Лекция 2. Основные теоремы теории вероятностей

Теорема сложения вероятностей. Теорема произведения вероятностей. Формулы полной вероятности и Бейеса

2.1. Теорема сложения вероятностей

Как было доказано в лекции 1 (теорема 1.2) вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей (формула 1.14). Из этой теоремы следует очевидное следствие:

Следствие 2.1. *Вероятность суммы n попарно несовместных событий равна сумме их вероятностей:*

$$P(A_1+\ldots+A_n) = P(A_1)+\ldots+P(A_n), \text{ если } A_iA_j = V \text{ при } i \neq j. \quad (2.1)$$

В общем случае верна следующая теорема:

Теорема 2.1 (Теорема сложения вероятностей). *Вероятность суммы двух событий равна сумме их вероятностей минус вероятность их произведения:*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (2.2)$$

►Обозначим n — общее число возможных элементарных исходов, m_1 — число исходов, благоприятствующих событию A, m_2 — число исходов, благоприятствующих событию B, m — число исходов, благоприятствующих одновременному наступлению событий A и B (см. рис. 2.

Как видно из рис. 2, количество исходов, благоприятствующих событию A+B, равно $m_1 + m_2 - m$.

Следовательно:

$$P(A+B) = \frac{m_1+m_2-m}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{m}{n} = P(A)+P(B)-P(AB). \blacktriangleleft$$

Пример 2.1. *Найти вероятность появления карты пиковой масти или туза при однократном вынимании карты из колоды в 36 карт.*

►Обозначим A — появление карты пиковой масти,
B — появление туза и найдем вероятность $P(A+B)$. Очевидно:

$$P(A) = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{9}, \quad P(A\cdot B) = \frac{1}{36}.$$

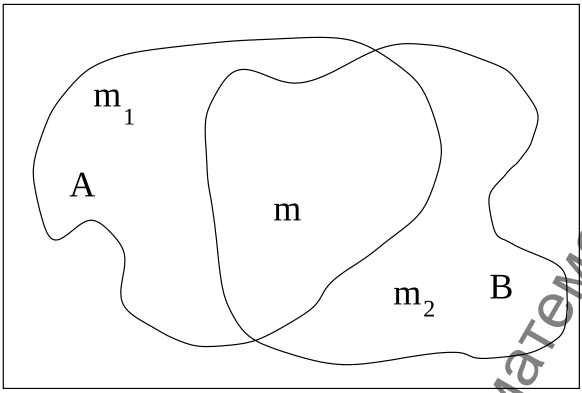

Рис. 2. *Иллюстрация теоремы сложения вероятностей*

В соответствии с формулой (2.2), получаем:
$P(A+B) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{36} = \dfrac{1}{3} \approx 0{,}333.$ ◄

2.2. Теорема произведения вероятностей

Определение 2.1. ***Условной вероятностью*** $P(A/B) = P_B(A)$ *называют вероятность события A, вычисленную в предположении того, что событие B уже наступило.*

Пример 2.2. *В урне 3 белых и 3 чёрных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие A) при условии, что в первом испытании появился чёрный шар (событие B).*

►После первого испытания в урне осталось 5 шаров, из них 3 белых. Искомая вероятность равна:
$P(A/B) = 3/5 = 0{,}6.$ ◄

Отметим, что безусловная вероятность события A меньше условной:
$P(A) = \dfrac{3}{6} = 0{,}5$, т.к. в последнем случае отсутствует информация относительно исхода первого испытания.

Теорема 2.2 (Теорема произведения вероятностей)**.** ***Вероятность произведения*** *двух событий равна произведению вероятности одного* *из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A). \qquad (2.3)$$

►Обозначим n — общее количество возможных элементарных исходов, m_1 — число исходов, благоприятствующих событию A, m — число исходов из числа m_1, благоприятствующих событию B (рис. 2).

Очевидно: $P(A) = m_1/n, \quad P(A \cdot B) = m/n, \quad P(B/A) = m/m_1$.

