DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig prøve den 17. maj 2010.

Kursus Navn: Matematik 1 (2-timers prøve for forårssemesteret). **Kursus nr.** 01005

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.

Vægtning: De fire opgaver har samme vægt.

NB: Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.

OPGAVE 1

Det nedenstående klip er fra et Maple-ark hvor en reel funktion $f(x,y)$ med definitionsmængden $\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$ bliver undersøgt:

```
> f(0,0);
```

$$1$$

```
> diff(f(x,y),x);
```

$$-\frac{2x}{1-x^2-y^2}$$

```
> diff(f(x,y),y);
```

$$-\frac{2y}{1-x^2-y^2}$$

```
> diff(f(x,y),x,x);
```

$$-\frac{2}{1-x^2-y^2}-\frac{4x^2}{(1-x^2-y^2)^2}$$

```
> diff(f(x,y),y,y);
```

$$-\frac{2}{1-x^2-y^2}-\frac{4y^2}{(1-x^2-y^2)^2}$$

```
> diff(f(x,y),x,y);
```

$$-\frac{4xy}{(1-x^2-y^2)^2}$$

1. Find samtlige stationære punkter for f.
2. Find samtlige ekstrema for f.
3. Opstil det approksimerende polynomium P_2 af højst anden grad for f med udviklingspunktet $(x_0,y_0)=(0,0)$.

OPGAVE 2

1. Bestem en symmetrisk 3×3 matrix $\underline{\underline{A}}$ der opfylder ligningen

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x^2+y^2+z^2+2\cdot x\cdot z \text{ for alle } x,y,z\in\mathbb{R}.$$

2. Bestem en ortogonal 3×3 matrix $\underline{\underline{Q}}$ der opfylder ligningen

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} \underline{\underline{Q}}^{\mathrm{T}} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{Q}} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = 2x_1^2+y_1^2 \text{ for alle } x_1,y_1,z_1\in\mathbb{R},$$

hvor $\underline{\underline{A}}$ er matricen fra spørgsmål 1.

Opgavesættet fortsætter. Vend ⟼

OPGAVE 3

En cylinderflade $\mathcal{F}$ har ledekurven $y = \cosh(x)$ for $x \in [0;1]$ og er desuden fastlagt ved $z \in [0;1]$.

1. Find en parameterfremstilling for $\mathcal{F}$, og bestem den tilhørende Jacobi-funktion.
2. Bestem arealet af $\mathcal{F}$.

En parametriseret rumkurve $\mathcal{K}$ er givet ved $\mathbf{r}(u) = \left(u, \cosh(u), \frac{1}{2}\right)$ for $u \in [0;1]$.

3. Bestem Jacobi-funktionen der hører til $\mathbf{r}$, og udregn kurveintegralet

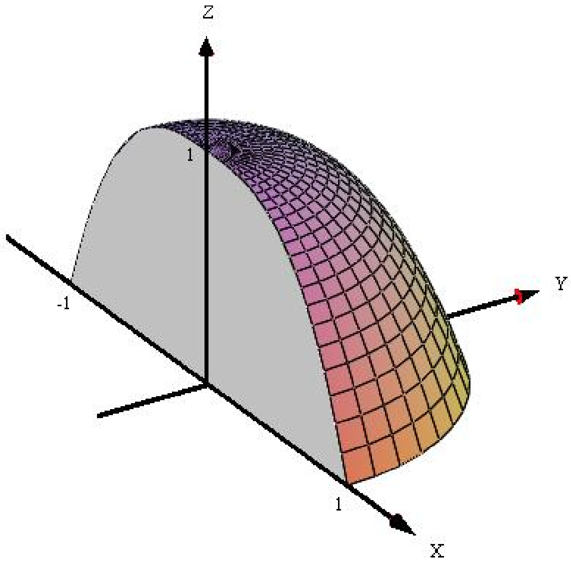
$$\int_{\mathcal{K}} 2z \, \mathrm{d}s \, .$$

.

OPGAVE 4

Et massivt område Ω i rummet er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u,v,w) = \big(u\cdot\cos(v),\, u\cdot\sin(v),\, w\cdot(1-u^3)\big) \text{ for } u \in [0;1]\,, v \in [0;\pi] \text{ og } w \in [0;1]\,.$$



1. Bestem rumfanget af Ω.

Lad $\mathcal{F}$ betegne overfladen af Ω. Om et vektorfelt $\mathbf{V}(x,y,z)$ oplyses det at $\mathrm{div}\mathbf{V}(x,y,z) = 5$ og at $\mathbf{rot}\,\mathbf{V}(x,y,z) = (0,-2,0)$.

2. Bestem fluxen af $\mathbf{V}(x,y,z)$ ud gennem $\mathcal{F}$.

Lad $\mathcal{K}$ betegne randkurven af den del af $\mathcal{F}$ som ligger i (x,z)-planen.

