1. CHỨNG MINH KHÔNG GIAN VECTOR CON:

Chứng minh rằng: $A = \left\{x = (a, b, c, 0) / a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$

$\forall x = (a, b, c, 0) \in A \Rightarrow x \in \mathbb{R}^4$

Vậy $A \subset \mathbb{R}^4$

$\forall x = (a, b, c, 0) \in A$

$\forall y = (a_1, b_1, c_1, 0) \in A$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

TA PHẢI CHỨNG MINH: $\alpha x + \beta y \in A$

Ta có: $\alpha x + \beta y = \alpha(a, b, c, 0) + \beta(a_1, b_1, c_1, 0)$

$= (\alpha a, \alpha b, \alpha c, 0) + (\beta a_1, \beta b_1, \beta c_1, 0)$

$= (\alpha a + \beta a_1, \alpha b + \beta b_1, \alpha c + \beta c_1, 0) \in A$

$\Rightarrow$ A là KGVT con của $\mathbb{R}^4$

2. TỔ HỢP TUYẾN TÍNH:

Xét $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$

Hệ phương trình có nghiệm thì x là THTT

Trong KGVT E: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0_E$

Hệ phương trình có nghiệm: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ thì hệ ĐLTT

Hệ phương trình có vô số nghiệm thì hệ PTTT

3. CHỨNG MINH HỆ SINH:

Chứng minh rằng: $U = \{x_1 = (1, 1, 1),\ x_2 = (1, 0, 2),\ x_3 = (2, 1, 4)\}$

Là một hệ sinh của KGVT $\mathbb{R}^3$

$\forall x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

Xét $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$

$\Leftrightarrow (a, b, c) = \alpha_1(1, 1, 1) + \alpha_2(1, 0, 2) + \alpha_3(2, 1, 4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = a \\ \alpha_1 + \alpha_3 = b \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = c \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 2 & 4 & c \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & -1 & b-a \\ 0 & 1 & 2 & c-a \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & c+b-2a \end{array}\right]$$

Ta có: $r(A) = r(\overline{A}) = 3 \qquad \forall a, b, c$

$\Rightarrow$ hệ phương trình có nghiệm $\forall a, b, c$

$\Rightarrow x$ là 1 THTT của x_1, x_2, x_3

$\Rightarrow$ U là 1 hệ sinh của $\mathbb{R}^3$

4. CHỨNG MINH CƠ SỞ:

Chứng minh rằng: **Hệ U trong ví dụ trên là 1 cơ sở của $\mathbb{R}^3$**

Ta có: U là 1 hệ sinh của $\mathbb{R}^3$

Ta c/m U ĐLTT

Xét: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = O_{\mathbb{R}^3}$

$\Leftrightarrow \alpha_1(1, 1, 1) + \alpha_2(1, 0, 2) + \alpha_3(2, 1, 4) = (0, 0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta có: r(A) = 3 = số ẩn ⇒ hpt có nghiệm duy nhất $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

⇒ U ĐLTT

⇒ U là 1 cơ sở của $\mathbb{R}^3$

5. CHỨNG MINH CƠ SỞ:

Trong KGVT P các đa thức có bậc ≤ 2, cho các Vector sau:

$e_1 = x^2 + x - 1$, $e_2 = x - 2$, $e_3 = 2x^2 - x + 2$

Chứng minh rằng: **$U = \{e_1, e_2, e_3\}$ là 1 cơ sở của P**

Giải:

Ta có: dim(P) = 3 = số Vector của hệ U

Để c/m U là 1 cơ sở của P ta c/m U ĐLTT

Xét: $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = O_P$

$\Leftrightarrow \alpha_1(x^2 + x - 1) + \alpha_2(x - 2) + \alpha_3(2x^2 - x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha_1 + 2\alpha_3)x^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)x + (-\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ta có: r(A) = 3 = số ẩn ⇒ hpt có nghiệm duy nhất $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

⇒ U ĐLTT

⇒ U là 1 cơ sở của P

6. TỌA ĐỘ CỦA 1 VECTOR ĐỐI VỚI 1 CƠ SỞ CHO TRƯỚC:

Cho $f(x) = x^2 - x + 2$. Tìm tọa độ của Vector $f(x)$ đối với cơ sở U (U ở ví dụ trên)

Giải:

Xét $f(x) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$

$\Leftrightarrow (\alpha_1 + 2\alpha_3)x^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)x + (-\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3) = x^2 - x + 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = -1 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Ta có: $r(A) = r(\overline{A}) = 3$ = số ẩn $\Rightarrow$ hpt có nghiệm duy nhất

$$\text{hpt} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 - 3\alpha_3 = -2 \\ -2\alpha_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = -\dfrac{1}{2} \\ \alpha_3 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy: $f(x)/_U = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

7. CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU:

Chứng minh rằng: $A = \left\{x = (a, b, c, 0)/_{a, b, c \in \mathbb{R}}\right\}$

Là 1 KGVT con của KGVT $\mathbb{R}^4$. Tìm 1 cơ sở và số chiều của nó.