Таким образом:
$P(AB) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{m_1}{n} \cdot \dfrac{m}{m_1} = P(A) \cdot P(B/A)$.◄

Следствие 2.2. *Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятностей одного из них на условные вероятности всех остальных:*

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\ldots P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}). \qquad (2.4)$$

Определение 2.2. *Событие B называют* ***независимым от события*** *A, если появление события A не изменяет вероятность события B:*

$$P(B/A) = P(B). \qquad (2.5)$$

Легко показать, что свойство независимости событий взаимно. Действительно, в соответствии с (2.3) и с учётом формулы (2.5):
$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A) \cdot P(B)$.
С другой стороны,
$P(A \cdot B) = P(B \cdot A) = P(B) \cdot P(A/B)$, откуда,
$P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot P(A/B)$ и $P(A/B) = P(A)$, т.е. в этом случае событие A независимо от события B и их называют ***независимыми.***

Для независимых событий, с учётом определения 2.2, теорема произведения вероятностей 2.3 принимает следующий вид.

Теорема 2.3. *Вероятность произведения двух* ***независимых событий*** *равна произведению их вероятностей.*

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \qquad (2.6)$$

Определение 2.3. *Несколько событий называют* ***независимыми в совокупности****, если каждое событие независимо со всеми остальными событиями и их возможными произведениями.*

Отметим, что если каждые два события в группе независимы, это ещё не означает их независимости в совокупности. В этом смысле требование независимости в совокупности сильнее требования попарной независимости.

С учётом следствия 2.2 получаем следующее утверждение:

Следствие 2.3. *Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей:*

$$P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_n).$$

Теорема 2.4. *Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности единицы и произведения вероятностей противоположных событий $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$:*

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\dots P(\bar{A}_n).$$

►Обозначим $\bar{A}$ — противоположное к A событие, состоящее в ненаступлении ни одного из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$\bar{A} = \bar{A}_1\bar{A}_2\dots, \bar{A}_n.$$

В силу независимости событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, события $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots \bar{A}_n$ будут так же независимы в совокупности и
$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\dots P(\bar{A}_n)$, откуда
$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\dots P(\bar{A}_n)$.◄

Следствие 2.4. *Если события A_1, A_2, $\dots$, A_n* ***независимы в совокупности*** *и имеют одинаковую вероятность появления p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий (событие A) равна:*

$$P(A) = 1 - (1-p)^n. \tag{2.7}$$

Пример 2.3. *Из колоды в 36 карт сразу вынимают 2 карты. Какова вероятность того, что среди них не будет карты пиковой масти (Событие A)?*

►Для того, чтобы произошло искомое событие A, необходимо чтобы одновременно произошли два события:
A_1 – первая вынутая карта не пиковая;
A_2 – вторая вынутая карта не пиковая.
Эти события зависимы, поэтому
$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1)$.

$P(A_1) = 27/36$.
Так как событие A_1 произошло, т.е. вынули карту не пиковой масти. Поэтому в колоде уже не 36, а 35 карт, причём карт не пиковой масти осталось 26. Поэтому $P(A_2/A_1) = 26/35$.

Следовательно,
$$P(A) = \frac{27}{36} \cdot \frac{26}{35} = \frac{3 \cdot 13}{2 \cdot 35} = \frac{39}{70} \approx 0{,}557. ◄$$

Ответ: $\frac{39}{70} \approx 0{,}557$.

Эту задачу можно решить другим способом, используя классическое определение вероятностей и формулы для сочетаний.

►$P(A) = \frac{m}{n}$, где $n = C_{36}^2$ — число всевозможных исходов данного испытания, а $m = C_{27}^2$ — число исходов благоприятствующих появлению события A.

$$P(A) = \frac{C_{27}^2}{C_{36}^2} = \frac{27! \quad 2! \cdot 34!}{2! \cdot 25! \quad 36!} = \frac{27 \cdot 26}{36 \cdot 35} = \frac{3 \cdot 13}{2 \cdot 35} = \frac{39}{70} \approx 0{,}557. ◄$$

Пример 2.4. *Из партии, содержащей 100 одинаковых деталей, для контроля партии извлекаются 5 деталей. Условием непригодности всей партии является появление хотя бы одной бракованной детали среди контролируемых. Какова вероятность того, что партия будет принята, если она содержит 5% неисправных деталей?*

►Пусть A — искомое событие. A_i – событие, состоящее в том, что i – ая проверяемая деталь исправна, $i = \overline{1,5}$.
Очевидно, $A = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$.
Применяем теорему о произведении вероятностей для n событий (2.4)
$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2) \cdot P(A_4/A_1A_2A_3) \cdot P(A_5/A_1A_2A_3A_4) =$$
$$= \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \cdot \frac{92}{97} \cdot \frac{91}{96} = \frac{8277217}{10755360} \approx 0{,}7696. ◄$$

Ответ: $\frac{8277217}{10755360} \approx 0{,}7696$.

