CÁLCULO INTEGRAL
EJERCICIOS RESUELTOS
PASO A PASO

http://telecom-unefa-bejuma.blogspot.com

CONTENIDO

- Área
- La integral definida
- Propiedades de la integral definida
- Teorema del valor medio para la integral definida
- Teoremas fundamentales del cálculo
- Aplicaciones de la integral definida:
- Área de una región en el plano
- Longitud de arco de la gráfica de una función
- Técnicas de integración:
- Integración directa
- Integración por sustitución
- Integración por partes
- Potencias de las funciones trigonométricas
- Sustitución trigonométrica
- Integración de funciones racionales, por fracciones parciales, cuando el denominador sólo tiene factores lineales
- Integración de funciones racionales, por fracciones parciales, cuando el denominador contiene factores cuadráticos
- Integrales en las que aparecen expresiones cuadráticas
- Integrales que producen funciones trigonométricas inversas
- Misceláneas de ejercicios
- Tablas de integrales
- Integración numérica
- Integrales impropias
- Miscelánea1 de ejercicios de cálculo integral

Área

Como se verá más adelante, para definir el área de una región en el plano cartesiano, acotada por una curva, el ejex y las rectas $x = a$ y $x = b$, se requiere hallar la suma de muchos términos; para simplificar estas sumas se utiliza el concepto de *sumatoria*.

Sumatoria:

Dado un conjunto de números $\{a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n\}$, el símbolo $\sum_{k=i}^{n} a_k$ representa su suma indicada o sumatoria. Esto es

$$\sum_{k=i}^{n} a_k = a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_n.$$

La letra griega sigma mayúscula, Σ, denota la sumatoria, a_k representa el k-ésimo término, la letra k se llama índice de sumatoria y adquiere valores enteros sucesivos, los números i y n son los valores extremos del índice de sumatoria.

Ejemplos:

$$\sum_{k=1}^{3} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$$

{se sustituye, sucesivamente, la k por 1, 2 y 3 y se suman los números obtenidos}

$$\sum_{k=2}^{5} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{30 + 20 + 15 + 12}{60} = \frac{77}{60}$$

{se sustituye, sucesivamente, la k por 2, 3, 4 y 5 y se suman los números obtenidos}.

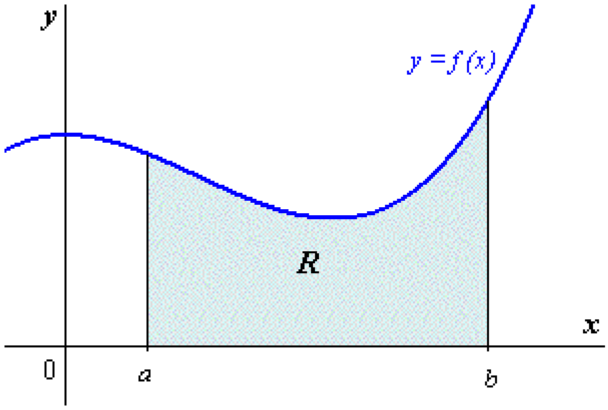
Propiedades de la sumatoria:	
PS1: $\sum_{k=1}^{n} c = cn$, c: constante	**PS2**: $\sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$, c: constante
PS3: $\sum_{k=1}^{n} [a_k + b_k] = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$	**PS4**: $\sum_{k=a}^{b} F(k) = \sum_{k=a+c}^{b+c} F(k-c)$
PS5: $\sum_{k=a}^{b} F(k) = \sum_{k=a-c}^{b-c} F(k+c)$	**PS6**: $\sum_{k=1}^{n} [F(k) - F(k-1)] = F(n) - F(0)$.
PS7: Si $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ {PS7a} $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ {PS7b} $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ {PS7c} $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$ {PS7d}	

Área:

Los antiguos griegos dieron una regla para calcular la medida del área de un rectángulo (producto de la base por la altura), de aquí se deduce que el área de un triángulo rectángulo es igual a "un medio del producto de los catetos". La trigonometría facilita una fórmula para hallar la medida de cualquier clase de triángulo: "el área de un triángulo cualquiera es igual a un medio del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo que forman dichos lados". Debido a que un polígono se puede descomponer en triángulos, la obtención de su área se consigue mediante la suma de las áreas de los triángulos en que se ha dividido. Este procedimiento de medir áreas sólo es aplicable a figuras planas limitadas por segmentos de rectas. Para medir el área de una figura limitada por curvas se debe recurrir a otro método, que es el que vamos a estudiar a continuación.

Considérese una región R en el plano cartesiano acotada por el semiejex positivo, las rectas $x = a$ y $x = b$, y la curva de la función $y = f(x)$, y $f(x)$ continua en $[a, b]$ (obsérvese la fig. 1)

Deseamos hallar la medida del área de la región R. Para tal efecto, dividimos el intervalo cerrado $[a, b]$ en n-subintervalos iguales de longitud Δx. Es claro que $\Delta x = (b - a) / n$. Denotemos los puntos extremos de estos subintervalos por $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$;



(fig.1)

donde $x_0 = a,\ x_1 = a + \Delta x, \ldots,\ x_i = a + i\Delta x, \ldots, x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x,\ x_n = b$.

Así mismo denótese el i-ésimo subintervalo por $[x_{i-1}, x_i]$.

Como f es continua en $[a,b]$, f es continua en cada subintervalo cerrado. Por el Teorema del Valor Extremo sabemos que existe un número en cada subintervalo para el cual f tiene un valor mínimo absoluto. Sea c_i este número en el i-ésimo subintervalo, de tal modo que $f(c_i)$ es el valor mínimo absoluto de f en cada subintervalo.

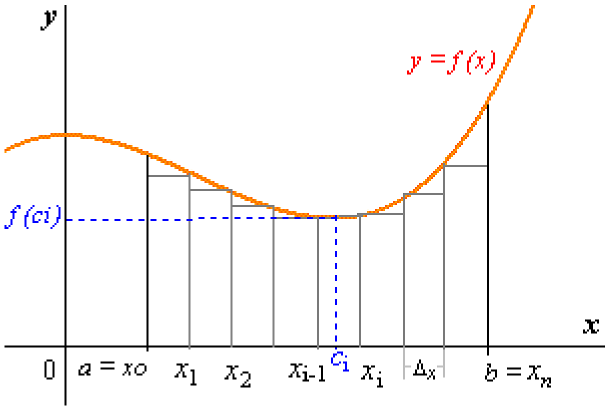
Obsérvese la fig. 2. Se tienen n subintervalos cada uno con Δx unidades de ancho y $f(c_i)$ unidades de alto. El área de cada subintervalo está dada por $\Delta x \cdot f(c_i)$. Sea S_n unidades cuadradas la suma de las áreas de estos n-rectángulos, entonces

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

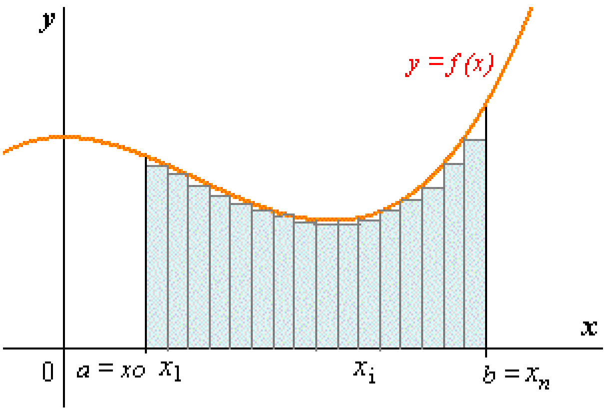
Es claro que

$$A \geq S_n$$

donde A es la medida del área de la región R.



(fig.2)



(fig.3)

En la fig. 2, la región poligonal tiene un área de S_n unidades cuadradas. Si n crece el número de rectángulos es mayor y el ancho de cada rectángulo es menor. En la fig. 3 se ilustra este hecho. Se puede observar que el área de la región poligonal se aproxima más al área de la región R. Esto es, la suma de las medidas de los rectángulos de la fig. 3 está más cercana al número que queremos sea la medida del área de la región R.

Conforme n crece, los valores de S_n encontrados a partir de $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ crecen, y los valores sucesivos de S_n difieren uno del otro en cantidades que se hacen arbitrariamente pequeñas. En un teorema de cálculo avanzado se demuestra que si f es continua en $[a,b]$, entonces mientras n crece sin límite, el valor de $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ se aproxima a un límite. Es precisamente este límite el que tomamos como la definición de la medida del área de la región R.

Definición:

Supongamos que f es continua en $[a,b]$, y $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$; y R es la región acotada por la curva de $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.
Dividimos $[a,b]$ en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = (b-a)/n$, y denotamos el $i-$ésimo subintervalo por $[x_{i-1}, x_i]$.
Entonces, si $f(c_i)$ es el valor mínimo absoluto de f en el $i-$ésimo subintervalo, la medida de la región R está dada por:

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \qquad \text{siempre que } n > N$$

Lo anterior significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $N > 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x - A \right| < \varepsilon \qquad \text{y } n \in \mathbb{N}$$

Ejercicios resueltos

En los ejercicios 1 a 3 halle la suma por medio de la definición de sumatoria. En los ejercicios 4 a 7 evalúe la suma que se indica utilizando las propiedades de la sumatoria. En los ejercicios 8 a 11 evalúe el área de la región dada; emplee rectángulos inscritos o circunscritos según se indique. Para cada ejercicio trace una figura que muetsre la región y el i-ésimo rectángulo.

1. $\sum_{i=1}^{7}(i^2+1)$	**2.** $\sum_{k=-2}^{3}\frac{k}{k+3}$	**3.** $\sum_{k=1}^{4}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$
4. $\sum_{i=1}^{25}2i(i-1)$	**5.** $\sum_{k=1}^{100}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]$	**6.** $\sum_{k=1}^{20}3k(k^2+2)$
7. $\sum_{k=1}^{n}\left[\left(3^{-k}+3^{k}\right)^2-\left(3^{k-1}+3^{-k-1}\right)^2\right]$		

8. La región acotada por la curva de $y = x^2$, el eje x, y la recta $x = 2$; rectángulos inscritos.

9. La región acotada por $y = 2x$, el eje x, y las rectas $x = 1$ y $x = 4$; rectángulos circunscritos.

10. La región sobre el eje x y a la derecha de la recta $x = 1$ acotada por el eje x, la recta $x = 1$ y la cueva $y = 4 - x^2$; rectángulos inscritos.

11. La región acotada por $y = x^3 + x$, el eje x y las rectas $x = -2$ y $x = 1$; rectángulos circunscritos.

Soluciones

1. $\sum_{i=1}^{7}(i^2+1)$

Solución:

$$\sum_{i=1}^{7}(i^2+1)=(1^2+1)+(2^2+1)+(3^2+1)+(4^2+1)+(5^2+1)+(6^2+1)+(7^2+1),$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{7}(i^2+1)=2+5+10+17+26+37+50;$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{7}(i^2+1)=147.$$

2. $\sum_{k=-2}^{3}\frac{k}{k+3}$

Solución:

$$\sum_{k=-2}^{3}\frac{k}{k+3}=\frac{-2}{-2+3}+\frac{-1}{-1+3}+\frac{0}{0+3}+\frac{1}{1+3}+\frac{2}{2+3}+\frac{3}{3+3},$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=-2}^{3}\frac{k}{k+3}=\frac{-2}{1}+\frac{-1}{2}+\frac{0}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{3}{6}=-2-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=\frac{-40-10+5+8+10}{20};$$

$$\therefore \quad \sum_{k=-2}^{3}\frac{k}{k+3}=\frac{-50+23}{20}=-\frac{27}{20}.$$

3. $\sum_{k=1}^{4}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$

Solución:

$$\sum_{k=1}^{4}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\frac{(-1)^{1+1}}{1}+\frac{(-1)^{2+1}}{2}+\frac{(-1)^{3+1}}{3}+\frac{(-1)^{4+1}}{4},$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{4}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=(-1)^2+\frac{(-1)^3}{2}+\frac{(-1)^4}{3}+\frac{(-1)^5}{4}=1+\frac{-1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{-1}{4}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{12-6+4-3}{12};$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{4}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\frac{7}{12}.$$

4. $\sum_{i=1}^{25}2i(i-1)$

Solución:

$$\sum_{i=1}^{25}2i(i-1)=\sum_{i=1}^{25}(2i^2-2i)=2\sum_{i=1}^{25}i^2-2\sum_{i=1}^{25}i,$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{25}2i(i-1)=2\cdot\frac{25(25+1)(2(25)+1)}{6}-2\cdot\frac{25(25+1)}{2}=\frac{25(26)(51)}{3}-25(26)=16(25)(26);$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{25}2i(i-1)=10400.$$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]$

Solución:

$$\sum_{k=1}^{100}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]=-\sum_{k=1}^{100}\left[\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right]=-\left[\frac{1}{100+1}-\frac{1}{0+1}\right] \qquad \{\text{PS6}\};$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{100}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]=-\left[\frac{1}{101}-\frac{1}{1}\right]=-\left[\frac{1-101}{101}\right]=-\left[\frac{-100}{101}\right]=\frac{100}{101}.$$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}3k(k^2+2)$

Solución:

$$\sum_{k=1}^{20}3k(k^2+2)=\sum_{k=1}^{20}(3k^3+6k)=3\sum_{k=1}^{20}k^3+6\sum_{k=1}^{20}k=3\cdot\frac{20^2(21)^2}{4}+6\cdot\frac{20(21)}{2},$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{20}3k(k^2+2)=\frac{3\cdot 400\cdot 441}{4}+3\cdot 20\cdot 21=132300+1260;$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{20}3k(k^2+2)=133560.$$

7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[\left(3^{-k}+3^{k}\right)^2-\left(3^{k-1}+3^{-k-1}\right)^2\right]$

Solución:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\left(3^{-k}+3^{k}\right)^2-\left(3^{k-1}+3^{-k-1}\right)^2\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[\left(3^{k}+3^{-k}\right)^2-\left(3^{k-1}+3^{-k-1}\right)^2\right]=\left(3^{n}+3^{-n}\right)^2-\left(3^{0}+3^{0}\right)^2,$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n}\left[\left(3^{-k}+3^{k}\right)^2-\left(3^{k-1}+3^{-k-1}\right)^2\right]=\left(3^{n}+3^{-n}\right)^2-(1+1)^2=\left(3^{n}+3^{-n}\right)^2-2^2;$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n}\left[\left(3^{-k}+3^{k}\right)^2-\left(3^{k-1}+3^{-k-1}\right)^2\right]=\left(3^{n}+3^{-n}\right)^2-4.$$

8. Solución:

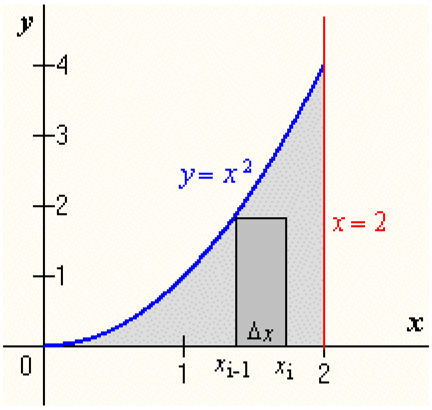
Dividimos $[0,2]$ en n subintervalos, cada uno de longitud Δx:

$x_0=0,\ x_1=\Delta x,\ x_2=2\Delta x,\ldots,\ x_{i-1}=(i-1)\Delta x,\ x_i=i\Delta x,$

$\ldots,\ x_n=2.$

$$\Delta x=\frac{2-0}{n}=\frac{2}{n}$$

$$f(x)=x^2$$



Como f es creciente en $[0,2]$, el valor mínimo absoluto de f en el i-ésimo subintervalo (x_{i-1},x_i) es $f(x_{i-1})$. Por lo tanto:

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left((i-1)\Delta x\right)^2\Delta x,$$

$$\Rightarrow \quad A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2(\Delta x)^3 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2\left(\frac{2}{n}\right)^3 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2\frac{8}{n^3},$$

$$\Rightarrow \quad A = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i^2-2i+1)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{8}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n}i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}i + \sum_{i=1}^{n}1\right)\right],$$

$$\Rightarrow \quad A = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{8}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n(n+1) + n\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{8}{n^3}\left(\frac{2n^3+3n^2+n-6n^2-6n+6n}{6}\right)\right],$$

$$\Rightarrow \quad A = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{3n^3}\left(2n^3-3n^2+n\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{3}\left(\frac{2n^3}{n^3}-\frac{3n^2}{n^3}+\frac{n}{n^3}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{3}\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right],$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{4}{3}(2-0+0) = \frac{4}{3}\cdot 2;$$

$$\therefore \quad A = \frac{8}{3} \text{ unidades cuadradas.}$$

9. Solución:

Dividimos $[1,4]$ en n subintervalos, cada uno de longitud Δx:

$x_0 = 1,\ x_1 = 1+\Delta x,\ x_2 = 1+2\Delta x, \ldots,$

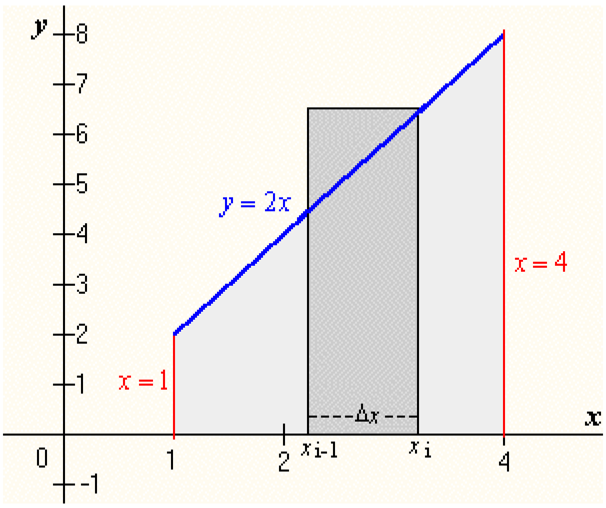
$x_i = 1+i\Delta x,\ \ldots,\ x_n = 4.$

$$\Delta x = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$$

$$f(x) = 2x$$

Como f es creciente en $[1,4]$, el valor máximo absoluto de f en el i-ésimo subintervalo (x_{i-1}, x_i) es $f(x_i)$. Por lo tanto:

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1+i\Delta x\right)\Delta x,$$



$$\Rightarrow \quad A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}2(1+i\Delta x)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}2\left(1+i\frac{3}{n}\right)\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{6}{n^2}(n+3i),$$

$$\Rightarrow \quad A = \lim_{n\to\infty}\frac{6}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}n + 3\sum_{i=1}^{n}i\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{6}{n^2}\left(n^2+\frac{3n(n+1)}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{6}{n^2}\left(\frac{5n^2+3n}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}3\left(5+\frac{3}{n}\right),$$

$$\Rightarrow \quad A = 3\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{3}{n}\right) = 3(5+0);$$

$$\therefore \quad A = 15 \text{ unidades cuadradas.}$$

10. Solución:

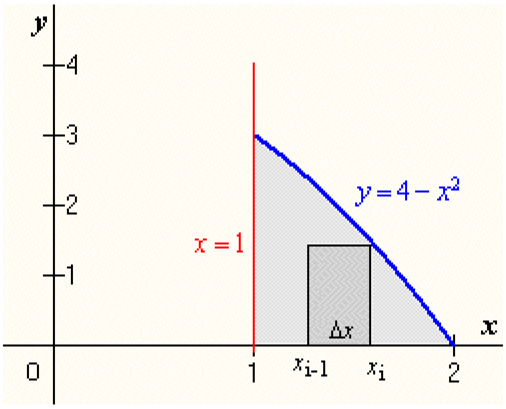
Dividimos $[1,2]$ en n subintervalos, cada uno de longitud Δx:

$x_0 = 1,\ x_1 = 1+\Delta x,\ x_2 = 1+2\Delta x, \ldots,$
$x_i = 1+i\Delta x,\ \ldots,\ x_n = 2.$

$$\Delta x = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n} \quad (1)$$

$$f(x) = 4 - x^2$$

Como f es decreciente en $[1,2]$, el valor minimo absoluto de f en el i-ésimo subintervalo (x_{i-1}, x_i) es $f(x_i)$. Por lo tanto:



$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \quad (2)$$

como $x_i = 1+i\Delta x$ y $f(x) = 4-x^2$, $\Rightarrow f(x_i) = 4-(1+i\Delta x)^2 = 4-(1+2i\Delta x + i^2(\Delta x)^2)$,

$$\Rightarrow \quad f(x_i) = 3 - 2i\Delta x - i^2(\Delta x)^2 \quad (3)$$

De tal manera que:

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(3-2i\Delta x - i^2(\Delta x)^2\right)\Delta x \qquad \{(3) \text{ en } (2)\} \quad (4),$$

$$\Rightarrow \quad A = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(3-\frac{2i}{n}-\frac{i^2}{n^2}\right) \qquad \{(1) \text{ en } (4) \text{ y organizando}\},$$

$$\Rightarrow \quad A = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\left(3n^2-2ni-i^2\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left[3n^2\sum_{i=1}^{n}1 - 2n\sum_{i=1}^{n}i - \sum_{i=1}^{n}i^2\right],$$

$$\Rightarrow \quad A = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left[3n^3 - n^2(n+1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left[2n^3 - n^2 - \frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right],$$

$$\Rightarrow \quad A = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6n^3}\left[10n^3 - 9n^2 - n\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left[10-\frac{9}{n}-\frac{1}{n^2}\right] = \frac{1}{6}[10-0-0];$$

$$\therefore \quad A = \frac{5}{3} \text{ unidades cuadradas.}$$

11. Solución:

1) Dividimos $[-2, 0]$ en n subintervalos, cada uno de longitud Δx:

$x_0 = -2,\ x_1 = -2 + \Delta x, \dots,\ x_{i-1} = -2 + (i-1)\Delta x,$

$\dots,\ x_n = 0.$

$$\Delta x = \frac{0-(-2)}{n} = \frac{2}{n}$$

$$f(x) = x^3 + x$$

Nota: se va a tomar el valor mínimo absoluto, por que allí es donde el vértice del rectángulo circunscrito está en la gráfica de f.

El valor minimo absoluto de f en el i-ésimo subintervalo(x_{i-1}, x_i) es $f(x_{i-1})$. Por lo tanto:

$$\mathrm{A}_1 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(-2+(i-1)\Delta x\right)^3 + \left(-2+(i-1)\Delta x\right)\right]\Delta x,$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{A}_1 = \left|\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\begin{matrix}-10-13\Delta x-6(\Delta x)^2-(\Delta x)^3+\left(13\Delta x+12(\Delta x)^2+3(\Delta x)^3\right)i\\ -\left(6(\Delta x)^2+3(\Delta x)^3\right)i^2+(\Delta x)^3 i^3\end{matrix}\right]\Delta x\right|,$$

$$\Rightarrow \mathrm{A}_1 = \left|\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{2}{n^3}(5n^3+13n^2+12n+4)+\frac{2}{n^3}(13n^2+24n+12)i-\frac{2}{n^3}(12n+12)i^2+\frac{2}{n^3}\cdot 4i^3\right]\frac{2}{n}\right|,$$

$$\Rightarrow \mathrm{A}_1 = \left|\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^4}\left[-(5n^3+13n^2+12n+4)\sum_{i=1}^{n}1+(13n^2+24n+12)\sum_{i=1}^{n}i-(12n+12)\sum_{i=1}^{n}i^2+4\sum_{i=1}^{n}i^3\right]\right|,$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{A}_1 = \left|\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^4}\left[\begin{matrix}-(5n^3+13n^2+12n+4)n+\dfrac{(13n^2+24n+12)n(n+1)}{2}\\ -\dfrac{12(n+1)n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{4n^2(n+1)^2}{4}\end{matrix}\right]\right|,$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{A}_1 = \left|\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^4}\left[\begin{matrix}-(5n^3+13n^2+12n+4)n+\dfrac{(13n^2+24n+12)n(n+1)}{2}\\ -\dfrac{12(n+1)n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{4n^2(n+1)^2}{4}\end{matrix}\right]\right|,$$

$\vdots$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{A}_1 = \left|\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^4}\left[-3n^4-5n^3+2n^2\right]\right| = 2\left|\lim_{n\to\infty}\left[-3-\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}\right]\right| = 2\left|(-3-0+0)\right| = 2\left|-3\right| = 2\times 3;$$

$\therefore \quad \mathrm{A}_1 = 6$ unidades cuadradas.

