Лекция 8. Введение в теорию случайных процессов

Основные понятия. Математическое ожидание и дисперсия. Корреляционная функция. Взаимная корреляционная функция. Каноническое разложение случайной функции.Производная и интеграл случайной функции. Комплексные случайные процессы. Стационарный случайный процесс. Марковские случайные процессы.

8.1. Основные понятия

Определение 8.1. *Случайной функцией $\xi(t)$ называют случайную величину, зависящую от неслучайного параметра t. Если параметр t интерпретируется как время, случайная функция называется случайным процессом.*

Мы в основном будем иметь дело со случайными процессами, однако всё изложенное справедливо для любых случайных функций.

Пример 8.1. *Случайный процесс $\xi(t) = \zeta \cdot \sin t$, где $t \geqslant 0$, $\zeta \sim N(5; 1)$ случайная величина, имеющая нормальное распределение.*

Определение 8.2. *Сечением случайного процесса называют случайную величину, получающуюся при фиксированном значении параметра t.*

Определение 8.3. *Реализацией (траекторией) случайного процесса называют неслучайную функцию аргумента t, получающуюся в результате наблюдения (испытания) над случайным процессом в течение длительного времени.*

Если на практике наблюдают случайный процесс (например, записывают его график с помощью самописца), то в действительности получают одну из возможных его реализаций. При повторении опыта будет наблюдаться другая реализация. Реализацию процесса $\xi(t)$ будем обозначать строчными латинскими буквами: $x(t)$.

Если в примере 8.1 фиксировать момент времени $t = 1$, получим сечение $\xi(1) = \zeta \cdot \sin 1$. Если в примере 8.1 случайная величина ζ в первом испытании приняла значение 2, а во втором -3, то получим две реализации: $x_1(t) = 2 \sin t$; $x_2(t) = 3 \sin t$.

Заметим, что сечение является случайной величиной, реализация – неслучайной функцией.

Берков Н.А. МИРЭА, кафедра высшая математика 2

8.2. Математическое ожидание и дисперсия

Определение 8.4. *Математическим ожиданием случайного процесса называют неслучайную функцию $m(t)$, которая при каждом t равна математическому ожиданию соответствующего сечения:*

$$m_\xi(t) = M\big(\xi(t)\big). \tag{8.1}$$

Геометрически $m(t)$ является кривой, занимающей «среднее положение» среди всех реализаций случайного процесса. Если $\xi(t)$ – случайный процесс, а $f(t)$ — неслучайная функция, то $m(t)$ обладает следующими очевидными свойствами (докажите их самостоятельно на основании свойств математического ожидания):

(1) $M\big(f(t)\big) = f(t)$,
(2) $M\big(f(t)\cdot\xi(t)\big) = f(t)\cdot M\big(\xi(t)\big)$,
(3) $M\big(\xi_1(t)\pm\xi_2(t)\big) = M\big(\xi_1(t)\big)\pm M\big(\xi_2(t)\big)$.

Пример 8.2. *Найти математическое ожидание случайной величины $\xi(t) = U\sin^2 t + 3\cos^2 t$, где U — случайная величина математическое ожидание которой равно 5.*

Р е ш е н и е: Используем все три свойства математического ожидание для неслучайных множителей $\sin^2 t$ и $3\cos^t$:

$$M[\xi(t)] = M[U\sin^2 t + 3\cos^2 t] = M[U\sin^2 t] + M[3\cos^2 t] =$$
$$= \sin^2 t\cdot M(U) + 3\cos^2 t = 5\sin^2 t + 3\cos^2 t = 3 + 2\sin^2 t.$$

Ответ: $M[\xi(t)] = 3 + 2\sin^2 t$.

Определение 8.5. *Дисперсией случайного процесса называют неслучайную функцию $\sigma^2(t)$, которая при каждом t равна дисперсии соответствующего сечения:*

$$\sigma^2_\xi(t) = D\big(\xi(t)\big). \tag{8.2}$$

Дисперсия характеризует степень рассеяния реализаций случайного процесса около его математического ожидания.

Наряду с дисперсией рассматривается также среднее квадратическое отклонение случайного процесса: $\sigma_\xi(t) = \sqrt{D\big(\xi(t)\big)}$.

Очевидны свойства дисперсии $\sigma^2_\xi(t)$:

(1) $\sigma^2_\xi(t) \geqslant 0$,
(2) $D\big(f(t)\big) = 0$,

Берков Н.А. МИРЭА, кафедра высшая математика 2

(3) $D\big(f(t)\cdot\xi(t)\big) = f^2(t)\cdot D\big(\xi(t)\big)$,
(4) $D\big(\xi(t)\pm f(t)\big) = D\big(\xi(t)\big)$.

Пример 8.3. *Найти дисперсию случайной величины $\xi(t) = 2U\sin 2t + 3\cos 2t + 12$, где U — случайная величина дисперсия которой равна* 0,5.

Р е ш е н и е: Используем все свойства дисперсии для неслучайных множителей $2\sin 2t$, $3\cos 2t$ и 12:

$$D[\xi(t)] = D[2U\sin 2t + 3\cos 2t + 12] = D[2U\sin 2t] + D[3\cos 2t] + D[12] =$$
$$= (2\sin 2t)^2\cdot D(U) + 0 + 0 = 4\sin^2 2t\cdot 0{,}5 = 2\sin^2 2t.$$

Ответ: $D[\xi(t)] = 2\sin^2 2t$.

8.3. Корреляционная функция

Для определения связи между различными сечениями случайного процесса используется корреляционная функция.

Определение 8.6. *Корреляционной функцией случайного процесса называют неслучайную функцию двух аргументов $K_\xi(t_1;t_2)$, равную корреляционному моменту сечений $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$:*

$$K_\xi(t_1;t_2) = M\Big(\big(\xi(t_1)-m(t_1)\big)\cdot\big(\xi(t_2)-m(t_2)\big)\Big). \tag{8.3}$$

Если ввести понятие центрированного случайного процесса

$$\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m(t), \tag{8.4}$$

то определение 8.6 запишется короче:

$$K_\xi(t_1;t_2) = M\big(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\cdot\overset{\circ}{\xi}(t_2)\big). \tag{8.5}$$

Пример 8.4. *Для случайного процесса из примера 8.1 найти $m_\xi(t)$, $\sigma^2_\xi(t)$, $K_\xi(t_1;t_2)$.*

Р е ш е н и е: Пользуясь свойствами математического ожидания и дисперсии, поскольку $\zeta\sim N(5;1)$, получаем:

$$m_\xi(t) = M\big(\xi(t)\big) = M(\zeta\cdot\sin t) = M(\zeta)\cdot\sin t = 5\ \sin t,$$
$$\sigma^2_\xi(t) = D\big(\xi(t)\big) = D(\zeta\cdot\sin t) = D(\zeta)\cdot\sin^2 t = \sin^2 t,$$
$$K_\xi(t_1;t_2) = M\big((\zeta\cdot\sin t_1 - 5\ \sin t_2)\cdot(\zeta\cdot\sin t_2 - 5\ \sin t_2)\big) =$$
$$= M\big((\zeta-5)^2\sin t_1\sin t_2\big) = D(\zeta)\sin t_1\sin t_2 = \sin t_1\sin t_2.$$

Берков Н.А. МИРЭА, кафедра Высшая математика 2

Ответ: $m_\xi(t) = 5\ \sin t$; $\sigma_\xi^2(t) = \sin^2 t$; $K_\xi(t_1; t_2) = \sin t_1 \cdot \sin t_2$.