Пример 2.5. *В урне 2 белых и 4 черных шара. Два игрока поочередно извлекают шар (без возвращения). Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар.*

►Возможные исходы данного опыта заканчиваются вытаскиванием белого шара – событие $A_б$:
$A_б,\ A_ч A_б,\ A_ч A_ч A_б,\ A_ч A_ч A_ч A_б,\ A_ч A_ч A_ч A_ч A_б$.

Исходы в которых выиграет первый участник (событие A_1):
$A_1 = A_б + A_ч A_ч A_б + A_ч A_ч A_ч A_ч A_б$.

Исходы в которых выиграет второй участник (событие A_2):
$A_2 = A_ч A_б + A_ч A_ч A_ч A_б$.

Найдём вероятности этих событий.

$$P(A_1) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} + \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{3}{5}.$$

$$P(A_2) = \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{2} = \frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{2}{5}.◄$$

Ответ: $P(A_1) = \frac{3}{5}$; $P(A_2) = \frac{2}{5}$.

Пример 2.6. *На пути движения автомашины до конечного пункта 3 светофора, каждый из которых либо разрешает дальнейшее движение автомобиля с вероятностью $p = 0{,}3$, либо запрещает с вероятностью $q = 0{,}7$. Найти вероятность, что число остановок автомобиля на светофорах равно: а) 0; б) 1; в) 2 г) 3?*

►Обозначим: A – события состоящие в том, что автомобиль без остановки проезжает текущий светофор.

По условию задачи $P(A) = p = 0{,}3 \Rightarrow P(\overline{A}) = q = 0{,}7$;
A_i – события состоящие в том, что автомобиль пройдёт i светофоров без остановки.

Найдем вероятности $P(A_i)$, происхождения данных событий.

а) Событие A_0 означает, что автомобиль проехал все три светофора без остановок. Это можно записать следующей формулой: $A_0 = A \cdot A \cdot A$. Так как события независимы, то применяем формулу (2.3). Получаем $P(A_0) = P(A)\cdot P(A)\cdot P(A) = p^3 = 0{,}027$.

б) Событие A_1 означает, что автомобиль проехал два светофора без остановок и один с остановкой (остановился на первом, втором или третьем светофорах). Это можно записать следующей формулой: $A_1 = \overline{A}\cdot A\cdot A + A\cdot\overline{A}\cdot A + A\cdot A\cdot\overline{A}$.

Получаем $P(A_1) = q\cdot p\cdot p + p\cdot q\cdot p + p\cdot p\cdot q = 3\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3^2 = 0{,}189$.

в) Событие A_2 означает, что автомобиль проехал один светофор без остановки и на двух останавливался (не остановился на первом, втором или третьем светофорах). Это можно записать следующей формулой: $A_2 = A\cdot\overline{A}\cdot\overline{A} + \cdot\overline{A}\cdot A\cdot\overline{A} + \overline{A}\cdot\overline{A}\cdot A$.

Получаем $P(A_2) = p\cdot q\cdot q + q\cdot p\cdot q + q\cdot q\cdot p = 3\cdot 0{,}7^2\cdot 0{,}3 = 0{,}441$.

г) Событие A_3 означает, что автомобиль останавливался на всех трёх светофорах, т.е. $A_3 = \overline{A} \cdot \overline{A} \cdot \overline{A}$. $P(A_3) = q^3 = 0{,}7^3 = 0{,}343$.

Сумма независимых событий A_0, A_1, A_2, A_3 образуют полную группу. Поэтому
$P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}027 + 0{,}189 + 0{,}441 + 0{,}343 = 1.$◄

Ответ: а) 0,027; б) 0,189; в) 0,343; г) 0,343.

Пример 2.7. *Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в цель, равна 0,4. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,9 он попал в цель хотя бы один раз.*

►Обозначим A — событие: «при n выстрелах стрелок попадает в цель хотя бы один раз». В силу независимости отдельных попаданий применима формула (2.7):
$P(A) = 1 - (1 - 0{,}4)^n$.