2) Dividimos $[0,1]$ en n subintervalos, cada uno de longitud Δx:

$$x_0 = 0,\ x_1 = \Delta x, \ldots,\ x_i = i\Delta x, \ldots,\ x_n = 1.$$

$$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

$$f(x) = x^3 + x$$

Como f es creciente en $[0,1]$ y la gráfica está por encima del eje x, el valor máximo absoluto de f en el i-ésimo subintervalo es $f(x_i)$. Por lo tanto:

$$A_2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{i^3}{n^3} + \frac{i}{n}\right]\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} \left[i^3 + n^2 i\right],$$

$$\Rightarrow \quad A_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\left[\sum_{i=1}^{n} i^3 + n^2 \sum_{i=1}^{n} i\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n^3(n+1)}{2}\right],$$

$$\Rightarrow \quad A_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^4}\left[3n^4 + 4n^3 + n^2\right] = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left[3 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right] = \frac{1}{4}[3+0+0];$$

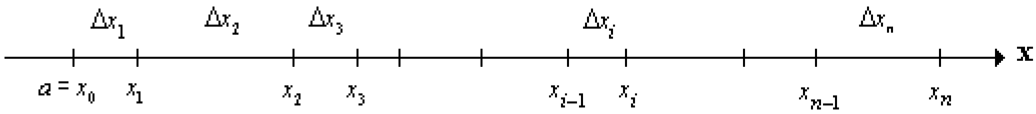
$$\therefore \quad A_2 = \frac{3}{4} \text{ unidades cuadradas.}$$

$$A = A_1 + A_2 = 6 + \frac{3}{4};$$

$$\therefore \quad A = \frac{27}{4} \text{ unidades cuadradas.}$$

La integral definida

Partición de un intervalo cerrado:



(fig.1)

Suma de Riemann:

Sea f una función definida en $[a,b]$, y sea Δ una partición cualquiera de $[a,b]$, una **suma de Riemann** (llamada así en memoria del matemático alemán G.F.Berhnard Riemannn (1826-1866)), es la que está dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x = f(\xi_1)\Delta_1 x + f(\xi_2)\Delta_2 x + f(\xi_3)\Delta_3 x + \ldots + f(\xi_i)\Delta_i x + \ldots + f(\xi_n)\Delta_n x,$$

donde

ξ_i es un punto cualquiera del i-ésimo subintervalo y, $\Delta_i x$ es la longitud de este i-ésimo subintervalo.

La integral definida:

Sea f una función definida en $[a,b]$, **la integral definida** de f entre a y b, denotada como $\int_a^b f(x)dx$, está dada por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta x\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x.$$

En $\int_a^b f(x)dx$, las denominaciones son:

$\int$: signo de integración (es una "s" estilizada)

a : extremo inferior

b : extremo superior

$f(x)$: integrando

Teorema:

Si f es continua en $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$.

Área:

Si f es continua en $[a,b]$ y $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$, entonces el área A, de la región R bajo la gráfica de f entre a y b, está dada por:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Ejercicios resueltos

En los ejercicios 1 a 3, halle la suma de Riemann para la función en el intervalo; emplee la partición dada Δ y los valores de ξ_i. Trace la gráfica de la función en el intervalo dado, y muestre los rectángulos cuyas medidas de área sean los términos de la suma de Riemann.

En lo sejercicios 4 a 6, encuentre el valor exacto de la integral definida.

En los ejercicios 7 a 9, encuentre el área exacta de la región como se indica: (*a*) exprese la medida del área como el límite de una suma de Riemann con particiones regulares; (*b*) exprese este límite con la notación de integral definida; (*c*) evalúe la integral definida con el método de esta sección y una elección adecuada de ξ_i. Trace una gráfica que muestre la región.

En los ejercicios 10 a 11, obtenga el valor aproximado de la integral definida usando calculadora para determinar, con cuatro cifras decimales, la suma de Riemann correspondiente con una partición regular de n subintervalos y ξ_i como el punto extremo izquierdo o derecho (según se indique) de cada subintervalo.

1. $f(x) = x^2,\ 0 \le x \le 3;$ para Δ: $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1\frac{1}{4},\ x_3 = 2\frac{1}{4},\ x_4 = 3;\ \xi_1 = \frac{1}{4},\ \xi_2 = 1,$ $\xi_3 = 1\frac{1}{2},\ \xi_4 = 2\frac{1}{2}.$

2. $f(x) = \frac{1}{x},\ 1 \le x \le 3;$ para Δ: $x_0 = 1,\ x_1 = 1\frac{2}{3},\ x_2 = 2\frac{1}{4},\ x_3 = 2\frac{2}{3},\ x_4 = 3;\ \xi_1 = 1\frac{1}{4},\ \xi_2 = 2,$ $\xi_3 = 2\frac{1}{2},\ \xi_4 = 2\frac{3}{4}.$

3. $f(x) = \operatorname{sen} x,\ 0 \le x \le \pi,$ para Δ: $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{4}\pi,\ x_2 = \frac{1}{2}\pi,\ x_3 = \frac{2}{3}\pi,\ x_4 = \frac{3}{4}\pi,\ x_5 = \pi,$ $\xi_1 = \frac{1}{6}\pi,\ \xi_2 = \frac{1}{3}\pi,\ \xi_3 = \frac{1}{2}\pi,\ \xi_4 = \frac{3}{4}\pi,\ \xi_5 = \frac{5}{6}\pi.$

4. $\int_2^7 3x\,dx$ **5.** $\int_0^2 x^2\,dx$ **6.** $\int_{-2}^2 (x^3+1)\,dx$

7. Acotada por la recta $y = 2x - 1,$ el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 5$

8. Acotada por la curva $y = 4 - x^2,$ el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 2$

9. Acotada por la curva $y = x^3 - 4,$ el eje y las rectas $x = -2$ y $x = -1$

10. $\int_2^5 \frac{1}{x^2}\,dx,\ n = 9,\ \xi_i$ es el punto extremo derecho.

11. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sec x\,dx,\ n = 8,\ \xi_i$ es el punto extremo izquierdo.

Soluciones

1. $f(x) = x^2,\ 0 \le x \le 3;$ para Δ: $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1\frac{1}{4},\ x_3 = 2\frac{1}{4},\ x_4 = 3;\ \xi_1 = \frac{1}{4},\ \xi_2 = 1,$ $\xi_3 = 1\frac{1}{2},\ \xi_4 = 2\frac{1}{2}.$

Solución:

$$\sum_{i=1}^{4} f(\xi_i)\Delta_i x = f(\xi_1)\Delta_1 x + f(\xi_2)\Delta_2 x + f(\xi_3)\Delta_3 x + f(\xi_4)\Delta_4 x,$$

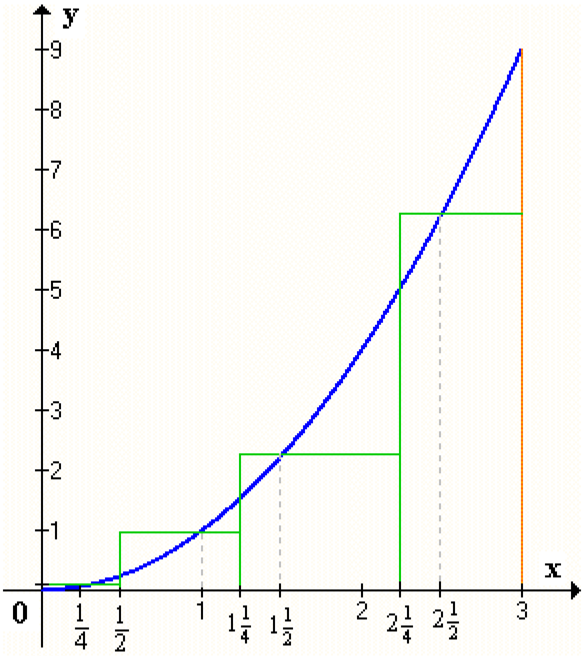
$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{4} f(\xi_i)\Delta_i x = f(\tfrac{1}{4})\left(\frac{1}{2}-0\right) + f(1)\left(1\tfrac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) + f(1\tfrac{1}{2})(2\tfrac{1}{4}-1\tfrac{1}{4}) + f(2\tfrac{1}{2})(3-2\tfrac{1}{4}),$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{4} f(\xi_i)\Delta_i x = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{9}{4}(1) + \frac{25}{4}\left(\frac{3}{4}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{4} f(\xi_i)\Delta_i x = \frac{1}{32} + \frac{3}{4} + \frac{9}{4} + \frac{75}{16},$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{4} f(\xi_i)\Delta_i x = \frac{1+24+72+150}{32};$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{4} f(\xi_i)\Delta_i x = \frac{247}{32}.$$



2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $1 \le x \le 3$; para Δ: $x_0 = 1$, $x_1 = 1\tfrac{2}{3}$, $x_2 = 2\tfrac{1}{4}$, $x_3 = 2\tfrac{2}{3}$, $x_4 = 3$; $\xi_1 = 1\tfrac{1}{4}$, $\xi_2 = 2$, $\xi_3 = 2\tfrac{1}{2}$, $\xi_4 = 2\tfrac{3}{4}$.

Solución:

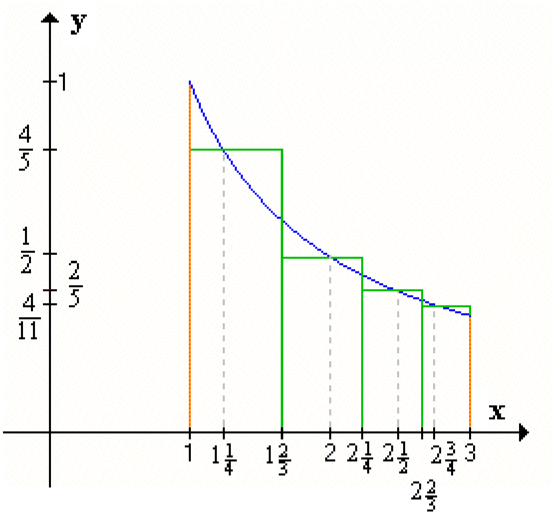
$$\sum_{i=1}^{4} f(\xi_i)\Delta_i x = f(\xi_1)\Delta_1 x + f(\xi_2)\Delta_2 x + f(\xi_3)\Delta_3 x + f(\xi_4)\Delta_4 x,$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{4} f(\xi_i)\Delta_i x = f(1\tfrac{1}{4})(1\tfrac{2}{3}-1) + f(2)(2\tfrac{1}{4}-1\tfrac{2}{3}) + f(2\tfrac{1}{2})(2\tfrac{2}{3}-2\tfrac{1}{4}) + f(2\tfrac{3}{4})(3-2\tfrac{2}{3}),$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{4} f(\xi_i)\Delta_i x = \frac{4}{5}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{12}\right) + \frac{2}{5}\left(\frac{5}{12}\right) + \frac{4}{11}\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{4} f(\xi_i)\Delta_i x = \frac{8}{15} + \frac{7}{24} + \frac{1}{6} + \frac{4}{33};$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{4} f(\xi_i)\Delta_i x = \frac{1469}{1320}.$$

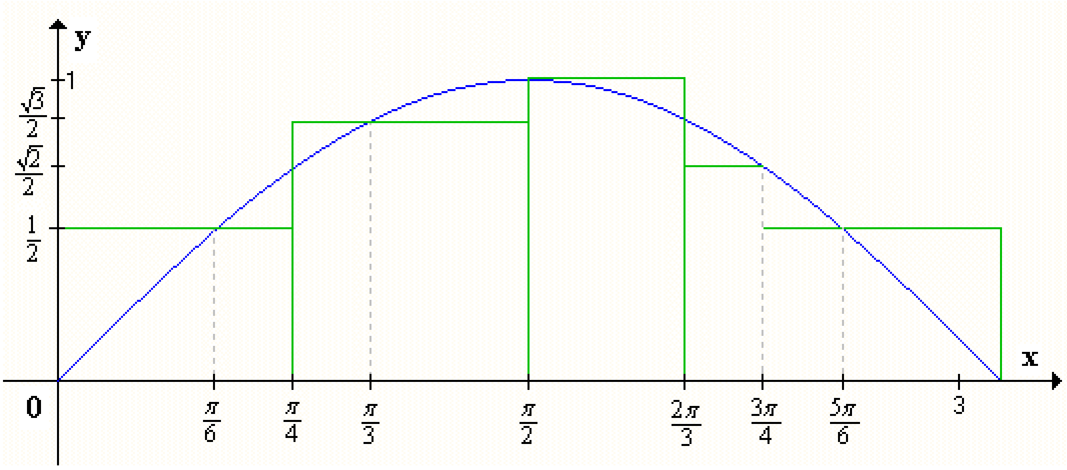


3. $f(x) = \operatorname{sen} x,\ 0 \le x \le \pi$, para $\Delta: x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{4}\pi,\ x_2 = \frac{1}{2}\pi,\ x_3 = \frac{2}{3}\pi,\ x_4 = \frac{3}{4}\pi,\ x_5 = \pi;$
$\xi_1 = \frac{1}{6}\pi,\ \xi_2 = \frac{1}{3}\pi,\ \xi_3 = \frac{1}{2}\pi,\ \xi_4 = \frac{3}{4}\pi,\ \xi_5 = \frac{5}{6}\pi.$

Solución:

$$\sum_{i=1}^{5} f(\xi_i)\Delta_i x = f(\xi_1)\Delta_1 x + f(\xi_2)\Delta_2 x + f(\xi_3)\Delta_3 x + f(\xi_4)\Delta_4 x + f(\xi_5)\Delta_5 x,$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{5} f(\xi_i)\Delta_i x = \operatorname{sen}(\pi/6)(\pi/4 - 0) + \operatorname{sen}(\pi/3)(\pi/2 - \pi/4) + \operatorname{sen}(\pi/2)(2\pi/3 - \pi/2)$$
$$+ \operatorname{sen}(3\pi/4)(3\pi/4 - 2\pi/3) + \operatorname{sen}(5\pi/6)(\pi - 3\pi/4),$$



$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{5} f(\xi_i)\Delta_i x = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + 1\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4},$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{5} f(\xi_i)\Delta_i x = \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{3}\pi}{8} + \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}\pi}{24} + \frac{\pi}{8},$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{5} f(\xi_i)\Delta_i x = \frac{3\pi + 3\sqrt{3}\pi + 4\pi + \sqrt{2}\pi + 3\pi}{24} = \frac{10\pi + 3\sqrt{3}\pi + \sqrt{2}\pi}{24};$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{5} f(\xi_i)\Delta_i x = \frac{\left(10 + 3\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\pi}{24}.$$

4. $\int_2^7 3x\,dx$

Solución:

Consideremos una partición regular del intervalo $[2,7]$ en n subintervalos. Entonces $\Delta x = 5/n$.
Si escogemos ξ_i como el punto extremo derecho de cada subintervalo, se tiene:

$$\xi_1 = 2+\frac{5}{n},\ \xi_2 = 2+2\left(\frac{5}{n}\right),\ \ldots,\ \xi_i = 2+i\left(\frac{5}{n}\right),\ \ldots,\ \xi_n = 7$$

Puesto que $f(x) = 3x$, entonces $f(\xi_i) = 3\left(2+\frac{5i}{n}\right) = 3\left(\frac{2n+5i}{n}\right)$;

$$\therefore \quad \int_2^7 3x\,dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} 3\left(\frac{2n+5i}{n}\right)\frac{5}{n},$$

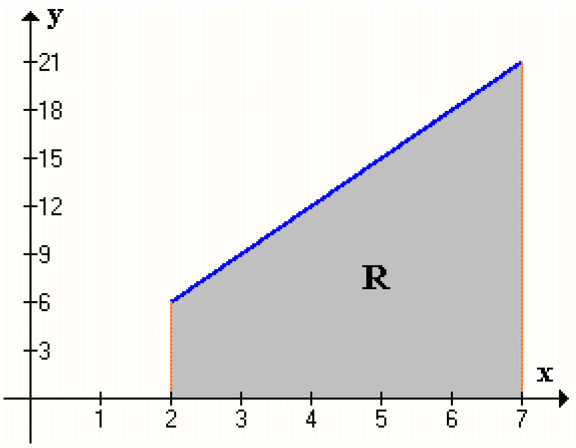
$$\Rightarrow \quad \int_2^7 3x\,dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{15}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(2n+5i) = \lim_{n\to+\infty}\frac{15}{n^2}\left[2\sum_{i=1}^{n} n + 5\sum_{i=1}^{n} i\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{15}{n^2}\left[2n^2+\frac{5n(n+1)}{2}\right],$$

$$\Rightarrow \quad \int_2^7 3x\,dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{15}{n^2}\left[2n^2+\frac{5n(n+1)}{2}\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{15}{2n^2}\left[4n^2+5n^2+5n\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{15}{2n^2}\left[9n^2+5n\right],$$

$$\Rightarrow \quad \int_2^7 3x\,dx = \frac{15}{2}\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{9n^2+5n}{n^2}\right] = \frac{15}{2}\lim_{n\to+\infty}\left[9+\frac{5}{n}\right] = \frac{15}{2}\left[\lim_{n\to+\infty} 9 + \lim_{n\to+\infty}\frac{5}{n}\right] = \frac{15}{2}[9+0];$$

$$\Rightarrow \quad \int_2^7 3x\,dx = \frac{135}{2}.$$

Nota: la interpretación geométrica del resultado es la siguiente:
como $3x \geq 0,\ \forall x \in [2,7]$, la región acotada por la curva $y = 3x$, el eje x y las rectas $x = 2$ y $x = 7$, tiene un área cuya medida es de 135/2 unidades cuadradas.



5. $\int_0^2 x^2 dx$

Solución:

Consideremos una partición regular del intervalo $[0,2]$ en n subintervalos. Entonces $\Delta x = 2/n$.

Si escogemos ξ_i como el punto extremo derecho de cada subintervalo, se tiene:

$$\xi_1 = \frac{2}{n},\ \xi_2 = 2\left(\frac{2}{n}\right),\ \ldots,\ \xi_i = i\left(\frac{2}{n}\right),\ \ldots,\ \xi_n = 2$$

Puesto que $f(x) = x^2$, entonces $f(\xi_i) = \left(\frac{2i}{n}\right)^2 = \frac{4i^2}{n^2}$;

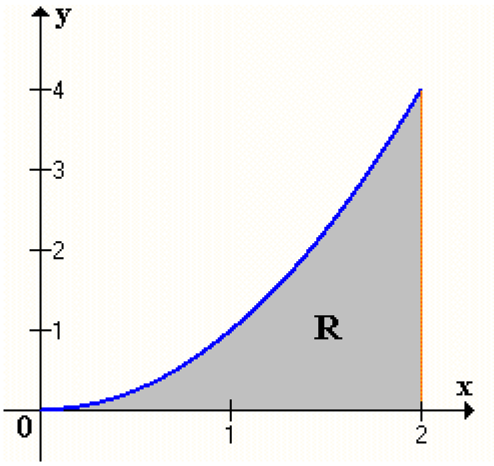
$$\therefore \quad \int_0^2 x^2 dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i^2}{n^2}\right)\frac{2}{n},$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^2 x^2 dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \lim_{n\to+\infty}\frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{4}{3n^3}\left[2n^3+3n^2+n\right],$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^2 x^2 dx = \frac{4}{3}\lim_{n\to+\infty}\left[2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right] = \frac{4}{3}\left[\lim_{n\to+\infty}2+\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n}+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\right] = \frac{4}{3}[2+0+0];$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}.$$

Nota: la interpretación geométrica del resultado es la siguiente: como $x^2 \geq 0,\ \forall x \in [0,2]$, la región R, acotada por la curva $y = x^2$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 2$, tiene un área cuya medida es de 8/3 unidades cuadradas.



6. $\int_{-2}^{2}(x^3+1)dx$

Solución:

Consideremos una partición regular del intervalo $[-2,2]$ en n subintervalos.

Entonces $\Delta x = 4/n$.

Si escogemos ξ_i como el punto extremo derecho de cada subintervalo, se tiene:

$$\xi_1 = -2+\frac{4}{n},\ \xi_2 = -2+\frac{8}{n},\ \ldots,\ \xi_i = -2+\frac{4i}{n},\ \ldots,\ \xi_n = 2$$

Puesto que $f(x)=x^3+1$, entonces $f(\xi_i)=\left(\frac{4i-2n}{n}\right)^3+1=\frac{8}{n^3}\left(8i^3-12i^2n+6in^2-n^3\right)+1;$

$$\therefore \quad \int_{-2}^{2}(x^3+1)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{8(8i^3-12i^2n+6in^2-n^3)+n^3}{n^3}\right)\frac{4}{n},$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-2}^{2}(x^3+1)dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n^4}\sum_{i=1}^{n}(64i^3-96ni^2+48n^2i-7n^3),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-2}^{2}(x^3+1)dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n^4}\left[64\sum_{i=1}^{n}i^3-96n\sum_{i=1}^{n}i^2+48n^2\sum_{i=1}^{n}i-7n^3\sum_{i=1}^{n}1\right],$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-2}^{2}(x^3+1)dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n^4}\left[16n^2(n+1)^2-16n^2(n+1)(2n+1)+24n^3(n+1)-7n^4\right],$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-2}^{2}(x^3+1)dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n^2}\left[16(n+1)^2-16(n+1)(2n+1)+24n(n+1)-7n^2\right],$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-2}^{2}(x^3+1)dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n^2}\left[16n^2+32n+16-32n^2-48n-16+24n^2+24n-7n^2\right],$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-2}^{2}(x^3+1)dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n^2}\left[n^2+8n\right] = 4\lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{8}{n}\right] = 4\left[\lim_{n\to+\infty}1+\lim_{n\to+\infty}\frac{8}{n}\right] = 4[1+0],$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-2}^{2}(x^3+1)dx = 4.$$

7. Acotada por la recta $y = 2x - 1$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 5$

Solución:

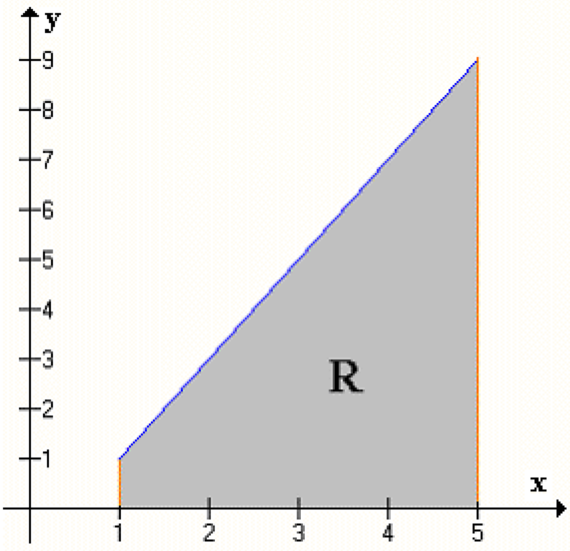
a) $A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$ (♠)

Consideremos una partición regular de $[1, 5]$ en n subintervalos, entonces

$$\Delta_i x = \Delta x = \frac{5-1}{n} = \frac{4}{n} \quad (1);$$

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\frac{4}{n} \qquad \{(1) \text{ en } (♠)\}$$

b) $A = \int_1^5 (2x-1)dx$



c) Si escogemos ξ_i como el punto extremo derecho de cada subintervalo, se tiene:

$\xi_1 = 1 + \frac{4}{n}$, $\xi_2 = 1 + \frac{8}{n}$, ..., $\xi_i = 1 + \frac{4}{n}i$,

..., $\xi_n = 5$

Puesto que $f(x) = 2x - 1$,

$$f(\xi_i) = 2\left[\frac{n+4i}{n}\right] - 1 = \frac{2}{n}[n+4i] - 1;$$

$$\therefore \quad A = \int_1^5 (2x-1)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left\{\frac{2}{n}[n+4i]-1\right\}\frac{4}{n}$$

$$\Rightarrow \quad A = \int_1^5 (2x-1)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} \left\{\frac{2}{n}[n+4i]-1\right\},$$

$$\Rightarrow \quad A = \int_1^5 (2x-1)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n}\left[\frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} n + 4\sum_{i=1}^{n} i\right) - \sum_{i=1}^{n} 1\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n}\left[\frac{2}{n}\left(n^2 + 2n(n+1)\right) - n\right],$$

$$\Rightarrow \quad A = \int_1^5 (2x-1)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n^2}\left[6n^2 + 4n - n^2\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n^2}\left[5n^2 + 4n\right] = 4\lim_{n\to+\infty}\left[5 + \frac{4}{n}\right],$$

$$\Rightarrow \quad A = \int_1^5 (2x-1)dx = 4\left[\lim_{n\to+\infty} 5 + \lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n}\right] = 4[5+0] = 4[5]$$

$\therefore$ $A = 20$ unidades cuadradas.