Перечислим свойства корреляционной функции случайного процесса.

(1) $K_\xi(t_1; t_2) = K_\xi(t_2; t_1)$,
(2) $K_\xi(t; t) = \sigma_\xi^2(t)$,
(3) $|K_\xi(t_1; t_2)| \leqslant \sigma_\xi(t_1) \cdot \sigma_\xi(t_2)$,
(4) Если $\eta(t) = \xi(t) + \varphi(t)$, где $\varphi(t)$— неслучайная функция. Тогда $K_\eta(t_1, t_2) = K_\xi(t_1, t_2)$.
(5) Если $\eta(t) = \xi(t) \cdot \varphi(t)$, где $\varphi(t)$— неслучайная функция. Тогда $K_\eta(t_1, t_2) = K_\xi(t_1, t_2)\varphi(t_1)\varphi(t_2)$.

Ещё два свойства корреляционной функции будут приведены в п. 8.4.

Наряду с корреляционной функцией случайного процесса рассматривается нормированная корреляционная функция:

$$\rho_\xi(t_1; t_2) = \frac{K_\xi(t_1; t_2)}{\sigma_\xi(t_1) \cdot \sigma_\xi(t_2)}. \tag{8.6}$$

Свойства нормированной корреляционной функции аналогичны свойствам коэффициента корреляции:

(1) $\rho_\xi(t_1; t_2) = \rho_\xi(t_2; t_1)$,
(2) $\rho_\xi(t; t) = 1$,
(3) $|\rho_\xi(t_1; t_2)| \leqslant 1$.

Пример 8.5. *Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайной функции $\xi(t) = U \cdot e^t + \sin t$, где U — случайная величина с числовыми параметрами $M(U) = 10$, $D(U) = 2$.*

Р е ш е н и е: Пользуясь свойствами математического ожидания и дисперсии, получаем:

$$m_\xi(t) = M\big(\xi(t)\big) = M\left(U \cdot e^t + \sin t\right) = M(U) \cdot e^t + M(\sin t) = 10\ e^t + \sin t.$$

Найдём центрированную функцию (8.4),

$$\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m(t) = U \cdot e^t + \sin t - 10\ e^t + \sin t = (U - 10) \cdot e^t.$$

Найдём корреляционную функцию:

$$K_\xi(t_1; t_2) = M\left(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right) = M\left((U - 10) \cdot e^{t_1} \cdot (U - 10) \cdot e^{t_2}\right) =$$
$$= e^{t_1} e^{t_2} \cdot M\left((U - 10)^2\right) = e^{t_1 + t_2} D(U) = 2e^{t_1 + t_2}.$$

Берков Н.А. МИРЭА кафедра высшая математика 2

Используя свойство (2), найдём дисперсию,

$$\sigma_{\xi}^2(t) = K_\xi(t;t) = 2e^{t+t} = 2e^{2t}.$$

Ответ: $m_{\xi}(t) = 10\ e^t + \sin t;\ \ \sigma_{\xi}^2(t) = 2e^{2t};\ \ K_\xi(t_1;t_2) = 2e^{t_1+t_2}$.

8.4. Взаимная корреляционная функция

Определение 8.7. *Взаимной корреляционной функцией двух случайных процессов $\xi(t)$ и $\zeta(t)$ называется неслучайная функция двух аргументов $R_{\xi\zeta}(t_1;t_2)$, равная корреляционному моменту сечений $\xi(t_1)$ и $\zeta(t_2)$:*

$$R_{\xi\zeta}(t_1;t_2) = M\big(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\cdot\overset{\circ}{\zeta}(t_2)\big).$$

Два случайных процесса $\xi(t)$ и $\zeta(t)$ называют некоррелированными, если $R_{\xi\zeta}(t_1;t_2) \equiv 0$ для $\forall\ t_1,t_2$.

Свойства $R_{\xi\zeta}(t_1;t_2)$ непосредственно вытекают из определения 8.7 и свойств корреляционного момента:

(1) $R_{\xi\zeta}(t_1;t_2) = R_{\zeta\xi}(t_2;t_1)$,
(2) $|R_{\xi\zeta}(t_1;t_2)| \leqslant \sigma_{\xi}(t_1)\cdot\sigma_{\zeta}(t_2)$,
(3) $R_{\xi\xi}(t_1;t_2) = K_\xi(t_1;t_2)$.
Добавим к перечисленным в п. 8.3 свойствам корреляционной функции $K_\xi(t_1;t_2)$ ещё два:
(4) Если $\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t)$, то

$$K_\xi(t_1;t_2) = K_{\xi_1}(t_1;t_2) + K_{\xi_2}(t_1;t_2) + R_{\xi_1\xi_2}(t_1;t_2) + R_{\xi_2\xi_1}(t_1;t_2).$$

Действительно:

$$K_\xi(t_1;t_2) = M\big(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\cdot\overset{\circ}{\xi}(t_2)\big) = M\Big(\big(\overset{\circ}{\xi}_1(t_1)+\overset{\circ}{\xi}_2(t_1)\big)\cdot\big(\overset{\circ}{\xi}_1(t_2)+\overset{\circ}{\xi}_2(t_2)\big)\Big) =$$

$$= M\big(\overset{\circ}{\xi}_1(t_1)\cdot\overset{\circ}{\xi}_1(t_2)\big) + M\big(\overset{\circ}{\xi}_2(t_1)\cdot\overset{\circ}{\xi}_2(t_2)\big) + M\big(\overset{\circ}{\xi}_1(t_1)\cdot\overset{\circ}{\xi}_2(t_2)\big) +$$

$$+ M\big(\overset{\circ}{\xi}_2(t_1)\cdot\overset{\circ}{\xi}_1(t_2)\big) = K_{\xi_1}(t_1;t_2) + K_{\xi_2}(t_1;t_2) + R_{\xi_1\xi_2}(t_1;t_2) + R_{\xi_2\xi_1}(t_1;t_2).$$

(5) Корреляционная функция суммы двух некоррелированных случайных процессов равна сумме их корреляционных функций:

$$K_\xi(t_1;t_2) = K_{\xi_1}(t_1;t_2) + K_{\xi_2}(t_1;t_2).$$

Это свойство является непосредственным следствием предыдущего, т.к. для некоррелированных процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ $R_{\xi_1\xi_2}(t_1;t_2) \equiv 0$, $R_{\xi_2\xi_1}(t_1;t_2) = R_{\xi_1\xi_2}(t_2;t_1) \equiv 0$ при $\forall\ t_1;t_2$.