3. Bestem det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}(x,y,z)$ langs med $\mathcal{K}$ idet $\mathcal{K}$ forsynes med en selvvalgt orientering som vises på en skitse.

- SLUT -

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET
Skriftlig prøve den 16. maj 2011.
Kursus Navn: Matematik 1 (2-timers prøve for forårssemesteret). **Kursus nr.** 01005
Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.
Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.
Der må ikke kommunikeres med andre under prøven, hverken direkte eller elektronisk.
Vægtning: Opgave 1: **20**%, opgave 2: **25**%, opgave 3: **25**% og opgave 4: **30**%.

OPGAVE 1

En funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ har været undersøgt med Maple på følgende måde:

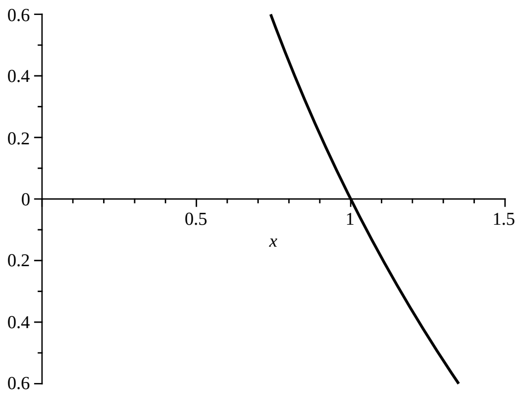
```
> mtaylor(f(x),x=1,3)
```

$$2-2x+(x-1)^2$$

```
> diff(f(x),x,x,x);
```

$$-\frac{4}{x^3}$$

```
> plot(f(x),x=0.7..1.3,scaling=constrained,view=[0..1.5,-0.6..0.6]);
```



Lad $P_2(x)$ betegne det approksimerende andengradspolynomium for $f(x)$ med udviklingspunktet $x_0=1$, og lad $R_2(x)=f(x)-P_2(x)$ betegne den tilsvarende restfunktion.

1. Opskriv $P_2(x)$, og angiv $f(1)$, $f'(1)$ og $f''(1)$.
2. Bestem $P_2(1.1)$, og vurdér ved hjælp af $R_2(x)$ den maksimale fejl der begås hvis man benytter værdien $P_2(1.1)$ i stedet for værdien $f(1.1)$.

OPGAVE 2

En reel funktion f af to reelle variable er givet ved

$$f(x,y)=\frac{1-y^2}{x^2}.$$

1. Bestem definitionsmængden for f, og gør rede for at f ikke har stationære punkter.

En delmængde af enhedscirkelskiven i (x,y)-planen med centrum i Origo er givet ved

$$M=\{\,(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1 \text{ og } x\ge\frac{1}{2}\,\}.$$

2. Skitsér M, og bestem den globale maksimumsværdi (størsteværdien) for f på M samt et punkt hvori denne værdi antages.

Opgavesættet fortsætter, vend ⟶

OPGAVE 3

I (x,y,z)-rummet er der givet vektorfeltet $\mathbf{V}(x,y,z) = (\mathrm{e}^x, -z\,,\,y)$ og en rumkurve $\mathcal{K}_\mathbf{r}$ med parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u) = \big(u, \sin(u), \cos(u)\big)\,,\; u \in [0\,,\,1]\,.$$

1. Udregn prikproduktet $\mathbf{V}(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u)$, og bestem det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}$ langs $\mathcal{K}_\mathbf{r}$.

En anden rumkurve $\mathcal{K}_\mathbf{s}$ er givet ved

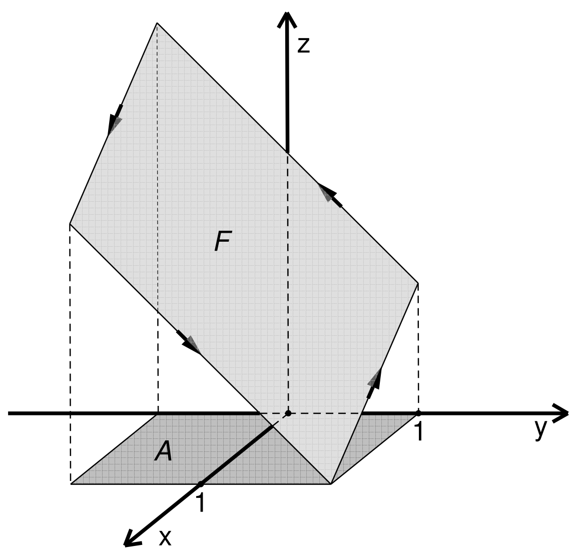
$$\mathbf{s}(u) = \big(u \cdot x_0\,,\, u \cdot y_0\,, u \cdot z_0\big)\,,\; u \in [0\,,\,1]$$

hvor x_0, y_0 og z_0 er tre vilkårlige reelle tal.

2. Udregn prikproduktet $\mathbf{V}(\mathbf{s}(u)) \cdot \mathbf{s}'(u)$, og bestem det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}$ langs $\mathcal{K}_\mathbf{s}$.