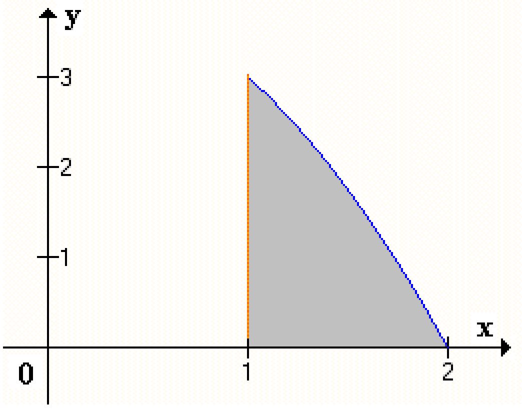
8. Acotada por la curva $y = 4 - x^2$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 2$

Solución:

a) Consideremos una partición regular de $[1, 2]$ en n subintervalos, entonces

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x, \ \Delta x = \frac{1}{n}$$

b) $A = \int_1^2 (4 - x^2)dx$



c) Si escogemos ξ_i como el punto extremo derecho de cada subintervalo, se tiene

$$\xi_1 = 1 + \frac{1}{n}, \ \xi_2 = 1 + \frac{2}{n}, \ \ldots, \ \xi_i = 1 + \frac{i}{n}, \ \ldots, \ \xi_n = 2$$

$$f(x) = 4 - x^2, \ \Rightarrow f(\xi_i) = 4 - \left[\frac{n+i}{n}\right]^2,$$

$$\Rightarrow \quad f(\xi_i) = 4 - \frac{1}{n^2}(n+1)^2 = 4 - \frac{1}{n^2}(n^2 + 2n + 1);$$

por lo tanto:

$$\therefore \quad A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(4 - \frac{1}{n^2}(n^2 + 2n + 1)\right)\frac{1}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} 4 - \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} n^2 + 2n\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} i^2\right]\right\},$$

$$\Rightarrow \quad A = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\left\{4n - \frac{1}{n^2}\left[n^3 + n^2(n+1) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\right\},$$

$$\Rightarrow \quad A = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\left(4n - \frac{1}{6n^2}\left[6n^3 + 6n^3 + 6n + 2n^3 + 3n^2 + n\right]\right),$$

$$\Rightarrow \quad A = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\left(4n - \frac{1}{6n^2}\left[14n^3 + 3n^2 + 7n\right]\right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\left(4n - \frac{7}{3}n - \frac{1}{2} - \frac{7}{6n}\right),$$

$$\Rightarrow \quad A = \lim_{n \to +\infty}\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{7}{6n^2}\right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{5}{3} - \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} - \lim_{n \to +\infty} \frac{7}{6n^2} = \frac{5}{3} - 0 - 0;$$

$\therefore \quad A = \frac{5}{3}$ unidades cuadradas.

9. Acotada por la curva $y = x^3 - 4$, el eje x y las rectas $x = -2$ y $x = -1$

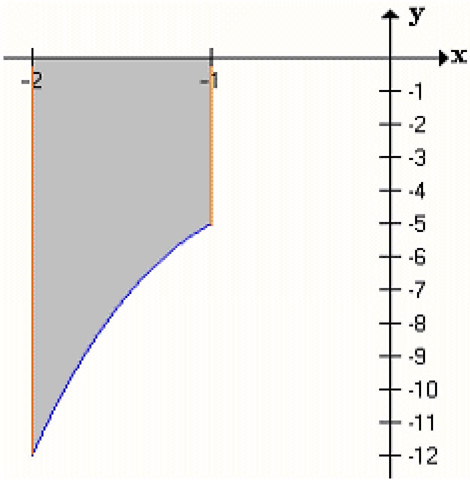
Solución:

a) Consideremos una partición regular de $[-2,-1]$ en n subintervalos, entonces

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x,\ \Delta x = \frac{-1-(-2)}{n} = \frac{1}{n}$$

b) $$A = \int_{-2}^{-1} (x^3 - 4)dx$$

c) Si escogemos ξ_i como el punto extremo derecho de cada subintervalo, se tiene



$$\xi_1 = -2 + \frac{1}{n},\ \xi_2 = -2 + \frac{2}{n},\ \ldots,\ \xi_i = -2 + \frac{i}{n},\ \ldots,\ \xi_n = -1$$

$$f(x) = x^3 - 4,\ \Rightarrow f(\xi_i) = \left[\frac{i-2n}{n}\right]^3 - 4,$$

$$\Rightarrow \quad f(\xi_i) = \frac{1}{n^3}(i^3 - 6ni^2 + 12n^2 i - 8n^3)^2 - 4;$$

$$\therefore \quad A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left\{\frac{1}{n^3}(i^3 - 6ni^2 + 12n^2 i - 8n^3)^2 - 4\right\}\frac{1}{n},$$

entonces:

$$\Rightarrow \quad A = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{n^3}\left[\sum_{i=1}^{n} i^3 - 6n\sum_{i=1}^{n} i^2 + 12n^2\sum_{i=1}^{n} i - 8n^3\sum_{i=1}^{n} 1\right] - 4\sum_{i=1}^{n} 1\right\},$$

$$\Rightarrow \quad A = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{n^3}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} - n^2(n+1)(2n+1) + 6n^3(n+1) - 8n^4\right] - 4n\right\},$$

$$\Rightarrow \quad A = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{n^3}\left[\frac{-15n^4 + 14n^3 - 3n^2}{4}\right] - 4n\right\} = \lim_{n\to+\infty}\left\{\frac{1}{n^4}\left[\frac{-15n^4}{4} + \frac{7n^3}{2} - \frac{3n^2}{4}\right] - 4\right\},$$

$$\Rightarrow \quad A = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{15}{4} + \frac{7}{2n} - \frac{3}{4n^2} - 4\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{31}{4} + \frac{7}{2n} - \frac{3}{4n^2}\right) = -\frac{31}{4} + 0 - 0;$$

$\therefore \quad A = \frac{31}{4}$ unidades cuadradas $\quad$ {"...el negativo de la región por debajo del eje x"}.

10. $\int_2^5 \frac{1}{x^2}dx,\ n=9,\ \xi_i$ es el punto extremo derecho.

<u>Solución</u>:

$$\int_2^5 \frac{1}{x^2}dx \approx \sum_{i=1}^{9} f(\xi_i)\Delta x \qquad (\clubsuit)$$

$$\Delta x = \frac{5-2}{n} = \frac{3}{n} \quad \text{y} \quad n=9, \ \Rightarrow \ \Delta x = \frac{1}{3} \qquad (1)$$

Como ξ_i es el punto extremo derecho, se tiene que:

$$\xi_1 = 2+\frac{3}{n},\ \ldots,\ \xi_i = 2+\frac{3i}{n} = 2+\frac{3i}{9} = 2+\frac{i}{3},\ \ldots,\ \xi_n = 5$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2},$$

$$\Rightarrow \quad f(\xi_i) = f\left(\frac{6+i}{3}\right) = \frac{1}{\left(\frac{6+i}{3}\right)^2} = \frac{9}{(6+i)^2} \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$\int_2^5 \frac{1}{x^2}dx \approx \sum_{i=1}^{9} \frac{9}{(6+i)^2}\times\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{9}\frac{3}{(6+i)^2},$$

$$\Rightarrow \quad \int_2^5 \frac{1}{x^2}dx \approx \frac{3}{7^2}+\frac{3}{8^2}+\frac{3}{9^2}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{11^2}+\frac{3}{12^2}+\frac{3}{13^2}+\frac{3}{14^2}+\frac{3}{15^2}$$

$$\Rightarrow \quad \int_2^5 \frac{1}{x^2}dx \approx \frac{11564154397}{43286443200} \approx 0.2672.$$

11. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sec x dx,\ n=8,\ \xi_i$ es el punto extremo izquierdo.

Solución:

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sec x dx \approx \sum_{i=1}^{8} f(\xi_i)\Delta x \quad (\clubsuit)$$

$$\Delta x = \frac{\pi/3-(-\pi/3)}{n} = \frac{2\pi}{3n} \quad \text{y} \quad n=8, \ \Rightarrow \ \Delta x = \frac{2\pi}{3(8)} = \frac{\pi}{12} \quad (1)$$

Como ξ_i es el punto extremo izquierdo, se tiene que:

$$\xi_1 = -\frac{\pi}{3},\ \xi_2 = -\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12},\ \ldots,\ \xi_i = -\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}(i-1) = \frac{\pi}{12}(i-5),\ \ldots,\ \xi_n = \frac{\pi}{3}$$

$$f(x) = \sec x,$$

$$\Rightarrow \quad f(\xi_i) = f\left(\frac{\pi}{12}(i-5)\right) = \sec\left(\frac{\pi}{12}(i-5)\right) \quad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sec x dx \approx \sum_{i=1}^{8} \sec\left(\frac{\pi}{12}(i-5)\right)\frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sec x dx \approx \frac{\pi}{12}\left[\sum_{i=1}^{8} \sec\left(\frac{\pi}{12}(i-5)\right)\right],$$

$$\Rightarrow \quad \approx \frac{\pi}{12}\left[\sec\left(\frac{-\pi}{3}\right)+\sec\left(\frac{-\pi}{4}\right)+\sec\left(\frac{-\pi}{6}\right)+\sec\left(\frac{-\pi}{12}\right)+\sec 0+\sec\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sec\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sec\left(\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sec x dx \approx \frac{\pi}{12}\left[2+\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}+1.0353+1+1.0353+\frac{2\sqrt{3}}{3}+\sqrt{2}\right],$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sec x dx \approx 2.6726.$$

Propiedades de la integral definida

Para facilitar el cálculo de una integral definida, sin tener que recurrir a la definición dada en el capítulo anterior, en donde se estableció que $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$, se proporcionan las siguientes propiedades fundamentales (propiedades de la integral definida PID#):

PID1 (Definición): si $a > b$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

PID2 (Definición): si $f(a)$ existe, entonces

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

PID3: Si k es una constante cualquiera, entonces

$$\int_a^b kdx = k(b-a)$$

PID4: si la función f es integrable en $[a, b]$ y, k es una constante arbitraria, entonces

$$\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

PID5: si las funciones f y g son integrables en $[a, b]$, entonces $f \pm g$ también es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

PID6: si f es integrable en $[a, b]$, $[a, c]$ y $[c, b]$, y $a < c < b$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

PID7: si f es integrable en un intervalo cerrado I y, $\{a,b,c\} \in I$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

PID8: si f es integrable en $[a,b]$ y $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

PID9: si las funciones f y g son integrables en $[a,b]$ y $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a,b]$, entonces

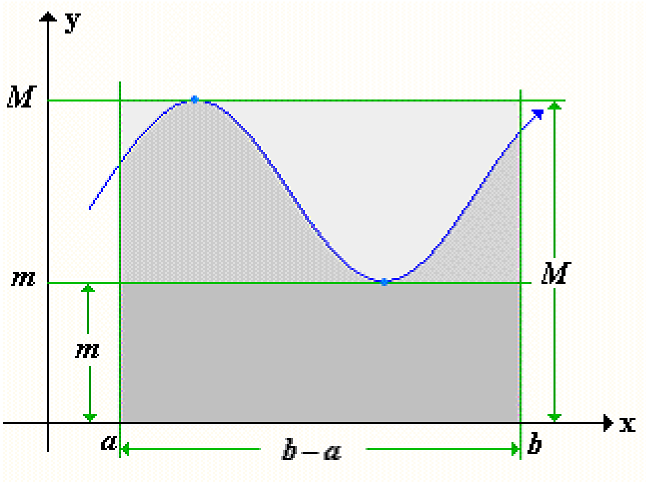
$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

PID10: sea f continua en $[a,b]$. Si m es el valor mínimo absoluto y M el valor máximo absoluto de f en $[a,b]$, y

$$m \le f(x) \le M,\ a \le x \le b$$

entonces

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$



La interpretación geométrica del teorema PID10 es la siguiente:
Como $f(x) \ge 0,\ \forall x \in [a,b]$, el área de la región bajo la curva de $f(x)$, encerrada entre las rectas $x=a$ y $x=b$ y el eje x, está dada por la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ (1).
El área de la región rectangular cuyas dimensiones son M y $(b-a)$ es mayor que el área dada por (1) y, el área de la región rectangular cuyas dimensiones son m y $(b-a)$ es menor que el área dada por (1).

Ejercicios resueltos

En los ejercicios 1 a 3, evalúe la integral definida.
En los ejercicios 4 a 7, evalúe la integral definida usando los resultados siguientes:

$$\int_{-1}^{2} x^2dx = 3,\quad \int_{-1}^{2} xdx = \frac{3}{2},\quad \int_0^{\pi} \operatorname{sen} xdx = 2,\quad \int_0^{\pi} \cos xdx = 0,\quad \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 xdx = \frac{1}{2}\pi$$

En los ejercicios 8 a 11, aplique el teorema **PID10** para hallar un intervalo cerrado que contenga el valor de la integral definida dada.
En los ejercicios 12 y 13, empleé el teorema **PID9** para determinar cuál de los símbolos $\ge$ o $\le$ deberá insertarse en el espacio en blanco para que la desigualdad sea correcta.

1. $\int_2^5 4dx$ **2.** $\int_3^3 4x^2dx$ **3.** $\int_{-2}^{2} \sqrt{5}dx$ **4.** $\int_{-1}^{2} (2x^2-4x+5)dx$

5. $\int_2^{-1} 3x(x-4)dx$ **6.** $\int_0^{\pi} (2\operatorname{sen} x + 3\cos x + 1)dx$ **7.** $\int_0^{\pi} 3\cos^2 xdx$

8. $\int_3^7 2xdx$ **9.** $\int_{-3}^{6} \sqrt{3+x}dx$ **10.** $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{sen} xdx$ **11.** $\int_1^4 |x-2|dx$

12. $\int_{-1}^{3} (2x^2-4)dx \_\_\_ \int_{-1}^{3} (x^2-6)dx$ **13.** $\int_4^5 \sqrt{6-x}dx \_\_\_ \int_4^5 \sqrt{x-2}dx$

Soluciones

1. $\int_2^5 4dx$

Solución:

$$\int_2^5 4dx = 4(5-2) = 4(3),\quad \Rightarrow \quad \int_2^5 4dx = 12$$ {aplicando la PID3}.

2. $\int_{3}^{3} 4x^2 dx$

Solución:

$$\int_{3}^{3} 4x^2 dx = 0 \qquad \{\text{aplicando la PID2}\}.$$

3. $\int_{-2}^{2} \sqrt{5} dx$

Solución:

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{5} dx = \sqrt{5}(2-(-2)) = \sqrt{5}(2+2), \;\Rightarrow\; \int_{-2}^{2} \sqrt{5} dx = 4\sqrt{5} \qquad \{\text{aplicando la PID3}\}.$$

4. $\int_{-1}^{2} (2x^2 - 4x + 5) dx$

Solución:

$$\int_{-1}^{2} (2x^2 - 4x + 5) dx = \int_{-1}^{2} 2x^2 dx - \int_{-1}^{2} 4x dx + \int_{-1}^{2} 5 dx \qquad \{\text{PID5}\},$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{2} (2x^2 - 4x + 5) dx = 2\int_{-1}^{2} x^2 dx - 4\int_{-1}^{2} x dx + \int_{-1}^{2} 5 dx \qquad \{\text{PID4}\},$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{2} (2x^2 - 4x + 5) dx = 2(3) - 4\left(\frac{3}{2}\right) + 5(2-(-1)) \qquad \{\text{resultados dados y PID3}\},$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{2} (2x^2 - 4x + 5) dx = 6 - 6 + 5(3);$$

$$\therefore \int_{-1}^{2} (2x^2 - 4x + 5) dx = 15.$$

5. $\int_{2}^{-1} 3x(x-4) dx$

Solución:

$$\int_{2}^{-1} 3x(x-4) dx = -\int_{-1}^{2} 3x(x-4) dx = -\int_{-1}^{2} (3x^2 - 12x) dx \qquad \{\text{PID1}\},$$

$$\Rightarrow \int_{2}^{-1} 3x(x-4) dx = -\left[\int_{-1}^{2} 3x^2 dx - \int_{-1}^{2} 12x dx\right] \qquad \{\text{PID5}\},$$

$$\Rightarrow \int_{2}^{-1} 3x(x-4) dx = -\left[3\int_{-1}^{2} x^2 dx - 12\int_{-1}^{2} x dx\right] \qquad \{\text{PID4}\},$$

$$\Rightarrow \int_{2}^{-1} 3x(x-4) dx = -\left[3(3) - 12\left(\frac{3}{2}\right)\right] = -[9-18] = -[-9] \qquad \{\text{resultados dados}\};$$

$$\therefore \int_{2}^{-1} 3x(x-4) dx = 9.$$

6. $\int_0^{\pi}(2\,\text{sen}\,x+3\cos x+1)dx$

Solución:

$$\int_0^{\pi}(2\,\text{sen}\,x+3\cos x+1)dx=\int_0^{\pi}2\,\text{sen}\,xdx+\int_0^{\pi}3\cos xdx+\int_0^{\pi}dx \qquad \{\text{PID5}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{\pi}(2\,\text{sen}\,x+3\cos x+1)dx=2\int_0^{\pi}\text{sen}\,xdx+3\int_0^{\pi}\cos xdx+1(\pi-0) \qquad \{\text{PID4 y PID3}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{\pi}(2\,\text{sen}\,x+3\cos x+1)dx=2(2)+3(0)+\pi=4+0+\pi \qquad \{\text{resultados dados}\};$$

$$\therefore \quad \int_0^{\pi}(2\,\text{sen}\,x+3\cos x+1)dx=9+\pi.$$

7. $\int_0^{\pi}3\cos^2 xdx$

Solución:

$$\int_0^{\pi}3\cos^2 xdx=3\int_0^{\pi}\cos^2 xdx=3\int_0^{\pi}(1-\text{sen}^2 x)dx \qquad \{\text{PID4}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{\pi}3\cos^2 xdx=3\left[\int_0^{\pi}dx-\int_0^{\pi}\text{sen}^2 xdx\right]=3\left[(\pi-0)-\int_0^{\pi}\text{sen}^2 xdx\right] \qquad \{\text{PID4 y PID3}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{\pi}3\cos^2 xdx=3\left[\pi-\frac{\pi}{2}\right]=3\left[\frac{\pi}{2}\right] \qquad \{\text{resultados dados}\};$$

$$\therefore \quad \int_0^{\pi}3\cos^2 xdx=\frac{3\pi}{2}.$$

8. $\int_3^{7}2xdx$

Solución:

f es una función polinomial, por lo que es continua en $\mathbb{R}$ y, en particular, continua en $[3,7]$

$f'(x)=2$: siempre existe y nunca es 0; por lo que no tiene #s críticos

$f(3)=2(3)=6$: valor mínimo absoluto

$f(7)=2(7)=14$: valor máximo absoluto;

por lo tanto, de acuerdo con el TID 10, se tiene que:

$$6(7-3)\le\int_3^{7}2xdx\le 14(7-3)\Leftrightarrow\ 24\le\int_3^{7}2xdx\le 56$$

Respuesta: el valor de la integral definida pertenece al intervalo $[24,56]$.

9. $\int_{-3}^{6}\sqrt{3+x}dx$

Solución:

$f(x)=\sqrt{3+x}$: $3+x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -3 \Rightarrow Domf=[-3,\infty)$; por lo tanto

f es continua en $[-3,\infty)$ y, en particular, lo es $[-3,6]$

$f(x)=(3+x)^{1/2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2(3+x)^{1/2}}$

f' no existe para $x=-3$, y f' nunca es cero; por lo que el único # crítico de f es -3

$f(-3)=\sqrt{3-3}=0$: valor mínimo absoluto de f en $[-3,6]$

$f(6)=\sqrt{3+6}=3$: valor máximo absoluto de f en $[-3,6]$

por lo tanto, de acuerdo con el TID 10, se tiene que:

$$0(6+3)\leq \int_{-3}^{6}\sqrt{3+x}dx \leq 3(6+3) \Leftrightarrow 0\leq \int_{-3}^{6}\sqrt{3+x}dx \leq 27$$

Respuesta: el valor de la integral definida pertenece al intervalo $[0,27]$.

10. $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\operatorname{sen} x dx$

Solución:

$f(x)=\operatorname{sen} x$; por lo tanto f es continua en $[\pi/6,\pi/3]$

$f'(x)=\cos x$: siempre existe, y es 0 cuando $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Ningún número de la forma $\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ pertenece a $[\pi/6,\pi/3]$

No hay #s críticos

$f(\pi/6)=\dfrac{1}{2}$: valor mínimo absoluto de f en $[\pi/6,\pi/3]$

$f(\pi/3)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$: valor máximo absoluto de f en $[\pi/6,\pi/3]$

por lo tanto, de acuerdo con el TID 10, se tiene que:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\leq \int_{\pi/6}^{\pi/3}\operatorname{sen} x dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{12}\leq \int_{\pi/6}^{\pi/3}\operatorname{sen} x dx \leq \frac{\sqrt{3}\pi}{12}$$

Respuesta: el valor de la integral definida pertenece al intervalo $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\sqrt{3}\pi}{12}\right]$.

11. $\int_{1}^{4} |x-2|\,dx$

Solución:

$f(x) = |x-2| = \begin{Bmatrix} x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ 2-x & \text{si } x < 2 \end{Bmatrix}$; por lo tanto f es continua en $[1,4]$

$f'(x) = \begin{Bmatrix} -2 & \text{si } x \geq 2 \\ 2 & \text{si } x < 2 \end{Bmatrix}$: no existe para $x = 2$, y $2 \in [1,4]$

$f(1) = |1-2| = |-1| = 1$

$f(2) = |2-2| = |0| = 0$: valor mínimo absoluto de f en $[1,4]$

$f(4) = |4-2| = |2| = 2$: valor máximo absoluto de f en $[1,4]$

por lo tanto, de acuerdo con el TID 10, se tiene que:

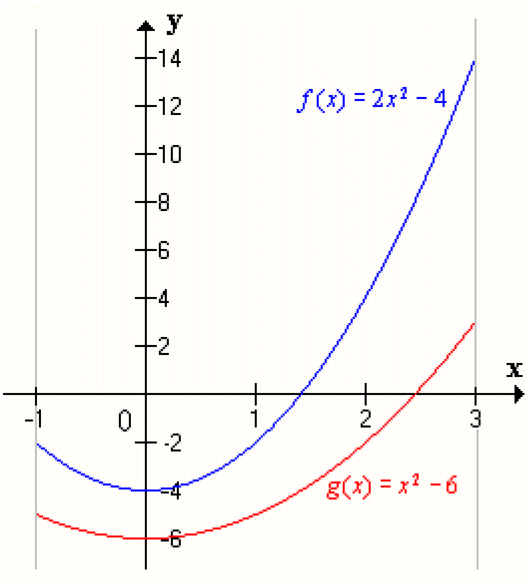
$$0(4-1) \leq \int_{1}^{4} |x-2|\,dx \leq 2(4-1) \Leftrightarrow 0 \leq \int_{1}^{4} |x-2|\,dx \leq 6$$

Respuesta: el valor de la integral definida pertenece al intervalo $[0,6]$.