Берков Н.А. МИРЭА, кафедра высшая математика 2

8.5. Производная и интеграл случайной функции

Для изучения изменения случайных функций вводится среднеквадратичная сходимость.

Определение 8.8. *Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ сходится в среднеквадратичном к случайной величине ξ, если математическое ожидание квадрата разности $\xi_n - \xi$ стремится к нулю при $n \to \infty$*

$$\lim_{n\to\infty} M\left((\xi_n - \xi)^2\right) = 0. \tag{8.7}$$

Случайную величину ξ называют среднеквадратичным пределом последовательности случайных величин $\{\xi_n\}$.

Определение 8.9. *Производной случайной функции $\xi(t)$ называется среднеквадратичный предел отношения приращения случайной функции к приращению аргумента Δt при $\Delta t \to 0$:*

$$\xi'(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\xi(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \tag{8.8}$$

Из свойств математического ожидание следует:

Теорема 8.1. *Математическое ожидание производной $\xi'(t) = \dot{\xi}$ от случайной величины $\xi(t)$ равно производной от её математического ожидания:*

$$m_{\dot{\xi}}(t) = m_{\xi}'(t). \tag{8.9}$$

Теорема 8.2. *Корреляционная функция производной от случайной функции $\xi(t)$ равна второй смешанной производной от её корреляционной функции:*

$$K_{\dot{\xi}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}. \tag{8.10}$$

Пример 8.6. *Дана корреляционная функция $K_\xi(t_1, t_2) = 3e^{2t_1}e^{2t_2}$ и её математическое ожидание $m_\xi(t) = t^2$ случайного процесса $\xi(t)$. Найти корреляционную функцию, математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $\eta(t) = t^2 \dfrac{d(2\xi(t) + \sin^2 t)}{dt}$.*

Р е ш е н и е:

Случайную функцию $\eta(t) = t^2(2\xi'(t) + \sin 2t)$, представим в виде $\eta(t) = t^2 \cdot \xi_1(t)$, где $\xi_1(t) = 2\xi'(t) + \sin 2t$.

Бергов Н.А. МИРЭА, кафедра высшая математика 2

Используем два свойства корреляционной функции:

1) Если $\eta(t) = \xi(t) + \varphi(t)$, где $\varphi(t)$— неслучайная функция. Тогда $K_\eta(t_1, t_2) = K_\xi(t_1, t_2)$.

2) Если $\eta(t) = \xi(t) \cdot \varphi(t)$, где $\varphi(t)$— неслучайная функция. Тогда $K_\eta(t_1, t_2) = K_\xi(t_1, t_2)\varphi(t_1)\varphi(t_2)$.

$K_\eta(t_1, t_2) = t_1^2 t_2^2 K_{\xi_1}(t_1, t_2)$

$$K_{\xi_1}(t_1, t_2) = 2 \cdot 2K_{\xi'}(t_1, t_2) = 4\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} K_\xi(t_1, t_2) = 4\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\left(3e^{2t_1}e^{2t_2}\right) =$$

$= 48e^{2(t_1+t_2)}$.

$K_\eta(t_1, t_2) = t_1^2 t_2^2 K_{\xi_1}(t_1, t_2) = 48t_1^2 t_2^2 e^{2(t_1+t_2)}$.

$D_\eta(t) = K_\eta(t, t) = 48t^4 e^{4t}$.

$m_\eta(t) = 2t^2 m_{\xi'(t)}(t) + t^2 \sin 2t = 2t^2 \left(t^2\right)' + t^2 \sin 2t = 4t^3 + t^2 \sin 2t$.

Ответ:

$K_\eta(t_1, t_2) = 48t_1^2 t_2^2 e^{2(t_1+t_2)}; D_\eta(t) = 48t^4 e^{4t}; m_\eta(t) = 4t^3 + t^2 \sin 2t$.

Определение 8.10. *Интегралом от случайной функции $\xi(t)$ по отрезку $[0, t]$ называется предел в среднеквадратическом от интегральной суммы при стремлении к бесконечности числа разбиений n и одновременно к нулю $max(\Delta\tau_i)$*

$$\int_0^t \xi(\tau) d\tau = \lim_{\Delta\tau_i \to 0, n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \xi(\tau_i)\Delta\tau_i. \tag{8.11}$$

Теорема 8.3. *Математическое ожидание интеграла случайной величины $\xi(t)$ равно интегралу от её математического ожидания: если*

$$\eta(t) = \int_0^t \xi(\tau) d\tau,$$

то

$$m_\eta(t) = \int_0^t m_\xi(\tau) d\tau.$$

Теорема 8.4. *Корреляционная функция интеграла от случайной функции $\xi(t)$ равна двойному интегралу от её корреляционной функции:*

Бегов Н.А. МИРЭА. кафедра высшая математика 2

если

$$\eta(t) = \int_0^t \xi(\tau)d\tau,$$

то

$$K_\eta(t_1, t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_\xi(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2.$$

Пример 8.7. *Дана корреляционная функция $K_\xi(t_1, t_2) = 3e^{2t_1}e^{2t_2}$ и её математическое ожидание $m_\xi(t) = t^2$ случайного процесса $\xi(t)$. Найти корреляционную функцию, математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $\eta(t) = 3e^t \int_0^t \xi(\tau) + 2\tau)d\tau$.*

Р е ш е н и е:

Преобразуем случайный процесс $\eta(t)$.

$\eta = 3e^t\xi_1(t) + 3e^t\tau^2\Big|_0^t = 3e^t\xi_1(t) + 3e^tt^2$, где $\xi_1(t) = \int_0^t \xi(\tau)d\tau$.

$m_{\xi_1}(t) = \int_0^t m_\xi(\tau)d\tau = \int_0^t \tau^3 d\tau = \tau^3/3\Big|_0^t = t^3/3$.

$m_\eta(t) = 3e^t m_{\xi_1}(t) + e^tt^2 = 3e^tt^3/3 + e^tt^2 = e^tt^2(t+1)$.

$K_\eta(t_1, t_2) = (3e^{t_1})(3e^{t_2})K_{\xi_1}(t_1, t_2) = 9e^{t_1+t_2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_1} 3e^{2t_1}e^{2t_2}d\tau_1 d\tau_2 =$

$= 27e^{t_1+t_2}\dfrac{1}{2}e^{2\tau}\Big|_0^{t_1}\dfrac{1}{2}e^{2\tau}\Big|_0^{t_2} = \dfrac{27}{4}e^{t_1+t_2}(e^{2t_1}-1)(e^{2t_2}-1)$.

