаты представлены в таблицах 6.4, 6.5.

Условные распределения

Таблица 6.4

η	1	3	5
$P\{\eta = y_j/\xi = 2\}$	0	3/4	1/4

Таблица 6.5

ξ	1	2
$P\{\xi = x_i/\eta = 1\}$	1	0

Найдём теперь условные математические ожидания по формулам (6.7), (6.8) для данных из таблиц 6.4, 6.5.

$$M(\xi/\eta = 1) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1,$$
$$M(\eta/\xi = 2) = 1 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{3}{4} + 5 \cdot \frac{1}{4} = 3{,}5.$$

Как видим, условные и соответствующие безусловные математические ожидания различаются.

Найдём теперь математическое ожидание произведения $\xi\eta$. Для этого напишем статистический ряд этой случайной величины.

Таблица 6.6

Распределение произведения случайных величин						
$\xi\eta$	1	2	3	5	6	10
P	0,1	0,0	0,2	0,3	0,3	0,1

$$M(\xi\eta) = 1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 0{,}2 + 5\cdot 0{,}3 + 6\cdot 0{,}3 + 10\cdot 0{,}1 = 5{,}1$$

$D(\xi\eta) = M((\xi\eta)^2) - M^2(\xi\eta) = 1\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0 + 9\cdot 0{,}2 + 25\cdot 0{,}3 + 36\cdot 0{,}3 + 10\cdot 0{,}1 - 5{,}1^2 = 30{,}2 - 26{,}01 = 4{,}19.$◄

Ответ: $M(\xi) = 1{,}4$; $M(\eta) = 3{,}6$; $M(\xi/\eta = 1) = 1$; $M(\eta/\xi = 2) = 3{,}5$; $M(\xi\eta) = 5{,}1$; $D(\xi\eta) = 4{,}19$.

6.4. Двумерная функция распределения и плотность

Приводимое ниже определение 6.5 функции распределения справедливо для любой двумерной случайной величины. Заметим, однако, что дискретная случайная величина полностью определяется таблицей 6.1, работать с которой удобнее, чем с функцией распределения двумерной дискретной случайной величины.

Определение 6.5. *Функцией распределения двумерной случайной величины $(\xi;\eta)$ называют*

$$F(x;y) = P\{\xi < x; \eta < y\}. \tag{6.11}$$

Двумерная функция распределения обладает следующими свойствами:

(1) $0 \leqslant F(x;y) \leqslant 1$;
(2) $F(-\infty;y) = F(x;-\infty) = F(-\infty;-\infty) = 0 \quad F(+\infty;+\infty) = 1$;
(3) $F(x;y)$ есть неубывающая функция по каждому аргументу;
(4) Функции распределения каждой составляющей получаются предельным переходом:

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = F(x;+\infty),$$
$$F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = F(+\infty;y);$$

(5) Вероятность попадания в прямоугольник выражается через функцию распределения по формуле:

$$\begin{aligned} P\{x_1 \leqslant \xi < x_2; y_1 \leqslant \eta < y_2\} = \\ = \big(F(x_2;y_2) - F(x_2;y_1)\big) - \big(F(x_1;y_2) - F(x_1;y_1)\big). \end{aligned} \tag{6.12}$$

Доказательства свойств 1, 2 непосредственно следуют из определения 6.5 (проведите их самостоятельно). Доказательство свойства 3 аналогично доказательству свойства 3 функции распределения $F(x)$ в п. 90.2.

Свойство 4 очевидно:
$F(x;+\infty) = P\{\xi < x; \eta < +\infty\} = P\{\xi < x\} = F_\xi(x)$.