Приняв во внимание условие $P(A) \geqslant 0{,}9$, получаем неравенство:
$1 - 0{,}6^n \geqslant 0{,}9$, откуда: $n \ln 0{,}6 \leqslant \ln 0{,}1$ и, т.к. $\ln 0{,}6 < 0$, получаем:
$n \geqslant \ln 0{,}1 / \ln 0{,}6$. Поскольку $\ln 0{,}1 / \ln 0{,}6 \approx 4,5$ получаем: $n \geqslant 5$.◄

2.3. Надёжность схем

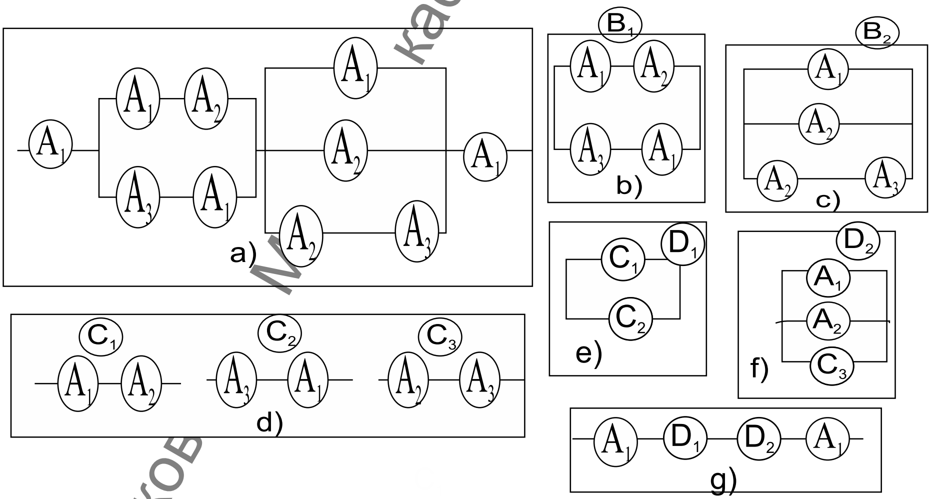

Рис. 3. *Пример 2.8*

Пример 2.8. *Релейная схема состоит из 10 элементов трёх типов A_1, A_2 и A_3, рис. 3,а). Вероятность того, что за время T элементы не выйдут из строя известна и равна: $P(A_1) = 0{,}7$, $P(A_2) = 0{,}6$, $P(A_3) = 0{,}9$. Найти вероятность безотказной работы схемы.*

Событие состоящее в том, что схема работает безотказно в течении времени T обозначим A. Вероятность такого события A называется надёжностью схемы. Обозначим надёжности элементов

$P(A_1) = p_1 = 0{,}7, P(A_2) = p_2 = 0{,}6,$
$P(A_3) = p_3 = 0{,}9.$

Тогда вероятности отказа элементов $q_i = 1 - p_i$ будут равны
$P(\overline{A_1}) = q_1 = 0{,}3, P(\overline{A_2}) = q_2 = 0{,}4,$
$P(\overline{A_3}) = q_3 = 0{,}1.$

Выделим из исследуемой схемы блоки B_1 рис. 3,b) и B_2, рис. 3,c). Найдём их надёжность. Блок B_1 в свою очередь состоит их двух параллельно соединённых блоков содержащих по два последовательных элемента, назовём их C_1 и C_2, рис. 3,d). В блоке B_2 также выделим аналогичный блок C_3.

Найдём надёжность блоков C_1, C_2 и C_3, состоящих из двух последовательных элементов. Эти блоки будут работоспособны, когда работают оба элемента. Так как они работают независимо друг от друга, поэтому можно применить теорему о вероятности произведения двух независимых событий.

$P(C_1) = P(A_1) \cdot P(A_2) = p_1 \cdot p_2 = 0{,}42,$
$P(C_2) = P(A_1) \cdot P(A_3) = p_1 \cdot p_3 = 0{,}63,$
$P(C_3) = P(A_2) \cdot P(A_3) = p_2 \cdot p_3 = 0{,}54.$

Найдём теперь надёжность блоков B_1 и B_2. С учётом обозначений рис. 3,d), получаем схемы параллельно соединённых элементов, рис. 3,e) и f).