$D_\eta(t) = K_\eta(t,t) = \dfrac{27}{4}e^{2t}(e^{2t}-1)^2$.

8.6. Комплексные случайные процессы

Определение 8.11. *Комплексной случайной величиной называют $\zeta = \xi_1 + \xi_2 i$, где ξ_1 и ξ_2 — действительные случайные величины, i — мнимая единица. Комплексным случайным процессом называют комплексную случайную величину $\zeta(t)$ такую, что:*

$$\zeta(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t)i, \tag{8.12}$$

где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — действительные случайные процессы, i — мнимая единица ($i^2 = -1$).

Берков Н.А. МИРЭА, кафедра высшая математика 2

Определим числовые характеристики комплексного случайного процесса так, чтобы сохранялись их основные свойства, которые мы изучали для действительных случайных процессов.

Определение 8.12. *Математическим ожиданием комплексного случайного процесса* $\zeta(t) = \xi_1 + \xi_2(t)i$ *называется неслучайная комплексная функция:*

$$m_\zeta(t) = M\big(\xi_1(t)\big) + M\big(\xi_2(t)\big)i.$$

Заметим, что при $\xi_2(t) \equiv 0$ получаем математическое ожидание действительного случайного процесса $\xi_1(t)$, введённое в п. 8.2. Самостоятельно докажите, что все свойства математического ожидания, перечисленные в п. 8.2, остаются справедливыми для комплексного случайного процесса.

Определение 8.13. *Дисперсией комплексного случайного процесса (8.12) называют математическое ожидание квадрата модуля центрированного процесса* $\overset{\circ}{\zeta}(t) = \xi(t) - m_\xi(t)$*:*

$$\sigma^2_\zeta(t) = M\big(|\overset{\circ}{\zeta}(t)|^2\big).$$

Заметим, что при $\zeta_2(t) \equiv 0$ получается дисперсия действительного случайного процесса, введённая в п. 8.2. Все четыре перечисленные там свойства дисперсии остаются справедливыми (докажите это самостоятельно). Кроме того, добавляется пятое:

5. $\sigma^2_\xi(t) = \sigma^2_{\xi_1}(t) + \sigma^2_{\xi_2}(t)$.

Действительно, пользуясь определением модуля комплексного числа $\Big(|\overset{\circ}{\zeta}(t)| = \sqrt{\overset{\circ}{\xi}{}^2_1(t) + \overset{\circ}{\xi}{}^2_2(t)}\Big)$, получаем:

$$\sigma^2_\zeta = M\big(|\overset{\circ}{\zeta}(t)|^2\big) = M\big(\overset{\circ}{\xi}{}^2_1(t) + \overset{\circ}{\xi}{}^2_2(t)\big) = M\big(\overset{\circ}{\xi}{}^2_1(t)\big) + M\big(\overset{\circ}{\xi}{}^2_2(t)\big) = \sigma^2_{\xi_1}(t) + \sigma^2_{\xi_2}(t).$$

Другими словами, дисперсия комплексного случайного процесса равна сумме дисперсий его действительной и мнимой частей.

Определение 8.14. *Корреляционной функцией комплексного случайного процесса (8.12) называют корреляционный момент его сечений* $\overset{\circ}{\zeta}(t_1) = \xi_1(t_1) + \xi_2(t_1)i$ *и* $\overline{\overset{\circ}{\zeta}(t_2)} = \xi_1(t_2) - \xi_2(t_2)i$

$$K_\zeta(t_1; t_2) = M\big(\overset{\circ}{\zeta}(t_1) \cdot \overline{\overset{\circ}{\zeta}(t_2)}\big). \tag{8.13}$$

Самостоятельно убедитесь в справедливости трёх свойств корреляционной функции, перечисленных в п. 8.3.

Берков Н.А. МИРЭА, кафедра высшая математика 2

В частности: $K_\zeta(t;t) = M\big(\mathring{\zeta}(t)\cdot\overline{\mathring{\zeta}(t)}\big) = M\big(|\mathring{\zeta}(t)|^2\big) = \sigma_\zeta^2(t)$.

Пользуясь свойствами 4 и 5 корреляционной функции, приведёнными в п. 8.4, получаем для комплексного случайного процесса $\zeta(t)$:

$$K_\zeta(t_1;t_2) = K_{\xi_1}(t_1;t_2) + K_{\xi_2}(t_1;t_2) + \big(R_{\xi_2\xi_1}(t_1;t_2) - R_{\xi_1\xi_2}(t_1;t_2)\big)i.$$

Если составляющие $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ некоррелированны, то корреляционная функция комплексного случайного процесса равна сумме корреляционных функций составляющих:

$$K_\zeta(t_1;t_2) = K_{\xi_1}(t_1;t_2) + K_{\xi_2}(t_1;t_2).$$

8.7. Каноническое разложение случайной функции

Рассмотрим случайную функцию $\xi(t)$, заданную в виде суммы

$$\xi(t) = m_\xi(t) + \sum_{i=1}^{m} V_i\varphi_i(t), \tag{8.14}$$

где коэффициенты $V_1, V_2, \ldots, V_m$ представляют собой систему случайных величин с математическими ожиданиями, равными нулю и с корреляционной матрицей K.

Найдем корреляционную функцию и дисперсию случайной функции $\xi(t)$.

По определению

$K_\xi(t_1,t_2) = M\left(\mathring{\xi}(t_1)\mathring{\xi}(t_2)\right)$.

$\mathring{\xi}(t) = \xi(t) - m_\xi(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} V_i\varphi_i(t)$.

Получаем

$$K_\xi(t_1,t_2) = M\left(\sum_{i=1}^{m} V_i\varphi_i(t)\cdot\sum_{j=1}^{m} V_j\varphi_j(t)\right) = M\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(V_iV_j\varphi_i(t_1)\varphi_j(t_2)\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\Big(M\Big(V_iV_j\Big)\varphi_i(t_1)\varphi_j(t_2)\Big)$$

$$K_\xi(t_1,t_2) = \sum_{i=1}^{m}\Big(M\Big(V_iV_i\Big)\varphi_i(t_1)\varphi_i(t_2)\Big) + \sum_{i=1,j=1,j\neq j}^{m}\Big(M\Big(V_iV_j\Big)\varphi_i(t_1)\varphi_j(t_2)\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(D_i\varphi_i(t_1)\varphi_i(t_2)\right) + \sum_{i=1,j=1,j\neq j}^{m}\left(K_{ij}\varphi_i(t_1)\varphi_j(t_2)\right).$$

Берков Н.А. МИРЭА, кафедра высшая математика 2

Получили

$$K_\xi(t_1,t_2)=\sum_{i=1}^{m}(D_i\varphi_i(t_1)\varphi_i(t_2))+\sum_{i=1,j=1,j\neq j}^{m}(K_{ij}\varphi_i(t_1)\varphi_j(t_2)), \quad (8.15)$$

где K_{ij} — элементы корреляционной матрицы.