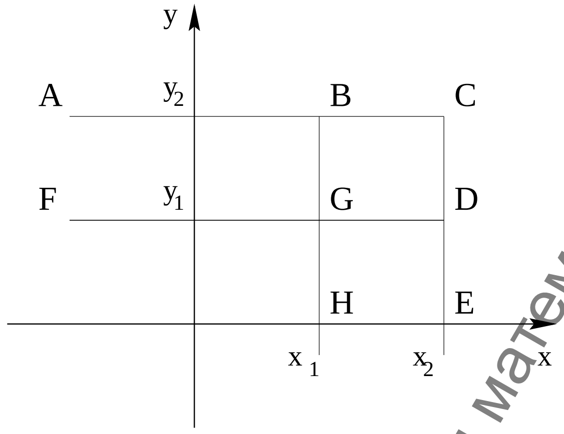

Рис. 22. *Вероятность попадания в прямоугольник*

Для доказательства свойства 5 заметим, что согласно определению 6.5 $F(x_2; y_2)$ есть вероятность попадания двумерной случайной величины в угол ACE, $F(x_2; y_1)$ — в угол FDE; следовательно $\big(F(x_2; y_2) - F(x_2; y_1)\big)$ есть вероятность попадания в полуполосу $ACDF$ (рис. 22). Аналогично $\big(F(x_1; y_2) - F(x_1; y_1)\big)$ есть вероятность попадания в полуполосу $ABGF$. Следовательно, разность этих вероятностей есть вероятность попадания в прямоугольник $BCDG$.

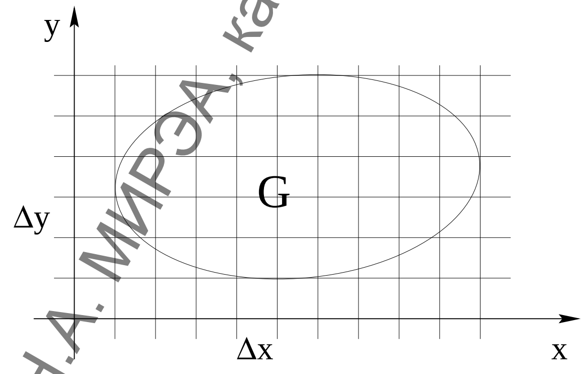

Рис. 23. *Вероятность попадания в область*

Определение 6.6. *Двумерная случайная величина $(\xi; \eta)$ называется непрерывной, если её функция распределения $F(x; y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные второго порядка всюду (за исключением быть может, конечного числа кривых).*

Определение 6.7. *Плотностью распределения двумерной непрерывной случайной величины $(\xi;\eta)$ называется вторая смешанная частная производная функции распределения:*

$$f(x;y) = \frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial x \partial y}. \tag{6.13}$$

Двумерная плотность распределения обладает следующими свойствами:

(1) $f(x;y) \geqslant 0$;

(2) $f(-\infty;y) = f(x;-\infty) = f(\pm\infty;\pm\infty) = 0$;

(3) $F(x;y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(s;t)dsdt$;

(4) Вероятность попадания двумерной случайной величины $(\xi;\eta)$ в область G равна:

$$P\{(\xi;\eta)\in G\} = \iint\limits_G f(x;y)dxdy;$$

(5) $\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dxdy = 1$.

Свойство 1 есть следствие свойства 3 $F(x;y)$: производная от неубывающей функции неотрицательна. Свойство 2 вытекает из свойства 2 $F(x;y)$, т.к. производная константы равна нулю.

Свойство 3 следует из определения 6.7, поскольку $F(x;y)$ является первообразной для $f(x;y)$.

Для доказательства свойства 4 область G следует разбить на множество прямоугольников со сторонами Δx и Δy (рис. 23). Вероятность попадания в i-й из них определяется с помощью свойства 5 функции распределения $F(x;y)$. Применим к правой части этого равенства формулу Лагранжа:

$$\begin{gathered} P\{x_{1i} \leqslant \xi < x_{2i}; y_{1i} \leqslant \eta < y_{2i}\} = \big(F(x_{2i};y_{2i}) - F(x_{2i}y_{1i})\big) - \\ -\big(F(x_{1i};y_{2i}) - F(x_{1i}y_{1i})\big) = F''_{xy}(s_i;t_i)\Delta x\Delta y = f(s_i;t_i)\Delta x \Delta y, \end{gathered} \tag{6.14}$$

где точка $(s_i;t_i)$ находится внутри i-го прямоугольника.

Очевидно, что вероятность попадания в область G приближённо равна сумме вероятностей попадания в эти прямоугольники:

$$P\{(\xi;\eta)\in G\} \approx \sum_{i=1}^{n} f(s_i;t_i)\Delta x\Delta y.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ $(n \to \infty)$, получим свойство 4 плотности $f(x;y)$.

Теперь свойство 5 очевидно, т.к. вероятность попасть во всю плоскость с одной стороны равна $\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dxdy$, а с другой стороны — есть достоверное событие.