3. Undersøg om $\mathbf{V}$ er et gradientvektorfelt.

OPGAVE 4



I (x,y)-planen er der givet en reel funktion $h(x,y)$ og en afsluttet, begrænset punktmængde A som afgrænses af rektanglet med hjørnerne $(0,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ og $(0,1)$. I det følgende betragtes en flade F som består af den del af grafen for h som ligger (lodret) over A. Det oplyses at F kan parametriseres ved

$$(x,y,z) = \mathbf{r}(u,v) = (u\,,\,v\,,\,2-u-v) \text{ hvor } u \in [0\,,\,1] \text{ og } v \in [-1\,,\,1]\,.$$

1. Angiv regneforskriften for $h(x,y)$ for $(x,y) \in A$.

2. En massetæthedsfunktion er givet ved $f(x,y,z) = x+y+z$. Bestem massen $\int_F f(x,y,z)\,d\mu$.

I (x,y,z)-rummet er der givet vektorfeltet $\mathbf{V}(x,y,z) = (x\,,\,y\,,\,x \cdot y)$.

3. Bestem det tangentielle kurveintegral (cirkulationen) af $\mathbf{V}$ langs randkurven ∂F for F idet ∂F orienteres som vist på figuren.

4. Lad Ω betegne det massive rumlige område som ligger (lodret) mellem A og F. Bestem fluxen af $\mathbf{V}$ ud gennem overfladen $\partial\Omega$ af Ω.

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET
Skriftlig prøve den 10. maj 2012.
Kursus Navn: Matematik 1 (2-timers prøve for forårssemesteret). **Kursus nr.** 01005
Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.
Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.
Der må ikke kommunikeres med andre under prøven, hverken direkte eller elektronisk.
Vægtning: Opgave 1: **25%**, opgave 2: **20%**, opgave 3: **25%** og opgave 4: **30%**.

OPGAVE 1

En funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x-y}\,.$$

1. Bestem de partielle afledede af første og anden orden for f, og bestem deres værdier i punktet $(x_0,y_0) = (0,0)$.
2. Opstil ved hjælp af resultaterne i spørgsmål 1 det approksimerende andengradspolynomium for f med udviklingspunktet $(x_0,y_0) = (0,0)$.
3. Vis at alle approksimerende andengradspolynomier for f som har udviklingspunkt på linjen $y = x$, er ens.

OPGAVE 2

Lad a være et vilkårligt reelt tal. Om den symmetriske matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

oplyses at den har to egenværdier $\lambda_1 = a+1$ og $\lambda_2 = a-1$. Endvidere oplyses at vektorerne $(1,1)$ og $(-1,1)$ for ethvert a er egenvektorer for $\mathbf{A}$ hørende til henholdsvis λ_1 og λ_2.

1. Bestem en diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ og en positiv ortogonal (også kaldet *egentlig* ortogonal) matrix $\mathbf{Q}$ således at
$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\,\mathbf{Q}\,.$$

En andengradsligning i to variable er givet ved

$$(\star) \qquad ax^2 + ay^2 + 2x \cdot y = 1\,.$$

2. For hvilke a beskriver $(\star)$ en hyperbel?
3. For hvilke a beskriver $(\star)$ en ellipse?

Opgavesættet fortsætter, vend ⟶

OPGAVE 3

En reel funktion af to reelle variable er givet ved

$$h(x,y) = 1 - x\,.$$

Lad G betegne den del af grafen for h som ligger (lodret) over punktmængden B i (x,y)-planen givet ved

$$B = \{(x,y)\,|\,0 \leq x \leq 1 \text{ og } 1 \leq y \leq 2\}\,.$$

1. Find en parameterfremstilling for G. Udregn (med alle mellemregninger) den hertil hørende Jacobi-funktion.

En funktion f i rummet er givet ved $f(x,y,z) = \dfrac{x+z}{y}$.

2. Gør rede for at G tilhører definitionsmængden for f.

3. Bestem $\int_G f(x,y,z)\,\mathrm{d}\mu$.

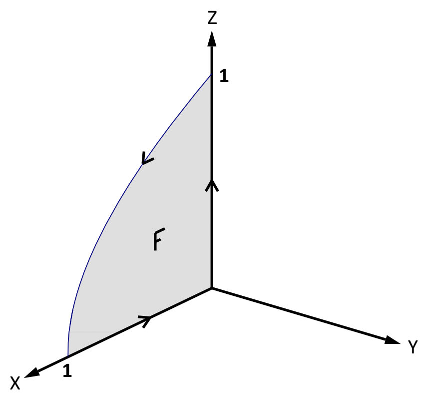
OPGAVE 4

Et vektorfelt $\mathbf{V}$ i (x,y,z)-rummet er givet ved $\mathbf{V}(x,y,z) = (z^2, 5y, -2x)$.