Giải:

$\forall x = (a, b, c, 0) \in A$, ta có:

$x = (a, 0, 0, 0) + (0, b, 0, 0) + (0, 0, c, 0)$

$\quad = a(1, 0, 0, 0) + b(0, 1, 0, 0) + c(0, 0, 1, 0)$

Đặt: $e_1 = (1, 0, 0, 0)$

$e_2 = (0, 1, 0, 0)$

$e_3 = (0, 0, 1, 0)$

$U = \{e_1, e_2, e_3\}$ là 1 hệ sinh của A

Xét: $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = O_{\mathbb{R}^4}$

$\Leftrightarrow \alpha_1(1, 0, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0, 0) + \alpha_3(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$

$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$\Rightarrow$ U ĐLTT

Vậy U là 1 cơ sở của A

$\Rightarrow \dim(A) = 3$

8. HẠNG CỦA HỆ VECTOR:

$U = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m\} \subset E$

$x_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$

$x_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$

.

.

.

$x_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$

Hạng của hệ Vector U chính là hạng của ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ví dụ: **Trong KG M_2 cho hệ Vector sau:**

$$U = \left\{A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right\}$$

Tìm 1 cơ sở và số chiều của KGVT con của không gian M_2 sinh bởi hệ Vector U

Giải:

Gọi F là KGVT con sinh bởi hệ U

Ta có: 1 cơ sở của F chính là 1 hệ Vector con ĐLTT tối đại của U

Xét cơ sở chính tắc:

$$(e) = \left\{e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Ta có: $A_1/(e) = (1, 2, 1, 3)$

$A_2/(e) = (1, 1, 1, 1)$

$A_3/(e) = (2, 4, 1, 4)$

Xét ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$r(A) = 3 \Rightarrow$ *hệ con ĐLTT tối đại của U có 3 Vector*

Mà hệ $\{x_1, x_2, x_3\}$ là hệ ĐLTT tối đại

$\Rightarrow$ ***hệ $\{x_1, x_2, x_3\}$ là 1 cơ sở của F***

$\Rightarrow$ ***$\dim(F) = 3$***

9. CHỨNG MINH ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH:

Chứng minh: **ánh xạ f: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$**

$$x = (x_1, x_2, x_3) \longmapsto f(x) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)$$

là 1 ánh xạ tuyến tính.

Giải:

$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$\forall y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Ta có: $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

$\Rightarrow f(x + y) = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_2 + x_3 + y_2 + y_3)$

$f(x) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)$

$f(y) = (y_1 + y_2, y_2 + y_3)$

$\Rightarrow f(x) + f(y) = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_2 + x_3 + y_2 + y_3) = f(x + y)$ (1)

$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$

$\Rightarrow f(\alpha x) = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha x_2 + \alpha x_3)$

$\alpha f(x) = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha x_2 + \alpha x_3) = f(\alpha x)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ ***f là một ánh xạ tuyến tính***

10. ẢNH VÀ HẠT NHÂN CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH:

$$f: E \longrightarrow F$$

Ảnh của ánh xạ tuyến tính:

$$\text{Imf} = \left\{ y \in F \,/\, \exists x \in E \text{ thỏa mãn } y = f(x) \right\}$$

Hạt nhân của ánh xạ tuyến tính:

$$\text{Kerf} = \left\{ x \in E \,/\, f(x) = 0_F \right\}$$

Kerf là 1 KGVT con của E và Imf là 1 KGVT con của F

Ví dụ: $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \longmapsto f(x) = \left(x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 + 2x_2 + x_3\right)$$

a/ CM f là 1 AXTT

b/ Tìm Imf, Kerf, dim(Imf), dim(Kerf)

Giải:

a/ $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$\forall y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Ta có: $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

$\Rightarrow f(x + y) = (x_1 + x_2 - x_3 + y_1 + y_2 - y_3, x_1 + 2x_2 + x_3 + y_1 + 2y_2 + y_3)$