Плотности распределения составляющих двумерной непрерывной случайной величины получаются из её плотности $f(x;y)$ по формулам (6.15):

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dy; \qquad f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dx. \tag{6.15}$$

Действительно, поскольку $F(x;y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(s;t)dsdt$, получаем $F_\xi(x) = F(x;+\infty) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s;t)dsdt$. Продифференцировав обе части этого равенства, получим:

$$f_\xi(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s;t)dsdt\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;t)dt.$$

Из равенства (6.14) следует, что вероятностный смысл двумерной плотности состоит в том, что $f(x;y)$ равна вероятности попадания случайной точки в прямоугольник с вершиной $(x;y)$, с малыми сторонами $\Delta x, \Delta y$, отнесённой к площади этого прямоугольника.

Аналогично тому, как это было сделано для дискретной случайной величины, найдём условную плотность составляющей η при фиксированной величине ξ и наоборот.

Определение 6.8. *Условной плотностью $f(y/\xi = x)$ распределения η при условии, что $\xi = x$, называется:*

$$f(y/\xi = x) = \left[\begin{array}{ll} 0, & f_\xi(x) = 0, \\ \dfrac{f(x;y)}{f_\xi(x)}, & f_\xi(x) \neq 0. \end{array}\right. \tag{6.16}$$

Условной плотностью $f(x/\eta = y)$ распределения ξ при условии, что $\eta = y$, называется:

$$f(x/\eta = y) = \left[\begin{array}{ll} 0, & f_\eta(y) = 0, \\ \dfrac{f(x;y)}{f_\eta(y)}, & f_\eta(y) \neq 0. \end{array}\right. \tag{6.17}$$

Заметим, что формулы (6.16), (6.17) соответствуют формуле (6.4), если учесть вероятностный смысл плотности. Так, например:

$$\frac{f(x;y)\Delta x \Delta y}{f_\xi(x)\Delta x} = \frac{f(x;y)\Delta y}{f_\xi(x)} = f(y/\xi = x)\Delta y.$$

Определение 6.9. *Условным математическим ожиданием η при условии, что $\xi = x$, называется:*

$$M(\eta/\xi = x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f(y/\xi = x) dy. \tag{6.18}$$

Условным математическим ожиданием ξ при условии, что $\eta = y$, называется:

$$M(\xi/\eta = y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x/\eta = y) dx. \tag{6.19}$$

Заметим, что $M(\eta/\xi = x)$ есть функция от x: $M(\eta/\xi = x) = f_{\eta/\xi}(x)$. Аналогично $M(\xi/\eta = y)$ является функцией от y:
$M(\xi/\eta = y) = \psi_{\xi/\eta}(y)$.

Определение 6.10. *Функцию $f_{\eta/\xi}(x)$ называют регрессией η на ξ. Другими словами, регрессией η на ξ называется условное математическое ожидание η при фиксированном $\xi = x$. Аналогично $\psi_{\xi/\eta}(y)$ называется регрессией ξ на η.*

6.5. Коэффициент корреляции

Напомним, что в соответствии с определением 4.21, две случайные величины называются независимыми, если

$$F(x;y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y).$$

Теорема 6.5. *Для независимости непрерывных случайных величин ξ и η необходимо и достаточно, чтобы $f(x;y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$.*

►Если ξ и η независимы, то по определению 4.21

$$F(x;y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y) \implies f(x;y) = \frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial x \partial y} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(F'_\xi(x) \cdot F'_\eta(y)\right) = F'_\xi(x) \cdot F'_\eta(y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y).$$

Если $f(x;y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$, то

$$F(x;y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(s;t)dsdt = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_\xi(s) \cdot f_\eta(t)dsdt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(s)ds \int\limits_{-\infty}^{y} f_\eta(t)dt = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y).$$

Следовательно, ξ и η независимы по определению 4.21.◄

Замечание 6.4. *Можно показать, что для независимых непрерывных случайных величин ξ и η*

$$f(y/\xi = x) = f_\eta(y) \text{ и } f(x/\eta = y) = f_\xi(x) \text{ при } f_\xi(x) \neq 0,\ f_\eta(y) \neq 0.$$

Т.е. закон распределения каждой из них не зависит от значений, принимаемых другой. Действительно, по теореме 6.5 для независимых непрерывных ξ и η выполняется $f(x;y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$, поэтому при $f_\xi(x) \neq 0$ получаем:

$$f(y/\xi = x) = \frac{f(x;y)}{f_\xi(x)} = \frac{f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)}{f_\xi(x)} = f_\eta(y).$$

Аналогично доказывается второе равенство.