1. Bestem divergensen af $\mathbf{V}$ og rotationen af $\mathbf{V}$.

I (x,z)-planen i rummet betragtes en plan flade F givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} v(1-u^2) \\ 0 \\ u \end{bmatrix}, \; u \in [0,1]\;,\; v \in [0,1]\,.$$



2. Bestem det tangentielle kurveintegral (cirkulationen) af $\mathbf{V}$ langs randkurven ∂F for F, idet ∂F orienteres som vist på figuren.

Et massivt rumligt område Ω er det omdrejningslegeme der gennemløbes når F drejes vinklen 2π omkring z-aksen.

3. Opstil en parameterfremstilling for Ω, og bestem den til parameterfremstillingen hørende Jacobi-funktion.

4. Udregn (med alle mellemregninger) rumfanget af Ω.

5. Bestem fluxen af $\mathbf{V}$ ud gennem overfladen af Ω.

- Slut -

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET
Skriftlig prøve den 23. maj 2013.
Kursus Navn: Matematik 1 (2-timers prøve for forårssemesteret). **Kursus nr.** 01005
Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.
Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.
Der må ikke kommunikeres med andre under prøven, hverken direkte eller elektronisk.
Vægtning: Opgave 1: **25%**, opgave 2: **25%**, opgave 3: **25%** og opgave 4: **25%**.

OPGAVE 1

En funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x,y) = x\cos(y)\,.$$

Endvidere er en punktmængde M givet ved

$$M = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq \pi \text{ og } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \pi\}\,.$$

1. Bestem gradienten for f i ethvert punkt (x,y), og angiv specielt gradientens koordinater i punktet $(0,0)$.
2. Bestem samtlige stationære punkter for f i det indre af M.
3. Bestem det globale maksimum og det globale minimun for f på M.

OPGAVE 2

Lad (x,y,z) betegne koordinaterne for en vilkårlig vektor i $(\mathbb{R}^3,\cdot)$. Et andengradspolynomium f er givet ved forskriften

$$f(x,y,z) = 2xy - z^2\,.$$

1. Bestem en symmetrisk matrix $\mathbf{A}$ som opfylder

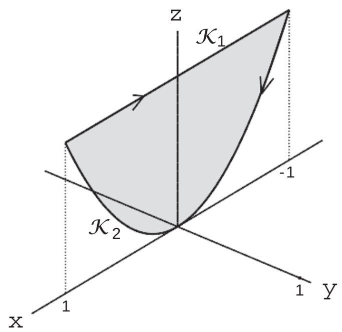
$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

2. Bestem en sædvanligt orienteret ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$ bestående af egenvektorer for matricen $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
3. Lad $(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})$ betegne koordinaterne for en vektor med hensyn til den nye basis der er angivet som svar på spørgsmål 2. Angiv den reducerede form som forskriften for f antager i $(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})$-koordinater.

Opgavesættet fortsætter, vend $\longrightarrow$

OPGAVE 3

Vi betragter en lukket, orienteret rumkurve $\mathcal{K}$ som ligger i (x,z)-planen. $\mathcal{K}$ består af to dele, $\mathcal{K}_1$ og $\mathcal{K}_2$, se figuren.



$\mathcal{K}_1$ er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u) = (-u, 0, 1)\,,\ u \in [-1\,,\,1]\,.$$

$\mathcal{K}_2$ er givet som punktmængden

$$\left\{(x,y,z)\,|\,x \in [-1\,,\,1]\,,\, y = 0 \text{ og } z = x^2\right\}.$$

$\mathcal{K}$ er orienteret som vist på figuren.

1. Angiv en parameterfremstilling for $\mathcal{K}_2$.

To vektorfelter, $\mathbf{U}$ og $\mathbf{V}$, er givet ved $\mathbf{U}(x,y,z) = (x^2, xyz, x)$ og $\mathbf{V} = \mathbf{Rot}(\mathbf{U})$.

2. Bestem det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{U}$ langs $\mathcal{K}_1$ og langs $\mathcal{K}_2$.

3. Bestem fluxen af $\mathbf{V}$ gennem den flade i (x,z)-planen som afgrænses af $\mathcal{K}$ idet fladens orientering er bestemt ved enhedsnormalvektoren $\mathbf{n} = (0,-1,0)$.

OPGAVE 4

I (x,y,z)-rummet er en parametriseret flade $\mathcal{F}$ givet ved

$$\mathbf{r}(u,v) = (u, v, 1) \text{ for } -1 \le u \le 1 \text{ og } -1 \le v \le 1\,.$$

Endvidere betragtes vektorfeltet $\mathbf{V}(x,y,z) = (x, 1, 2)$.