$f(x) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 + x_3)$

$f(y) = (y_1 + y_2 - y_3, y_1 + 2y_2 + y_3)$

$\Rightarrow f(x) + f(y) = (x_1 + x_2 - x_3 + y_1 + y_2 - y_3, x_1 + 2x_2 + x_3 + y_1 + 2y_2 + y_3)$

$= f(x + y)$ (1)

$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$

$\Rightarrow f(\alpha x) = (\alpha x_1 + \alpha x_2 - \alpha x_3, \alpha x_1 + 2\alpha x_2 + \alpha x_3)$

$\alpha f(x) = (\alpha x_1 + \alpha x_2 - \alpha x_3, \alpha x_1 + 2\alpha x_2 + \alpha x_3) = f(\alpha x)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ ***f là 1 AXTT***

b/

$$\mathbf{Ker}f = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \middle/ f(x) = 0_{\mathbb{R}^2} \quad (*) \right\}$$

$(*) \Leftrightarrow (x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 + x_3) = (0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$r(A) = 2 <$ số ẩn $\Rightarrow$ hpt có VSN phụ thuộc 1 tham số.

$$\text{hpt} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Đặt: $x_3 = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow x_2 = -2\alpha$

$\Rightarrow x_1 = 3\alpha$

Vậy Ker$f$ = $\left\{x = (3\alpha, -2\alpha, \alpha) \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

Ta có 1 cơ sở của f là : $\{(3, -2, 1)\}$

$\Rightarrow$ *dim(Kerf) = 1*

Imf = $\left\{ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \exists x = (x_1, x_2, x_3) \text{ thỏa mãn } y = f(x) \quad (**) \right\}$

$(**) \Leftrightarrow (y_1, y_2) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 + x_3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = y_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = y_2 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & y_1 \\ 1 & 2 & 1 & y_2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & y_1 \\ 0 & 1 & 2 & y_2 - y_1 \end{array}\right]$$

$r(A) = r(\overline{A}) = 2 \qquad \forall y_1, y_2$

$\Rightarrow$ *hpt có nghiệm* $\forall y_1, y_2$

Vậy Imf = $\left\{ y = (y_1, y_2) \,/\, y_1, y_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ *dim(Imf) = 2*

11. MA TRẬN CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH:

Ví dụ 1: $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \longmapsto f(x) = (x_1 - 2x_2, 3x_2 + x_3)$$

Tìm ma trận của AXTT f theo cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$

Giải:

Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$: $(e) = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$

Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$: $(f) = \{f_1 = (1, 0), f_2 = (0, 1)\}$

Ta có: $f(e_1) = (1, 0) \quad \Rightarrow f(e_1)/(f) = (1, 0)$

$f(e_2) = (-2, 3) \quad \Rightarrow f(e_2)/(f) = (-2, 3)$

$f(e_3) = (0, 1) \quad \Rightarrow f(e_3)/(f) = (0, 1)$

Ma trận của ánh xạ tuyến tính là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 2: $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$x = (x_1, x_2, x_3) \longmapsto f(x) = (x_1 + 2x_2, x_2 - 3x_3, x_1 + x_2 + x_3)$

a/ Tìm ma trận của AXTT f theo cơ sở chính tắc $\mathbb{R}^3$

b/ Cho cơ sở U = $\{u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (1, -2, 3), u_3 = (2, 1, 4)\} \in \mathbb{R}^3$

Tìm MT của AXTT f theo cơ sở U

Giải:

a/ *Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$: $(e) = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$*

$f(e_1) = (1, 0, 1) \quad \Rightarrow f(e_1)/(e) = (1, 0, 1)$

$f(e_2) = (2, 1, 1) \quad \Rightarrow f(e_2)/(e) = (2, 1, 1)$

$f(e_3) = (0, -3, 1) \quad \Rightarrow f(e_3)/(e) = (0, -3, 1)$

⇒ Ma trận của ánh xạ tuyến tính f theo cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b/ Ta có: $f(u_1) = (1, -3, 2)$

$f(u_2) = (-3, -11, 2)$

$f(u_3) = (4, -11, 7)$

Tìm tọa độ $f(u_1)$ $f(u_2)$ $f(u_3)$ đối với cơ sở U

- *Xét $f(u_1) = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$*

$\Leftrightarrow (1, -3, 2) = a_1(1, 0, 1) + a_2(1, -2, 3) + a_3(2, 1, 4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + 2a_2 = 1 \\ -2a_2 + a_3 = -3 \\ a_1 + 3a_2 + 4a_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{7}{6} \\ a_2 = \dfrac{7}{6} \\ a_3 = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