Пример 6.3. *Плотность $f(x;y)$ определяется формулой:*

$$f(x;y) = \begin{cases} C & \text{при } x^2 + y^2 \leqslant R^2, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > R^2. \end{cases}$$

Определить константу C и функции регрессии η на ξ и ξ на η.

Р е ш е н и е: Для определения константы C воспользуемся свойством 5 плотности:

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dxdy = 1 \implies \iint\limits_{x^2+y^2<R} C\ dxdy = 1 \implies C \iint\limits_{x^2+y^2<R} dxdy = 1.$$

Воспользуемся тем, что $\iint\limits_{x^2+y^2<R} dxdy$ равен объёму цилиндра с основанием, площадь которого πR^2, и высотой равной 1.

$$C \cdot \pi R^2 = 1 \implies C = \frac{1}{\pi R^2}.$$

Определим теперь плотности составляющих по формулам (6.15): при $|x| > R$ $\quad f_\xi(x) = 0$; $\quad$ при $|x| < R$

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi R^2} dy = \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}.$$

Окончательно:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2} & \text{при} \quad |x| < R, \\ 0 & \text{при} \quad |x| > R. \end{cases} \tag{6.20}$$

Аналогично:

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2} & \text{при} \quad |y| < R, \\ 0 & \text{при} \quad |y| > R. \end{cases} \tag{6.21}$$

Теперь по формулам (6.16), (6.17) определяем:

$$f(y/\xi = x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{R^2-x^2}} & \text{при} \quad x^2+y^2 < R^2, \\ 0 & \text{при} \quad x^2+y^2 > R^2; \end{cases},$$

$$f(x/\eta = y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{R^2-y^2}} & \text{при} \quad x^2+y^2 < R^2, \\ 0 & \text{при} \quad x^2+y^2 > R^2. \end{cases}$$

Наконец, по формулам (6.18), (6.19) найдём уравнения регрессии:

$$M(\eta/\xi = x) = \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y \, \frac{1}{2\sqrt{R^2-x^2}} dy = 0,$$

$$M(\xi/\eta = y) = \int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} x \, \frac{1}{2\sqrt{R^2-y^2}} dx = 0.$$

Пример 6.4. *Установить, будут ли зависимы составляющие ξ и η примера 6.3.*

Р е ш е н и е: Как было установлено в примере 6.3, плотности равны:

$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi R^2} & \text{при} \quad x^2+y^2 < R^2, \\ 0 & \text{при} \quad x^2+y^2 > R^2; \end{cases}$$

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2} & \text{при} \quad |x| < R, \\ 0 & \text{при} \quad |x| \geqslant R; \end{cases}$$

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2} & \text{при} \quad |y| < R, \\ 0 & \text{при} \quad |y| > R. \end{cases}$$

Поскольку $f(x;y) \neq f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$, случайные величины ξ и η зависимы. Этот факт следует также из того, что $f(x/\eta = y) \neq f_\xi(x)$ и $f(y/\xi = x) \neq f_\eta(y)$.

Ответ: ξ и η зависимы.

Для описания зависимости между двумя случайными величинами ξ и η введённые ранее числовые характеристики $M(\xi), D(\xi), M(\eta), D(\eta)$ неприменимы. Введём понятие корреляционного момента и коэффициента корреляции.

Определение 6.11. *Корреляционным моментом $K_{\xi\eta}$ случайных величин ξ и η называют:*

$$K_{\xi\eta} = M\Big(\big(\xi - M(\xi)\big)\big(\eta - M(\eta)\big) \Big).$$

Легко убедиться, что корреляционный момент можно также вычислять по формуле:

$$K_{\xi\eta} = M(\xi \cdot \eta) - M(\xi) \cdot M(\eta). \tag{6.22}$$

Действительно, пользуясь свойствами математического ожидания, получаем:

$$K_{\xi\eta} = M\big[\big(\xi - M(\xi)\big)\big(\eta - M(\eta)\big)\big] = M\big(\xi\eta - \xi M(\eta) - \eta M(\xi) + \\ + M(\xi) \cdot M(\eta)\big) = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta) - M(\eta)M(\xi) + M(\xi)M(\eta) = \\ = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta).$$

Вычисление корреляционного момента по формуле (6.22) для дискретных случайных величин сводится к вычислению суммы:

$$K_{\xi\eta} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} p_{ij}x_iy_j - M(\xi)\cdot M(\eta),$$