12. $\int_{-1}^{3} (2x^2-4)\,dx$____$\int_{-1}^{3} (x^2-6)\,dx$

Solución:

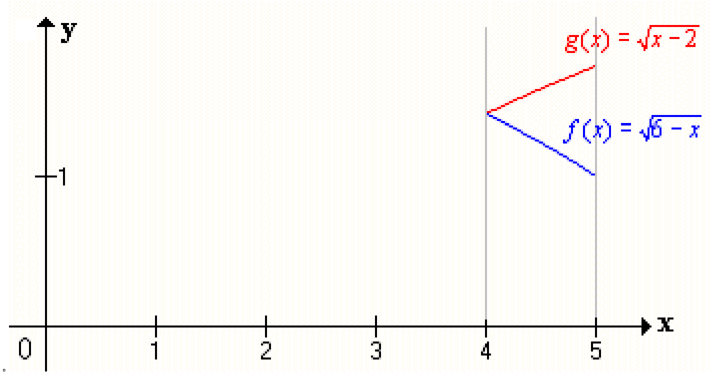
Tracemos las gráficas, en el mismo plano, en el intervalo $[-1,3]$ y comparémoslas:



Como bien se puede observar,
$f(x) \geq g(x), \quad \forall x \in [-1,3]$
Además, tanto f como g son integrables en $[-1,3]$
Por lo tanto, de acuerdo con el teorema PID9,
$\int_{-1}^{3} (2x^2-4)\,dx \geq \int_{-1}^{3} (x^2-6)\,dx$

13. $\int_4^5 \sqrt{6-x}\,dx$ ____ $\int_4^5 \sqrt{x-2}\,dx$

Solución:



Como se puede observar, en la figura de la izquierda, en donde se han trazado las gráfica de ambas funciones en un mismo plano, $f(x) \le g(x),\ \forall x \in [4,5]$. Además, tanto f como g son continuas en $[4,5]$; por lo tanto, y de acuerdo con el teorema PID9, se concluye que:

$$\int_4^5 \sqrt{6-x}\,dx \le \int_4^5 \sqrt{x-2}\,dx$$

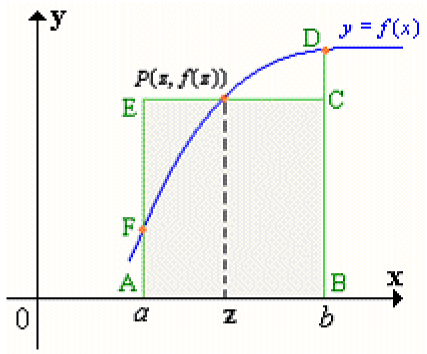
Teorema del valor medio para la integral definida

La siguiente propiedad de la integral definida sirve de base para demostrar el Primer Teorema fundamental del cálculo.

PID11: **"Teorema del valor medio para la integral definida"**

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces existe un número z en $[a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = f(z)(b-a)$$



Se puede dar una interpretación geométrica del teorema PID11 considerando a $f(x) \ge 0,\ \forall x \in [a,b]$; en este caso, $\int_a^b f(x)dx$ se toma como el área de la región encerrada por la curva de $f(x)$, las rectas $x = a,\ x = b$ y el eje x. Entonces, PID11 establece que existe un número $z \in [a,b]$ tal que el área del rectángulo ABCD cuyas dimensiones son la altura $f(z)$ y el ancho $(b-a)$ es igual al área de la región ABDF.

El número z no es necesariamente único, no obstante, el teorema PID11 garantiza al menos la existencia de un número que satisfaga la igualdad.

Definición : sea f continua en $[a,b]$, el valor medio (o promedio), f_{med}, de f en $[a,b]$ es

$$f_{med} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Ejercicios resueltos

En los ejercicios 1 y 2, encuentre el valor de z que satisfaga el Teorema del valor medio para la integral definida. Emplee los siguientes resultados, obtenidos en los ejercicios 5 y 6 de la sección "La integral definida", $\int_0^2 x^2dx = \frac{8}{3}$, $\int_{-2}^2 (x^3+1)dx = 4$.

En los ejercicios 3 a 6, utilice le Teorema del valor medio para la integral definida, PID11, para demostrar la desigualdad dada.

1. $\int_0^2 x^2dx$
2. $\int_{-2}^2 (x^3+1)dx$
3. $\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}dx \le \frac{1}{2}$
4. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\sqrt{x}dx \le \pi$
5. $0 \le \int_2^5 \frac{1}{x^3+1}dx \le \frac{1}{3}$
6. $0 \le \int_5^9 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx \le 2$
7. Dado que $\int_{-1}^2 xdx$, encuentre el valor promedio de la función identidad en el intervalo $[-1,2]$. Encuentre también el valor de x en el cual ocurre el valor promedio. Proporcione una interpretación geométrica de los resultados.

Soluciones

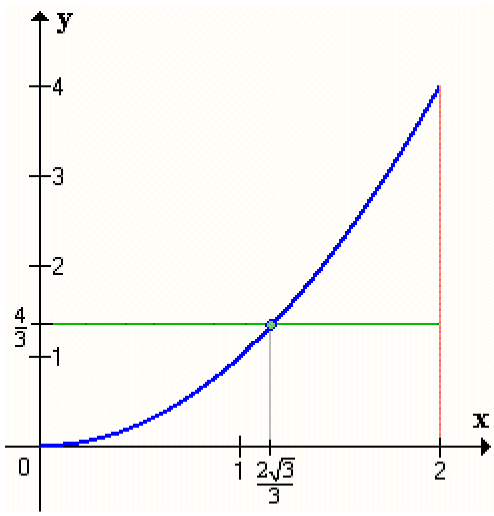
1. $\int_0^2 x^2dx$

Solución:

$$\int_0^2 x^2dx = f(z)(2-0) \Leftrightarrow \int_0^2 x^2dx = 2f(z)$$

Pero $\int_0^2 x^2dx = \frac{8}{3}$, $\Rightarrow\ 2f(z) = \frac{8}{3}$; $\therefore\ f(z) = \frac{4}{3}$, esto es $z^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow z = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$, como $-\frac{2\sqrt{3}}{3} \notin [0,2]$ se toma $z = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; de tal modo que:

$$\int_0^2 x^2dx = f\left(2\sqrt{3}/3\right)(2-0).$$



2. $\int_{-2}^{2}(x^3+1)dx$

Solución:

$$\int_{-2}^{2}(x^3+1)dx = f(z)(2-(-2)),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-2}^{2}(x^3+1)dx = 4f(z)$$

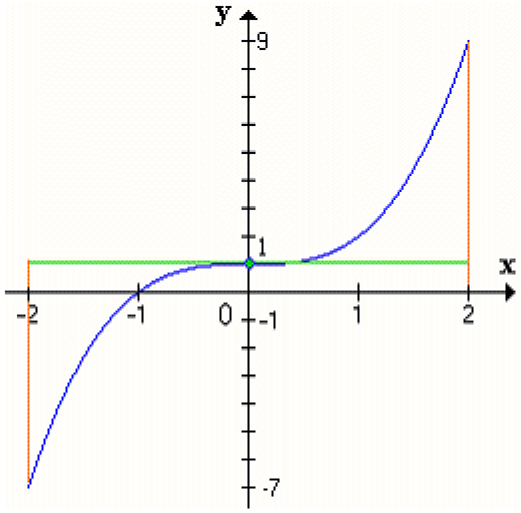
Pero $\int_{-2}^{2}(x^3+1)dx = 4$, esto es

$$4f(z)=4,$$

$$\Rightarrow \quad f(z)=1, \text{ es decir}$$

$$z^3+1=1 \Leftrightarrow z^3=0;$$

$$\therefore \quad z=0.$$



3. $\int_{0}^{2}\frac{1}{x^2+4}dx$

Solución:

$$\int_{0}^{2}\frac{1}{x^2+4}dx = f(z)(2-0) \qquad \{\text{PID11}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int_{0}^{2}\frac{1}{x^2+4}dx = 2f(z) \qquad (✚)$$

$f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$, $f\,\exists\forall x$; por lo tanto f es continua en $[0,2]$

$f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+4)^2}$, $f'\,\exists\forall x$, y es 0 en $x=0$

$f(0)=\dfrac{1}{4}$: valor máximo absoluto de f en $[0,2]$

$f(2)=\dfrac{1}{8}$: valor mínimo absoluto de f en $[0,2]$

Por lo tanto:

$$f(z)\in\left[\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right] \Leftrightarrow \frac{1}{8}\le f(z)\le\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4}\le 2f(z)\le\frac{1}{2} \qquad (1)$$

Sustituyendo (✚) en (1), se obtiene:

$$\frac{1}{4}\le\int_{0}^{2}\frac{1}{x^2+4}dx\le\frac{1}{2};$$

$$\therefore \quad \int_{0}^{2}\frac{1}{x^2+4}dx\le\frac{1}{2}.$$

4. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$

<u>Solución:</u>

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx = f(z)(\pi - 0) \qquad \{\text{PID }11\},$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx = \pi f(z) \quad (✚)$$

$f(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x}$, $Domf = [0,\infty)$; por lo tanto, f es continua en $[0,\pi]$

$f\,'(x) = \dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, $f\,'$ no existe para $x = 0$ y es 0 en $\sqrt{x} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow\ x = \dfrac{\pi^2}{4} + k\pi^2 + k^2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; en particular, $f\,' = 0$ en $x = \dfrac{\pi^2}{4}$

$f(0) = 0$: valor mínimo absoluto de f en $[0,\pi]$

$f(\pi^2/4) = 1$: valor máximo absoluto de f en $[0,\pi]$

$f(\pi) \approx 0.9797$

Por lo tanto:

$$f(z) \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \le f(z) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \pi f(z) \le \pi \quad (1)$$

Sustituyendo (✚) en (1), se obtiene:

$$0 \le \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx \le \pi,$$

$$\therefore \quad \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx \le \pi.$$

5. $0 \le \int_2^5 \frac{1}{x^3+1}dx \le \frac{1}{3}$

Solución:

$$\int_2^5 \frac{1}{x^3+1}dx = f(z)(5-2) \qquad \{\text{TID11}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int_2^5 \frac{1}{x^3+1}dx = 3f(z) \quad (\spadesuit)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^3+1},\ Domf = \{(-\infty,-1)\cup(1,\infty)\}:\ [2,5]\in\{(-\infty,-1)\cup(1,\infty)\};$$

por lo tanto, f es continua en $[2,5]$

$$f'(x) = -\frac{3x^2}{(x^3+1)^2}:\ \begin{array}{l} f' \text{ no existe para } x=-1, \text{ pero } -1\notin[2,5] \\ f' \text{ es cero en } x=0, \text{ pero } 0\notin[2,5] \end{array}$$

$$f(2) = \frac{1}{9}:\ \text{valor máximo absoluto de } f \text{ en } [2,5]$$

$$f(5) = \frac{1}{126}:\ \text{valor mínimo absoluto de } f \text{ en } [2,5]$$

Por lo tanto,

$$f(z)\in\left[\frac{1}{126},\frac{1}{9}\right] \Leftrightarrow \frac{1}{126}\le f(z)\le\frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{42}\le 3f(z)\le\frac{1}{3} \quad (1)$$

Sustituyendo ($\spadesuit$) en (1), se obtiene:

$$\frac{1}{42}\le\int_2^5\frac{1}{x^3+1}dx\le\frac{1}{3} \Leftrightarrow 0\le\frac{1}{42}\le\int_2^5\frac{1}{x^3+1}dx\le\frac{1}{3};$$

$\therefore \qquad 0 \le \int_2^5 \frac{1}{x^3+1}dx \le \frac{1}{3}.$

6. $0 \le \int_5^9 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx \le 2$

Solución:

$$\int_5^9 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = f(z)(9-5) \qquad \{\text{TID11}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int_5^9 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = 4f(z) \quad (\spadesuit)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}},\ Domf = (1,\infty):\ [5,9] \in (1,\infty);$$

por lo tanto, f es continua en $[5,9]$

$f'(x) = -\frac{1}{2(x-1)^{3/2}}$: f' existe para todo x que pertenece a $[5,9]$ y nunca es cero.

$f(5) = \frac{1}{2}$: valor máximo absoluto de f en $[5,9]$

$f(9) = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$: valor mínimo absoluto de f en $[5,9]$

Por lo tanto,

$$f(z) \in \left[\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{4} \le f(z) \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \le 4f(z) \le 2 \quad (1)$$

Sustituyendo ($\spadesuit$) en (1), se obtiene:

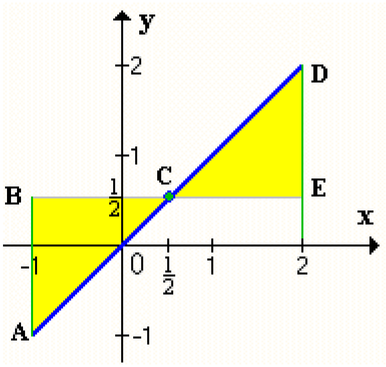
$$\sqrt{2} \le \int_5^9 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx \le 2 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{2} \le \int_5^9 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx \le 2;$$

$$\therefore \quad 0 \le \int_5^9 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx \le 2.$$

7. Dado que $\int_{-1}^2 xdx$, encuentre el valor promedio de la función identidad en el intervalo $[-1, 2]$. Encuentre también el valor de x en el cual ocurre el valor promedio. Proporcione una interpretación geométrica de los resultados.

Solución:

f es continua en $[-1,2]$; por lo tanto, f es integrable en $[-1,2]$



$$f_{med} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$f_{med} = \frac{1}{2+1}\int_{-1}^2 xdx = \frac{1}{3}\times\frac{3}{2};$$

$$\therefore \quad f_{med} = \frac{1}{2}$$

El valor promedio ocurre en $x = \frac{1}{2}$.

El área del ΔABC es igual al área del ΔEDC.

Teoremas fundamentales del cálculo

Primer teorema fundamental del cálculo:

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y sea la función F definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \text{ para toda } x \in [a,b];$$

entonces

F es una antiderivada de f en $[a,b]$, esto es

$$F'(x) = f(x).$$

Segundo teorema fundamental del cálculo:

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, si F es una antiderivada de f en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Ejercicios resueltos

En los ejercicios 1 a 14, evalúe la integral definida.
En los ejercicios 15 a 21, calcule la derivada.
Nota: para resolver los ejercicios es necesario conocer algunas técnicas de integración, por el momento sólo es indispensable aprender la integración directa y la integración por sustitución.

1. $\int_0^3 (3x^2 - 4x + 1)dx$
2. $\int_{-3}^5 (y^3 - 4y)dy$
3. $\int_0^1 \frac{z}{(z^2+1)^3}dz$
4. $\int_1^4 \sqrt{x}(2+x)dx$
5. $\int_1^{10} \sqrt{5x-1}dx$
6. $\int_{-2}^0 3w\sqrt{4-w^2}dw$
7. $\int_{-1}^3 \frac{dy}{(y+2)^3}$
8. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x dx$
9. $\int_0^1 \frac{(y^2+2y)dy}{\sqrt[3]{y^3+3y^2+4}}$
10. $\int_4^5 x^2\sqrt{x-4}dx$
11. $\int_{-2}^5 |x-3|dx$
12. $\int_{-1}^1 \sqrt{|x| - x}dx$
13. $\int_0^3 (x+2)\sqrt{x+1}dx$
14. $\int_{-3}^2 \frac{3x^3 - 24x^2 + 48x + 5}{x^2 - 8x + 16}dx$
15. $\frac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{4+t^6}dt$
16. $\frac{d}{dx}\int_2^x \frac{1}{t^4+4}dt$
17. $\frac{d}{dx}\int_x^3 \sqrt{\operatorname{sen} t}dt$
18. $\frac{d}{dx}\int_{-x}^x \cos(t^2+1)dt$
19. $\frac{d}{dx}\int_1^{x^3} \sqrt[3]{t^2+1}dt$
20. $\frac{d}{dx}\int_2^{\tan x} \frac{1}{1+t^2}dt$
21. $\frac{d}{dx}\int_3^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1-t^2}dt$
22. $f(x) = 9 - x^2$; $[a,b] = [0,3]$
Obtenga el valor promedio de f en $[a,b]$; también, obtenga el valor de x en el que se presenta el valor promedio de f y trace la gráfica.

S o l u c i o n e s

1. $\int_0^3 (3x^2 - 4x + 1)dx$

Solución:

$$\int_0^3 (3x^2 - 4x + 1)dx = \int_0^3 3x^2 dx - \int_0^3 4x dx + \int_0^3 dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^3 (3x^2 - 4x + 1)dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{1}{2}x^2 + x\Big]_0^3 = x^3 - 2x^2 + x\Big]_0^3,$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^3 (3x^2 - 4x + 1)dx = 3^3 - 2(3)^2 + 3 - (0^3 - 2(0)^2 + 0),$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^3 (3x^2 - 4x + 1)dx = 27 - 18 + 3 - 0;$$

$$\therefore \quad \int_0^3 (3x^2 - 4x + 1)dx = 12.$$

2. $\int_{-3}^5 (y^3 - 4y)dy$

Solución:

$$\int_{-3}^5 (y^3 - 4y)dy = \int_{-3}^5 y^3 dy - \int_{-3}^5 4y dy,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-3}^5 (y^3 - 4y)dy = \frac{y^4}{4} - 4 \cdot \frac{1}{2}y^2\Big]_{-3}^5 = \frac{y^4}{4} - 2y^2\Big]_{-3}^5,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-3}^5 (y^3 - 4y)dy = \frac{5^4}{4} - 2(5)^2 - \left(\frac{(-3)^4}{4} - 2(-3)^2\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-3}^5 (y^3 - 4y)dy = \frac{625}{4} - 50 - \left(\frac{81}{4} - 18\right) = \frac{625}{4} - 50 - \frac{81}{4} + 18 = \frac{544}{4} - 32 = 136 - 32;$$

$$\therefore \quad \int_{-3}^5 (y^3 - 4y)dy = 104.$$

3. $\int_0^1 \frac{z}{(z^2+1)^3} dz$

Solución:

$$\int_0^1 \frac{z}{(z^2+1)^3} dz = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2zdz}{(z^2+1)^3} \qquad (\clubsuit)$$

Sea $u = z^2 + 1, \; \Rightarrow \; du = 2zdz$. Además: $\begin{matrix} \text{cuando } z = 0, \; u = 1 \\ \text{cuando } z = 1, \; u = 2 \end{matrix}$ $\quad (1)$

Sustituyendo (1) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$\int_0^1 \frac{z}{(z^2+1)^3} dz = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{du}{u^3} = \frac{1}{2}\int_1^2 u^{-3}du$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^1 \frac{z}{(z^2+1)^3} dz = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}u^{-2}\Big]_1^2\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^1 \frac{z}{(z^2+1)^3} dz = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}(2)^{-2} - \left(-\frac{1}{2}(2)^{-2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right);$$

$$\therefore \quad \int_0^1 \frac{z}{(z^2+1)^3} dz = \frac{3}{16}.$$

4. $\int_1^4 \sqrt{x}(2+x)dx$

Solución:

$$\int_1^4 \sqrt{x}(2+x)dx = \int_1^4 x^{1/2}(2+x)dx = \int_1^4 (2x^{1/2} + x^{3/2})dx$$

$$\Rightarrow \quad \int_1^4 \sqrt{x}(2+x)dx = \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{2}{5}x^{5/2}\Big]_1^4,$$

$$\Rightarrow \quad \int_1^4 \sqrt{x}(2+x)dx = \frac{4}{3}(4)^{3/2} + \frac{2}{5}(4)^{5/2} - \left(\frac{4}{3}(1)^{3/2} + \frac{2}{5}(1)^{5/2}\right) = \frac{32}{3} + \frac{64}{5} - \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_1^4 \sqrt{x}(2+x)dx = \frac{28}{3} + \frac{62}{5} = \frac{140+186}{15};$$

$$\therefore \quad \int_1^4 \sqrt{x}(2+x)dx = \frac{326}{15}.$$

5. $\int_1^{10} \sqrt{5x-1}dx$

Solución:

$$\int_1^{10} \sqrt{5x-1}dx = \int_1^{10} (5x-1)^{1/2}dx \quad (\blacklozenge)$$

Sea $\quad u = 5x-1, \ \Rightarrow \ du = 5dx, \ \Rightarrow \ \frac{1}{5}du = dx \quad (1)$

Además

$$\left.\begin{array}{l} \text{cuando } x=1,\ u = 5(1)-1 = 4 \\ \text{cuando } x=10,\ u = 5(10)-1 = 49 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en ($\blacklozenge$), se obtiene:

$$\Rightarrow \quad \int_1^{10} \sqrt{5x-1}dx = \int_4^{49} u^{1/2}\left(du\right) = \frac{1}{5}\int_4^{49} u^{1/2}du,$$

$$\Rightarrow \quad \int_1^{10} \sqrt{5x-1}dx = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_4^{49}\right) = \frac{2}{15}\left(u^{3/2}\Big]_4^{49}\right) = \frac{2}{15}\left(49^{3/2} - 4^{3/2}\right) = \frac{2}{15}(343-8) = \frac{2}{15}(335);$$

$$\therefore \quad \int_1^{10} \sqrt{5x-1}dx = \frac{134}{3}.$$

6. $\int_{-2}^{0} 3w\sqrt{4-w^2}\,dw$

Solución:

$$\int_{-2}^{0} 3w\sqrt{4-w^2}\,dw = -\frac{3}{2}\int_{-2}^{0}(4-w^2)^{1/2}(-2wdw) \quad (\spadesuit)$$

Sea $u = 4-w^2, \Rightarrow du = -2wdw \quad (1)$

Además

$$\left.\begin{array}{l}\text{cuando } w=-2,\ u = 4-(-2)^2 = 0\\ \text{cuando } w=0,\ u = 4-(0)^2 = 4\end{array}\right\} \quad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (♦), se obtiene:

$$\Rightarrow \quad \int_{-2}^{0} 3w\sqrt{4-w^2}\,dw = -\frac{3}{2}\int_{0}^{4} u^{1/2}du,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-2}^{0} 3w\sqrt{4-w^2}\,dw = -\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_0^4\right) = -\left(u^{3/2}\Big]_0^4\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-2}^{0} 3w\sqrt{4-w^2}\,dw = -\left(4^{3/2}-0^{3/2}\right) = -(8);$$

$$\therefore \quad \int_{-2}^{0} 3w\sqrt{4-w^2}\,dw = -8.$$

7. $\int_{-1}^{3} \frac{dy}{(y+2)^3}$

Solución:

$$\int_{-1}^{3} \frac{dy}{(y+2)^3} = -\frac{1}{2(y+2)^2}\Big]_{-1}^{3},$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-1}^{3} \frac{dy}{(y+2)^3} = -\frac{1}{2(3+2)^2} - \left(-\frac{1}{2(-1+2)^2}\right) = -\frac{1}{2(5)^2} + \frac{1}{2(1)^2} = -\frac{1}{50} + \frac{1}{2} = \frac{-1+25}{50} = \frac{24}{50};$$

$$\therefore \quad \int_{-1}^{3} \frac{dy}{(y+2)^3} = \frac{12}{25}.$$

8. $\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x dx$

Solución:

$$\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x \cdot 2dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x dx = \frac{1}{2}\left(-\cos 2x\Big]_0^{\pi/2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\cos 2x\Big]_0^{\pi/2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x dx = -\frac{1}{2}\left(\cos 2(\pi/2) - \cos 2(0)\right) = -\frac{1}{2}\left(\cos\pi - \cos 0\right) = -\frac{1}{2}(-1-1) = -\frac{1}{2}(-2);$$

$$\therefore \quad \int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x dx = 1.$$

