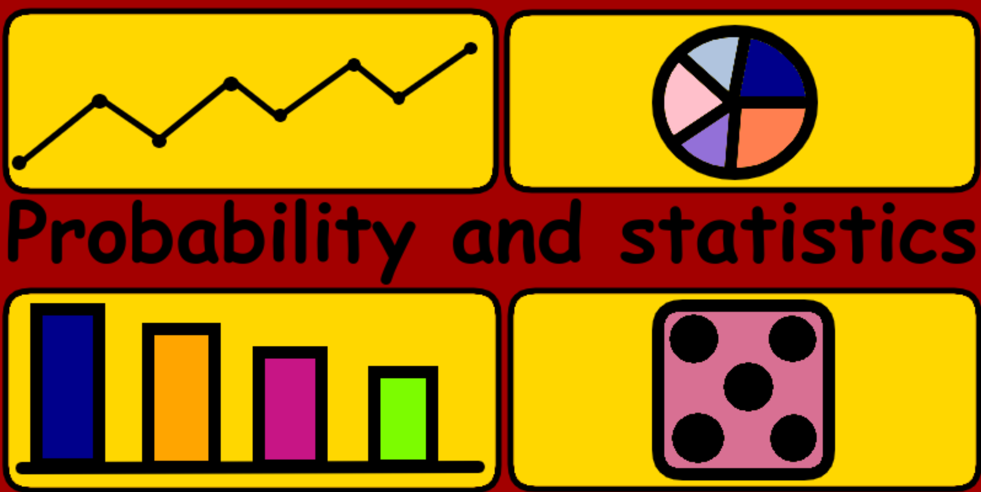
UT **Probability and statistics**

2021-4-16



CA 1

Melika Minaei Bidgoli

سوال ۱

تحقیقی دربارهی روشهای $Monte\ Carlo$ انجام دهید که شامل موارد زیر باشد:

آ. به چه روشهایی اصطلاحا $Monte\ Carlo$ گفته میشود؟
ب. این روشها در چه زمانی استفاده میشود؟
ج. آیا این روشها عموما شامل همگرایی در جواب هستند؟ توضیح دهید.
د. چند مثال از این روشها ارائه دهید.

پاسخ

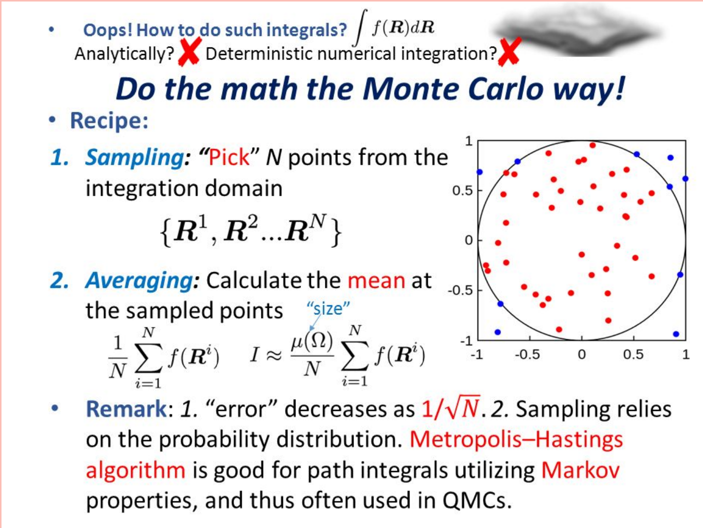
آ. الگوریتمهای تصادفی شامل $Monte\ Carlo$ و $Las\ Vegas$ میشوند.
در روش $Monte\ Carlo$ بهصرفهترین نتیجه یا نتیجهی درست با احتمالی مشخص تولید میشود. زمان اجرای این نوع الگوریتمها قطعی بوده و برای محاسبهی $worst\ case\ time\ complexity$ مناسب میباشند. نام این الگوریتم از نام یک کازینو بزرگ به نام کازینو مونت کارلو برگرفته شدهاست که در قلمرو موناکو قرار دارد و در تمامی کشورها به عنوان نماد قماربازی معروف است.