а для непрерывных — интеграла:

$$K_{\xi\eta} = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} xyf(xy)dxdy - M(\xi)\cdot M(\eta).$$

Теорема 6.6. *Для независимых случайных величин корреляционный момент равен нулю.*

Действительно, пользуясь свойствами математического ожидания из формулы (6.22), получаем для независимых ξ и η:

$$K_{\xi\eta} = M(\xi\cdot\eta) - M(\xi)\cdot M(\eta) = M(\xi)\cdot M(\eta) - M(\xi)\cdot M(\eta) = 0.$$

Теорема 6.7. *Модуль корреляционного момента не превышает произведения среднеквадратических отклонений:* $|K_{\xi\eta}| \leqslant \sigma_\xi\sigma_\eta$.

Доказательство. Рассмотрим $D(\sigma_\eta\cdot\xi - \sigma_\xi\cdot\eta) \geqslant 0$. Учитывая (6.22), а также: $\sigma_\xi^2 = M(\xi^2) - M^2(\xi)$, $\sigma_\eta^2 = M(\eta^2) - M^2(\eta)$, получаем:

$$\begin{gathered}
D(\sigma_\eta\cdot\xi - \sigma_\xi\cdot\eta) = M(\sigma_\eta\cdot\xi - \sigma_\xi\cdot\eta)^2 - \big(M(\sigma_\eta\cdot\xi - \sigma_\xi\cdot\eta)\big)^2 = \\
= M(\sigma_\eta^2\cdot\xi^2 - 2\sigma_\xi\sigma_\eta\cdot\xi\cdot\eta + \sigma_\xi^2\cdot\eta^2) - \big(\sigma_\eta M(\xi) - \sigma_\xi M(\eta)\big)^2 = \\
= \sigma_\eta^2 M(\xi^2) - 2\sigma_\xi\sigma_\eta M(\xi\eta) + \sigma_\xi^2 M(\eta^2) - \sigma_\eta^2 M^2(\xi) + 2\sigma_\xi\sigma_\eta M(\xi)M(\eta) - \\
= \sigma_\xi^2 M^2(\eta) = \sigma_\eta^2\big(M(\xi^2) - M^2(\xi)\big) + \sigma_\xi^2\big(M(\eta^2) - M^2(\eta)\big) - \\
- 2\sigma_\xi\sigma_\eta\big(M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)\big) = \\
= \sigma_\eta^2\sigma_\xi^2 + \sigma_\xi^2\sigma_\eta^2 - 2\sigma_\xi\sigma_\eta K_{\xi\eta} = 2\sigma_\xi^2\sigma_\eta^2 - 2\sigma_\xi\sigma_\eta K_{\xi\eta}.
\end{gathered}$$

Из неравенства $2\sigma_\xi^2\sigma_\eta^2 - 2\sigma_\xi\sigma_\eta K_{\xi\eta} \geqslant 0$ получаем: $K_{\xi\eta} \leqslant \sigma_\xi\sigma_\eta$. Аналогично, рассмотрев $D(\sigma_\eta\xi + \sigma_\xi\eta) \geqslant 0$, получим: $K_{\xi\eta} \geqslant -\sigma_\xi\sigma_\eta$. Объединяя два неравенства, получим: $-\sigma_\xi\sigma_\eta \leqslant K_{\xi\eta} \leqslant \sigma_\xi\sigma_\eta$.

На практике пользуются безразмерной характеристикой — коэффициентом корреляции.

Определение 6.12. *Коэффициентом корреляции $r_{\xi\eta}$ случайных величин ξ и η называется*

$$r_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta}. \tag{6.23}$$

Пример 6.5. *Определить коэффициент корреляции случайных величин из примера 6.3.*

Решение: Поскольку плотности составляющих ξ и η, определяемые по формулам (6.20), (6.21), являются чётными функциями, математические ожидания составляющих равны нулю:

$$M(\xi) = \int\limits_{-R}^{R} x \cdot \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2} dx = 0$$

как интеграл от нечётной функции по симметричному относительно нулю интервалу. Аналогично:

$$M(\eta) = \int\limits_{-R}^{R} y \frac{2\sqrt{R^2 - y^2}}{\pi R^2} dy = 0.$$

Найдём $M(\xi \cdot \eta)$:

$$M(\xi \cdot \eta) \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y f(xy)\, dxdy = \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{-R}^{+R} x dx \int\limits_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy =$$

$$= \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{-R}^{+R} x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} dx = 0 \quad \text{по той же причине.}$$

Итак:

$$K_{\xi\eta} = M(\xi \cdot \eta) - M(\xi) \cdot M(\eta) = 0 \implies r_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = 0.$$

Ответ: $r_{\xi\eta} = 0$.