9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(y^2+2y)dy}{\sqrt[3]{y^3+3y^2+4}}$

Solución:

$$\int_0^1 \frac{(y^2+2y)dy}{\sqrt[3]{y^3+3y^2+4}} = \int_0^1 \frac{(y^2+2y)dy}{(y^3+3y^2+4)^{1/3}} \quad (\clubsuit)$$

Sea $u = y^3+3y^2+4, \Rightarrow du = (3y^2+6y)dy = 3(y^2+2y)dy \Leftrightarrow \frac{1}{3}du = (y^2+2y)dy \quad (1)$

Además

$$\left.\begin{array}{l} \text{cuando } y=0,\ u=0^3+3(0)^2+4=4 \\ \text{cuando } y=1,\ u=1^3+3(1)^2+4=8 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$\int_0^1 \frac{(y^2+2y)dy}{\sqrt[3]{y^3+3y^2+4}} = \int_4^8 \frac{\frac{1}{3}du}{u^{1/3}} = \frac{1}{3}\int_4^8 u^{-1/3}du,$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{(y^2+2y)dy}{\sqrt[3]{y^3+3y^2+4}} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}u^{2/3}\Big]_4^8\right) = \frac{1}{2}\left(u^{2/3}\Big]_4^8\right),$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{(y^2+2y)dy}{\sqrt[3]{y^3+3y^2+4}} = \frac{1}{2}\left(8^{2/3}-4^{2/3}\right) = \frac{1}{2}\left(2^2-2^{4/3}\right) = \frac{1}{2}\left(4-2\cdot 2^{1/3}\right) = 2-2^{1/3};$$

$$\therefore \quad \int_0^1 \frac{(y^2+2y)dy}{\sqrt[3]{y^3+3y^2+4}} = 2-\sqrt[3]{2}.$$

10. $\displaystyle\int_4^5 x^2\sqrt{x-4}dx$

Solución:

$$\int_4^5 x^2\sqrt{x-4}dx = \int_4^5 x^2(x-4)^{1/2}dx \quad (\clubsuit)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sea} \quad u=(x-4)^{1/2} \Leftrightarrow u^2 = x-4 \Leftrightarrow x = u^2+4, \\ \Rightarrow \quad dx = 2udu \end{array}\right\} \quad (1)$$

Además

$$\left.\begin{array}{l} \text{cuando } x=4,\ u=(4-4)^{1/2}=0 \\ \text{cuando } x=5,\ u=(5-4)^{1/2}=1 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$\int_4^5 x^2\sqrt{x-4}dx = \int_0^1 (u^2+4)^2\cdot u\cdot 2udu = 2\int_0^1 (u^6+8u^4+16u^2)du,$$

$$\Rightarrow \int_4^5 x^2\sqrt{x-4}dx = 2\left(\frac{1}{7}u^7+\frac{8}{5}u^5+\frac{16}{3}u^3\Big]_0^1\right),$$

$$\Rightarrow \int_4^5 x^2\sqrt{x-4}dx = 2\left(\frac{1}{7}(1)^7+\frac{8}{5}(1)^5+\frac{16}{3}(1)^3-\left(\frac{1}{7}(0)^7+\frac{8}{5}(0)^5+\frac{16}{3}(0)^3\right)\right),$$

$$\Rightarrow \int_4^5 x^2\sqrt{x-4}dx = 2\left(\frac{1}{7}+\frac{8}{5}+\frac{16}{3}-(0)\right) = 2\left(\frac{15+168+560}{105}\right);$$

$$\therefore \quad \int_4^5 x^2\sqrt{x-4}dx = \frac{1486}{105}.$$

11. $\int_{-2}^{5}|x-3|\,dx$

Solución:

$$|x-3|=\begin{cases}x-3, \text{ si } x\geq 3\\ 3-x, \text{ si } x<3\end{cases}; \text{ de tal manera que:}$$

$$\int_{-2}^{5}|x-3|\,dx=\int_{-2}^{3}(3-x)dx+\int_{3}^{5}(x-3)dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-2}^{5}|x-3|\,dx=\left[3x-\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{3}+\left[\frac{1}{2}x^2-3x\right]_{3}^{5},$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-2}^{5}|x-3|\,dx=3(3)-\frac{1}{2}(3)^2-\left(3(-2)-\frac{1}{2}(-2)^2\right)+\frac{1}{2}(5)^2-3(5)-\left(\frac{1}{2}(3)^2-3(3)\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-2}^{5}|x-3|\,dx=9-\frac{9}{2}-(-6-2)+\frac{25}{2}-15-\left(\frac{9}{2}-9\right)=9-\frac{9}{2}+8+\frac{25}{2}-15-\frac{9}{2}+9,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-2}^{5}|x-3|\,dx=11+\frac{7}{2}=\frac{22+7}{2};$$

$$\therefore \quad \int_{-2}^{5}|x-3|\,dx=\frac{29}{2}.$$

12. $\int_{-1}^{1}\sqrt{|x|-x}\,dx$

Solución:

$$\sqrt{|x|-x}=\begin{cases}0, \text{ si } x\geq 0\\ \sqrt{-2x}, \text{ si } x<0\end{cases}; \text{ de tal manera que:}$$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{|x|-x}\,dx=\int_{-1}^{0}\sqrt{-2x}\,dx+\int_{0}^{1}0\,dx=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(-2x)^{1/2}(-2dx)+0,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-1}^{1}\sqrt{|x|-x}\,dx=-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}(-2x)^{3/2}\right]_{-1}^{0}\right)=-\frac{1}{3}\left((-2x)^{3/2}\right]_{-1}^{0}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-1}^{1}\sqrt{|x|-x}\,dx=-\frac{1}{3}\left((-2(0))^{3/2}-(-2(-1))^{3/2}\right)=-\frac{1}{3}\left(0-(2)^{3/2}\right)=-\frac{1}{3}\left(-2\cdot 2^{1/2}\right)=\frac{2}{3}\cdot 2^{1/2};$$

$$\therefore \quad \int_{-1}^{1}\sqrt{|x|-x}\,dx=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

13. $\int_0^3 (x+2)\sqrt{x+1}dx$

Solución:

$$\int_0^3 (x+2)\sqrt{x+1}dx = \int_0^3 (x+2)(x+1)^{1/2}dx \quad (\clubsuit)$$

Sea $\left.\begin{array}{l} u=(x+1)^{1/2} \Leftrightarrow u^2 = x+1 \Leftrightarrow x = u^2-1, \\ \Rightarrow \quad dx = 2udu \end{array}\right\} \quad (1)$

Además

$$\left.\begin{array}{l} \text{cuando } x=0,\ u=1 \\ \text{cuando } x=3,\ u=(5-4)^{1/2}=2 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$\int_0^3 (x+2)\sqrt{x+1}dx = \int_1^2 (u^2-1+2)\cdot u\cdot 2udu = 2\int_1^2 (u^4+u^2)du,$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^3 (x+2)\sqrt{x+1}dx = 2\left(\frac{1}{5}u^5+\frac{1}{3}u^3\Big]_1^2\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^3 (x+2)\sqrt{x+1}dx = 2\left(\frac{1}{5}(2)^5+\frac{1}{3}(2)^3-\left(\frac{1}{5}(1)^5+\frac{1}{3}(1)^3\right)\right) = 2\left(\frac{32}{5}+\frac{8}{3}-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^3 (x+2)\sqrt{x+1}dx = 2\left(\frac{31}{5}+\frac{7}{3}\right) = 2\left(\frac{128}{15}\right);$$

$$\therefore \quad \int_0^3 (x+2)\sqrt{x+1}dx = \frac{256}{15}.$$

14. $\int_{-3}^2 \frac{3x^3-24x^2+48x+5}{x^2-8x+16}dx$

Solución:

$$\int_{-3}^2 \frac{3x^3-24x^2+48x+5}{x^2-8x+16}dx = \int_{-3}^2 \frac{3x(x-4)^2+5}{(x-4)^2}dx = \int_{-3}^2 3xdx + \int_{-3}^2 \frac{5}{(x-4)^2}dx \quad (\clubsuit)$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-3}^2 \frac{3x^3-24x^2+48x+5}{x^2-8x+16}dx = \frac{3}{2}x^2 - 5(x-4)^{-1}\Big]_{-3}^2,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-3}^2 \frac{3x^3-24x^2+48x+5}{x^2-8x+16}dx = \frac{3}{2}(2)^2 - 5(2-4)^{-1} - \left(\frac{3}{2}(-3)^2-5(-3-4)^{-1}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-3}^2 \frac{3x^3-24x^2+48x+5}{x^2-8x+16}dx = 6+\frac{5}{2}-\left(\frac{27}{2}+\frac{5}{7}\right) = 6+\frac{5}{2}-\frac{27}{2}-\frac{5}{7} = 6-11-\frac{5}{7} = -5-\frac{5}{7}$$

$$\therefore \quad \int_{-3}^2 \frac{3x^3-24x^2+48x+5}{x^2-8x+16}dx = -\frac{40}{7}.$$

15. $\frac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{4+t^6}dt$

Solución:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{4+t^6}dt = \sqrt{4+x^6}.$$

16. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_2^x \frac{1}{t^4+4}dt$

Solución:

$$\frac{d}{dx}\int_2^x \frac{1}{t^4+4}dt = \frac{1}{x^4+4}.$$

17. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^3 \sqrt{\operatorname{sen} t}\,dt$

Solución:

$$\frac{d}{dx}\int_x^3 \sqrt{\operatorname{sen} t}\,dt = -\frac{d}{dx}\int_3^x \sqrt{\operatorname{sen} t}\,dt = -\sqrt{\operatorname{sen} x}.$$

18. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-x}^x \cos(t^2+1)dt$

Solución:

$$\frac{d}{dx}\int_{-x}^x \cos(t^2+1)dt = \frac{d}{dx}\left(\int_{-x}^0 \cos(t^2+1)dt + \int_0^x \cos(t^2+1)dt\right),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\int_{-x}^x \cos(t^2+1)dt = \frac{d}{dx}\int_{-x}^0 \cos(t^2+1)dt + \frac{d}{dx}\cos(t^2+1)dt,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\int_{-x}^x \cos(t^2+1)dt = -\frac{d}{dx}\int_0^{-x} \cos(t^2+1)dt + \cos(x^2+1)$$

Si $\quad u=-x, \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx}=-1.\quad$ Además: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx} \qquad$ {regla de la cadena}

Aplicando la regla de la cadena, se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\int_{-x}^x \cos(t^2+1)dt = -\frac{d}{du}\int_0^u \cos(t^2+1)dt\cdot\frac{du}{dx} + \cos(x^2+1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\int_{-x}^x \cos(t^2+1)dt = -\frac{d}{du}\int_0^u \cos(t^2+1)dt\cdot(-1) + \cos(x^2+1),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\int_{-x}^x \cos(t^2+1)dt = \frac{d}{du}\int_0^u \cos(t^2+1)dt + \cos(x^2+1),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\int_{-x}^x \cos(t^2+1)dt = \cos(u^2+1)+\cos(x^2+1) = \cos((-x)^2+1)+\cos(x^2+1),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\int_{-x}^x \cos(t^2+1)dt = \cos(x^2+1)+\cos(x^2+1);$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\int_{-x}^x \cos(t^2+1)dt = 2\cos(x^2+1).$$

19. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{x^3} \sqrt[3]{t^2+1}\,dt$

Solución:

$$\frac{d}{dx}\int_1^{x^3} \sqrt[3]{t^2+1}\,dt$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \qquad \{\text{regla de la cadena}\}$$

Aplicamos la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}\int_1^{x^3} \sqrt[3]{t^2+1}\,dt=\frac{d}{du}\int_1^{x^3} \sqrt[3]{t^2+1}\,dt\cdot\frac{du}{dx} \qquad (\heartsuit)$$

Si $\quad u=x^3, \ \Rightarrow \ \dfrac{du}{dx}=3x^2 \quad (1)$

Sustituyendo (1) en ($\heartsuit$), se obtiene

$$\frac{d}{dx}\int_1^{x^3} \sqrt[3]{t^2+1}\,dt=\frac{d}{du}\int_1^{u} \sqrt[3]{t^2+1}\,dt\cdot 3x^2,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\int_1^{x^3} \sqrt[3]{t^2+1}\,dt=\sqrt[3]{u^2+1}\cdot 3x^2=\sqrt[3]{(x^3)^2+1}\cdot 3x^2=\sqrt[3]{x^6+1}\cdot 3x^2,$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\int_1^{x^3} \sqrt[3]{t^2+1}\,dt=3x^2\sqrt[3]{x^6+1}.$$

20. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_2^{\tan x} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

Solución:

$$\frac{d}{dx}\int_2^{\tan x} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \qquad \{\text{regla de la cadena}\}$$

Aplicamos la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}\int_2^{\tan x} \frac{1}{1+t^2}\,dt=\frac{d}{du}\int_2^{\tan x} \frac{1}{1+t^2}\,dt\cdot\frac{du}{dx} \qquad (\heartsuit)$$

Si $\quad u=\tan x, \ \Rightarrow \ \dfrac{du}{dx}=\sec^2 x \quad (1)$

Sustituyendo (1) en ($\heartsuit$), se obtiene

$$\frac{d}{dx}\int_2^{\tan x} \frac{1}{1+t^2}\,dt=\frac{d}{du}\int_2^{u} \frac{1}{1+t^2}\,dt\cdot\sec^2 x,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\int_2^{\tan x} \frac{1}{1+t^2}\,dt=\frac{1}{1+u^2}\cdot\sec^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}\cdot\sec^2 x=\frac{\sec^2 x}{\sec^2 x},$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\int_2^{\tan x} \frac{1}{1+t^2}\,dt=1.$$

21. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_3^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1-t^2}\,dt$

Solución:

$$\frac{d}{dx}\int_3^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1-t^2}\,dt$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \qquad \{\text{regla de la cadena}\}$$

Aplicamos la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}\int_3^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{d}{du}\int_3^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1-t^2}\,dt\cdot\frac{du}{dx} \qquad (\heartsuit)$$

Si $\quad u = \operatorname{sen} x, \;\Rightarrow\; \dfrac{du}{dx} = \cos x \quad (1)$

Sustituyendo (1) en ($\heartsuit$), se obtiene

$$\frac{d}{dx}\int_3^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{d}{du}\int_3^{u} \frac{1}{1-t^2}\,dt\cdot\cos x,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\int_3^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{1-u^2}\cdot\cos x = \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2 x}\cdot\cos x = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x},$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\int_3^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1-t^2}\,dt = \sec x.$$

22. $f(x) = 9 - x^2 \;\; [a,b] = [0,3]$

Obtenga el valor promedio de f en $[a,b]$; también, obtenga el valor de x en el que se presenta el valor promedio de f y trace la gráfica

Solución:

f es continua en $[0,3]$, entonces el valor promedio, V.P., de f en $[0,3]$ está dado por

$$\text{V.P.} = \frac{1}{3-0}\int_0^3 (9-x^2)\,dx = \frac{1}{3}\left(9x - \frac{1}{3}x^3\Big]_0^3\right),$$

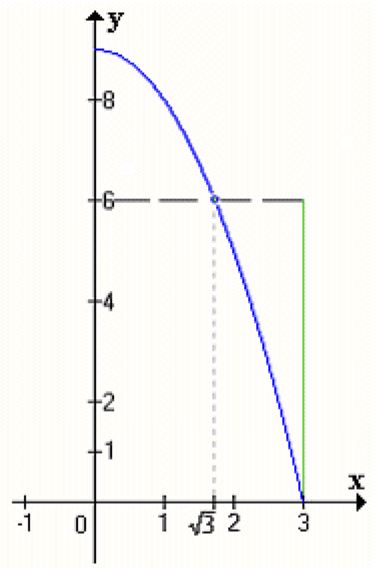
$$\Rightarrow \quad \text{V.P.} = \frac{1}{3}\left(9(3) - \frac{1}{3}(3)^3 - \left(9(0) - \frac{1}{3}(0)^3\right)\right) = \frac{1}{3}\left(27 - 9 - (0^3)\right),$$

$$\Rightarrow \quad \text{V.P.} = \frac{1}{3}(18);$$

$$\therefore \quad \text{V.P.} = 6.$$

Esto es, $9 - x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \in [0,3]$

El valor promedio de f en $[0,3]$ ocurre en $x = [0,3]$.



Aplicaciones de la integral definida

- [Área de una región en el plano]
- [Longitud de arco de la gráfica de una función]

Ejercicios resueltos

En los ejercicios 1 a 7, encuentre el área de la región limitada por las curvas dadas. En cada problema haga lo siguiente: (*a*) trace una figura que muestre la región, así como un elemento rectangular de área; (*b*) exprese el área de la región como el límite de una suma de Riemann; (*c*) determine el límite de la parte (*b*) evaluando una integral definida por el segundo teorema fundamental del cálculo:

1. $y = 4x - x^2$; eje$x$, $x = 1$, $x = 3$. **2.** $y = \sqrt{x+1}$; eje$x$, eje$y$, $x = 8$.

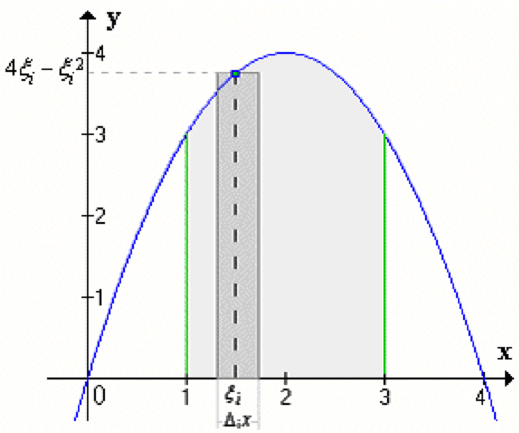
3. $y = \text{sen } x$; eje$x$, $x = \frac{1}{3}\pi$, $x = \frac{2}{3}\pi$ **4.** $y = \sec^2 x$; eje$x$, eje$y$, $x = \frac{1}{4}\pi$

5. $x^2 = -y$; $y = -4$ **6.** $x^3 = 2y^2$; $x = 0$; $y = -2$.

7. $y = 2 - x^2$; $y = -x$

1. $y = 4x - x^2$; eje$x$, $x = 1$, $x = 3$.

Solución:



Se efectúa una partición de $[1, 3]$; si ξ_i es cualquier número en el i-ésimo subintervalo, las dimensiones del i-ésimo rectángulo son, ancho: $\Delta_i x$ y alto: $4\xi_i - \xi_i^2$; por lo que la medida del área de cada rectángulo es $(4\xi_i - \xi_i^2)\Delta_i x$; y la suma de las áreas de los n rectángulos está dada por $\sum_{i=1}^{n}(4\xi_i - \xi_i^2)\Delta_i x$ (una suma de Riemann). Para hallar el área A de la región estudiada, tomamos el límite cuando la norma de partición $\|\Delta\| \to 0$, o, lo que es lo mismo, cuando $n \to \infty$. Este límite es una integral definida, la cual se evalúa aplicando el segundo teorema fundamental del cálculo; hagámoslo:

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(4\xi_i - \xi_i^2)\Delta_i x = \int_1^3 (4x - x^2)dx,$$

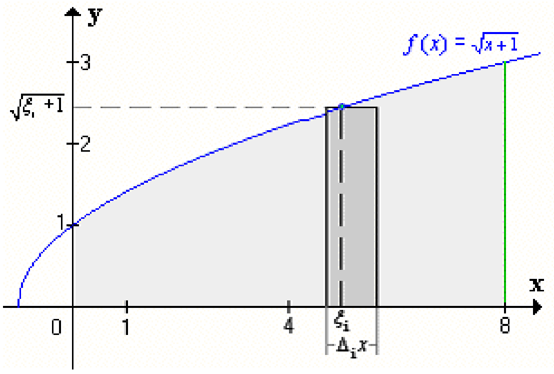
$$\Rightarrow \quad A = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3\Big]_1^3 = 2(3)^2 - \frac{1}{3}(3)^3 - \left(2(1)^2 - \frac{1}{3}(1)^3\right) = 18 - 9 - \left(2 - \frac{1}{3}\right) = 7 + \frac{1}{3};$$

$\therefore \quad A = \frac{22}{3}$ unidades cuadradas.

2. $y=\sqrt{x+1}$; eje$x$, eje$y$, $x=8$.

Solución:

Se efectúa una partición de [0, 8]; si ξ_i es cualquier número en el i-ésimo subintervalo, las dimensiones del i-ésimo rectángulo son, ancho: $\Delta_i x$ y alto: $\sqrt{\xi_i+1}$; por lo que la medida del área de cada rectángulo es $\sqrt{\xi_i+1}\Delta_i x$; y la suma de las áreas de los n rectángulos está dada por $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\xi_i+1}\Delta_i x$ (una suma de Riemann). Para hallar el área A de la región estudiada, tomamos el límite cuando la norma de partición $\|\Delta\|\to 0$, o, lo que es lo mismo, cuando $n\to\infty$. Este límite es una integral definida, la cual se evalúa aplicando el segundo teorema fundamental del cálculo; veamos:



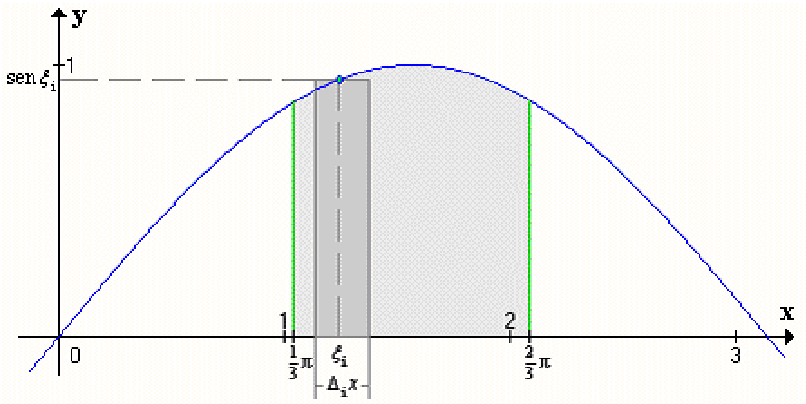
$$A=\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\xi_i+1}\Delta_i x=\int_0^8\sqrt{x+1}\,dx=\int_0^8(x+1)^{1/2}dx,$$

$$\Rightarrow\quad A=\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big]_0^8=\frac{2}{3}(8+1)^{3/2}-\frac{2}{3}(0+1)^{3/2}=\frac{2}{3}(9)^{3/2}-\frac{2}{3}(1)^{3/2}=18-\frac{2}{3}=\frac{54-2}{3};$$

$\therefore\quad A=\dfrac{52}{3}$ unidades cuadradas.