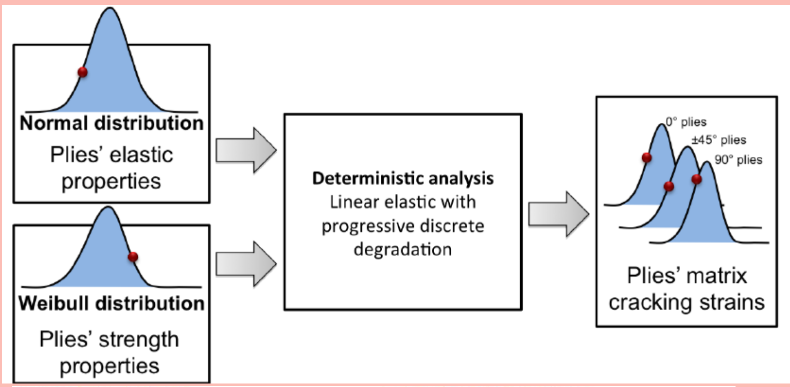
ب. این تکنیک زمانی ارزش پیدا می کند، که مجموعه آلترناتیوهای موجود برای پاسخ یک مسئله بسیار بزرگ باشد و عملاً امکان آزمودن تمامی آنها وجود نداشته باشد.

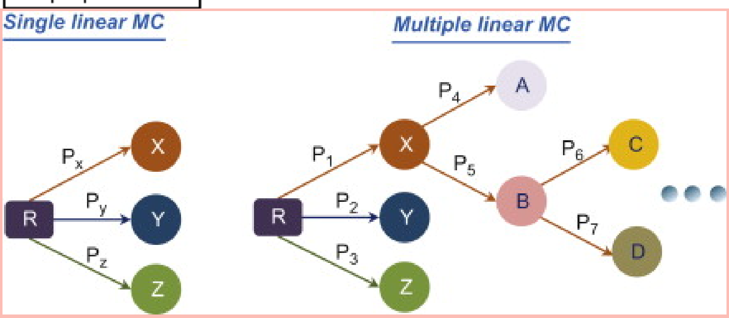
ج. اگر منظور از همگرایی جوابها، متناسب بودن نتایج با واقعیت است، خیر. چرا که برای داشتن همگرایی باید نمونههای کافی تست شده باشند. هر چه تعداد نمونهها بیشتر باشد، جواب به واقعیت نزدیکتر خواهد بود.

د. شبیهسازی مونت کارلو بهطور ویژهای در مطالعهٔ سیستمها با درجه آزادی زوج متعدد مورد استفاده قرار می گیرد مثل مایعات، مواد متخلخل، مایعات شدیداًزوج و ساختارهای حفره دار (مانند ساختار حفره دار پات). روشهای مونت کارلو به صورت وسیعی در مدلسازی پدیدهها با مقادیر قابل توجهی عدم اطمینان در ورودیها مورد استفاده قرار می گیرد مثل:
محاسبهٔ ریسک در تجارت (نمونه کاربرد آن در اقتصاد، مدلسازی تصادفی است)
استفادهٔ کلاسیک از این روشها برای ارزیابی و محاسبهٔ انتگرالهای معین، بهطور خاص برای انتگرالهای چند بعدی باشد با شرایط مرزی پیچیده، استفاده میشود.
روشهای مونت کارلو همچنین برای محاسبهٔ ارزش سرمایه شرکتها، ارزیابی سرمایهٔ پروژهها نیز استفاده میشود.
همچنین روشهای مونت کارلو در فیزیک محاسباتی، شیمی فیزیک و زمینههای مرتبط با این دو کاربرد فراوان دارد.