Перечислим свойства коэффициента корреляции.

(1) Для независимых ξ и η коэффициент корреляции равен нулю: $r_{\xi\eta} = 0$,

(2) $|r_{\xi\eta}| \leqslant 1$,

(3) $|r_{\xi\eta}| = 1 \iff \eta = k\xi + b$ или $\xi = k\eta + b$.

Свойство 1 является следствием определения 6.12 и теоремы 6.6. Свойство 2 немедленно следует из теоремы 6.7:

$$r_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} \implies -1 \leqslant r_{\xi\eta} \leqslant 1.$$

Свойство 3 будет доказано в следующем пункте.

Замечание 6.5. *Из равенства нулю коэффициента корреляции не следует независимость случайных величин.*

Действительно, в примере 6.5 определено, что коэффициент корреляции случайных величин из примера 6.3 равен нулю, а в примере 6.4 установлено, что эти случайные величины зависимы.

Определение 6.13. *Случайные величины ξ и η называются некоррелированными, если их коэффициент корреляции равен нулю: $r_{\xi\eta} = 0$.*

Из свойства 1 и замечания 6.5 следует связь между независимостью и некоррелированностью:

$$\begin{array}{rcl} \text{независимость} & \Longrightarrow & \text{некоррелированность;} \\ \text{некоррелированность} & \not\Longrightarrow & \text{независимость;} \\ \text{коррелированность} & \Longrightarrow & \text{зависимость;} \\ \text{зависимость} & \not\Longrightarrow & \text{коррелированность.} \end{array}$$

Пример 6.6. *Случайный вектор (ξ, η) распределен равномерно в области G, рис.24.*

1) Найти плотность распределения вероятностей компонент случайного вектора и проверить являются ли они зависимыми.

2) Выяснить, коррелированы ли компоненты случайного вектора (ξ, η).

3) Найти $P\{(\xi, \eta) \in D\}$, где $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Р е ш е н и е:

1) На рис. 24 представлена область равномерного распределения случайного вектора G, представляющая параллелограмм и область D. Из свойств плотности распределения следует, что функция плотности постоянна и равна $1/S$ (S площадь параллелограмма) на области G и равна нулю вне её. $S = AC \cdot AD = 4$. Следовательно, функция плотности двумерного распределения равна

$$f(x, y) = \left[\begin{array}{ll} 0, & (x, y) \notin G, \\ \frac{1}{4}, & (x, y) \in G. \end{array} \right.$$

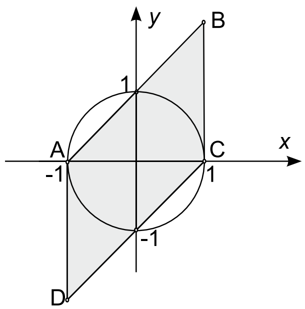

Рис. 24. *Пример 6.6*

Плотности распределения составляющих двумерной непрерывной случайной величины получаются из её плотности $f(x;y)$ по формулам (6.15). При $x \notin [-1;1]$ $f_\xi(x) = 0$, т.к. $f(x,y) = 0$. При закрашивании области G вертикальными линиями необходимо двигаться от нижней линии $y = x - 1$ до верхней линии $y = x + 1$, поэтому

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dy = \int\limits_{x-1}^{x+1} \frac{1}{4}dy = \frac{1}{4}y\Big|_{x-1}^{x+1} = \frac{1}{4}(x+1-x+1) = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[-1;1]$ и её функция плотности равна

$$f_\xi(x) = \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{2}, & x \in [-1;1], \\ 0, & x \notin [-1;1]. \end{array} \right.$$

Аналогично получим плотность распределения компоненты η. При $y \notin [-2;2]$ $f_\eta(y) = 0$, т.к. $f(x,y) = 0$. При закрашивании области G горизонтальными линиями необходимо разбить область на две подобласти: DAC, которая слева ограничивается прямой $x = -1$, а справа прямой $x = y + 1$ и ABC, ограниченную прямыми $x = y - 1$ (слева) и $x = 1$ (справа).