- *Tương tự: Xét $f(u_2) = b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3$*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = -\dfrac{7}{2} \\ b_2 = \dfrac{9}{2} \\ b_3 = -2 \end{cases}$$

- *Tương tự: Xét $f(u_3) = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3$*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{31}{6} \\ c_2 = \frac{25}{6} \\ c_3 = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Ma trận của AXTT f theo cơ sở U là:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{7}{2} & \frac{31}{6} \\ \frac{7}{6} & \frac{9}{2} & \frac{25}{6} \\ -\frac{2}{3} & -2 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

12. MA TRẬN CHUYỂN TỪ CƠ SỞ U SANG CƠ SỞ V:

Trong KG $\mathbb{R}^3$ cho 2 hệ cơ sở:

$U = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 0, 2), u_3 = (1, 2, 1)\}$

$V = \{v_1 = (2, 3, 2), v_2 = (-1, 1, 4), v_3 = (2, 1, 3)\}$

Tìm ma trận chuyển từ cơ sở U sang cơ sở V

Giải:

Tìm v_1/u. Xét $v_1 = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$

$\Leftrightarrow (2, 3, 2) = a_1(1, 1, 1) + a_2(1, 0, 2) + a_3(1, 2, 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_3 = 2 \\ a_1 + 2a_2 + a_3 = 3 \\ a_1 + 2a_2 + a_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 1 \end{cases}$$

Tương tự. Tìm v_2/u. Xét $v_2 = b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = -13 \\ b_2 = 5 \\ b_3 = 7 \end{cases}$$

Tương tự. Tìm v_3/u. Xét $v_3 = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

Ma trận chuyển từ cơ sở U sang cơ sở V:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -13 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

13. PHƯƠNG PHÁP TÌM TRỊ RIÊNG VECTOR RIÊNG:

Bước 1: Tìm ma trận A của phép BĐTT f theo một cơ sở nào đó của KG E

Bước 2: Lập ma trận $A - \lambda I_n$. Tính $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

Bước 3: Giải $p(\lambda) = 0 \Rightarrow$ các trị riêng λ_i

Bước 4: Ứng với mỗi trị riêng ta tìm Vector riêng: $(A - \lambda_i I_n)x = 0_E$

14. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN CHÉO HÓA MA TRẬN:

Bước 1: Tìm các trị riêng của phép BĐTT f

Bước 2: Ứng với mỗi trị riêng tìm các Vector riêng tương ứng

Bước 3: Nếu tìm đủ n Vector riêng ĐLTT thì hệ U gồm n VTR này tạo thành 1 cơ sở của E và trong cơ sở này ma trận B có dạng chéo hóa, từ đó suy ra:

$$P^{-1}AP = B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ A chéo hóa được.

15. BÀI TOÁN TÍNH A^n KHI A CHÉO HÓA ĐƯỢC:

Vì A chéo hóa được nên: $A = PBP^{-1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A^n &= (PBP^{-1})^n \\ &= (PBP^{-1})(PBP^{-1})\dots(PBP^{-1}) \\ &= PBP^{-1}PBP^{-1}P\dots P^{-1}PBP^{-1} \\ &= PB^nP^{-1} \end{aligned}$$

Với:

$$B^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^n \end{bmatrix}$$

Ví dụ 1: **Cho** $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \longmapsto f(x) = (x_1 - 2x_3,\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3,\ -x_3)$$

a/ Tìm ma trận A của phép BĐTT f theo cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$

b/ Tìm trị riêng, Vector riêng của f

c/ Ma trận A có chéo hóa được không? Nếu có hãy tìm ma trận P làm chéo hóa ma trận A.

d/ Tính A^n

Giải:

a/ Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$: $(e) = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$

Ta có: $f(e_1) = (1, 2, 0) \quad \Rightarrow f(e_1)/(e) = (1, 2, 0)$

$f(e_2) = (0, 2, 0) \quad \Rightarrow f(e_2)/(e) = (0, 2, 0)$

$f(e_3) = (-2, -2, -1) \quad \Rightarrow f(e_3)/(e) = (-2, -2, -1)$

$\Rightarrow$ *Ma trận của phép biến đổi tuyến tính f là:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

b/ $A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}$

$Det(A - \lambda I_3) = p(\lambda) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(-1 - \lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$