3. $y=\operatorname{sen}x$; eje$x$, $x=\frac{1}{3}\pi$, $x=\frac{2}{3}\pi$

Solución:



Se efectúa una partición de $\left[\frac{1}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi\right]$; si ξ_i es cualquier número en el i-ésimo subintervalo, las dimensiones del i-ésimo rectángulo son, ancho: $\Delta_i x$ y alto: $\operatorname{sen}\xi_i$; por lo que la medida del área de cada rectángulo es $\operatorname{sen}\xi_i\cdot\Delta_i x$; y la suma de las áreas de los n rectángulos está dada por $\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sen}\xi_i\cdot\Delta_i x$ (una suma de Riemann). Para hallar el área A de la región estudiada, tomamos el límite cuando la norma de partición $\|\Delta\|\to 0$, o, lo que es lo mismo, cuando $n\to\infty$. Este límite es una integral definida, la cual se evalúa aplicando el segundo teorema fundamental del cálculo,

$$A=\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sen}\xi_i\cdot\Delta_i x=\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\operatorname{sen}x\,dx,$$

$$\Rightarrow\quad A=-\cos x\Big]_{\pi/3}^{2\pi/3}=-\cos(2\pi/3)+\cos(\pi/3)=-\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2};$$

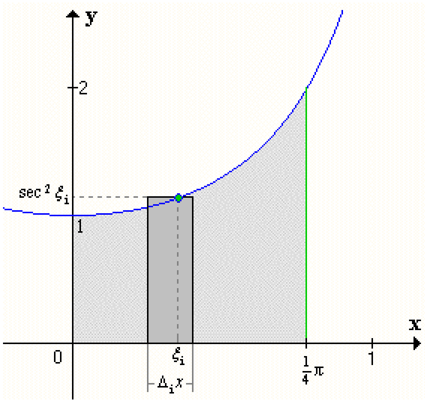
$\therefore\quad A=1$ unidades cuadradas.

4. $y = \sec^2 x$; eje$x$, eje$y$, $x = \frac{1}{4}\pi$

<u>Solución</u>:

Se efectúa una partición de $\left[0, \frac{1}{4}\pi\right]$; si ξ_i es cualquier número en el i-ésimo subintervalo, las dimensiones del i-ésimo rectángulo son, ancho: $\Delta_i x$ y alto: $\sec^2 \xi_i$; por lo que la medida del área de cada rectángulo es $\sec^2 \xi_i \cdot \Delta_i x$; y la suma de las áreas de los n rectángulos está dada por

$\sum_{i=1}^{n} \sec^2 \xi_i \cdot \Delta_i x$ (una suma de Riemann).



Para hallar el área A de la región estudiada, tomamos el límite cuando la norma de partición $\|\Delta\| \to 0$, o, lo que es lo mismo, cuando $n \to \infty$. Este límite es una integral definida, la cual se evalúa aplicando el segundo teorema fundamental del cálculo,

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sec^2 \xi_i \cdot \Delta_i x = \int_0^{\pi/4} \sec^2 dx,$$

$$\Rightarrow \quad A = \tan x\Big]_0^{\pi/4} = \tan(\pi/4) - \tan 0 = 1 - 0;$$

$\therefore \quad A = 1$ unidades cuadradas.

5. $x^2 = -y$; $y = -4$

<u>Solución</u>:

$$x^2 = -y \Leftrightarrow y = -x^2;\ y = -4$$

Sea

$$f(x) = -x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = -4$$

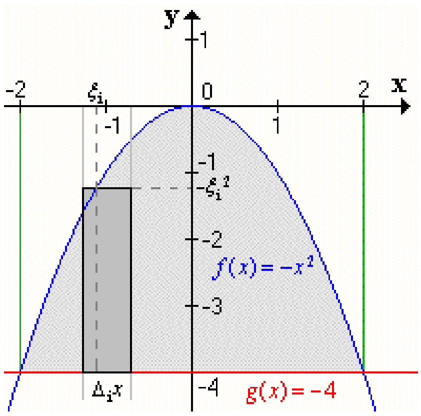
Como se puede observar en la figura de la derecha, las dos curvas se cortan en los puntos $(-2,-4)$ y $(2,-4)$; además

$$f(x) \geq g(x) \text{ para toda } x \in [-2, 2]$$

Consideremos una partición del intervalo $[-2,2]$; si ξ_i es un número cualquiera del i-ésimo subintervalo, las dimensiones del i-ésimo rectángulo son:

altura: $f(\xi_i) - g(\xi_i) = -\xi_i^2 + 4$

ancho: $\Delta_i x$



De tal modo, que la medida del área de cada rectángulo está dada por $(-\xi_i^2 + 4)\Delta_i x$; y la suma de los n rectángulos por $\sum_{i=1}^{n} (4 - \xi_i^2)\Delta_i x$ (una suma de Riemann).

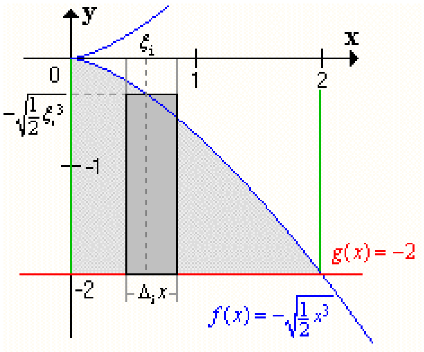
Para hallar el área A de la región estudiada, tomamos el límite cuando $n \to \infty$; este límite es una integral definida, para evaluarla aplicamos el segundo teorema fundamental del cálculo; hagámoslo:

$$A = \sum_{i=1}^{n} (4 - \xi_i^2)\Delta_i x = \int_{-2}^{2} (4 - x^2) dx,$$

$$\Rightarrow \quad A = 4x - \frac{1}{3}x^3\Big]_{-2}^{2} = 4(2) - \frac{1}{3}(2)^3 - \left(4(-2) - \frac{1}{3}(-2)^3\right) = 8 - \frac{8}{3} - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = 16 - \frac{16}{3};$$

$\therefore \quad A = \frac{32}{3}$ unidades cuadradas.

6. $x^3 = 2y^2;\ x = 0;\ y = -2.$



Solución:

$$x^3 = 2y^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^3}$$

De acuerdo a las condiciones del ejercicio, solo se toma

$$y = -\sqrt{\frac{1}{2}x^3}$$

Sea

$$f(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}x^3} \quad \text{y} \quad g(x) = -2$$

Para hallar los puntos donde se cortan las curvas, igualamos sus ecuaciones y despejamos para x:

$$-\sqrt{\frac{1}{2}x^3} = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 = 4 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2: \text{ se cortan en el punto } (2,-2)$$

Además

$f(x) \geq g(x)$ para toda $x \in [0,2]$

Consideremos una partición del intervalo $[0,2]$; si ξ_i es un número cualquiera del i-ésimo subintervalo, las dimensiones del i-ésimo rectángulo son:

altura: $f(\xi_i) - g(\xi_i) = -\sqrt{\frac{1}{2}\xi_i^3} + 2$

ancho: $\Delta_i x$

De tal modo, que la medida del área de cada rectángulo está dada por $(-\xi_i^2 + 4)\Delta_i x$; y la suma de los n rectángulos por $\sum_{i=1}^{n}\left(2 - \sqrt{\frac{1}{2}\xi_i^3}\right)\Delta_i x$ (una suma de Riemann).

Para hallar el área A de la región estudiada, tomamos el límite cuando $n \to \infty$; este límite es una integral definida, para evaluarla aplicamos el segundo teorema fundamental del cálculo; hagámoslo:

$$A = \sum_{i=1}^{n}\left(2 - \sqrt{\frac{1}{2}\xi_i^3}\right)\Delta_i x = \int_0^2\left(2 - \sqrt{\frac{1}{2}x^3}\right)dx,$$

$$\Rightarrow \quad A = 2x - \frac{\sqrt{2}}{5}x^{5/2}\Big]_0^2 = 2(2) - \frac{\sqrt{2}}{5}(2)^{5/2} - \left(2(0) - \frac{\sqrt{2}}{5}(0)^{5/2}\right) = 4 - \frac{8}{5} - (0);$$

$$\therefore \quad A = \frac{12}{5} \text{ unidades cuadradas.}$$

7. $y = 2 - x^2;\ y = -x$

Solución:

Hallemos la abscisa respectiva de los puntos donde las gráficas se intersectan entre sí:

$$2 - x^2 = -x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0;$$

$$\therefore \quad x = -1 \text{ ó } x = 2$$

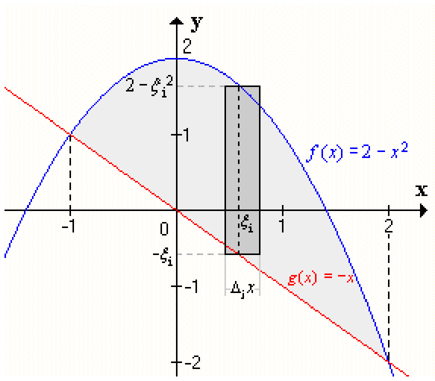
La región está comprendida en el intervalo $[-1,2]$.

Además, $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [-1,2]$

Consideremos una partición del intervalo $[0,2]$; si ξ_i es un número cualquiera del i-ésimo subintervalo, las dimensiones del i-ésimo rectángulo son:

altura: $f(\xi_i) - g(\xi_i) = 2 - \xi_i^2 + \xi_i$

ancho: $\Delta_i x$



De tal modo, que la medida del área de cada rectángulo está dada por $(2+\xi_i-\xi_i^2)\Delta_i x$; y la suma de los n rectángulos por $\sum_{i=1}^{n}(2+\xi_i-\xi_i^2)\Delta_i x$ (una suma de Riemann).

Para hallar el área A de la región estudiada, tomamos el límite cuando $n\to\infty$; este límite es una integral definida, para evaluarla aplicamos el segundo teorema fundamental del cálculo; hagámoslo:

$$A=\sum_{i=1}^{n}(2+\xi_i-\xi_i^2)\Delta_i x=\int_{-1}^{2}(2+x-x^2)\,dx,$$

$$\Rightarrow \quad A=2x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\Big]_{-1}^{2}=2(2)+\frac{1}{2}(2)^2-\frac{1}{3}(2)^3-\left(2(-1)+\frac{1}{2}(-1)^2-\frac{1}{3}(-1)^3\right),$$

$$\Rightarrow \quad A=4+2-\frac{8}{3}-\left(-2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=5-\frac{1}{2}=\frac{10-1}{2};$$

$$\therefore \quad A=\frac{9}{2}\text{ unidades cuadradas.}$$

Longitud de arco de la gráfica de una función

Si la derivada de la función f, $f\,'$, es continua en el intervalo $[a, b]$, se dice que f es *alisada* en dicho intervalo

Lo anterior implica que la gráfica de una función alisada f carece de *vértices* en el intervalo.

Se denomina *arco* de una curva continua a la porción comprendida entre dos de sus puntos. En la fig.1 se tiene el arco $\overparen{AB}$.

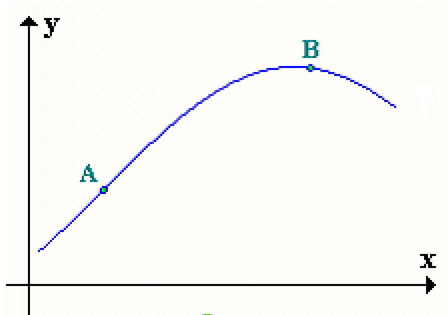


fig.1

Para hallar la longitud de un segmento de recta, basta con averiguar el número de veces que un segmento rectilíneo, que se toma como unidad de medida de longitud, se puede superponer sobre el segmento. Lo anterior no es posible hacerlo si se trata de medir un arco. Para medir la longitud de un segmento rectilíneo en el plano, cuyos extremos son los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, se puede utilizar la fórmula de la distancia entre dos puntos $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (♣).

En lo que sigue vamos a servirnos de (♣) para deducir otra fórmula que nos permita calcular fácilmente la medida de un arco de una función alisada en cualquier intervalo $[a, b]$.

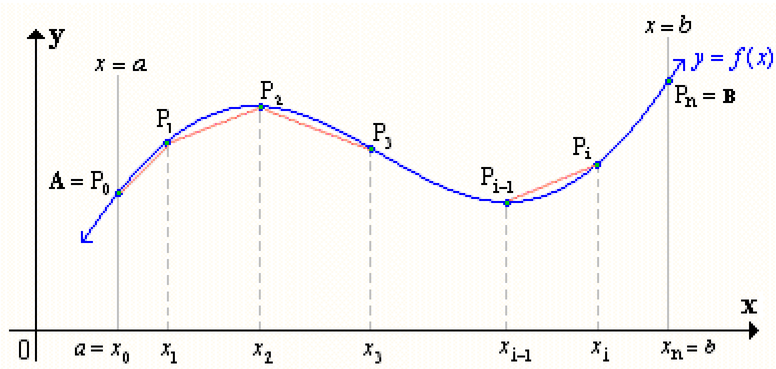


fig.2

Sea Δ una partición de $[a, b]$ en n subintervalos, con $n-1$ números intermedios entre a y b, de tal modo que:

$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots x_{n-1} < x_n = b$.

El i-ésimo subintervalo es $[x_{i-1}, x_i]$ y su longitud $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$, con $i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$

Ahora, sea $P_i(x_i, f(x_i))$ un punto sobre la curva; resultan así $n+1$ puntos: $P_0,\ P_1,\ P_2,\ \ldots, P_n$. Obsérvese la fig.2. Uniendo, mediante un segmento rectilíneo, cada pareja de puntos P_{i-1} y P_i, se obtiene una línea poligonal formada por todos estos segmentos. La longitud de cada segmento está dada por la fórmula $\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$; y la suma de todos los segmentos que forman la poligonal, L_p L, es

$$L_p = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \qquad (♥)$$

Si la norma de partición es pequeña, los puntos P_{i-1} y P_i, para todo i, estarán muy cercanos entre sí y L constituye una buena aproximación de la longitud del arco $\overparen{AB}$. Esta es la idea básica para definir la longitud de un arco.

Como $f\,'$ es continua (alisada) en $[a,\ b]$, el Teorema del Valor Medio, establece que existe un número $z_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f\,'(z_i)(x_i - x_{i-1})$ (1)

Tomando $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (2), y sustituyendo (1) y (2) en (♥), se obtiene:

$$L_p = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^{\,2} + (f\,'(z_i)\Delta x_i)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^{\,2} + (f\,'(z_i))^2 \Delta x_i^{\,2}} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^{\,2}\left(1 + (f\,'(z_i))^2\right)}$$, entonces

$$L_p = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+(f'(z_i))^2} \cdot \Delta x_i \quad \text{(una suma de Riemann)}$$

Por la definición de la integral definida se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+(f'(z_i))^2} \cdot \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

De todo lo anterior se llega a la siguiente definición:

Definición1:

Sea la función $y = f(x)$ alisada en $[a,b]$, la longitud, L, de arco de la curva de f entre los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ está dada por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

De igual modo se puede definir la longitud de arco de una curva cuando x se expresa como una función de y:

Definición2:

Sea la función $x = F(y)$ alisada en $[c,d]$, la longitud, L, de arco de la curva de F entre los puntos $C(c, F(c))$ y $D(d, F(d))$ está dada por:

$$L = \int_c^d \sqrt{1+[F'(y)]^2}\,dx$$

.

Ejercicios resueltos

1. Calcule la longitud del segmento de la recta $y = 3x$ del punto (1, 3) al punto (2, 6) por medio de tres métodos: (a) use la fórmula de la distancia; (b) utilice la Definición1 de esta sección; (c) emplee la Definición2 de esta sección.
2. Encuentre la longitud del arco de la curva $9y^2 = 4x^3$ del origen al punto $(3, 2\sqrt{3})$.
3. Halle la longitud de arco de la curva $8y = x^4 + 2x^{-2}$ desde el punto donde $x = 1$ al punto donde $x = 2$.
4. Encuentre la longitud del arco de la curva $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$ del punto donde $x = 0$ al punto donde $x = 3$.
5. Halle la longitud del arco de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ del punto donde $x = 1/8$ hasta el punto donde $x = 1$.

Soluciones

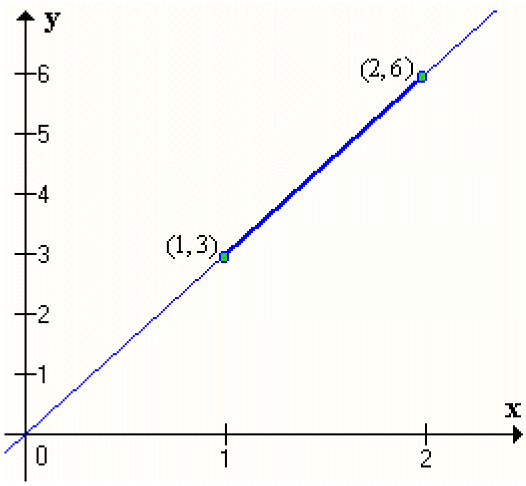
1. Solución:

a) La fórmula de la distancia es

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Tomemos $P_1(1,3)$ y $P_2(2,6)$, de tal modo que:

$$\overline{P_1P_2}=\sqrt{(2-1)^2+(6-3)^2}=\sqrt{(1)^2+(3)^2}=\sqrt{10}.$$



b) $f(x)=3x$, entonces

$f'(x)=3 \quad (1)$

De tal modo que f es alisada en $(1, 2)$, por lo que, para hallar la longitud de arco de la curva de f, entre los puntos $(1, 3)$ y $(2, 6)$, se puede utilizar la Definición 1:

$$L=\int_1^2\sqrt{1+(3)^2}=\int_1^2\sqrt{10}=\sqrt{10}\,x\Big]_1^2=\sqrt{10}(2)-\sqrt{10}(1),$$

$$L=2\sqrt{10}-\sqrt{10}=\sqrt{10}.$$

c) $y=3x, \Rightarrow\ x=\frac{1}{3}y \Leftrightarrow F(y)=\frac{1}{3}y$. Por lo que $F'(y)=\frac{1}{3}$

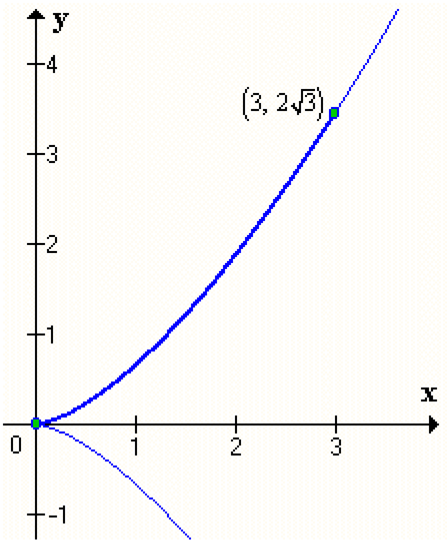
Cuando $x=1$, $y=3$; y, cuando $x=2$, $y=6$.

Sustituyendo todos estos datos en la Definición2, se obtiene:

$$\int_c^d\sqrt{1+[F'(y)]^2}\,dy=\int_3^6\sqrt{1+\left[\frac{1}{3}\right]^2}\,dy=\int_3^6\sqrt{1+\frac{1}{9}}dy=\int_3^6\sqrt{\frac{10}{9}}\,dy=\frac{1}{3}\sqrt{10}y\Big]_3^6=\frac{1}{3}\sqrt{10}(6)-\frac{1}{3}\sqrt{10}(3$$

$$L=2\sqrt{10}-\sqrt{10}=\sqrt{10}.$$

2. Solución:



Si L es la longitud de arco de la curva de la ecuación $9y^2=4x^3$ desde el origen $(0, 0)$ al punto $(3,\ 2\sqrt{3})$, L está dado por:

$$L=\int_0^3\sqrt{1+[y']^2} \qquad (\blacklozenge)$$

$$9y^2=4x^3, \ \Rightarrow\ \frac{d}{dx}(9y^2)=\frac{d}{dx}(4x^3), \ \Rightarrow\ 18y\frac{dy}{dx}=12x^2,$$

$$\Rightarrow\ y'=\frac{dy}{dx}=\frac{12x^2}{18y}=\frac{2x^2}{3y}, \ \Rightarrow\ (y')^2=\frac{4x^4}{9y^2};$$

pero $9y^2=4x^3$, de tal manera que

$$(y')^2=\frac{4x^4}{4x^3}=x \qquad (1)$$

Sustituyendo (1) en ($\blacklozenge$), se obtiene:

$$L=\int_0^3\sqrt{1+x}=\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big]_0^3=\frac{2}{3}\left((3+1)^{3/2}-(0+1)^{3/2}\right)=\frac{2}{3}\left((4)^{3/2}-(1)^{3/2}\right)=\frac{2}{3}(8-1)=\frac{14}{3}.$$

3. Solución:

$8y = x^4 + 2x^{-2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^{-2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^{-2}$,

entonces

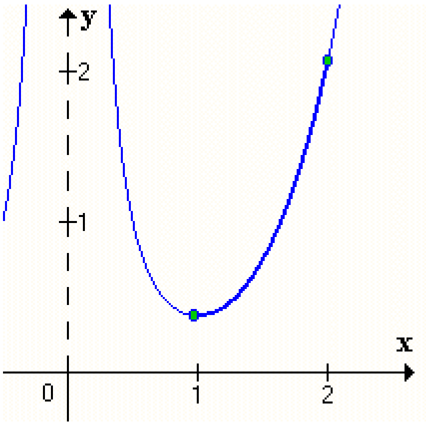
$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^{-3} = \frac{1}{2}(x^3 - x^{-3})$ (1)

$a = 1$ y $b = 2$ (2)

La longitud, L, de arco de la curva de $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, está dada por

$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$ (♠)

Sustituyendo (1) y (2) en (♠), se obtiene:



$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}(x^3 - x^{-3})\right]^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4}(x^6 - 2 + x^{-6})}\,dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^6 + \frac{1}{4}x^{-6}}\,dx,$$

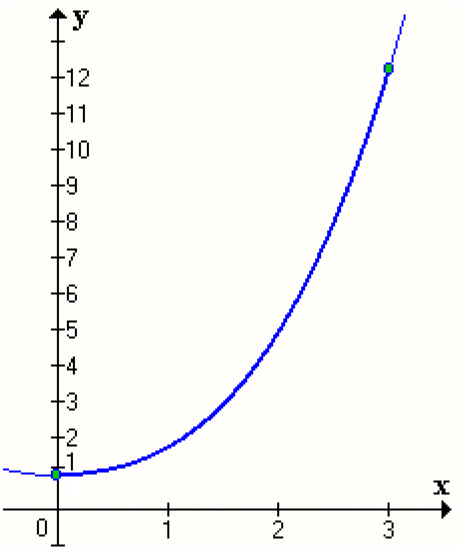
$$L = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{2 + x^6 + \frac{1}{x^6}}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{\frac{x^{12} + 2x^6 + 1}{x^6}}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{\frac{(x^6+1)^2}{x^6}}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(x^6+1)}{x^3}\,dx,$$

$$L = \frac{1}{2}\int_1^2 (x^3 + x^{-3})\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^{-2}\Big]_1^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(2)^4 - \frac{1}{2}(2)^{-2} - \left(\frac{1}{4}(1)^4 - \frac{1}{2}(1)^{-2}\right)\right),$$

$$L = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{32 - 1 - 2 + 4}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{33}{8}\right);$$

$$L = \frac{33}{16}.$$

4. Solución:



$y = f(x) = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$, $\Rightarrow f'(x) = x(x^2+2)^{1/2}$ (1)

$a = 0$ y $b = 3$ (2)

La longitud, L, de arco de la curva de $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, está dada por

$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$ (♠)

Sustituyendo (1) y (2) en (♠), se obtiene:

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + [x(x^2+2)^{1/2}]^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{1 + x^2(x^2+2)}\,dx,$$

$$L = \int_0^3 \sqrt{(x^4 + 2x^2 + 1)}\,dx = \int_0^3 \sqrt{(x^2+1)^2}\,dx = \int_0^3 (x^2+1)\,dx,$$

$$L = \frac{1}{3}x^3 + x\Big]_0^3 = \frac{1}{3}(3)^3 + 3 - \left(\frac{1}{3}(0)^3 + 0\right) = 9 + 3 - (0) = 12.$$

5. Solución:

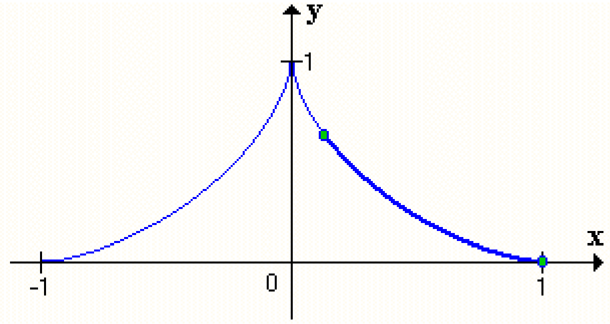
$$x^{2/3}+y^{2/3}=1, \;\Rightarrow\; \frac{d}{dx}\left(x^{2/3}+y^{2/3}\right)=\frac{d}{dx}1,$$

$$\Rightarrow\; \frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{2}{3}y^{-1/3}\frac{dy}{dx}=0,$$

$$\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}=f'(x)=-\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}}=-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}},$$

$$\Rightarrow\; [f'(x)]^2=\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}} \quad (1)$$

$$x^{2/3}+y^{2/3}=1 \Leftrightarrow y^{2/3}=1-x^{2/3} \quad (2)$$



De tal manera que, sustituyendo (2) en (1), se obtiene $[f'(x)]^2=\dfrac{1-x^{2/3}}{x^{2/3}}=x^{-2/3}-1 \quad (3)$

$a=\dfrac{1}{8}$ y $b=1 \quad (4)$

La longitud, L, de arco de la curva de $y=f(x)$ en el intervalo $[a,\ b]$, está dada por

$$\mathrm{L}=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \quad (\spadesuit)$$

Sustituyendo (3) y (4) en $(\spadesuit)$, se obtiene:

$$\mathrm{L}=\int_{1/8}^{1}\sqrt{1+x^{-2/3}-1}\,dx=\int_{1/8}^{1}\sqrt{x^{-2/3}}\,dx=\int_{1/8}^{1}x^{-1/3}dx=\frac{3}{2}x^{2/3}\Big]_{1/8}^{1}=\frac{3}{2}(1)^{2/3}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^{2/3},$$

$$\mathrm{L}=\frac{3}{2}-\frac{3}{8}\Leftrightarrow \mathrm{L}=\frac{9}{8}.$$

Técnicas de integración

- Integración directa
- Integración por sustitución
- Integración por partes
- Potencias de las funciones trigonométricas
- Sustitución trigonométrica
- Integración de funciones racionales, por fracciones parciales, cuando el denominador sólo tiene factores lineales
- Integración de funciones racionales, por fracciones parciales, cuando el denominador contiene factores cuadráticos
- Integrales en las que aparecen expresiones cuadráticas
- Integrales que producen funciones trigonométricas inversas
- Misceláneas de ejercicios

Integración directa

D*e cada regla de derivación se puede deducir una regla correspondiente de integración*. La integración directa es aplicable cuando identificamos la función primitiva de forma inmediata; esto es, cuando conocemos la regla de derivación que al aplicarla nos permite hallar el integrando a partir de la función primitiva.