1. Skitser $\mathcal{F}$, og bestem $\mathbf{r}'_u(u,v) \times \mathbf{r}'_v(u,v)$.

2. Udregn fluxen af $\mathbf{V}$ gennem $\mathcal{F}$.

Et massivt rumligt område Ω_t er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{s}(u,v,w) = (u\,\mathrm{e}^w,\, v + w,\, 1 + 2w)\,,\ u \in [-1,1]\,,\ v \in [-1,1] \text{ og } w \in [0,t]\,.$$

3. Bestem Jacobifunktionen for $\mathbf{s}$, og udregn volumen af Ω_t.

4. Lad $f(t)$ betegne volumen af Ω_t som funktion af t. Bestem $f'(0)$, og begrund at

$$f'(0) = \int_{\mathcal{F}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}\mu\,.$$

- Slut -

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig prøve den 17. maj 2014.

Kursus Navn: Matematik 1. **Kursus nr.** 01005

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.

Vægtning: De fire opgaver vægtes ens.

Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.

Der må ikke kommunikeres med andre under prøven, hverken direkte eller elektronisk.

OPGAVE 1

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 2\cos(x) - \sin(2x)\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

1. Bestem ved hjælp af elementære sætninger for differentiation de afledede

$$f'(x), f''(x) \text{ og } f'''(x)\,.$$

Lad $P_2(x)$ betegne det approksimerende andengradspolynomium for f med udviklingspunktet $x_o = 0$, og lad $R_2(x)$ betegne den hertil hørende restfunktion givet ved

$$R_2(x) = f(x) - P_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 \text{ for et } \xi \text{ mellem } 0 \text{ og } x\,.$$

2. Benyt resultater fra spørgsmål 1 til at opstille $P_2(x)$.

3. Vis ved vurdering af $R_2(x)$ at den fejl man begår ved at benytte $P_2(\frac{1}{10})$ i stedet for $f(\frac{1}{10})$ er mindre end eller lig med $\frac{1}{600}$.

OPGAVE 2

En funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - y\sin(x)\,.$$

Endvidere betragtes den åbne punktmængde

$$M = \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 < x < 3 \,\right\}\,.$$

1. Bestem de partielle afledede af første og anden orden for f.

2. Det oplyses at f har tre stationære punkter som tilhører M. Bestem disse tre stationære punkter.

3. Find samtlige punkter i M hvori f har lokalt minimum, og samtlige punkter i M hvori f har lokalt maksimum .

Opgavesættet fortsætter $\longrightarrow$

OPGAVE 3

I (x,y,z)-rummet er en rumkurve $\mathcal{K}_{\mathbf{r}}$ givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = (\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}, \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}, 1-2t\,),\ t \in [0,1]\,.$$

1. Vis at $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}\,(\,\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})$, og bestem længden af $\mathcal{K}_{\mathbf{r}}$.

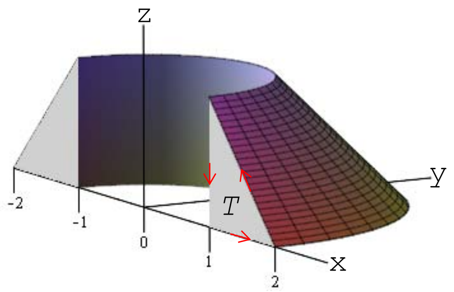
Et førsteordens vektorfelt $\mathbf{V}$ er givet ved $\mathbf{V}(x,y,z) = (y,x,-2)$.

2. Bestem (med alle mellemregninger) det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}$ langs $\mathcal{K}_{\mathbf{r}}$.
3. Vis at $\mathcal{K}_{\mathbf{r}}$ er den flowkurve for $\mathbf{V}$ som starter i punktet $(0,2,1)$ til tiden $t=0$.

OPGAVE 4

Et massivt område Ω i (x,y,z)-rummet er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u,v,w) = (\,u\cos(w), u\sin(w), v\,(2-u)\,)\ \text{hvor}\ u \in [1,2],\ v \in [0,1],\ w \in [0,\pi]\,.$$



1. To funktioner $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ og $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ er givet ved henholdsvis $f(x,y,z) = 1$ og $g(x,y,z) = \frac{y}{2}$. Bestem (med alle mellemregninger) rumintegralerne

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu \ \text{ og } \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Betragt vektorfeltet $\mathbf{V}$ givet ved $\mathbf{V}(x,y,z) = (\,\frac{1}{2}z^2, \frac{1}{4}y^2, -2y\,)$.

2. Bestem fluxen af $\mathbf{V}$ ud gennem overfladen $\partial\Omega$ af Ω.
3. Angiv et vektorfelt $\mathbf{U}$ hvis divergens er konstant, og som opfylder

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{U}\cdot\mathbf{n}_{\partial\Omega}\,\mathrm{d}\mu = 2\pi\,.$$

Ω er fremkommet ved at et plant trekant-område T beliggende i (x,z)-planen er drejet vinklen π omkring z-aksen i positiv omløbsretning.

4. Angiv en parameterfremstilling for T, og bestem cirkulationen af $\mathbf{V}$ langs randkurven ∂T af T med den på figuren viste omløbsretning.

Opgavesættet er slut.