Используя формулу $D_\xi(t)=K_\xi(t,t)$, находим дисперсию

$$D_\xi(t)=\sum_{i=1}^{m}D_i\varphi_i^2(t)+\sum_{i=1,j=1,j\neq j}^{m}(K_{ij}\varphi_i(t_1)\varphi_j(t_2)). \quad (8.16)$$

Полученные формулы приобретают особенно простой вид, когда все коэффициенты V_i разложения (8.14) некоррелированы, т.е. $K_{ij}=0$. В этом случае разложения называются ***каноническим***.

Определение 8.15. *Каноническим разложением случайной функции $\xi(t)$ называется её представление в виде суммы:*

$$\xi(t)=m_\xi(t)+\sum_{i=1}^{m}V_i\varphi_i(t), \quad (8.17)$$

где $m_\xi(t)$ — математическое ожидание случайной функции, $\varphi_1(t),\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t)$ — координатные функции, а коэффициенты $V_1,V_2,\ldots,V_m$ — некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями равными нулю.

Для канонического разложения

$$K_\xi(t_1,t_2)=\sum_{i=1}^{m}(D_i\varphi_i(t_1)\varphi_i(t_2)). \quad (8.18)$$

$$D_\xi(t)=\sum_{i=1}^{m}D_i\varphi_i^2(t). \quad (8.19)$$

Канонические разложения применяются не только для действительных, но и для комплексных случайных функций. Рассмотрим обобщение понятия канонического разложения на случай комплексной случайной функции.

Согласно определению (8.12, 8.13) комплексным случайным процессом называют комплексную случайную величину $\zeta(t)$ такую, что: $\zeta(t)=\xi_1(t)+\xi_2(t)i$, где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — действительные случайные процессы, i — мнимая единица.

Бергов Н.А. МИРЭА, кафедра высшая математика 2

Корреляционной функцией комплексного случайного процесса (8.12) называют корреляционный момент его сечений $\mathring{\zeta}(t_1) = \xi_1(t_1) + \xi_2(t_1)i$ и $\overline{\mathring{\zeta}(t_2)} = \xi_1(t_2) - \xi_2(t_2)i$

$$K_\zeta(t_1;t_2) = M\big(\mathring{\zeta}(t_1)\cdot\overline{\mathring{\zeta}(t_2)}\big).$$

Каноническое разложение комплексной случайной функции называется её представление в виде:

$$\zeta(t) = m_\zeta(t) + \sum_{i=1}^{m} V_i\varphi_i(t), \tag{8.20}$$

где $V_1, V_2, \ldots, V_m$ — некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями равными нулю, $m_\zeta(t)$ — математическое ожидание случайной функции $\zeta(t)$, а $\varphi_1(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)$ — комплексные случайные функции.

Для канонического разложения комплексной случайной функции формулы для корреляционной функции и дисперсии принимают вид:

$$K_\zeta(t_1,t_2) = \sum_{i=1}^{m}\big(D_i\varphi_i(t_1)\overline{\varphi_i(t_2)}\big). \tag{8.21}$$

$$D_\zeta(t) = \sum_{i=1}^{m} D_i|\varphi_i(t)|^2(t). \tag{8.22}$$

Пример 8.8. *Найти корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $\zeta(t) = \xi_1\sin 4t + \xi_2\cos 4t + i\xi_3 t^2$, если он задан каноническим разложением. Дисперсии случайных величин $D_{\xi_1} = D_1 = 2$, $D_{\xi_2} = D_2 = 3$ и $D_{\xi_3} = D_3 = 6$.*

Р е ш е н и е:

Используем формулы (8.21)—(8.22). Здесь $\varphi_1(t) = \sin 4t$ и $\varphi_2(t) = \cos 4t$ — действительные случайные функции, а $\varphi_3(t) = it^2$ — комплексная случайная функция.

$K_\zeta(t_1,t_2) = D_1\varphi_1(t_1)\varphi_1(t_2) + D_2\varphi_2(t_1)\varphi_2(t_2) + D_3\varphi_3(t_1)\overline{\varphi_3(t_2)} =$
$= 2\sin 4t_1\sin 4t_2 + 3\cos 4t_1\cos 4t_2 + 6(it_1^2)\cdot(-it_2^2) =$
$= 2\sin 4t_1\sin 4t_2 + 3\cos 4t_1\cos 4t_2 + 6t_1^2t_2^2.$

$D_\zeta(t) = D_1\varphi_1^2(t) + D_1\varphi_2^2(t) + D_3|\varphi_3(t)|^2 = 2\sin^2 4t + 3\cos^2 4t + 6t^4.$

$D_\zeta(t) = 2 + \cos^2 4t + 6t^4.$

Ответ: $K_\zeta(t_1,t_2) = 2\sin 4t_1\sin 4t_2 + 3\cos 4t_1\cos 4t_2 + 6t_1^2t_2^2$;
$D_\zeta(t) = 2 + \cos^2 4t + 6t^4.$

Берков Н.А. МИРЭА, кафедра высшая математика 2

8.8. Стационарный случайный процесс

Определение 8.16. *Случайный процесс $\xi(t)$ называется стационарным (стационарным в широком смысле), если его математическое ожидание $m_\xi(t)$ постоянно (не зависит от t), а корреляционная функция $K_\xi(t_1;t_2)$ зависит только от разности аргументов:*

$$m_\xi(t) = m, \quad K_\xi(t_1;t_2) = k_\xi(t_2 - t_1).$$

Из определения 8.16 следует, что корреляционная функция стационарного процесса есть функция одного аргумента:

$$K_\xi(t_1;t_2) = k_\xi(t_2 - t_1) = k_\xi(\tau), \quad \text{где } \tau = t_2 - t_1. \tag{8.23}$$

Перечислим свойства корреляционной функции стационарного случайного процесса (ССП):

(1) Корреляционная функция ССП чётная:

$$k_\xi(-\tau) = k_\xi(\tau).$$

Действительно, на основании свойства 1 $K_\xi(t_1;t_2)$ (см. п. 8.3):

$$k_\xi(t_1;t_2) = k_\xi(t_2;t_1) \implies k_\xi(-\tau) = k_\xi(t_1 - t_2) = K_\xi(t_2;t_1) = \\ = K_\xi(t_1;t_2) = k_\xi(t_2 - t_1) = k_\xi(\tau).$$