Ejemplo:

$\int 2x\,dx = x^2 + c$; porque $D_x(x^2 + c) = 2x$

Propiedades fundamentales de la antidiferenciación	
P1. $\int k\,f(x)dx = k\int f(x)dx$, k es una constante. Esta propiedad indica que podemos sacar un factor ***constante*** de la integral.	
P2. Si f_1 y f_2 están definidas en el mismo intervalo, entonces: $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$	
P3. Si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ están definidas en el mismo intervalo, entonces: $\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x)]dx = k_1\int f_1(x)dx + k_2\int f_2(x)dx + \cdots + k_n\int f_n(x)dx$ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ son constantes.	
P4. Si k es una constante, entonces $\int k\,dx = kx + c$	**P5.** $\int dx = x + c$
P6. Si n es un número racional diferente de -1, entonces $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$. También $\int kx^n dx = \frac{k}{n+1}x^{n+1}$, k es una constante.	
P7. $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c.$	**P8.** $\int e^x dx = e^x + c.$
P9. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$	**P10.** $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c.$ a es un número positivo, $a \neq 1$.
P11. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c.$	**P12.** $\int \cos x\,dx = \sin x + c.$
P13. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c.$	**P14.** $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c.$
P15. $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c.$	**P16.** $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + c.$
P17. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1} x + c.$	**P18.** $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1} x + c.$
P19. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \sec^{-1} x + c.$	**P20.** $\int \sinh x\,dx = \cosh x + c.$

P21. $\int \cosh x dx = \sinh x + c.$	**P22.** $\int \text{sech}^2 x dx = \tanh x + c.$
P23. $\int \text{csc}h^2 x dx = -\coth x + c.$	**P24.** $\int \text{sech}x \tanh x dx = -\text{sec}\,\text{h}x + c.$
P25. $\int \text{csch}x \coth x dx = -\text{csc}\,\text{h}x + c.$	

Ejercicios resueltos

Efectúe las operaciones de antidiferenciación que se indican, aplicando las propiedades correspondientes en cada caso:

1. $\int (3x+4)dx$	**2.** $\int (\cos x - 5\sin x - 7)dx$	**3.** $\int \frac{-8x^4+3x^2+9}{3x^3}dx$
4. $\int \cot^2 x(1+\tan^2 x)dx$	**5.** $\int \sqrt{x}(x-3)dx$	**6.** $\int 7 - \frac{4}{x^5} + \frac{2}{x^2}dx$
7. $\int \frac{\sec x}{\tan x + \cot x}dx$	**8.** $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}}dx$	**9.** $\int \frac{\text{sen}\, x}{\cos^2 x}dx$
10. $\int x^{-2}dx$		

Soluciones

1. Solución:

$$\int 3x+4dx = \int 3xdx + \int 4dx \qquad \{\text{Propiedad } 2\},$$

$$\Rightarrow \quad \int 3x+4dx = \frac{3}{1+1}x^{1+1} + 4x + c \qquad \{\text{Propiedades } 4 \text{ y } 6\};$$

$$\therefore \quad \int 3x+4dx = \frac{3}{2}x^2 + 4x + c.$$

2. Solución:

$$\int \cos x - 5\sin x - 7dx = \int \cos xdx - 5\int \sin xdx - 7\int dx \qquad \{\text{Propiedad } 3\},$$

$$\Rightarrow \quad \int \cos x - 5\sin x - 7dx = \sin x - 5(-\cos x) - 7x + c \qquad \{\text{Propiedades } 12,\ 11 \text{ y } 5\};$$

$$\therefore \quad \int \cos x - 5\sin x - 7dx = \sin x + 5\cos x - 7x + c.$$

3. Solución:

$$\int \frac{-8x^4+3x^2+9}{3x^3}dx$$

Efectuando la división, se obtiene

$$\int \frac{-8x^4+3x^2+9}{3x^3}dx = \int -\frac{8}{3}x + x^{-1} + 3x^{-3}dx = -\frac{8}{3}\int xdx + \int x^{-1}dx + 3\int x^{-3}dx \quad \{\text{Propiedad } 3\},$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{-8x^4+3x^2+9}{3x^3}dx = -\frac{8}{3}\times\frac{1}{1+1}x^{1+1} + \ln|x| + 3\times\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c \qquad \{\text{Propiedades } 6 \text{ y } 7\};$$

$$\therefore \quad \int \frac{-8x^4+3x^2+9}{3x^3}dx = -\frac{4}{3}x^2 + \ln|x| - \frac{3}{2}x^{-2} + c.$$

4. Solución:

$$\int \cot^2 x(1+\tan^2 x)dx$$

Simplifiquemos el integrando

$$\cot^2 x(1+\tan^2 x) = \cot^2 x + \cot^2 x\tan^2 x = \cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

De tal manera que

$$\int \cot^2 x(1+\tan^2 x)dx = \int \csc^2 xdx;$$

$$\therefore \quad \int \cot^2 x(1+\tan^2 x)dx = -\cot x + c \qquad \{\text{Propiedad } 14\}.$$

5. Solución:

$$\int \sqrt{x}(x-3)dx = \int x^{1/2}(x-3)dx = \int x^{3/2} - 3x^{1/2}dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \sqrt{x}(x-3)dx = \int x^{3/2}dx - 3\int x^{1/2}dx \qquad \{\text{Propiedad } 3\},$$

$$\Rightarrow \quad \int \sqrt{x}(x-3)dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1} - 3\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + c \qquad \{\text{Propiedad } 6\},$$

$$\Rightarrow \quad \int \sqrt{x}(x-3)dx = \frac{1}{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}} - 3\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + c;$$

$$\therefore \quad \int \sqrt{x}(x-3)dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + c.$$

6. Solución:

$$\int 7 - \frac{4}{x^5} + \frac{2}{x^2}dx = \int 7 - 4x^{-5} + 2x^{-2}dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int 7 - \frac{4}{x^5} + \frac{2}{x^2}dx = \int 7dx - 4\int x^{-5}dx + 2\int x^{-2}dx \qquad \{\text{Propiedad } 3\},$$

$$\Rightarrow \quad \int 7 - \frac{4}{x^5} + \frac{2}{x^2}dx = 7x - 4\frac{1}{-5+1}x^{-5+1} + 2\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c \qquad \{\text{Propiedades } 4 \text{ y } 6\},$$

$$\Rightarrow \quad \int 7 - \frac{4}{x^5} + \frac{2}{x^2}dx = 7x - 4\frac{1}{-4}x^{-4} + 2\frac{x^{-1}}{-1} + c;$$

$$\therefore \quad \int 7 - \frac{4}{x^5} + \frac{2}{x^2}dx = 7x + x^{-4} - 2x^{-1} + c = 7x - 2x^{-1} + x^{-4}.$$

7. Solución:

Trabajenos el integrando, con el objeto de simplificarlo:

$$\frac{\sec x}{\tan x + \cot x} = \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x}} = \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\sin x\cos x}} = \frac{\sin x\cos x}{\cos x} = \sin x$$

De tal manera que

$$\int \frac{\sec x}{\tan x + \cot x}dx = \int \sin xdx;$$

$$\therefore \quad \int \frac{\sec x}{\tan x + \cot x}dx = -\cos x + c \qquad \{\text{Propiedad } 11\}.$$

8. $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}}dx$

Solución:

$$\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{2}{x^{1/3}}dx = \int 2x^{-1/3}dx = 2\int x^{-1/3}dx = 2\cdot\frac{3}{2}x^{2/3} + C;$$

$\therefore \quad \int \frac{2}{\sqrt[3]{x}}dx = 3x^{2/3} + C.$

9. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx$

Solución:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}dx = \int \tan x \cdot \sec x dx;$$

$\therefore \quad \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx = \sec x + C.$

10. $\int x^{-2}dx$

Solución:

$$\int x^{-2}dx = \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + C = \frac{1}{-1}x^{-1} + C = -x^{-1} + C \qquad \{\text{Propiedad6}\}.$$

Integración por sustitución

En muchas ocasiones, cuando la integración directa no es tan obvia, es posible resolver la integral simplemente con hacer un cambio de variable adecuado; este procedimiento se conoce como *integración por sustitución*.

Ejercicios resueltos

En los siguientes ejercicios realice la integral que se indica:

1. $\int \sqrt{1-4y}\,dy$	**2.** $\int x^2(x^3-1)^{10}dx$	**3.** $\int (x^2-4x+4)^{4/3}dx$
4. $\int x\sqrt{x+2}\,dx$	**5.** $\int \sqrt{3-2x}\,x^2dx$	**6.** $\int \cos 4\theta\, d\theta$
7. $\int \frac{1}{2}t\sin 4t^2 dt$	**8.** $\int \cos x(2+\sin x)^5dx$	**9.** $\int \sqrt{1+\frac{1}{3x}}\,\frac{dx}{x^2}$
10. $\int 2\sin x\sqrt[3]{1+\cos x}\,dx$	**11.** $\int \operatorname{sen}^3\theta\cos\theta\, d\theta$	**12.** $\int \frac{\sec^2 3\sqrt{t}\,dt}{\sqrt{t}}$
13. $\int \frac{(y+3)dy}{(3-y)^{2/3}}$	**14.** $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-2x^2}}$	**15.** $\int \tan x dx$

16. $\int e^{kx}dx$, k es una constante arbitraria	**17.** $\int \sec x dx$	**18.** $\int \cot x dx$
19. $\int \csc x dx$	**20.** $\int \frac{y^3}{(1-2y^4)^5}dx$	**21.** $\int \frac{2rdr}{(1-r)^{2/3}}$
22. $\int \frac{(x^2+2x)dx}{\sqrt{x^3+3x^2+1}}$	**23.** $\int \frac{y+3}{(3-y)^{2/3}}dy$	**24.** $\int \left(t+\frac{1}{t}\right)^{3/2}\left(\frac{t^2-1}{t^2}\right)dt$
25. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$	**26.** $\int \frac{s}{2s+3}ds$	**27.** $y=\int x(x^2+9)^{1/2}dx$
28. $\int (x^2+2)/(x^3+6x-1)dx$	**29.** $\int \left[(3x^2-6)/\sqrt{x^3-6x}\right]dx$	**30.** $\int x^2 \operatorname{sen}(x^3+4)dx$

S o l u c i o n e s

1. Solución:

$$\int \sqrt{1-4y}\,dy = \int (1-4y)^{1/2}dy \qquad \{\text{Se expresa el integrando en la forma de potencia}\}.$$

Sea

$$u = 1-4y, \quad \Rightarrow \quad du = -4dy,$$

$$\Rightarrow \quad dy = -\frac{1}{4}du$$

De tal manera que al hacer la sustitución, queda:

$$\int \sqrt{1-4y}\,dy = \int u^{1/2}\left(-\tfrac{1}{4}du\right) = -\frac{1}{4}\int u^{1/2}du = -\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}u^{3/2}+c_1\right) = -\frac{1}{6}u^{3/2}+c, \quad c=-\frac{1}{4}c_1;$$

$$\therefore \quad \int \sqrt{1-4y}\,dy = -\frac{1}{6}(1-4y)^{3/2}+c$$

2. Solución:

$$\int x^2(x^3-1)^{10}dx = \frac{1}{3}\int (x^3-1)^{10}3x^2dx$$

Sea

$$u = x^3-1, \quad \Rightarrow \quad du = 3x^2dx,$$

De tal manera que al hacer la sustituciones respectivas, queda:

$$\int x^2(x^3-1)^{10}dx = \frac{1}{3}\int u^{10}du = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{11}u^{11}+c_1\right) = \frac{1}{33}u^{11}+c, \quad c=\frac{1}{3}c_1;$$

$$\therefore \quad \int x^2(x^3-1)^{10}dx = \frac{1}{33}(x^3-1)^{11}+c.$$

3. Solución:

$$\int (x^2-4x+4)^{4/3}dx = \int \left[(x-2)^2\right]^{4/3}dx \qquad \{\text{Se factoriza el } \textit{trinomio cuadrado perfecto}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int (x^2-4x+4)^{4/3}dx = \int (x-2)^{8/3}dx$$

Sea

$$u = x-2, \quad \Rightarrow \quad du = dx,$$

De tal manera que al hacer la sustituciones respectivas, queda:

$$\int (x^2-4x+4)^{4/3}dx = \int u^{8/3}du = \frac{3}{11}u^{11/3} + c;$$

$$\therefore \quad \int (x^2-4x+4)^{4/3}dx = \frac{3}{11}(x-2)^{11/3} + c.$$

4. Solución:

$$\int x\sqrt{x+1}dx = \int x(x+1)^{1/2}dx$$

Sea

$$u = x+1, \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$x = u-1$$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int x\sqrt{x+1}dx = \int (u-1)u^{1/2}dx = \int u^{3/2} - u^{1/2}dx = \frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2} + c;$$

$$\therefore \quad \int x\sqrt{x+1}dx = \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + c.$$

5. Solución:

$$\int \sqrt{3-2x}x^2dx = \int (3-2x)^{1/2}x^2dx = -\frac{1}{2}\int (3-2x)^{1/2}x^2(-2dx)$$

Sea

$$u = 3-2x, \quad \Rightarrow \quad du = -2dx$$

$$x = \frac{3-u}{2}, \quad \text{Y} \quad x^2 = \frac{(3-u)^2}{4} = \frac{9-6u+u^2}{4}$$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int \sqrt{3-2x}x^2dx = -\frac{1}{2}\int u^{1/2}\frac{9-6u+u^2}{4}du = -\frac{1}{8}\int 9u^{1/2} - 6u^{3/2} + u^{5/2}du$$

$$\Rightarrow \quad \int \sqrt{3-2x}x^2dx = -\frac{1}{8}\left(9\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} - 6\cdot\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{7}u^{7/2} + c_1\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int \sqrt{3-2x}x^2dx = -\frac{3}{4}u^{3/2} + \frac{3}{10}u^{5/2} - \frac{1}{28}u^{7/2} + c;$$

$$\therefore \quad \int \sqrt{3-2x}x^2dx = -\frac{3}{4}(3-2x)^{3/2} + \frac{3}{10}(3-2x)^{5/2} - \frac{1}{28}(3-2x)^{7/2} + c.$$

6. Solución:

$$\int \cos 4\theta d\theta = \frac{1}{4}\int \cos 4\theta (4d\theta)$$

Sea

$$u = 4\theta, \quad \Rightarrow \quad du = 4d\theta$$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int \cos 4\theta d\theta = \frac{1}{4}\int \cos u du = \frac{1}{4}\sin u + c;$$

$$\therefore \quad \int \cos 4\theta d\theta = \frac{1}{4}\sin 4\theta + c.$$

7. Solución:

$$\int \frac{1}{2} t \sin 4t^2 dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\int \sin 4t^2 (8tdt) = \frac{1}{16}\int \sin 4t^2 (8tdt)$$

Sea

$$u = 4t^2, \quad \Rightarrow \quad du = 8tdt$$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int \frac{1}{2} t \sin 4t^2 dt = \frac{1}{16}\int \sin u du = \frac{1}{16}(-\cos u + c_1) = -\frac{1}{16}\cos u + c;$$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{2} t \sin 4t^2 dt = -\frac{1}{16}\cos 4t^2 + c.$$

8. Solución:

$$\int \cos x (2+\sin x)^5 dx = \int (2+\sin x)^5 \cos x dx$$

Sea

$$u = 2 + \sin x, \quad \Rightarrow \quad du = \cos x dx$$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int \cos x (2+\sin x)^5 dx = \int u^5 du = \frac{1}{6}u^6 + c;$$

$$\therefore \quad \int \cos x (2+\sin x)^5 dx = \frac{1}{6}(2+\sin x)^6 + c.$$

9. Solución:

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{3x}}\,\frac{dx}{x^2} = \int \left(1+\frac{1}{3x}\right)^{1/2}\frac{dx}{x^2} = -3\int \left(1+\frac{1}{3x}\right)^{1/2}\left(-\frac{dx}{3x^2}\right)$$

Sea

$$u = 1 + \frac{1}{3x}, \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{dx}{3x^2}$$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{3x}}\,\frac{dx}{x^2} = -3\int u^{1/2} du = -3\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + c = -2u^{3/2} + c;$$

$$\therefore \quad \int \sqrt{1+\frac{1}{3x}}\,\frac{dx}{x^2} = -2\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3/2} + c.$$

10. Solución:

$$\int 2\sin x\sqrt[3]{1+\cos x}\,dx = -2\int (1+\cos x)^{1/3}(-\sin x\,dx)$$

Sea

$$u = 1+\cos x, \quad \Rightarrow \quad du = -\sin x\,dx$$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int 2\sin x\sqrt[3]{1+\cos x}\,dx = -2\int u^{1/3}du = -2\cdot\frac{3}{4}u^{4/3}+c = -\frac{3}{2}u^{4/3}+c;$$

$$\therefore \quad \int 2\sin x\sqrt[3]{1+\cos x}\,dx = -\frac{3}{2}(1+\cos x)^{4/3}+c.$$

11. Solución:

$$\int \sin^3\theta\cos\theta\,d\theta = \int \sin^3\theta\left(\cos\theta\,d\theta\right)$$

Sea

$$u = \sin\theta, \quad \Rightarrow \quad du = \cos\theta\,d\theta$$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int \sin^3\theta\cos\theta\,d\theta = \int u^3du = \frac{1}{4}u^4+c;$$

$$\therefore \quad \int \sin^3\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\sin^4\theta+c.$$

12. Solución:

$$\int \frac{\sec^2 3\sqrt{t}\,dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3}\int \sec^2 3\sqrt{t}\left(\frac{3dt}{2\sqrt{t}}\right)$$

Sea

$$u = 3\sqrt{t}, \quad \Rightarrow \quad du = \frac{3dt}{2\sqrt{t}}$$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int \frac{\sec^2 3\sqrt{t}\,dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3}\int \sec^2 u\,du = \frac{2}{3}\tan u+c;$$

$$\therefore \quad \int \frac{\sec^2 3\sqrt{t}\,dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3}\tan 3\sqrt{t}+c.$$

13. Solución:

$$\int \frac{(y+3)dy}{(3-y)^{2/3}} = -\int (y+3)(3-y)^{-2/3}\left(-dy\right)$$

Sea

$$u = 3-y, \quad \Rightarrow \quad du = -dy$$

Y $\quad y+3 = 6-u$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int \frac{(y+3)dy}{(3-y)^{2/3}} = -\int (6-u)u^{-2/3}du = -\int 6u^{-2/3}-u^{1/3}du = \int u^{1/3}-6u^{-2/3}du,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{(y+3)dy}{(3-y)^{2/3}} = \frac{3}{4}u^{4/3}-6\left(3u^{1/3}\right)+c = \frac{3}{4}u^{4/3}-18\,u^{1/3}+c$$

$$\therefore \quad \int \frac{(y+3)dy}{(3-y)^{2/3}} = \frac{3}{4}(3-y)^{4/3}-18(3-y)^{1/3}+c.$$

14. Solución:

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-2x^2}} = -\frac{1}{4}\int x^2\left(1-2x^2\right)^{-1/2}\left(-4xdx\right)$$

Sea

$$u = 1-2x^2, \quad \Rightarrow \quad du = -4xdx$$

Y $\quad x^2 = \dfrac{1-u}{2}$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-2x^2}} = -\frac{1}{4}\int \frac{1-u}{2}u^{-1/2}du = -\frac{1}{8}\int u^{-1/2} - u^{1/2}du = -\frac{1}{8}\left(2u^{1/2} - \frac{2}{3}u^{3/2} + c_1\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-2x^2}} = -\frac{1}{4}u^{1/2} + \frac{1}{12}u^{3/2} + c;$$

$$\therefore \quad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-2x^2}} = -\frac{1}{4}\left(1-2x^2\right)^{1/2} + \frac{1}{12}\left(1-2x^2\right)^{3/2} + c.$$

15. Solución:

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{\cos x}(-\sin x dx)$$

Sea

$$u = \cos x, \quad \Rightarrow \quad du = -\sin x dx$$

Al hacer las sustituciones respectivas, se obtiene

$$\int \tan x dx = -\int \frac{1}{u}du = -\ln|u| + c = \ln|u^{-1}| + c = \ln|\cos^{-1}x| + c;$$

$$\therefore \quad \int \tan x dx = \ln|\sec x| + c.$$

16. Solución:

k es una constante arbitraria

$$\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}\int e^{kx}kdx$$

Sea

$$u = kx, \quad \Rightarrow \quad du = kdx$$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda

$$\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}\int e^{u}du = \frac{1}{k}e^{u} + \mathrm{c};$$

$$\therefore \quad \int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + \mathrm{c}.$$

17. Solución:

$$\int \sec x dx$$

Primero, multiplicamos y dividimos el integrando por $\sec x + \tan x$.

$$\int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{(\sec x \tan x + \sec^2 x)dx}{\sec x + \tan x}$$

Sea

$$u = \sec x + \tan x, \quad \Rightarrow \quad du = (\sec x \tan x + \sec^2 x)dx$$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int \sec x dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c;$$

$$\therefore \quad \int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + c.$$