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET
Skriftlig 2-timersprøve i forårspensum den 18. maj 2015.
Kursus Navn: Matematik 1. **Kursus nr.** 01005
Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.
Vægtning: De fire opgaver vægtes ens.
Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.
Der må ikke kommunikeres med andre under prøven, hverken direkte eller elektronisk.

OPGAVE 1

En glat funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x,y) = x^2 y + \frac{1}{3} y^3 - y\,.$$

1. Find alle stationære punkter for f.
2. Undersøg for hvert af punkterne $(1,0)$, $(0,0)$, $(0,1)$ om f har egentligt lokal maksimum, egentligt lokal minimum eller ingen af delene i punktet.
3. Bestem samtlige retninger fra $(0,0)$ hvori den retningsafledede af f i $(0,0)$ antager værdien 0.

OPGAVE 2

Det oplyses at matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

har egenvektoren $\mathbf{v}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ hørende til egenværdien 2 og egenvektoren $\mathbf{v}_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ hørende til egenværdien 0.

1. Gør rede for at vektorsættet $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^2$.

En parabel er i et sædvanligt retvinklet (x,y)-koordinatsystem i planen givet ved ligningen

$$\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}\,xy + \frac{3}{2}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = -2\,.$$

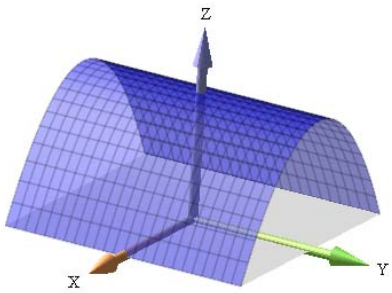
2. Bestem parablens toppunkt og symmetriakse.

OPGAVE 3

Funktionen $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er givet ved $h(x,y) = 1 - x^2$. Vi betragter graffladen F givet ved

$$F = \{\,(x,y,z) \,|\, -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1,\ z = h(x,y)\,\}\,.$$

Opgavesættet fortsætter ⟶



1. Bestem en parameterfremstilling $\mathbf{r}(u,v)$ for F som opfylder at normalvektoren $\mathbf{N}(u,v) = \mathbf{r}'_u(u,v) \times \mathbf{r}'_v(u,v)$ har positiv z-koordinat.

Et vektorfelt $\mathbf{V}$ er givet ved $\mathbf{V}(x,y,z) = (x^2,\, z-2xy,\, 4z)$.

2. Bestem fluxen $\displaystyle\int_{F_\mathbf{r}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{F_\mathbf{r}}\, \mathrm{d}\mu$.

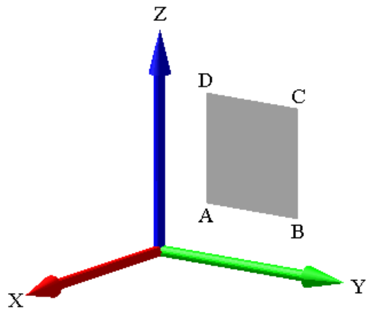
Lad Ω betegne det massive rumlige område der ligger lodret mellem (x,y)-planen og F.

3. Bestem rumfanget af Ω.

4. Bestem fluxen af $\mathbf{V}$ ud gennem overfladen $\partial\Omega$ af Ω.

OPGAVE 4

I (x,y,z)-rummet er der givet punkterne $A(0,1,1)$, $B(0,3,1)$, $C(0,3,3)$ og $D(0,1,3)$.



Det plane kvadrat som udspændes af de fire punkter, betegnes K. Vi betragter endvidere vektorfeltet $\mathbf{U}$ givet ved $\mathbf{U}(x,y,z) = (2xy, -z^2, x^2)$ og vektorfeltet $\mathbf{V}$ som er gradienten af funktionen $f(x,y,z) = x^2y - \dfrac{z^3}{3}$.

1. Bestem fluxen af $\mathbf{rot}(\mathbf{U})$ gennem K, idet K parametriseres ved
$$\mathbf{r}(u,v) = (0,u,v) \text{ med } u \in [1,3] \text{ og } v \in [1,3]\,.$$

2. Bestem det tangentielle kurveintegral af såvel $\mathbf{U}$ som $\mathbf{V}$ langs det rette linjestykke fra A til D.

3. Bestem cirkulationen af såvel $\mathbf{U}$ som $\mathbf{V}$ langs randen af K hvis orientering fastlægges ved punktrækkefølgen $ABCDA$.

`Opgavesættet er slut.`

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 2-timersprøve i forårspensum den 17. maj 2016.

Kursus Navn: Matematik 1. **Kursus nr.** 01005

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.

Vægtning: De fire opgaver vægtes ens.

Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.

Der må ikke kommunikeres med andre under prøven, hverken direkte eller elektronisk.