При параллельном соединении элементов схема работоспособна, когда работает хотя бы один элемент. Для определения надёжности параллельного блока находим сначала вероятность противоположного события – вероятность того, что блок вышел из строя, т.е. что все элементы неработоспособны, а затем применяем формулу для противоположного события.
$P(D_1) = 1 - P(\overline{C_1}) \cdot P(\overline{C_2}) = 1 - (1 - P(C_1)) \cdot (1 - P(C_2)) = 1 - 0{,}58 \cdot 0{,}37 =$
$= 1 - 0{,}2146 = 0{,}7854.$

$P(D_2) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{C_3}) =$
$= 1 - (1 - P(A_1) \cdot (1 - P(A_2)(1 - P(C_3)) =$
$= 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}46 = 1 - 0,0552 = 0{,}9448.$

Наконец, заменяем блоки B_1 и B_2 элементами D_1 и D_2, получаем схему четырёх последовательных блоков, рис. (3,g). Используя теорему о произведении вероятностей для несовместных событий, получаем $P(A) = P(A_1) \cdot P(D_1) \cdot P(D_2) \cdot P(A_1) = 0{,}7^2 \cdot 0{,}7854 \cdot 0{,}9448 = 0{,}3636.$

Замечание 2.1. *Для определения вероятности отказа схемы* $Q = P(\overline{A})$,*находим сначала надёжность схемы* $R = P(A)$, *а затем находим вероятность противоположного события* $Q = P(\overline{A}) =$ $= 1 - P(A)$.

Для тех кто не понял решения примера (2.8) рассмотрим более простые задачи на электрические цепи.

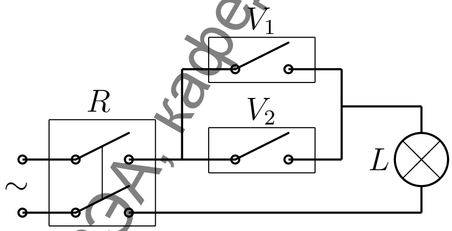

Рис. 4. К примеру 2.9

Пример 2.9. *В электрической цепи (рис. 4) выключатели* V_1 *и* V_2 *независимо замкнуты с вероятностями* $p_1 = 0{,}2$ *и* $p_2 = 0{,}6$ *соответственно. С какой вероятностью при включении рубильника* R *лампочка* L*: а) загорится б)не загорится?*

►Пусть A_1 – событие состоящее в том, что лампочка загорится. Тогда противоположное событие $\overline{A_1} = A_2$ — лампочка не загорится.
а) При параллельной коммутации выключателей лампочка L загорается, если замкнут хотя бы один выключатель, и не загорается, если все они одновременно разомкнуты.
Поэтому находим вероятность того, что оба выключатели разомкнуты
$P(A_2) = P(\overline{A_1}) = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32.$
$P(A_1) = 1 - P(\overline{A_2}) = 1 - 0{,}32 = 0{,}68.$
б) Задача решена в процессе решения задачи а). ◄
Ответ: а) 0,68; б) 0,32.

Пример 2.10. *В электрической цепи (рис. 4) выключатели V_1 и V_2 независимо разомкнуты с вероятностями $q_1 = 0{,}2$ и $q_2 = 0{,}6$ соответственно. С какой вероятностью при включении рубильника R лампочка L: а) загорится б)не загорится?*

►Обозначим A_1, A_2 — искомые события для задачи а) и б), соответственно.

В данном примере заданы вероятности q_1 и q_2 разомкнутости выключателей. Вероятности замкнутости выключателей равны $p_1 = 1 - q_1 = 0{,}8$ и $p_2 = 1 - q_2 = 0{,}4$. Но для решения данной задачи они не понадобятся.

а) Лампочка загорится когда будет замкнут хотя бы один выключатель. Следовательно, применяем формулу
$P(A_1) = 1 - P(\overline{A_1}).$
$P(\overline{A_1}) = q_1 \cdot q_2 = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12. \Rightarrow P(A_1) = 0{,}88.$

б) $P(A_2) = q_1 \cdot q_2 = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12.$◄

Ответ: а) 0,88) 0,12.

Пример 2.11. *В электрической цепи (рис. 5) выключатели V_1 и V_2 независимо разомкнуты с вероятностями $q_1 = 0{,}3$ и $q_2 = 0{,}1$ соответственно. С какой вероятностью при включении рубильника R лампочка L: а) загорится (событие A_1) б)не загорится (событие A_2)?*

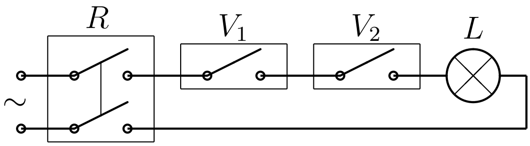

Рис. 5. Последовательное соединение двух элементов

►В данном примере заданы вероятности разомкнутости выключателей (q_1 и q_2). Вероятности замкнутости выключателей равны
$p_1 = 1 - q_1 = 0{,}7$ и $p_2 = 1 - q_2 = 0{,}9$.