$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2 \end{array}\right.$

Với $\lambda_1 = -1$, *ta tìm VTR* $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), x \neq 0$ *bằng cách giải hệ phương trình* $(A - \lambda I_3)x = O_{\mathbb{R}^3}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = \alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0)$

$\Rightarrow$ **Vector riêng:** $x = \left\{ (\alpha, 0, \alpha) / \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \right\}$ ①

Với $\lambda_2 = 1$, *(làm tương tự)*

$\Rightarrow$ **Vector riêng: x =** $\left\{ (\alpha, -2\alpha, 0) \big/ \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \right\}$ ②

Với $\lambda_3 = 2$, *(làm tương tự)*

$\Rightarrow$ **Vector riêng: x =** $\left\{ (0, \alpha, 0) \big/ \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \right\}$ ③

c/ Từ ① chọn $x_1 = (1, 0, 1)$

Từ ② chọn $x_2 = (1, -2, 0)$

Từ ③ chọn $x_3 = (0, 1, 0)$

Ta có: $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ *là 1 cơ sở của* $\mathbb{R}^3$

Gọi B là ma trận của f theo cơ sở U

P là mà trận chuyển từ cơ sở (e) sang cơ sở U

Ta có: $B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ ***A chéo hóa được***

Ta có: $x_1/(e) = (1, 0, 1)$

$x_2/(e) = (1, -2, 0)$

$x_3/(e) = (0, 1, 0)$

Ma trận là chéo hóa ma trận A là:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d/ $A = PBP^{-1}$

$\Rightarrow A^n = (PBP^{-1})^n = PB^nP^{-1}$

$$\Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (-1)^n - 1 \\ -2 + 2^{n+1} & 2^n & 2 - 2^{n+1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{bmatrix}$$

16. MA TRẬN CỦA DẠNG TOÀN PHƯƠNG:

Ma trận của dạng toàn phương là ma trận vuông, đối xứng $A = [a_{ij}]_n$

Trong đó: $a_{ij} = a_{ji} \ \forall i \neq j$

Ví dụ: $\omega(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 7x_2x_3 + 2x_3x_1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & \frac{7}{2} \\ 1 & \frac{7}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

17. HẠNG CỦA DẠNG TOÀN PHƯƠNG:

Hạng của dạng toàn phương chính là hạng của ma trận của dạng toàn phương đó.

18. PHƯƠNG PHÁP LAGRANGE ĐƯA 1 DẠNG TOÀN PHƯƠNG VỀ DẠNG CHÍNH TẮC:

TH1: $\exists a_{ii} = 0;\ i = \overline{1,n}$

$$\begin{aligned}
\omega(x) &= x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 7x_2x_3 + 2x_3x_1 \\
&= (x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_3x_1) - 2x_2^2 + 3x_3^2 + 7x_2x_3 \\
&= (x_1^2 - 2x_1(2x_2 - x_3)) - 2x_2^2 + 3x_3^2 + 7x_2x_3 \\
&= (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 - (2x_2 - x_3)^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 + 7x_2x_3 \\
&= (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + 2x_3^2 + 11x_2x_3 - 6x_2^2 \\
&= (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 - 6(x_2^2 - \tfrac{11}{6}x_2x_3) + 2x_3^2 \\
&= (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 - 6(x_2^2 - 2x_2(\tfrac{11}{12}x_3)) + 2x_3^2 \\
&= (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 - 6(x_2 - \tfrac{11}{12}x_3)^2 + 6(\tfrac{11}{12}x_3)^2 + 2x_3^2 \\
&= (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 - 6(x_2 - \tfrac{11}{12}x_3)^2 + \tfrac{169}{24}x_3^2
\end{aligned}$$

Đặt: $\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 - \dfrac{11}{12}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \quad (*)$

$\Rightarrow$ Dạng chính tắc: $\omega(x) = y_1^2 - 6y_2^2 + \frac{169}{24}y_3^2$

Giả sử: đối với cơ sở chính tắc (e): $x/(e) = (x_1, x_2, x_3)$

đối với cơ sở mới (f): $x/(f) = (y_1, y_2, y_3)$

<u>TÌM CƠ SỞ (f):</u>

Tìm ma trận P chuyển từ cơ sở (e) sang cơ sở (f)

Ta có: $x/(e) = P.\ x/(f)$

Từ $(*)$ suy ra: $\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 + \frac{5}{6}y_3 \\ x_2 = y_2 + \frac{11}{12}y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{5}{6} \\ 0 & 1 & \frac{11}{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ ***Ma trận P*** $= \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{5}{6} \\ 0 & 1 & \frac{11}{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ ***Cơ sở (f)*** $= \left\{f_1 = (1, 0, 0), f_2 = (2, 1, 0), f_3 = \left(\frac{5}{6}, \frac{11}{12}, 1\right)\right\}$