OPGAVE 1

En funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x)=\sqrt{2x-1}\,.$$

1. Bestem definitionsmængden $\mathrm{Dm}(f)$ for f.
2. Bestem det approksimerende polynomium $P_3(x)$ af grad 3 for f med udviklingspunktet $x_0=1$.
3. Gør rede for at den til $P_3(x)$ hørende restfunktion $R_3(x)$ kan udtrykkes ved

$$R_3(x)=-\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{(2\xi-1)^{7/2}}\cdot(x-1)^4$$

for et ξ mellem 1 og x. Vis ved vurdering af restfunktionen at den numeriske værdi af den fejl man begår ved at benytte $P_3\left(\frac{3}{2}\right)$ i stedet for $f\left(\frac{3}{2}\right)$ er mindre end eller lig med $\frac{5}{2^7}$.

OPGAVE 2

Der er givet en symmetrisk matrix:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\frac{288}{25} & \frac{84}{25}\\[2mm] \frac{84}{25} & \frac{337}{25}\end{bmatrix}.$$

1. Find i $\mathbb{R}^{2\times 2}$ en positiv ortogonal matrix $\mathbf{Q}$ og en diagonalmatrix Λ som opfylder

$$\Lambda=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{Q}\,.$$

En ellipse $\mathcal{E}$ er i et sædvanligt retvinklet (x,y)-koordinatsystem i planen givet ved matrix-ligningen

$$\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\mathbf{A}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=144\,.$$

2. Bestem halvakserne for $\mathcal{E}$.

Opgavesættet fortsætter ⟶

OPGAVE 3

For en glat funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ med $f(0,0)=0$ er et vektorfelt $\mathbf{V}$ i (x,y)-planen givet ved

$$\mathbf{V}(x,y)=\nabla f(x,y)=(x-y^2+1,-2xy)\,.$$

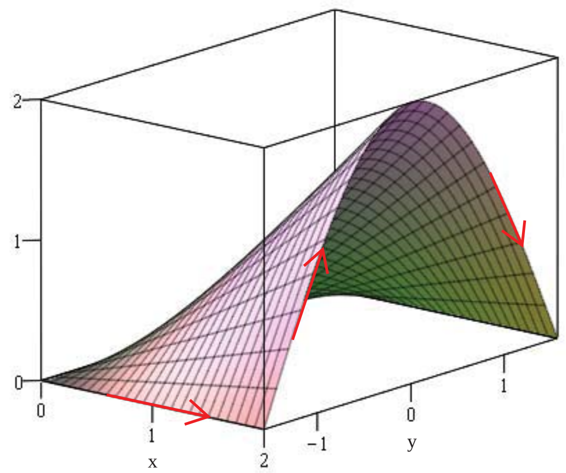
1. Bestem samtlige stationære punkter for f.
2. Bestem Hessematricen for f, og gør rede for at f har netop ét egentligt lokalt minimum og ingen egentlige lokale maxima.
3. Bestem det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}$ langs en selvvalgt kurve $\mathcal{K}$ fra origo til et vilkårligt punkt (x,y). Vink: Du kan bruge formlen

   $$(x,y)\cdot\int_0^1\mathbf{V}(ux,uy)\,\mathrm{d}u\,.$$

   Eller du kan integrere langs den trappelinje i (x,y)-planen der først går fra $(0,0)$ til $(x,0)$ og dernæst fra $(x,0)$ til (x,y).
4. Bestem den værdi som f antager i det i spørgmål 2) omtalte egentlige lokale minimum.

OPGAVE 4

I (x,y)-planen i (x,y,z)-rummet er der givet punktmængden $A=\left\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2\text{ og }-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\right\}$ og funktionen $h(x,y)=x\cos(y)$. Lad $\mathcal{F}$ betegne den del af grafen for h som ligger lodret over A, se figuren.



1. Bestem en parameterfremstilling $\mathbf{r}(u,v)$ for $\mathcal{F}$, og bestem den til $\mathbf{r}(u,v)$ hørende normalvektor $\mathbf{N}(u,v)=\mathbf{r}'_u(u,v)\times\mathbf{r}'_v(u,v)$.

Om et vektorfelt $\mathbf{V}$ i (x,y,z)-rummet oplyses at $\mathrm{Div}(\mathbf{V})(x,y,z)=x+y+z$ og $\mathbf{Rot}(\mathbf{V})(x,y,z)=(3z,3x,3y)$.

2. Bestem det tangentielle kurveintegral (cirkulationen) af $\mathbf{V}$ langs den lukkede randkurve $\partial\mathcal{F}$ for $\mathcal{F}$ med den på figuren viste orientering af $\partial\mathcal{F}$.
3. Lad Ω betegne det massive rumlige område der ligger lodret mellem A og $\mathcal{F}$. Bestem fluxen af $\mathbf{V}$ ud gennem den lukkede overflade $\partial\Omega$ af Ω.

`Opgavesættet er slut.`

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET
Skriftlig 2-timersprøve i forårspensum den 13. maj 2017.
Kursus Navn: Matematik 1. **Kursus nr.** 01005/01015/01016
Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.
Vægtning: De fire opgaver vægtes ens.
Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.
Der må ikke kommunikeres med andre under prøven, hverken direkte eller elektronisk.