مونت کارلو علاوه بر این، تحت تأثیر بسزای خود را در حل معادله دیفرانسیلهای زوج انتگرالی در زمینهٔ تشعشع و انتقال انرژی ثابت کرده‌است پس بنابراین این روش برای آشکارسازی جهانی محاسبات که مدل‌های مجازی سه بعدی تصاویر فوتوریالیستیک را تولید می‌کند، مورد استفاده قرار می‌گیرد.
روش‌های مونت کارلو در زمینه‌های بسیاری نیز در ریاضیات محاسباتی مورد استفاده قرار می‌گیرد، که فقط یک خوش شانس می‌تواند نتیجهٔ صحیح بگیرد.
یک مثال کلاسیک، الگوریتم رابین است که برای آزمایش اول بودن اعداد مورد استفاده قرار می‌گیرد.
یکی از مهم‌ترین کاربردهای روش مونت-کارلو، حل معادله موسوم به بلک-شولز در مورد مدل‌سازی بازار سهام دارای نرخهای تصادفی است. حل این معادله منجر به ساخت یک مدل شبیه‌سازی شده اقتصادی می‌گردد. این مدل اقتصادی برای پیش‌بینی تغییرات در یک بازار بورس مورد استفاده قرار می‌گیرد.
همچنین از کاربردهای عملی این روش در دانش شیمی‌فیزیک، می‌توان به ساخت و بررسی مدل مولکولی اشاره نمود که به عنوان جایگزینی برای روش محاسباتی دینامیک مولکولی و شیمی کوانتومی مطرح می‌شود.
هدف اصلی روش مونت کارلو یا دینامیک مولکولی محاسبه خواص تعادلی یک سیستم است. در این روش پس از حصول اطمینان از بودن در حالت تعادل، با تغییر تصادفی موقعیت و جهت‌گیری ذرات موجود در سیستم، پیکربندی‌هایی از سیستم تولید می‌شود. منظور از پیکربندی مجموعه‌ای از موقعیت و جهت‌گیری همهٔ ذرات در یک حالت از تمام حالت‌های ممکن سیستم است. پیکربندی تولید شده در هر مرحله با احتمالی که توسط قوانین ترمودینامیک آماری تعیین می‌گردد، رد یا تأیید می‌شود. این احتمال به انرژی پتانسیل بین دو ذره بستگی دارد. در هر پیکربندی خاصیت ترمودینامیکی مورد نظر اندازه‌گیری می‌شود. با نمونه برداری صحیح از این پیکربندی‌ها و میانگین گیری، می‌توان مقدار آن خاصیت را در حال تعادل به دست آورد.
مزیت این روش به دینامیک مولکولی، نیاز نداشتن به محاسبهٔ اندازه حرکت برای هر ذره‌است که باعث کاهش زمان محاسبات رایانه‌ای می‌شود. از معایب این روش می‌توان به دست نیاوردن اطلاعات راجع به دینامیک سیستم اشاره کرد.
یکی از مهم‌ترین کاربردهای روش مونت-کارلو در زمینه‌های فیزیک محاسباتی، شیمی‌فیزیک و کرومودینامیک کوانتومی جهت انجام محاسبات پیچیده مربوط به ساخت پوشش گرمایی مورد استفاده بر روی یک فضاپیما یا موشک بالستیک می‌باشد.


Oops! How to do such integrals? $\int f(\boldsymbol{R})d\boldsymbol{R}$
Analytically? Deterministic numerical integration?
Do the math the Monte Carlo way!
Recipe:
1. Sampling: "Pick" N points from the integration domain
$\{\boldsymbol{R}^1, \boldsymbol{R}^2 ... \boldsymbol{R}^N\}$
2. Averaging: Calculate the mean at the sampled points
"size"
$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\boldsymbol{R}^i)$ $I \approx \frac{\mu(\Omega)}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\boldsymbol{R}^i)$
Remark: 1. "error" decreases as $1/\sqrt{N}$. 2. Sampling relies on the probability distribution. Metropolis–Hastings algorithm is good for path integrals utilizing Markov properties, and thus often used in QMCs.


Normal distribution
Plies' elastic properties
Weibull distribution
Plies' strength properties
Deterministic analysis
Linear elastic with progressive discrete degradation
0° plies
±45° plies
90° plies
Plies' matrix cracking strains


Single linear MC
Multiple linear MC
R
P_x
P_y
P_z
X
Y
Z
P_1
P_2
P_3
P_4
P_5
P_6
P_7
A
B
C
D

سوال ۲

چهار دسته به رنگ‌های قرمز، آبی، سبز و نارنجی و از هر رنگ ۱۳ تا کارت شماره‌گذاری شده از ۱ تا ۱۳ در اختیار داریم. به یک مجموعه ۵تایی از کارت‌ها ویژه می‌گوییم اگر ۳تای آن‌ها هم‌شماره و ۲تای دیگر نیز هم‌شماره باشند. همه‌ی ۵۲ کارت را در یک کیسه ریخته‌ایم. به دلخواه ۵ تا کارت از درون این کیسه انتخاب می‌کنیم.