TH2: $a_{ii} = 0, \forall i = \overline{1,n}$

$\omega(x) = x_1x_2 - 2x_1x_3 + 5x_2x_3$

Đặt: $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \omega(x) &= y_1^2 - y_2^2 - 2(y_1 - y_2)y_3 + 5(y_1 + y_2)y_3 \\
&= y_1^2 - y_2^2 - 2y_1y_3 + 2y_2y_3 + 5y_1y_3 + 5y_2y_3 \\
&= y_1^2 - y_2^2 + 3y_1y_3 + 7y_2y_3 \\
&= (y_1^2 + 3y_1y_3) - y_2^2 + 7y_2y_3 \\
&= (y_1^2 + 2y_1.\tfrac{3}{2}y_3 + \tfrac{9}{4}y_3^2 - \tfrac{9}{4}y_3^2) - y_2^2 + 7y_2y_3 \\
&= (y_1 + \tfrac{3}{2}y_3)^2 - (y_2^2 - 7y_2y_3) - \tfrac{9}{4}y_3^2 \\
&= (y_1 + \tfrac{3}{2}y_3)^2 - (y_2^2 - 2y_2.\tfrac{7}{2}y_3 + \tfrac{49}{4}y_3^2 - \tfrac{49}{4}y_3^2) - \tfrac{9}{4}y_3^2 \\
&= (y_1 + \tfrac{3}{2}y_3)^2 - (y_2 - \tfrac{7}{2}y_3)^2 + 10y_3^2
\end{aligned}$$

Đặt: $\begin{cases} z_1 = y_1 + \frac{3}{2}y_3 \\ z_2 = y_2 - \frac{7}{2}y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \quad (\ast)$

$\Rightarrow$ *Dạng chính tắc:* $z_1^2 - z_2^2 + 10z_3^2$

Giả sử: đối với cơ sở chính tắc (e): $x/(e) = (x_1, x_2, x_3)$

Đối với cơ sở mới (f): $x/(f) = (z_1, z_2, z_3)$

P: ma trận chuyển từ cơ sở (e) sang cơ sở (f)

Ta có: $x/(e) = P.x/(f)$

Từ $(\ast)$ *suy ra:* $\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2 - 5z_3 \\ x_2 = z_1 + x_2 + 2z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ **Ma trận** $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ **Cơ sở (f)** $= \left\{ f_1 = (1, 1, 0), f_2 = (-1, 1, 0), f_3 = (-5, 2, 1) \right\}$

19. DẠNG TOÀN PHƯƠNG XÁC ĐỊNH DƯƠNG (XÁC ĐỊNH ÂM):

Dạng toàn phương (1) được gọi là xác định dương (xác định âm) nếu

$\omega(x) > 0 \ (\omega(x) < 0) \qquad \forall x \in E, x \neq 0_E$

Điều kiện để dạng toàn phương xác định dương (xác định âm):

Cho dạng toàn phương (1) với ma trận của dạng toàn phương là:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \left(a_{ij} = a_{ji}, \forall i \neq j\right)$$

Đặt: $\Delta_1 = a_{11}$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

.

.

.

$\Delta_n = A$

Ví dụ: **Tìm λ để dạng toàn phương sau xác định dương.**

$$\boldsymbol{\omega(x) = 5\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \lambda\alpha_3^2 + 4\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_3}$$

Giải:

Ma trận của dạng toàn phương: $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix}$

$\Delta_1 = 5$

$\Delta_2 = 1$

$\Delta_3 = \lambda - 2$

Điều kiện để ma trận A xác định dương là: $\begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda - 2 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 2$

TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM
KHOA TOÁN

ĐỀ THI CUỐI HỌC KỲ II NĂM HỌC 2016-2017
Học phần: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 90 phút

Họ và tên thí sinh:.. Mã đề: 03
Số báo danh..................................Lớp học phần:..

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu và điện thoại)

Câu 1. *(2 điểm)* Trong không gian vectơ thực $P_2[x]$ gồm các đa thức một ẩn x với hệ số thực, có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2, cho hệ vectơ $\{u_0(x), u_1(x), u_2(x)\}$, trong đó: $u_0(x) = 1,\ u_1(x) = 1 + x,\ u_2(x) = x + x^2$

(a) Chứng minh hệ vectơ $\{u_0(x), u_1(x), u_2(x)\}$ là một cơ sở của $P_2[x]$.