OPGAVE 1

En funktion f af to reelle variable er for $(x,y) \neq (0,0)$ givet ved

$$f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}\,.$$

1. Vi betragter tre punkter i (x,y)-planen: $A = (0,1)$, $B = (0,-1)$ og $C = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Netop to af dem ligger på den samme niveaukurve for f. Hvilke to?

Det oplyses at gradienten for f er givet ved $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$.

2. Gør rede for at f ingen stationære punkter har.

Betragt den afsluttede og begrænsede punktmængde (en cirkelring) $M = \left\{(x,y)\,|\,1 \leq x^2+y^2 \leq 4\right\}$.

3. Bestem det globale minimum og det globale maksimum af f på M, og angiv de punkter hvori det globale minimum og det globale maksimum antages.

OPGAVE 2

Om en reel funktion $f(x,y)$ oplyses at dens approksimerende andengradspolynomium med udviklingspunktet $(0,0)$ har forskriften

$$P_2(x,y) = 2 + \frac{1}{2}x^2 + y^2$$

mens dens approksimerende andengradspolynomium med udviklingspunktet $\left(\frac{\sqrt{6}}{3},0\right)$ har forskriften

$$Q_2(x,y) = \frac{4}{3}\sqrt{\mathrm{e}} - \sqrt{\mathrm{e}}\left(x - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\sqrt{\mathrm{e}}\,y^2\,.$$

1. Bestem funktionsværdierne

$$f(0,0),\ f'_x(0,0),\ f'_y(0,0),\ f''_{xx}(0,0),\ f''_{yy}(0,0) \text{ og } f''_{xy}(0,0)\,.$$

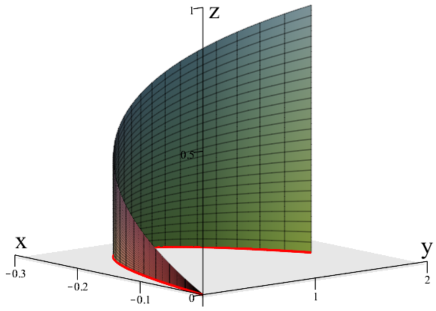
2. Gør rede for at $(0,0)$ er et stationært punkter for f, og undersøg om $f(0,0)$ er et egenligt lokalt minimum, et egentligt lokalt maksimum eller ingen af delene.

3. Gør rede for at også $\left(\frac{\sqrt{6}}{3},0\right)$ er et stationært punkt for f, og undersøg om $f\left(\frac{\sqrt{6}}{3},0\right)$ er et egenligt lokalt minimum, et egentligt lokalt maksimum eller ingen af delene.

Opgavesættet fortsætter ⟶

OPGAVE 3

En cylinderflade F i (x,y,z)-rummet er givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u,v) = \left(u^2 - u\,,\, u^2 + u\,,\, vu\right)$ hvor $u \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ og $v \in [0,1]$.



1. Bestem den til $\mathbf{r}$ hørende Jacobifunktion, og brug denne til at bestemme arealet af F.

Lad L betegne den til F hørende ledekurve i (x,y)-planen (vist med rød på figuren).

2. Opskriv en parameterfremstilling for L, og bestem den til L hørende Jacobifunktion.
3. Bestem kurveintegralet $\displaystyle\int_L \frac{1}{2}(y-x)\,\mathrm{d}\mu$.

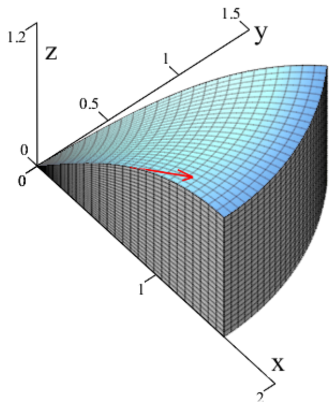
OPGAVE 4

Et vektorfelt i (x,y,z)-rummet er givet ved $\mathbf{V}(x,y,z) = (x^2, -2yx\,,\, z)$. I (x,z)-planen betragtes et profilområde A givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{s}(u,v) = (u, 0, v \cdot \sin(u))\,,$$

hvor $u \in \left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$ og $v \in [0,1]$.

Et massivt omdrejningslegeme Ω fremkommer ved at A drejes vinklen $\frac{\pi}{4}$ omkring z-aksen mod uret set fra z-aksens positive ende.



1. Giv en parameterfremstilling for Ω.
2. Bestem fluxen af $\mathbf{V}$ ud gennem overfladen af Ω.
3. Lad G betegne den del af overfladen af Ω, som afgrænser Ω opadtil (blå på figuren). Bestem cirkulationen af $\mathbf{V}$ langs med randkurven af G idet randkurven orienteres som antydet med pilen.

Opgavesættet er slut.