(2) Дисперсия ССП постоянна и равна значению корреляционной функции в нуле:

$$\sigma_\xi^2(t) = k_\xi(0) = \sigma_\xi^2.$$

Действительно, на основании свойства 2 $K_\xi(t_1;t_2)$:

$$\sigma_\xi^2(t) = K_\xi(t;t) = k_\xi(t - t) = k_\xi(0) = \text{const}.$$

(3) Модуль корреляционной функции не превышает её значения в нуле:

$$|k_\xi(\tau)| \leqslant k_\xi(0).$$

Действительно, на основании свойства 3 $K_\xi(t_1;t_2)$:

$$|K_\xi(t_1;t_2)| \leqslant \sqrt{K_\xi(t_1;t_1)\cdot K_\xi(t_2;t_2)} \implies |k_\xi(\tau)| \leqslant \sqrt{k_\xi(0)\cdot k_\xi(0)} \implies \\ \implies |k_\xi(\tau)| \leqslant k_\xi(0) \iff |k_\xi(\tau)| \leqslant \sigma_\xi^2.$$

Берков Н.А. МИРЭА, кафедра высшая математика 2

Нормированная корреляционная функция ССП $\rho_\xi(\tau)$ получится равной (см. определение 8.4).

$$\rho_\xi(\tau) = \frac{k_\xi(\tau)}{k_\xi(0)} = \frac{k_\xi(\tau)}{\sigma_\xi^2}.$$

Заметим, что $|\rho_\xi(\tau)| \leqslant 1$, $\rho_\xi(0) = 1$.

8.9. Марковские случайные процессы.

Пусть имеется некоторая физическая система S, которая с течением времени меняет свое состояние (переходит из одного состояния в другое), причём заранее неизвестным, случайным образом. Тогда будем говорить, что в системе S протекает случайный процесс.

Под «физической системой» можно понимать что угодно: техническое устройство, группу таких устройств, предприятие, отрасль промышленности, живой организм, популяцию и т. д.

Например: система S – техническое устройство, состоящее из n узлов, которые время от времени случайно выходят из строя, ремонтируются или заменяются новыми.

Определение 8.17. *Случайный процесс, протекающий в какой-либо физической системе S, называется Марковским, если для любого момента времени t_0, рис. 32 вероятностные характеристики процесса S в будущем зависят только от его состояния в данный момент t_0 и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.*

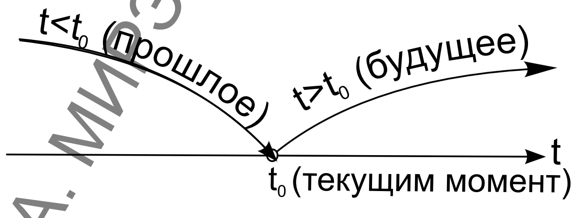


Рис. 32. *Марковский процесс*

Рассмотрим простой пример марковского случайного процесса.

Пример 8.9. *По оси абсцисс Ox случайным образом перемещается точка A. Пусть в момент времени $t = 0$ точка находится в начале координат и остается там в течение одной секунды. Через*

Беров Н.А. МИРЭА, кафедра высшая математика 2

секунду бросается монета; если выпал герб — точка перемещается на одну единицу длины вправо, если цифра — влево. Через секунду снова бросается монета и производится такое же случайное перемещение, и т. д.

Процесс изменения положения точки (или, как говорят, «блуждания») представляет собой случайный процесс с дискретным временем $t = 0, 1, \ldots$ и счётным множеством состояний
$x_0 = 0, x_1 = 1, x_{-1} = -1, x_2 = 2, x_{-2} = -2, \ldots$

Схема переходов из одного состояния в другое приведённого случайного процесса представлена на рис. 33.

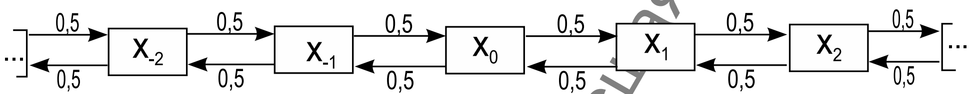


Рис. 33. *Схема переходов для примера 8.9*

Этот процесс является марковским, т.к., если в момент времени t_k система находится в состоянии X_k, то независимо от предыдущей истории она может перейти с вероятностью 0,5 на одну позицию влево или вправо. Возможные положения точки через единицу времени будут x_{k-1} или x_{k+1}. Через две единицы точка может находится в положении x_{k-2}, x_{k+2} или x_k с вероятностями 1/4,1/4, 1/2 и так далее. Очевидно, все эти вероятности зависят только от того, где находится точка в данный момент t_k, и совершенно не зависят от того, как она пришла туда.

Марковский случайный процесс с дискретным состоянием и дискретным временем обычно называют ***марковской цепью***. Для таких процессов временной параметр t удобнее рассматривать как номер шага: 1, 2, ..., k,... Случайный процесс в этом случае характеризуется последовательностью состояний:

$$S(0), S(1), \ldots, S(k), \ldots, \tag{8.24}$$

где $S(0)$ — начальное состояние (состояние перед первым шагом); $S(1)$ —состояние после 1-го шага; $S(k)$ — состояние после k-го шага.

Рассмотрим процесс с n возможными состояниями $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Обозначим $p_i(k)$, вероятность того, что от k-го шага и до $k+1$-го шага система S будет находиться в состоянии S_i. Вероятности $p_i(k)$ называются вероятностями событий цепи Маркова. Очевидно, что для

Бергов Н.А. МИРЭА кафедра высшая математика 2

любого шага k должно выполняться условие нормировки

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(k) = 1. \tag{8.25}$$

Ещё необходимо задать вектор начального распределения вероятностей

$$\overline{\mathbf{p}} = (p_1(0), p_2(0), \dots, p_i(0), \dots, p_n(0)). \tag{8.26}$$

Вероятность перехода на k-том шаге из состояния S_i в состояние S_j называется условной вероятностью того, что система S после k-го шага оказалась в состоянии S_j, при условии, что непосредственно перед этим (после $k-1$-го шага) она находилась в состоянии S_i.

Марковская цепь называется однородной, если переходные вероятности не зависят от номера шага, а зависят только от того, из какого состояния и в какое осуществляется переход:

$$P\Big(S(k-1) = S_i \Big| S(k) = S_j\Big) = P_{ij}. \tag{8.27}$$

Переходные вероятности марковской цепи P_{ij} образуют квадратную матрицу порядка n сумма элементов каждой i-той строки которой равна 1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1j} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2j} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{i1} & p_{i2} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nj} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}. \tag{8.28}$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1, i = 1.2.\dots n. \tag{8.29}$$

Если для однородной цепи Маркова заданы начальные распределения вероятностей (8.26) и матрица распределения вероятностей $\mathbf{P}$, то вектор вероятности состояний системы $\overline{\mathbf{p}}(k) = \overline{\mathbf{p}}(k-1)\mathbf{P}$.