а) Очевидно, что лампочка загорится когда оба выключателя замкнуты. Следовательно,

$P(A_1) = p_1 \cdot p_2 = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63$.

б) Лампочка не загорится когда хотя бы один выключателя разомкнут. Поэтому найдём вероятность противоположного события которым является событие состоящее в том, что оба выключателя замкнуты.

$P(\overline{A_2}) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63$.

$P(A_2) = 1 - P(\overline{A_2}) = 1 - 0{,}63 = 0{,}37$.◄

Ответ: а) 0,63   б) 0,37.

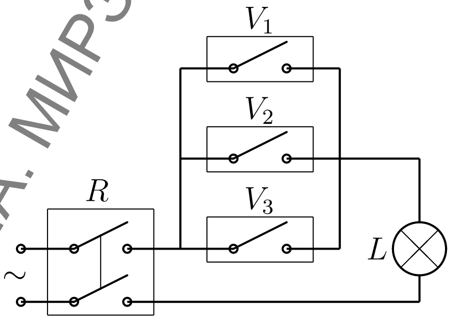

Рис. 6. Параллельное соединение трёх элементов

Пример 2.12. *В электрической цепи (рис. 6) выключатели V_1, V_2 и V_3 независимо замкнуты (или разомкнуты) с вероятностями $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}6$ и $p_3 = 0{,}3$ соответственно. С какой вероятностью при включении рубильника R лампочка L: а) загорится; б) не загорится?*

►Введём события: A_1 — лампочка загорится, а A_2 — лампочка не загорится.
а, б) Лампочка загорится при включении рубильника R когда будет замкнут хотя бы один выключатель. Поэтому находим вероятность того, что все выключатели разомкнуты. Это и будет решением задачи б).
$P(A_2) = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot (1 - p_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}224.$

Теперь находим вероятность противоположного события означающего, что лампочка загорится.
$P(A_1) = 1 - P(A_2) = 0{,}776.$◄
Ответ: а) 0,77 б) 0,224.

2.4. Схема гипотез. Формула полной вероятности

Теорема 2.5 (Формула полной вероятности). *Вероятность события A, которое может наступить только вместе с одним из попарно несовместных событий $H_1, H_2 \ldots H_n$, называемых гипотезами, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:*

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n). \tag{2.8}$$

Кратко эту формулу можно записать в виде

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A/H_k).$$

►По условию, появление события A означает осуществление одного из попарно несовместных событий: $H_1A,\ H_2A, \ldots,\ H_nA$.

Пользуясь следствием 2.1 из теоремы сложения и теоремой произведения вероятностей, получаем:
$P(A) = P(H_1A + \cdots + H_nA) = P(H_1A) + \cdots + P(H_nA) =$
$= P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \cdots + P(H_n)P(A/H_n).$◄

Пример 2.13. *Пять экзаменаторов принимают экзамен. Известно, что вероятность сдать экзамен двум из них («строгим» равна 0,6, а трём остальным («нестрогим») 0,8 . Найти вероятность сдать экзамен произвольному экзаменатору.*

►Обозначим A — событие «экзамен сдан». Экзамен может быть сдан либо «строгому» экзаменатору (гипотеза H_1), либо «нестрогому» (гипотеза H_2):

$$P(H_1) = 2/5 = 0{,}4; \qquad P(H_2) = 3/5 = 0{,}6.$$

Условные вероятности сдать экзамен:
$P(A/H_1) = 0{,}6; \qquad P(A/H_2) = 0{,}8.$

Искомая вероятность определяется по формуле полной вероятности:
$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = 0{,}72.$◄

Ответ: 0,72.

Пример 2.14. *Детали с трёх конвейеров поступают на общий склад. Вероятности брака на первом, втором и третьем конвейерах равны $p_1 = \dfrac{1}{3}$, $p_2 = \dfrac{5}{7}$ и $p_3 = \dfrac{2}{5}$. Отношение производительностей линий $V_1 : V_2 : V_3 = 4 : 7 : 3$. С какой вероятностью наугад взятая деталь будет бракованной?*

►Искомое событие A наблюдается на фоне трёх гипотез
$H_i = \{$деталь с i-го конвейера$\}$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$. Из отношения производительностей конвейеров $4 : 7 : 3$ следует, что из каждых $4+7+3 = 14$ деталей в среднем 4 сходят с 1-го конвейера, 7 — со второго и 3 — с третьего. Значит,
$P(H_1) = \dfrac{4}{14}$, $P(H_2) = \dfrac{7}{14}$, $P(H_3) = \dfrac{3}{14}$.