آ. احتمال اینکه این دسته ۵تایی ویژه باشد را به طور تئوری حساب کنید.

ب. برنامه‌ای بنویسید که عملیات انتخاب کردن ۵ تا کارت را به تعداد ۱۰۰، ۱۰۰۰۰ و ۱۰۰۰۰۰۰ دفعه شبیه سازی کند و به ازای هر بخش، احتمال ویژه بودن یک دسته ۵تایی کارت را محاسبه کنید.

پاسخ

آ. ابتدا تعداد حالات کل را به‌دست می‌آوریم:

$$\binom{۵۲}{۵}$$

برای به‌دست آوردن تعداد حالات مطلوب، ابتدا از بین ۱۳ عدد ۲ عدد را انتخاب میکنیم:

$$\binom{۱۳}{۲}$$

سپس از بین آن دو یکی را برای شماره‌ای که ۳تا هم‌شماره قرار است داشته باشد انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۲}{۱}$$

حال ۳ رنگ برای شماره‌ای که قرار است ۳تایی باشد انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۴}{۳}$$

برای ۲تایی‌ها هم مثل بالا از بین ۴ رنگ ۲ رنگ انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۴}{۲}$$

پس جواب نهایی برابر است با:

$$\frac{\binom{۱۳}{۲}\binom{۲}{۱}\binom{۴}{۳}\binom{۴}{۲}}{\binom{۵۲}{۵}} = \frac{۷۸ \times ۲ \times ۴ \times ۶}{۲۵۹۸۹۶۰} = \frac{۳۷۴۴}{۲۵۹۸۹۶۰} = ۰/۰۰۱۴۴۰۵۸$$

```python
1.py
import random
#checking a list being special or not, boolean type
def check_special(main_list):
    temp = []
    #making a new list only with the numbers
    for i in main_list:
        temp.append(i[1:])
    #counting each number
    nums = [temp.count("1"), temp.count("2"), temp.count("3"), temp.count("4"), temp.count("5"),
    temp.count("6"), temp.count("7"), temp.count("8"), temp.count("9"), temp.count("10"),
    temp.count("11"), temp.count("12"), temp.count("13")]
    #checking the counts
    if 2 in nums and 3 in nums:
        return True
    else:
        return False

#function for the main thing
def run(num_trials):
    all_cards = ["O1", "O2", "O3", "O4", "O5", "O6", "O7", "O8", "O9", "O10", "O11", "O12","O13",
    "R1", "R2", "R3", "R4", "R5", "R6", "R7", "R8", "R9", "R10", "R11", "R12", "R13",
    "G1", "G2", "G3", "G4", "G5", "G6", "G7", "G8", "G9", "G10", "G11", "G12", "G13",
    "B1", "B2", "B3", "B4", "B5", "B6", "B7", "B8", "B9", "B10", "B11", "B12", "B13"]
    special = 0
    for i in range(num_trials):
        temp = (random.choices(all_cards, k = 5))
        if check_special(temp):
            special += 1
    print('Probability =', special / num_trials)


run(100)
run(10000)
run(1000000)
```

ب.

```
melika@melika-Lenovo-G500:~$ python3.8 1.py
['B12', 'G8', 'R12', 'O1', 'R10']
Probability = 0.0
['B12', 'G11', 'R8', 'O2', 'R3']
Probability = 0.0036
['O11', 'O6', 'B4', 'R12', 'B11']
Probability = 0.004201
melika@melika-Lenovo-G500:~$ python3.8 1.py
Probability = 0.01
Probability = 0.0034
Probability = 0.004196
melika@melika-Lenovo-G500:~$
```