Марковский случайный процесс с дискретным состоянием и непрерывным временем называют ***непрерывной цепью Маркова***. Для такого процесса вероятность перехода из состояния S_i в S_j для любого момента времени равна нулю, т.к. любой промежуток времени содержит бесконечное, несчётное множество точек. Вместо вероятности перехода P_{ij} рассматривают плотность вероятности перехода λ_{ij}, которая определяется как предел отношения вероятности перехода из

Берков Н.А. МИРЭА, кафедра высшая математика 2

состояния S_i в состояние S_j за малый промежуток времени от t до $t + \Delta t$ к длине этого промежутка, когда она стремиться к нулю.

Рассмотрим другой простой пример марковского процесса, но уже с непрерывным временем и дискретным множеством состояний.

Пример 8.10. *Имеется некоторое простое техническое устройство, состоящее из элементов двух типов E_1 и E_2, обладающих разной надёжностью. Эти элементы в случайные моменты времени и независимо друг от друга могут выходить из строя. Устройство работает при условии исправности обоих элементов. Время безотказной работы элемента — случайная величина, распределённая по показательному закону с параметрами λ_1 и λ_2. В случае отказа устройства немедленно принимаются меры для выявления причин и обнаруженный неисправный элемент немедленно заменяется новым. Время, необходимое для восстановления устройств, распределено по показательному закону с параметрами μ_1 и μ_2, соответственно.*

Рассматриваемый процесс имеет три состояния:

(1) S_1 — Система находится в работоспособном состоянии. Все элементы исправны.
(2) S_2 — Система находится не работает. Элемент E_1 ремонтируется.
(3) S_3 — Система находится не работает. Элемент E_2 ремонтируется.

Рассматриваемый процесс обладает марковским свойством. Если в момент t_0 система находится в состоянии S_1, тогда так как время безотказной работы каждого элемента — показательное, то момент отказа каждого элемента в будущем не зависит от того, сколько времени он уже работал (когда установлен или отремонтирован). Поэтому вероятность того, что в будущем система останется в состоянии S_1 или уйдет из него, не зависит от «предыстории» процесса. Предположим теперь, что в момент t_0 система находится в состоянии S_2, тогда так как время ремонта тоже показательное, вероятность окончания ремонта в любое время после t_0 не зависит от того, когда начался ремонт и когда были установлены или отремонтированы остальные (исправные) элементы. Таким образом, процесс является марковским.

Схема переходов из одного состояния в другое приведённого случайного процесса представлена на рис. 34.

Вероятность того, что система, находящаяся в состоянии S_i, за элементарный промежуток времени $(t, t + \Delta t)$ перейдёт в состояние

Бергов Н.А. МИРЭА кафедра Высшая математика 2

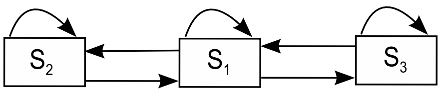


Рис. 34. *Схема переходов*

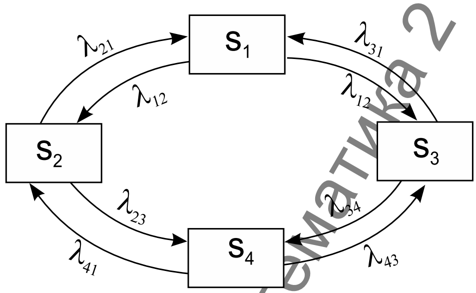


Рис. 35. *Граф состояния*

Иллюстрации состояний случайного процесса примера 8.10

S_j, есть вероятность того, что за это время появится хотя бы одно событие потока, переводящего систему из S_i в S_j. Эта вероятность равна $\lambda_{ij}\Delta t$.

Потоком вероятности перехода из состояния S_i в S_j называется величина $\lambda_{ij}\Delta t$. Для описания случайного процесса, протекающего в непрерывном времени и имеющего дискретное число состояний $S_1, \dots, S_n$ используются вероятности состояний

$$p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t), \tag{8.30}$$

где $p_i(t)$ — вероятность того, что система в момент времени t находится в состоянии S_i. Т.е.

$$p_i(t) = P\Big(S(t) = S_i\Big). \tag{8.31}$$

Очевидно, для любого t

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1. \tag{8.32}$$

Для нахождения вероятностей (8.30) нужно решить систему дифференциальных уравнений (уравнений Колмогорова), имеющих вид

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} p_j(t) - p_i(t) \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{8.33}$$

Каждое i-ое уравнение данной системы описывает изменение системы в состоянии S_i, при этом в первой сумме накапливается приток, а во второй сумме — отток.

Бергов Н.А. МИРЭА, кафедра Высшая математика 2

Систему (8.33) удобно получать используя размеченный граф состояний системы по следующему правилу: для каждого состояния S_i производную вероятности состояния приравниваем к сумме всех потоков вероятности из других состояний S_j в данное, минус сумма всех потоков вероятности, переводящих из данного состояния в другие.

Рассмотрим математическое описание марковского процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем на примере случайного процесса из примера 8.10. Граф состояний системы с отмеченными стрелками направлений переходов и их интенсивностей изображен на рис. 35. Будем полагать, что все переходы системы из состояния S_i в S_j происходят под воздействием простейших потоков событий с интенсивностями λ_{ij}. Переход системы из состояния S_1 в S_2 будет происходить под воздействием потока отказов узла E_1, а обратный переход из состояния S_2 в S_1 — под воздействием потока "окончаний ремонтов"узла E_1 и т.п.

$$
\begin{aligned}
p_1' = &\quad \lambda_{21}p_1 + \lambda_{31}p_3 - (\lambda_{12} + \lambda_{13})p_1, \\
p_2' = &\quad \lambda_{12}p_1 + \lambda_{42}p_4 - (\lambda_{21} + \lambda_{24})p_2, \\
p_3' = &\quad \lambda_{13}p_1 + \lambda_{43}p_4 - (\lambda_{31} + \lambda_{34})p_3, \\
p_4' = &\quad \lambda_{24}p_1 + \lambda_{34}p_3 - (\lambda_{42} + \lambda_{43})p_4.
\end{aligned}
$$

Уравнения Колмогорова дают возможность найти все вероятности состояний как функции времени.

Особый интерес представляют вероятности системы $p_i(t)$ в ***предельном стационарном режиме***, т.е. при $t \to \infty$, которые называются предельными (или финальными) вероятностями состояний.

В теории случайных процессов доказывается, что если число состояний системы конечно и из каждого из них можно (за конечное число шагов) перейти в любое другое состояние, то предельные вероятности существуют.

Предельная вероятность состояния S_i имеет чёткий смысл: она показывает среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии. Например, если предельная вероятность состояния S_1, т.е. $p_1 = 0{,}5$, то это означает, что в среднем половину времени система находится в состоянии S_1.