При $y \in [-2;0]$

$$f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dx = \int\limits_{-1}^{y+1} \frac{1}{4}dx = \frac{1}{4}x\Big|_{-1}^{y+1} = \frac{1}{4}(y+1+1) = \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}.$$

При $y \in (0;2]$

$$f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dx = \int\limits_{y-1}^{1} \frac{1}{4}dx = \frac{1}{4}x\Big|_{y-1}^{1} = \frac{1}{4}(1-y+1) = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{2}.$$

Следовательно, плотность распределения компоненты η имеет равна:

$$f_\eta(y) = \left[\begin{array}{ll} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}, & y \in [-2;0), \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4}y & y \in [0;2]). \end{array}\right.$$

Согласно теоремы 6.5, которая утверждает, что для независимости непрерывных случайных величин ξ и η необходимо и достаточно, чтобы $f(x;y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$, делаем вывод, что случайные величины ξ и η зависимы.

Докажем это ещё вторым методом. Для этого найдём условные плотности компонент по формулам (6.16) и (6.17).

$$f(y/\xi = x) = \left[\begin{array}{ll} 0, & f_\xi(x) = 0, \\ \dfrac{f(x;y)}{f_\xi(x)}, & f_\xi(x) \neq 0. \end{array}\right.$$

$$f(y/\xi = x) = \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{2}, & x \in [-1;1], \\ 0, & x \notin [-1;1]. \end{array}\right.$$

$$f(x/\eta = y) = \left[\begin{array}{ll} 0, & y \leqslant 0, \\ \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}y + \frac{1}{2}}, & -2 < y \leqslant 0, \\ \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}y}, & 0 \leqslant y < 2, \\ 0, & y \geqslant 2, \end{array}\right. = \left[\begin{array}{ll} 0, & y \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{y+2}, & -2 < y \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{2-y}, & 0 \leqslant y < 2, \\ 0, & y \geqslant 2. \end{array}\right.$$

В рассмотренном примере условные плотности распределения $f(x/\eta = y)$ и $f(y/\xi = x)$ не совпадают с безусловными плотностями $f_\eta(y)$ и $f_\xi(x)$. Это имеет место тогда и только тогда, когда случайные величины ξ и η *зависимы.*

2) Выяснить, коррелированы ли компоненты случайного вектора (ξ, η). По вычисленным плотностям распределения компонент случайного вектора найдём их математические ожидания.

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_\eta(y) dy = \int_{-2}^{0} y \left(\frac{1}{4}y + \frac{1}{2}\right) dy + \int_{0}^{2} y \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}y\right) dy =$$

$$= \left(\frac{y^3}{12} + \frac{y^2}{4}\right)\Big|_{-2}^{0} + \left(\frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{12}\right)\Big|_{0}^{2} = \frac{8}{12} - 1 + 1 - \frac{8}{12} = 0.$$

Следовательно, математическое ожидание случайного вектора (ξ, η) равно нуль-вектору $(0; 0)$.

Корреляционный момент (ковариация) $K_{\xi\eta}$ вычисляется по формуле (6.22)

$$K_{\xi\eta} = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta).$$

Вычислим $M(\xi\eta)$

$$M(\xi\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f(x, y)\, dx\, dy = \frac{1}{4}\int_{G} xy\, dxdy = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} x\, dx \int_{x-1}^{x+1} y\, dy =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} x\, dx \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_{x-1}^{x+1} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} x(x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}.$$

Теперь найдем корреляционный момент

$$K_{\xi\eta} = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta) = \frac{1}{3}.$$

Следовательно случайные величины ξ и η находятся в корреляционной зависимости.

3) Найти $P\{(\xi,\eta)\in D\}$, где $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$.

Найдём площадь круга радиуса 1, за вычетом двух сегментов круга выходящих за пределы параллелограмма.