Данные вероятности $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}7$ и $p_3 = 0{,}4$ есть не что иное, как $P(A/H_1)$, $P(A/H_2)$ и $P(A/H_3)$. Подставим все значения в формулу (2.8):

$$P(A) = \frac{4}{14}\cdot\frac{1}{3} + \frac{7}{14}\cdot\frac{5}{7} + \frac{3}{14}\cdot\frac{2}{5} = \frac{113}{210}.◄$$

Ответ: $\dfrac{113}{210}$.

2.5. Формула Байеса

Теорема 2.6 (Формула Байеса). *В условиях формулы полной вероятности для $i = 1, \dots, n$:*

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n)}. \quad (2.9)$$

►По теореме произведения вероятностей:

$$P(H_i \cdot A) = P(A)P(H_i/A) = P(H_i)P(A/H_i),$$

откуда с использованием формулы полной вероятностей для $P(A)$ получаем:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k)P(A/H_k)}. ◄$$

Формула Байеса позволяет пересчитывать вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого произошло событие A.

Пример 2.15. *В условиях примера 2.13 известно, что студент сдал экзамен. Найти вероятность того, что он сдавал «нестрогому» экзаменатору.*

►По формуле Байеса:

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A/H_2)}{P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2)} =$$

$$= \frac{0{,}6 \cdot 0{,}8}{0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}8} = \frac{2}{3}. ◄$$

Пример 2.16. *В двух урнах находятся шары: в первой – 4 белых и 6 черных, во второй – 5 белых и 3 черных. Из первой урны во вторую наудачу переложили два шара, а затем из второй урны наудачу извлекли один шар. 1) Найти вероятность того, что этот шар белый. 2) Шар, извлеченный из второй урны, оказался белым. Какова вероятность того, что из первой урны во вторую были переложены 2 белых шара.*

►1) Пусть A – искомое событие: из второй урны извлечен белый шар. Возможны 3 гипотезы:
H_1 – из первой урны во вторую были переложены 2 белых шара;
H_2 – из первой урны во вторую были переложены один белый и один чёрный шар;
H_3 – из первой урны во вторую были переложены 2 чёрных шара.

Вероятности осуществления гипотез равны

$$P(H_1) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{15}, \quad P(H_2) = \frac{C_4^1 \cdot C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}, \quad P(H_3) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}.$$

Если гипотезы выполняются, то условные вероятности осуществления события A будут равны

$$P(A/H_1) = \frac{5+2}{5+3+2} = 0{,}7, \quad P(A/H_2) = 0{,}6, \quad P(A/H_3) = 0{,}5.$$

Применяя формулу полной вероятности, получим

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$$

$$= \frac{2}{15} \cdot 0{,}7 + \frac{8}{15} \cdot 0{,}6 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 = 0{,}58.$$

2) Во втором случае необходимо уточнить вероятность наступления гипотезы H_1. По формуле Байеса находим

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{(2/15) \cdot 0{,}7}{0{,}58} = 0{,}16. \blacktriangleleft$$

Ответ: 1) 0,58, 2) 0,16.

Пример 2.17. *Всхожесть моркови составляет 60%, свёклы — 80%. В лаборатории посадили по одному семени каждого овоща. Пророс один росток. Какова вероятность, что это: (1) морковь; (2) свёкла?*

$\blacktriangleright$(1) Сформулируем набор гипотез, на фоне которых наблюдается событие $A = \{\text{взошёл один росток}\}$. Пусть
$H_1 = \{\text{морковь взошла}\}$, $P(H_1) = 0{,}6$,
$H_2 = \{\text{морковь не взошла}\}$, $P(H_2) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

В условиях гипотезы H_1 событие A равносильно тому, что свёкла не взошла, и $P(A/H_1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

В условиях гипотезы H_2 для выполнения события A надо, чтобы взошла свёкла; $P(A/H_2) = 0{,}8$.

По формуле (2.9)

$$P(H_1/A) = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}2}{0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}8} = \frac{3}{11}.$$

Ответ: $\frac{3}{11}$.

(2) $P(H_2/A) = \dfrac{0{,}4 \cdot 0{,}8}{0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}8} = \dfrac{0{,}32}{0{,}44} = \dfrac{8}{11}. \blacktriangleleft$

Ответ: $\dfrac{8}{11}$.