Так как предельные вероятности постоянны, то, заменяя в уравнениях Колмогорова их производные нулевыми значениями, получим систему линейных алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим. Для системы с графом состояний, изображенном на рис. 35, такая система уравнений имеет вид:

Бергов Н.А. МИРЭА кафедра Высшая математика 2

$$
\begin{aligned}
(\lambda_{12}+\lambda_{13})p_1 &= \lambda_{21}p_1+\lambda_{31}p_3,\\
(\lambda_{21}+\lambda_{24})p_2 &= \lambda_{12}p_1+\lambda_{42}p_4,\\
(\lambda_{31}+\lambda_{34})p_3 &= \lambda_{13}p_1+\lambda_{43}p_4,\\
(\lambda_{42}+\lambda_{43})p_4 &= \lambda_{24}p_1+\lambda_{34}p_3.
\end{aligned}
$$

Эту систему можно составить непосредственно по размеченному графу состояний, если руководствоваться правилом, согласно которому слева в уравнениях стоит предельная вероятность данного состояния p_i , умноженная на суммарную интенсивность всех потоков, ведущих из данного состояния, а справа — сумма произведений интенсивностей всех потоков, входящих в i-е состояние, на вероятности тех состояний, из которых эти потоки исходят.

Пример 8.11. *Система имеет три состояния. Построить граф состояний системы, написать уравнения Колмогорова и найти стационарное распределение. Интенсивность потоков, переводящих устройство из одного состояния в другое, заданы в таблице.*

Интенсивности потоков					
λ_{12}	λ_{13}	λ_{21}	λ_{23}	λ_{31}	λ_{32}
2	*2*	*1*	*2*	*3*	*0*

Р е ш е н и е: На рис. 36 представлен граф состояния данной системы.

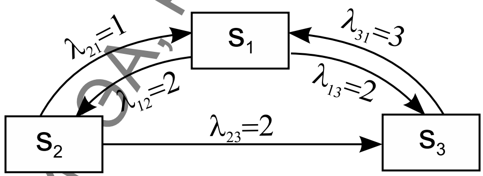


Рис. 36. *Граф состояния*

Используя граф состояния, запишем систему уравнения Колмогорова:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dp_1(t)}{dt} = p_2(t)+3p_3(t)-p_1(t)(2+2),\\
\dfrac{dp_2(t)}{dt} = 2p_1(t)-p_2(t)(1+2),\\
\dfrac{dp_3(t)}{dt} = 2p_1(t)+2p_2(t)-p_1(t)3,
\end{cases}
.
$$

Берков Н.А. МИЭА, кафедра высшая математика 2

Чтобы найти стационарное распределение, в уравнениях Колмогорова производные, находящиеся в левой части, заменим нулевыми значениями и вместо первого уравнения подставим уравнение $p_1(t) + p_2(t)_+ p_3(t) = 1$. Получаем систему

$$\begin{cases} 2p_1 - 3p_2 = 0, \\ 2p_1 + 2p_2 - 3p_3 = 0, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}.$$

Решаем систему методом Гаусса. 1) Умножим третье уравнение на 2. 2) Вычтем из второго и третьего уравнений первое. 3) Из третьего уравнения вычтем второе.

$$\begin{cases} 2p_1 - 3p_2 = 0, \\ 2p_1 + 2p_2 - 3p_3 = 0, \\ 2p_1 + 2p_2 + 2p_3 = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p_1 - 3p_2 = 0, \\ 5p_2 - 3p_3 = 0, \\ 5p_2 + 2p_3 = 2. \end{cases}, \begin{cases} 2p_1 - 3p_2 = 0, \\ 5p_2 - 3p_3 = 0, \\ 5p_3 = 2. \end{cases}.$$

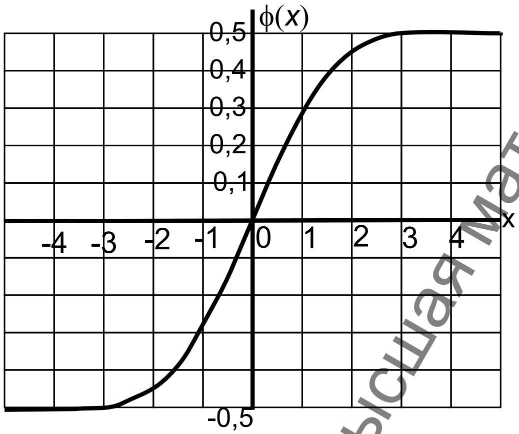
Выполняя обратный ход получаем:
$p_3 = 0{,}4; \quad p_2 = 3/5P_3 = 0{,}24; \quad p_1 = 3/2p_2 = 0{,}36.$

Получили, что в **предельном стационарном состоянии** (при большом значении временного параметра t) система в среднем 36% времени будет находиться в первом (S_1) состоянии, 24% — во втором (S_2) состоянии и 40% — в третьем (S_3) состоянии.

Берков Н.А. МИРЭА, кафедра высшая математика 2

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$



Для вычисления этой функции в пакете maxima, задаём функцию:

```
numer:true$ load(distrib)$
Phi(x):= cdf_normal(x,0 , 1 )-0.5;
plot2d([Phi(x)], [x,-4,4], [gnuplot_postamble, "set grid;"])$
```

Для вычисления значения $\Phi(1,25)$, вводим команду $Phi(1.25)$ и выполняем её. Получаем $Phi(1.25) = 0.3943502263331446$

Берков Н.А. МИРЭА, кафедра высшая математика 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

Берков Н.А. МИРЭА, кафедра высшая математика 2

Продолжение таблицы приложения 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Берков Н.А. МИРЭА. кафедра высшая математика 2

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29

Берков Н.А. МИРЭА, кафедра Высшая математика 2

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Берков Н.А. МИРЭА, кафедра высшая математика 2

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Критические точки распределения F Фишера — Снедекора

Уровень значимости $\alpha = 0{,}01$

$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	90,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Берков Н.А. МИРЭА кафедра высшая математика 2

Продолжение таблицы приложения 5

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$												
$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38
k1 - число степеней свободы большей дисперсии, k2 - число степеней свободы меньшей дисперсии												

Берков Н.А. МИРЭА, кафедра высшая математика 2

Список литературы

1. Берков Н.А., Мартыненко А.И., Пушкарь Е.А., Шишанин О.Е. Курс математики для технических высших учебных заведений.Часть 4. Теория вероятностей и математическая статистика. –Спб: Лань, 2013.

2. Берков Н.А. Применение пакета MathCad: *практикум.* – М.: МГИУ, 2006.

3. Берков Н.А. Применение пакета Maxima: *практикум.* – М.: МГИУ, 2009.

4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969.

5. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и её инженерные приложения. – М.: Наука, 1988.

6. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. – М.: Академия, 2003.

7. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1979.

8. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1998.

9. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. Учебник. Едиториал УРСС, 2005.

10. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть II. – М.: Высшая школа, 1986.

11. Сборник индивидуальных заданий по математике математики для технических высших учебных заведений. Часть 2. Дифференциальные уравнения. Задачи оптимизации. Теория вероятностей и математическая статистика. . –Спб: Лань, 2013.

Берков Н.А. МИРЭА, кафедра высшая математика 2