(b) Tìm tọa độ của vectơ $f(x) = 1 + 2x + 3x^2$ đối với cơ sở $\{u_0(x), u_1(x), u_2(x)\}$.

Câu 2. *(2 điểm)* Trong R-không gian vectơ R^3, cho hai hệ cơ sở

$\{e_1=(1,1,0), e_2=(2,1,1), e_3=(1,0,0)\}$ và $\{f_1=(2,0,2), f_2=(0,2,2), f_3=(3,3,0)\}$

Tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở $\{e_1, e_2, e_3\}$ sang cơ sở $\{f_1, f_2, f_3\}$.

Câu 3. *(2 điểm)* Cho ánh xạ $f: R^3 \to R^3$ xác định bởi

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 + x_2 + x_3, 3x_1 + 3x_2)$

(a) Chứng minh f là một phép biến đổi tuyến tính và tìm hạt nhân của f.

(b) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của R^3.

Câu 4. *(2 điểm)* Cho phép biến đổi tuyến tính f trên R^3 có ma trận theo cơ sở chính tắc

ủa R^3 là $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 10 & 6 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Tìm một cơ sở gồm các vectơ riêng của f sao cho ma trận của f

ối với cơ sở đó là ma trận chéo.

âu 5. *(2 điểm)* Trong R-không gian vectơ R^4, cho dạng toàn phương

$\omega(x) = \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_4$. Dùng phương pháp Lagrange để đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc và tìm cơ sở tương ứng với dạng chính tắc đó.

Duyệt đề

Câu 1:

$dim(P_2[x]) = 3$ = số vector của hệ $u = \{u_0(x), u_1(x), u_2(x)\}$

Xét: $\alpha_1 u_0(x) + \alpha_2 u_1(x) + \alpha_3 u_2(x) = 0_{P_2[x]}$

$\Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2(1 + x) + \alpha_3(x + x^2) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha_3 x^2 + (\alpha_2 + \alpha_3)x + (\alpha_1 + \alpha_2) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ U ĐLTT

$\Rightarrow$ U là 1 cơ sở của $P_2[x]$

Xét: $f(x) = \alpha_1 u_0(x) + \alpha_2 u_1(x) + \alpha_3 u_2(x)$

$\Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2(1 + x) + \alpha_3(x + x^2) = 1 + 2x + 3x^2$

$\Leftrightarrow \alpha_3 x^2 + (\alpha_2 + \alpha_3)x + (\alpha_1 + \alpha_2) = 1 + 2x + 3x^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 3 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x)/(u) = (2, -1, 3)$

Câu 2:

- Tìm $f_1/(e)$: Xét: $f_1 = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$

$\Leftrightarrow a_1(1, 1, 0) + a_2(2, 1, 1) + a_3(1, 0, 0) = (2, 0, 2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 + a_3 = 2 \\ a_1 + a_2 = 0 \\ a_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = 2 \\ a_3 = 0 \end{cases}$

- Tương tự: tìm $f_2/(e)$: Xét $f_2 = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = 2 \\ b_3 = -4 \end{cases}$

- Tương tự: tìm $f_3/(e)$: Xét $f_3 = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Ma trận chuyển từ cơ sở (e) sang cơ sở (f) là:

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Câu 3:

$f: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$\forall y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Ta có: $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

$\Rightarrow f(x + y) = (x_1 + 2x_2 - x_3 + y_1 + 2y_2 - y_3, 2x_1 + x_2 + x_3 + 2y_1 + y_2 + y_3, 3x_1 + 2x_2 + 3y_1 + 3y_2)$

$f(x) = (x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 + x_2 + x_3, 3x_1 + 3x_2)$

$f(y) = (y_1 + 2y_2 - y_3, 2y_1 + y_2 + y_3, 3y_1 + 3y_2)$

$\Rightarrow f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad (1)$

$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$

$\Rightarrow f(\alpha x) = (\alpha x_1 + 2\alpha x_2 - \alpha x_3, 2\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3, 3\alpha x_1 + 3\alpha x_2)$

$\alpha f(x) = (\alpha x_1 + 2\alpha x_2 - \alpha x_3, 2\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3, 3\alpha x_1 + 3\alpha x_2)$

$\Rightarrow \alpha f(x) = f(\alpha x) \qquad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ f là một phép biến đổi tuyến tính.