$S_1=\pi-2\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right)=\frac{\pi}{2}+1.$

$$P\{(\xi,\eta)\in D\}=\iint\limits_{D/G}\frac{1}{4}dxdy=\frac{S_1}{4}=\frac{\frac{\pi}{2}+1}{4}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}.$$

6.6. Двумерное нормальное распределение

Определение 6.14. *Двумерным нормальным распределением (нормальным законом распределения на плоскости) называют распределение непрерывной двумерной случайной величины $(\xi;\eta)$ с плотностью:*

$$f(x;y)=\frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\sqrt{1-r^2_{\xi\eta}}}\times$$

$$\times exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2_{\xi\eta})}\left(\frac{(x-a_\xi)^2}{\sigma^2_\xi}+\frac{(y-a_\eta)^2}{\sigma^2_\eta}-2r_{\xi\eta}\frac{(x-a_\xi)}{\sigma_\xi}\frac{(y-a_\eta)}{\sigma_\eta}\right)\right). \tag{6.24}$$

Можно доказать, что его параметры имеют следующий вероятностный смысл: $a_\xi=M(\xi)$, $a_\eta=M(\eta)$, $\sigma^2_\xi=D(\xi)$, $\sigma^2_\eta=D(\eta)$, $r_{\xi\eta}$ — коэффициент корреляции ξ и η.

Замечание 6.6. *Используя формулы (6.15), можно доказать, что составляющие ξ и η имеют нормальное распределение с параметрами $\xi\sim N(a_\xi;\sigma_\xi)$ и $\eta\sim N(a_\eta;\sigma_\eta)$ соответственно.*

Теорема 6.8. *Если составляющие двумерной нормальной случайной величины некоррелированы, то они независимы.*

Доказательство. Если $r_{\xi\eta}=0$, то из (6.24) следует, что

$$f(x;y)=\frac{1}{\sigma_\xi\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\dfrac{(x-a_\xi)^2}{2\sigma^2_\xi}}\cdot\frac{1}{\sigma_\eta\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\dfrac{(y-a_\eta)^2}{2\sigma^2_\eta}}=f_\xi(x)\cdot f_\eta(y).$$

Т.е. двумерная плотность равна произведению плотностей составляющих, что в соответствии со следствием 6.5 означает их независимость.

Итак, для нормального распределения двумерной случайной величины понятие некоррелированности и независимости составляющих равносильны.

Определение 6.15. *Если обе функции регрессии η на ξ (т.е. $y = M(\eta/\xi = x)$) и ξ на η (т.е. $x = M(\xi/\eta = y)$) линейны, то говорят, что ξ и η связаны линейной корреляционной зависимостью.*

Теорема 6.9. *Составляющие двумерной нормальной случайной величины связаны линейной корреляционной зависимостью.*

Доказательство. Обозначив $u = \dfrac{x - a_\xi}{\sigma_\xi}$, $v = \dfrac{y - a_\eta}{\sigma_\eta}$, запишем плотность (6.24) в виде:

$$f(x;y) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\sqrt{1 - r_{\xi\eta}^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1 - r_{\xi\eta}^2)}\left(u^2 + v^2 - 2r_{\xi\eta}u \cdot v\right)}.$$

Плотность распределения составляющей ξ в соответствии с замечанием 6.6 имеет вид:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma_\xi\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Найдём условную плотность распределения η при фиксированной ξ:

$$f(y/\xi = x) = \frac{f(x;y)}{f_\xi(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta\sqrt{1 - r_{\xi\eta}^2}} \cdot exp\left(-\frac{1}{2(1 - r_{\xi\eta}^2)}(v - r_{\xi\eta}u)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\sigma_\eta\sqrt{1 - r_{\xi\eta}^2}\right)} \cdot exp\left(-\frac{\left(\dfrac{y - a_\eta}{\sigma_\eta} - r_{\xi\eta}\dfrac{x - a_\xi}{\sigma_\xi}\right)^2}{2\left(\sqrt{1 - r_{\xi\eta}^2}\right)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\sigma_\eta\sqrt{1 - r_{\xi\eta}^2}\right)} \cdot exp\left(-\frac{\left(y - \left(a_\eta + r_{\xi\eta}\dfrac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(x - a_\xi)\right)\right)^2}{2\left(\sigma_\eta\sqrt{1 - r_{\xi\eta}^2}\right)^2}\right).$$

Как видим, полученное условное распределение нормально с математическим ожиданием (функцией регрессии η на ξ):

$$M(\eta/\xi = x) = a_\eta + r_{\xi\eta}\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(x - a_\xi)$$

и дисперсией $\sigma_\eta^2(1 - r_{\xi\eta}^2)$.

Аналогично можно получить функцию регрессии ξ на η:

$$M(\xi/\eta = y) = a_\xi + r_{\xi\eta}\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}(y - a_\eta).$$

Так как обе функции регрессии линейны, утверждение теоремы доказано.