Пример 2.18. *В первой урне 5 белых и 8 чёрных шаров, во второй — 7 белых и 6 чёрных. Из каждой урны вынимают по шару. Они оказались разноцветными. Найти вероятность того, что белый шар вынут:*

(1) *из первой урны;* (2) *из второй урны.*

►Примем $H_1 = \{$шар, вынутый из первой урны, белый$\}$,
$H_2 = \{$шар, вынутый из второй урны, белый$\}$,
$A = \{$шары, вынутые из обеих урн, разноцветные$\}$.

$P(H_1) = \dfrac{5}{13}$, $P(H_2) = \dfrac{7}{13}$.

Заметим, что $A = H_1 \cdot \overline{H}_2 + \overline{H}_1 \cdot H_2$.
$P(A) = P(H_1) \cdot P(\overline{H}_2) + P(\overline{H}_1) \cdot P(H_2) =$
$= (5/13) \cdot (6/13) + (8/13) \cdot (7/13) = 43/13$.

(1) $P_A(H_1) = \dfrac{P(H_1) \cdot P(\overline{H}_2)}{P(A)} = \dfrac{(5/13) \cdot (6/13)}{43/13} = \dfrac{15}{43}$.

Ответ: $\dfrac{15}{43}$.

(2) $P_A(H_2) = \dfrac{P(\overline{H}_1) \cdot P(H_2)}{P(A)} = \dfrac{(8/13) \cdot (7/13)}{43/13} = \dfrac{28}{43}$.◄

Ответ: $\dfrac{28}{43}$.

Пример 2.19. *В первой урне 9 белых и 7 чёрных шаров, во второй — 5 белых и 8 чёрных. Из каждой урны вынули по шару. Шары оказались одного цвета. Какова вероятность того, что они:*
(1) *белые;* (2) *чёрные?*

►Пусть $A = \{$оба шара одного цвета$\}$;
$H_1 = \{$оба шара белые$\}$; $H_2 = \{$оба шара чёрные$\}$.
Заметим, что $A = H_1 + H_2$; $P_{H_1}(A) = P_{H_2}(A) = 1$;
$P(H_1) = \dfrac{9}{16} \cdot \dfrac{5}{13} = \dfrac{45}{208}$; $P(H_2) = \dfrac{7}{16} \cdot \dfrac{5}{13} = \dfrac{35}{208}$;
$P(A) = P(H_1 + H_2) = P(H_1) + P(H_2) = \dfrac{45}{208} + \dfrac{35}{208} = \dfrac{80}{208}$.

По формуле Бейеса:

(1) $P_A(H_1) = \dfrac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \dfrac{45}{208} : \dfrac{80}{208} = \dfrac{45}{80} = \dfrac{9}{16}.$

Ответ: $\dfrac{9}{16}$.

(2) $P_A(H_2) = \dfrac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{P(A)} = \dfrac{35}{208} : \dfrac{80}{208} = \dfrac{35}{80} = \dfrac{7}{16}.$◄

Ответ: $\dfrac{7}{16}$.

Пример 2.20. *В первой урне 8 белых и 7 чёрных шаров, во второй — 4 белых и 6 чёрных, в третьей — 9 белых и 5 чёрных. Наугад из одной из урн вынимается шар. Найти вероятность того, что он белый.*

►Искомое событие A наблюдается на фоне трёх гипотез:

$H_1 = \{$выбрана первая урна$\}$,

$H_2 = \{$выбрана вторая урна$\}$,

$H_3 = \{$выбрана третья урна$\}$.

Вероятности всех гипотез равны между собой и в сумме составляют 1, откуда

$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \dfrac{1}{3}.$

В условиях каждой из них вероятность искомого события A ищется по формуле классического определения вероятности $P(A) = m/n$.

$P(A/H_1) = \dfrac{8}{8+7} = \dfrac{8}{15}$; $P(A/H_2) = \dfrac{4}{4+6} = \dfrac{2}{5}$;

$P(A/H_3) = \dfrac{9}{9+5} = \dfrac{9}{14}.$

Воспользовавшись формулой полной вероятности

$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3).$

Подставим сюда найденные значения:

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{15} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{14} = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{15} + \frac{2}{5} + \frac{9}{14}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{331}{210} = \frac{331}{630}.◄$$

Ответ: $\dfrac{331}{630}$.