$$\mathbf{Kerf} = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \Big/ f(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \quad (*) \right\}$$

$(*) \Leftrightarrow (x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 + x_2 + x_3, 3x_1 + 3x_2) = (0, 0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 \qquad = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r(A) = 2 < 3$ (số ẩn) $\Rightarrow$ hpt có VSN phụ thuộc 1 tham số

$$hpt \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Đặt: $\quad x_2 = \alpha$

$\Rightarrow x_3 = \alpha \qquad\qquad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0)$

$\Rightarrow x_1 = -\alpha$

Vậy: Kerf = $\left\{ x = (-\alpha, \alpha, \alpha) \Big/ \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \right\}$

Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$: (e) = $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$

$f(e_1) = (1, 2, 3) \qquad \Rightarrow f(e_1)/(e) = (1, 2, 3)$

$f(e_2) = (2, 1, 3) \qquad \Rightarrow f(e_2)/(e) = (2, 1, 3)$

$f(e_3) = (-1, 1, 0) \qquad \Rightarrow f(e_3)/(e) = (-1, 1, 0)$

Ma trận của ánh xạ tuyến tính f là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Câu 4:

$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 10 & 6 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-\lambda & 3 & 3 \\ 10 & 6-\lambda & 4 \\ 8 & 4 & 6-\lambda \end{bmatrix}$$

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 19\lambda^2 - 50\lambda + 32$

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 16 \end{array} \right.$$

Với $\lambda_1 = 1$, tìm vector riêng $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ bằng cách giải hệ phương trình $(A - \lambda I_3)x = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 10 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 10\alpha_1 + 5\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ 8\alpha_1 + 4\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 10 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Hpt} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha \\ \alpha_2 = -2\alpha \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0)$$

Vector riêng: x = $\left\{ (\alpha, -2\alpha, 0) \Big/ (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0) \right\}$ ①

Với $\lambda_2 = 2$, (làm tương tự)

Vector riêng: x = $\left\{ (0, -\alpha, \alpha) \middle/ (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0) \right\}$ ②

Với $\lambda_3 = 16$, (làm tương tự)

Vector riêng: x = $\left\{ \left(\frac{7}{10}\alpha, \frac{11}{10}\alpha, \alpha\right) \middle/ (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0) \right\}$ ③

Từ ① chọn $x_1 = (1, -2, 0)$

Từ ② chọn $x_2 = (0, -1, 1)$

Từ ③ chọn $x_3 = (7, 11, 10)$

$U = \{u_1, u_2, u_3\}$ là 1 cơ sở của A

Gọi P là ma trận chuyển từ cơ sở (e) sang cơ sở U

P là ma trận của AXTT f theo cơ sở U

Ta có: $B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Ma trận A chéo hóa được.

Câu 5:

$\omega(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_4$

$= (x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3) - 2x_2x_4$

$= (x_1^2 + 2x_1(x_2 + 2x_3)) - 2x_2x_4$

$= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - (x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2x_4$

$= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - x_2^2 - 4x_2x_3 - 4x_3^2 - 2x_2x_4$

$= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - (x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_2x_4) - 4x_3^2$

$= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - (x_2 + 2x_3 + x_4)^2 + (2x_3 + x_4)^2 - 4x_3^2$

$= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - (x_2 + 2x_3 + x_4)^2 + x_4^2 + 4x_3x_4$

$= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - (x_2 + 2x_3 + x_4)^2 + (x_4 + 2x_3)^2 - 4x_3^2$

Đặt: $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 + x_4 \\ y_3 = x_3 \\ y_4 = x_4 + 2x_3 \end{cases}$ (✳)

Dạng chính tắc: $y_1^2 - y_2^2 - 4y_3^2 + y_4^2$

Giả sử: đối với cơ sở chính tắc (e): $x/(e) = (x_1, x_2, x_3)$

Đối với cơ sở mới (f): $x/(f) = (y_1, y_2, y_3)$

P: ma trận chuyển từ cơ sở (e) sang (f)

Ta có: x/(e) = P.x/(f)

Từ (✳) suy ra: $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - 2y_3 + y_4 \\ x_2 = y_2 - y_4 \\ x_3 = y_3 \\ x_4 = y_4 - 2y_3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

⇒ Cơ sở (f) =

$$\left\{ f_1 = (1, 0, 0, 0), f_2 = (-1, 1, 0, 0), f_3 = (-2, 0, 1, -2), f_4 = (1, -1, 0, 1) \right\}$$