18. Solución:

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x}$$

Sea

$$u = \sin x, \quad \Rightarrow \quad du = \cos x dx$$

De tal manera que

$$\int \cot x dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c;$$

$$\therefore \quad \int \cot x dx = \ln|\operatorname{sen} x| + c.$$

19. Solución:

Primero, multiplicamos y dividimos el integrando por $\csc x - \cot x$:

$$\int \csc x dx = \int \frac{\csc x(\csc x - \cot x)}{\csc x - \cot x} dx = \int \frac{(\csc^2 x - \csc x \cot x)dx}{\csc x - \cot x}$$

Sea

$$u = \csc x - \cot x, \quad \Rightarrow \quad du = (-\csc x \cot x + \csc^2 x)dx$$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int \csc x dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c;$$

$$\therefore \quad \int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + c.$$

20. $\displaystyle\int \frac{y^3}{(1-2y^4)^5} dy$

Solución:

$$\int \frac{y^3 dy}{(1-2y^4)^5} \qquad (1)$$

Sea

$$u = 1 - 2y^4 \qquad (2),$$

$$\Rightarrow \quad du = -8y^3 dy,$$

$$\Rightarrow \quad y^3 dy = -\frac{1}{8} du \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$\int \frac{-\frac{1}{8} du}{u^5} = -\frac{1}{8}\int \frac{du}{u^5} = -\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{4u^4}\right) = \frac{1}{32u^4} + c \qquad (4);$$

$$\therefore \quad \int \frac{y^3 dy}{(1-2y^4)^5} = \frac{1}{32(1-2y^4)^4} + c \qquad \{(2) \text{ en } (4)\}.$$

21. $\int \frac{2r dr}{(1-r)^{2/3}}$

Solución:

$$\int \frac{2r dr}{(1-r)^{2/3}} \qquad (1)$$

Sea

$$u = 1 - r \qquad (2),$$

$$\Rightarrow \quad du = -dr,$$

$$\Rightarrow \quad dr = -du \qquad (3)$$

De (2) se deduce que:

$$r = 1 - u \qquad (4)$$

Sustituyendo (2), (3) y (4) en (1), se obtiene:

$$\int \frac{2r dr}{(1-r)^{2/3}} = \int \frac{2(1-u)(-du)}{u^{2/3}} = -2\int u^{-2/3}(1-u) du = -2\int \left(u^{-2/3} - u^{1/3}\right) du,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{2r dr}{(1-r)^{2/3}} = -2\left(3u^{1/3} - \frac{3}{4}u^{4/3}\right) + c \qquad (5);$$

$$\therefore \quad \int \frac{2r dr}{(1-r)^{2/3}} = \frac{3}{2}(1-r)^{4/3} - 6(1-r)^{1/3} + c \qquad \{(2) \text{ en } (5)\}.$$

22. $\int \frac{(x^2+2x)dx}{\sqrt{x^3+3x^2+1}}$

Solución:

$$\int \frac{(x^2+2x)dx}{\sqrt{x^3+3x^2+1}} \qquad (1)$$

Sea

$$u = x^3+3x^2+1 \qquad (2),$$

$$\Rightarrow \quad du = (3x^2+6x)dx = 3(x^2+2x)dx,$$

$$\Rightarrow \quad (x^2+2x)dx = \frac{1}{3}du \qquad (3)$$

Sustituyendo (2), (3) en (1), se obtiene:

$$\int \frac{(x^2+2x)dx}{\sqrt{x^3+3x^2+1}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3}\int u^{-1/2}du = \frac{1}{3}(2u^{1/2})+c = \frac{2}{3}u^{1/2}+c \qquad (4);$$

$$\therefore \quad \int \frac{(x^2+2x)dx}{\sqrt{x^3+3x^2+1}} = \frac{2}{3}(x^3+3x^2+1)^{1/2}+c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+3x^2+1}+c \qquad \{(2) \text{ en } (4)\}.$$

23. $\displaystyle\int \frac{y+3}{(3-y)^{2/3}}dy$

Solución:

$$\int \frac{y+3}{(3-y)^{2/3}}dy \qquad (1)$$

Sea

$$u = 3-y \qquad (2),$$

$$\Rightarrow \quad du = -dy,$$

$$\Rightarrow \quad dy = -du \qquad (3)$$

De (2), se deduce que $y = 3-u \quad (4)$

Sustituyendo (2), (3) y (4) en (1), se obtiene:

$$\int \frac{y+3}{(3-y)^{2/3}}dy = \int \frac{3-u+3}{u^{2/3}}(-du) = \int (u-6)u^{-2/3}du = \int (u^{1/3}-6u^{-2/3})du$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{y+3}{(3-y)^{2/3}}dy = \frac{3}{4}u^{4/3}-18u^{1/3}+c \qquad (5);$$

$$\therefore \quad \int \frac{y+3}{(3-y)^{2/3}}dy = \frac{3}{4}(3-y)^{4/3}-18(3-y)^{1/3}+c \qquad \{(2) \text{ en } (5)\}.$$

24. $\displaystyle\int \left(t+\frac{1}{t}\right)^{3/2}\left(\frac{t^2-1}{t^2}\right)dt$

Solución:

$$\int\left(t+\frac{1}{t}\right)^{3/2}\left(\frac{t^2-1}{t^2}\right)dt=\int(t+t^{-1})^{3/2}(1-t^{-2})dt \qquad (1)$$

Sea

$$u=t+t^{-1} \qquad (2),$$

$$\Rightarrow \quad du=(1-t^{-2})dt \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$\int\left(t+\frac{1}{t}\right)^{3/2}\left(\frac{t^2-1}{t^2}\right)dt=\int u^{3/2}du=\frac{2}{5}u^{5/2}+c \qquad (4);$$

$$\therefore \quad \int\left(t+\frac{1}{t}\right)^{3/2}\left(\frac{t^2-1}{t^2}\right)dt=\frac{2}{5}(t+t^{-1})^{5/2}+c=\frac{2}{5}\left(t+\frac{1}{t}\right)^{5/2}+c \qquad \{(2) \text{ en } (4)\}.$$

25. $\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$

Solución:

Sea

$$u=x^2+x+1,$$

$$\Rightarrow \quad du=(2x+1)dx$$

De tal modo que:

$$\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1}=\int\frac{du}{u}=\ln u+c;$$

$$\therefore \quad \int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\ln(x^2+x+1)+c.$$

26. $\int\frac{s}{2s+3}ds$

Solución:

$$\int\frac{s}{2s+3}ds=\frac{1}{2}\int\frac{2sds}{2s+3} \qquad (\blacklozenge)$$

Sea

$$u=2s+3 \Leftrightarrow s=\frac{u-3}{2} \qquad (2),$$

$$\Rightarrow \quad du=2ds \Leftrightarrow ds=\frac{1}{2}du \qquad (3);$$

Sustituyendo (2) y (3) en ($\blacklozenge$), se obtiene:

$$\int\frac{s}{2s+3}ds=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{(u-3)du}{u}=\frac{1}{4}\int\left(1-\frac{3}{u}\right)du=\frac{1}{4}u-\frac{3}{4}\ln|u|+c=\frac{1}{4}(2s+3)-\frac{3}{4}\ln|2s+3|+c_1,$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{s}{2s+3}ds=\frac{1}{2}s+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\ln|2s+3|+c_1;$$

$$\therefore \quad \int\frac{s}{2s+3}ds=\frac{1}{2}s-\frac{3}{4}\ln|2s+3|+c \qquad \left\{c=\frac{3}{4}+c_1\right\}.$$

27. $\int x(x^2+9)^{1/2}dx$

Solución:

$$\int x(x^2+9)^{1/2}dx = \frac{1}{2}\int (x^2+9)^{1/2}2xdx$$

Sea

$$u = x^2+9, \quad \Rightarrow \quad du = 2xdx,$$

De tal manera, que al hacer la sustituciones respectivas, queda:

$$\int x(x^2+9)^{1/2}dx = \frac{1}{2}\int u^{1/2}du = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{3/2}+c_1\right) = \frac{1}{3}u^{3/2}+c, \quad c = \frac{1}{2}c_1;$$

$$\therefore \quad \int x(x^2+9)^{1/2}dx = \frac{1}{3}(x^2+9)^{3/2}+c.$$

28. $\int (x^2+2)/(x^3+6x-1)dx$

Solución:

$$\int\left[(x^2+2)/(x^3+6x-1)\right]dx = \frac{1}{3}\int \frac{(3x^2+6)dx}{(x^3+6x-1)}$$

Sea

$$u = x^3+6x-1, \quad \Rightarrow \quad du = (3x^2+6)dx,$$

De tal manera, que al hacer la sustituciones respectivas, queda:

$$\int\left[(x^2+2)/(x^3+6x-1)\right]dx = \frac{1}{3}\int\frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln u + c;$$

$$\therefore \quad \int\left[(x^2+2)/(x^3+6x-1)\right]dx = \frac{1}{3}\ln(x^3+6x-1)+c.$$

29. $\int\left[(3x^2-6)/\sqrt{x^3-6x}\right]dx$

Solución:

$$\int\left[(3x^2-6)/\sqrt{x^3-6x}\right]dx = \int\frac{(3x^2-6)dx}{\sqrt{x^3-6x}}$$

Sea

$$u = x^3-6x, \quad \Rightarrow \quad du = (3x^2-6)dx,$$

De tal manera, que al hacer la sustituciones respectivas, queda:

$$\int\left[(3x^2-6)/\sqrt{x^3-6x}\right]dx = \int\frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-1/2}du = 2u^{1/2}+c;$$

$$\therefore \quad \int\left[(3x^2-6)/\sqrt{x^3-6x}\right]dx = 2(x^3-6x)^{1/2}+c = 2\sqrt{x^3-6x}+c.$$

30. $\int x^2 \operatorname{sen}(x^3+4)dx$

Solución:

Sea

$$u = x^3 + 4, \quad \Rightarrow \quad du = 3x^2dx \quad (1)$$

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x^3+4)dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{sen}(x^3+4)3x^2dx \quad (2)$$

De tal manera que:

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x^3+4)dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{sen} u\,du \qquad \{\text{sustituyendo } (2) \text{ en } (1)\},$$

$$\Rightarrow \quad \int x^2 \operatorname{sen}(x^3+4)dx = \frac{1}{3}(-\cos u + c), \text{ pero } u = x^3 + 4;$$

$$\therefore \quad \int x^2 \operatorname{sen}(x^3+4)dx = -\frac{1}{3}\cos(x^3+4) + C, \quad C = \frac{1}{3}c.$$

Integración por partes

La fórmula para la "integración por partes", se deduce a partir de la regla de la derivada de un producto de funciones. Veamos:

Si f y g son funciones diferenciables, entonces

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \{\text{derivada de un producto de funciones}\},$$

$$\Rightarrow \quad f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - g(x)f'(x),$$

$$\Rightarrow \quad \int f(x)g'(x)dx = \int [f(x)g(x)]'dx - \int g(x)f'(x)dx \quad \{\text{Integrando cada término de la ecuación}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx \quad (1)$$

Ahora, si

$$u = f(x) \text{ y } v = g(x),$$

$$\Rightarrow \quad du = f'(x)dx \text{ y } dv = g'(x)dx$$

Al sustituir estos valores en (1), se obtiene la conocida ***fórmula de integración por partes***:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Ejercicios resueltos En los ejercicios siguientes efectúe la integral indefinida:		
1. $\int \ln x\,dx$	2. $\int xe^{3x}dx$	3. $\int \cos\sqrt{x}\,dx$
4. $\int xe^{-x}dx$	5. $\int x\sec x\tan x\,dx$	6. $\int (\ln x)^2 dx$
7. $\int x^2\ln x\,dx$	8. $\int e^x\cos x\,dx$	9. $\int \cos^2 x\,dx$
10. $\int 3x\cos 2x\,dx$	11. $\int (e^x+2x)^2dx$	12. $\int x\operatorname{sen} x\,dx$

Soluciones

1. Solución:

$$\int \ln x dx$$

Sea

$$u = \ln x, \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx, \quad \Rightarrow \quad v = x$$

De tal modo, que al aplicar la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx;$$

$$\therefore \qquad \int \ln x dx = x \ln x - x + c.$$

2. Solución:

$$\int x e^{3x} dx$$

Sea

$$u = x, \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = e^{3x} dx, \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{3} e^{3x}$$

De tal modo, que al aplicar la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\int x e^{3x} dx = x \cdot \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} dx;$$

$$\therefore \qquad \int x e^{3x} dx = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + c.$$

3. Solución:

$$\int \cos\sqrt{x}dx$$

Modifiquemos la forma del integrando por medio de la siguiente sustitución:

Sea $\quad w=\sqrt{x}, \quad \Rightarrow \quad dw=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$$\int \cos\sqrt{x}dx = 2\int \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\right) = 2\int w\cos w dw;$$

$\therefore \qquad \int \cos\sqrt{x}dx = 2\int w\cos w dw \qquad (1)$

Integremos ahora, $\int w\cos w dw$:

Sea

$u = w, \quad \Rightarrow \quad du = dw$

$dv = \cos w dw, \quad \Rightarrow \quad v = \sin w$

De tal modo, que al aplicar la fórmula de integración por partes: $\int udv = uv - \int vdu$, se obtiene

$$\int w\cos w dw = w\sin w - \int \sin w dw = w\sin w - (-\cos w + c_2) = w\sin w + \cos w + c_1 \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), se obtiene:

$$\int \cos\sqrt{x}dx = 2(w\sin w + \cos w + c_1) = 2w\sin w + 2\cos w + c$$

Pero, como $w=\sqrt{x}$, concluimos que:

$$\int \cos\sqrt{x}dx = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + c.$$

4. Solución:

$$\int xe^{-x}dx$$

Sea

$u = x, \quad \Rightarrow \quad du = dx$

$dv = e^{-x}dx, \quad \Rightarrow \quad v = -e^{-x}$

De tal modo, que al aplicar la fórmula de integración por partes, se obtiene:

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx;$$

$\therefore \qquad \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c.$

5. Solución:

$$\int x\sec x\tan x\,dx$$

Sea

$$u = x, \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \sec x\tan x\,dx, \quad \Rightarrow \quad v = \sec x$$

De tal modo, que al aplicar la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\int x\sec x\tan x\,dx = x\sec x - \int \sec x\,dx;$$

$$\therefore \quad \int x\sec x\tan x\,dx = x\sec x - \ln|\sec x + \tan x| + c.$$

Nota: para la observar la obtención de $\int \sec x\,dx$ haga clic en el ícono $\rightarrow$ $\boxed{\int \sec x\,dx}$ (Ejercicio 17).

6. Solución:

$$\int (\ln x)^2\,dx = \int (\ln x)(\ln x)\,dx$$

Sea

$$u = \ln x, \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = \ln x\,dx, \quad \Rightarrow \quad v = x\ln x - x \qquad \{\text{Ejercicio 1}\}$$

De tal modo, que al aplicar la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\int (\ln x)^2\,dx = \ln x(x\ln x - x) - \int (x\ln x - x)\frac{1}{x}dx = x(\ln x)^2 - x\ln x - \int (\ln x - 1)\,dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - x\ln x - \int \ln x\,dx + \int dx = x(\ln x)^2 - x\ln x - (x\ln x - x) + x + c,$$

$$\Rightarrow \quad \int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - x\ln x - x\ln x + x + x + c$$

$$\therefore \quad \int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + c.$$

7. Solución:

$$\int x^2\ln x\,dx$$

Sea

$$u = \ln x, \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = x^2dx, \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{3}x^3$$

De tal modo, que al aplicar la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\int x^2\ln x\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \int \frac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \int \frac{1}{3}x^2dx;$$

$$\therefore \quad \int x^2\ln x\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + c.$$

8. Solución:

$$\int e^x \cos x dx$$

Sea

$$u = \cos x, \quad \Rightarrow \quad du = -\operatorname{sen} x dx$$

$$dv = e^x dx, \quad \Rightarrow \quad v = e^x$$

De tal modo, que al aplicar la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x dx \qquad (1).$$

Ahora, evaluemos la integral en el miembro derecho; sea:

$$u = \operatorname{sen} x, \quad \Rightarrow \quad du = \cos x dx$$

$$dv = e^x dx, \quad \Rightarrow \quad v = e^x$$

De tal modo, que al aplicar la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x dx \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), se obtiene:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x dx,$$

$$\Rightarrow \quad 2\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x;$$

$$\therefore \quad \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x \operatorname{sen} x + c.$$

9. $\int \cos^2 x dx$

Solución:

$$\int \cos^2 x dx = \int \cos x \cos x dx$$

Sea

$$u = \cos x, \quad \Rightarrow du = -\operatorname{sen} x dx$$

$$dv = \cos x dx, \quad v = \operatorname{sen} x$$

De tal manera que:

$$\int \cos^2 x dx = \operatorname{sen} x \cos x + \int \operatorname{sen}^2 x dx = \operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \cos^2 x dx = \operatorname{sen} x \cos x + \int dx - \int \cos^2 x dx,$$

$$\Rightarrow \quad 2\int \cos^2 x dx = \operatorname{sen} x \cos x + x + c_1;$$

$$\therefore \quad \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x \cos x + \frac{1}{2} x + c = \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2} x + c.$$

10. $\int 3x \cos 2x dx$

Sea

$$u = 3x, \quad \Rightarrow \quad du = 3dx$$

$$dv = \cos 2x dx, \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$$

De tal modo, que al aplicar la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\int 3x\cos 2x dx = \frac{3}{2}x\operatorname{sen} 2x - \int \frac{3}{2}\operatorname{sen} 2x dx;$$

$$\therefore \quad \int 3x\cos 2x dx = \frac{3}{2}x\operatorname{sen} 2x + \frac{3}{4}\cos 2x + c.$$

11. $\int (e^x + 2x)^2 dx$

Solución:

$$\int (e^x + 2x)^2 dx = \int (e^{2x} + 4xe^x + 4x^2)dx = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{4}{3}x^3 + \int 4xe^x dx \quad (1)$$

Vamos a efectuar ahora $\int 4xe^x dx \quad (2)$

Sea

$$u = 4x, \quad \Rightarrow \quad du = 4dx \quad (3)$$

$$dv = e^x dx, \quad \Rightarrow \quad v = e^x \quad (4)$$

De tal manera que, aplicando la fórmula de integración por partes, se obtiene:

$$\int 4xe^x dx = 4xe^x - \int 4e^x dx = 4xe^x - 4e^x + C \quad (5)$$

Finalmente, susutituyendo (5) en (1), se obtiene:

$$\int (e^x + 2x)^2 dx = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{4}{3}x^3 + 4xe^x - 4e^x + C.$$

12. $\int x \operatorname{sen} x dx$

Solución:

Sea

$$u = x, \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \operatorname{sen} x dx, \quad \Rightarrow \quad v = -\cos x$$

De tal modo, que al aplicar la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\int x\operatorname{sen} x dx = -x\cos x + \int \cos x dx;$$

$$\therefore \quad \int x\operatorname{sen} x dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + c.$$

Potencias de las funciones trigonométricas

En este apartado aprenderemos a integrar funciones que presentan potencias trigonométricas, es decir, funciones con alguna de las siguientes formas:

$\operatorname{sen}^n u, \cos^n u, \ \operatorname{sen}^m u \cos^n u, \ \tan^n u, \ \cot^n u, \ \sec^n u, \ \csc^n u, \ \tan^m u \sec^n u, \ \cot^m u \csc^n u$

Para tal efecto es conveniente tener frescas en la memoria las siguientes identidades trigonométricas:

Identidades trigonométricas			
$\operatorname{sen}^2 u = 1 - \cos^2 u$	$\cos^2 u = 1 - \operatorname{sen}^2 u$	$\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1-\cos 2u}{2}$	$\cos^2 u = \dfrac{1+\cos 2u}{2}$
$\sec^2 u = 1 + \tan^2 u$	$\csc^2 u = 1 + \cot^2 u$	$\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$	
$\operatorname{sen} mx \cos nx = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(m-n)x + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(m+n)x$		$\cos mx \cos nx = \dfrac{1}{2}\cos(m-n)x + \dfrac{1}{2}\cos(m+n)x$	

Por lo regular, una vez concluimos con las transformaciones trigonométricas adecuadas, el integrando queda expedito para aplicar la *integración por sustitución*. En otros casos debemos recurrir a la *integración por partes*.

Ejercicios resueltos En los siguientes ejercicios evalúe la integral indefinida:		
1. $\int \operatorname{sen}^3 x dx$	**2.** $\int \cos^3 4x \sin 4x dx$	**3.** $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x dx$
4. $\int \cos^4 x dx$	**5.** $\int \operatorname{sen}^2 3x \cos^2 3x dx$	**6.** $\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x dx$
7. $\int \cos 4x \cos 3x dx$	**8.** $\int \cot^3 x dx$	**9.** $\int \sec^4 x dx$
10. $\int \csc^3 x dx$	**11.** $\int \tan^6 x \sec^4 x dx$	**12.** $\int \tan^3 x \sec^5 x dx$
13. $\int \sec^3 x dx$	**14.** $\int \tan^2 x \sec^3 x dx$	**15.** $\int \operatorname{sen}^6 t \cos^2 t dt$

S o l u c i o n e s

1. Solución:

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \int \sin x dx - \int \cos^2 x \sin x dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \sin^3 x dx = -\cos x + \int (\cos x)^2 (-\sin x dx)$$

Sea

$$u = \cos x, \quad \Rightarrow \quad du = -\sin x dx$$

De tal forma que

$$\int \sin^3 x dx = -\cos x + \int u^2 du = -\cos x + \frac{1}{3} u^3 + c;$$

$$\therefore \quad \int \sin^3 x dx = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + c.$$

2. Solución:

$$\int \cos^3 4x \sin 4x dx = -\frac{1}{4} \int (\cos 4x)^3 (-4 \sin 4x dx)$$

Sea

$$u = \cos 4x, \quad \Rightarrow \quad du = -4 \sin x dx$$

De tal forma que

$$\int \cos^3 4x \sin 4x dx = -\frac{1}{4} \int u^3 du = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} u^4 + c = -\frac{1}{16} u^4 + c;$$

$$\therefore \quad \int \cos^3 4x \sin 4x dx = -\frac{1}{16} \cos^4 4x + c.$$

3. Solución:

$$\int \sin^5 x \cos^2 x dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \sin x dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 \cos^2 x \sin x dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \sin^5 x \cos^2 x dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \cos^2 x \sin x dx = \int \left(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x\right) \cos^2 x \sin x dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \sin^5 x \cos^2 x dx = \int \left(\cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x\right) \sin x dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \sin^5 x \cos^2 x dx = \int \cos^2 x \sin x dx - 2 \int \cos^4 x \sin x dx + \int \cos^6 x \sin x dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \sin^5 x \cos^2 x dx = -\int \cos^2 x (-\sin x dx) + 2 \int \cos^4 x (-\sin x dx) - \int \cos^6 x (-\sin x dx)$$

Sea

$$u = \cos x, \quad \Rightarrow \quad du = -\sin x dx$$

De tal forma que

$$\int \sin^5 x \cos^2 x dx = -\int u^2 du + 2 \int u^4 du - \int u^6 du = -\frac{1}{3} u^3 + 2 \times \frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{7} u^7 + c;$$

$$\therefore \quad \int \sin^5 x \cos^2 x dx = -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{2}{5} \cos^5 x - \frac{1}{7} \cos^7 x + c.$$

4. Solución:

$$\int \cos^4 x dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \cos^4 x dx = \frac{1}{4} \int 1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8} \int 2 + 4\cos 2x + 1 + \cos 4x dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \cos^4 x dx = \frac{1}{8} \int 3 + 4\cos 2x + \cos 4x dx = \frac{1}{8} \left[3x + 4\left(\frac{1}{2}\sin 2x \right) + \frac{1}{4}\sin 4x + c_1 \right];$$

$$\therefore \quad \int \cos^4 x dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c.$$

5. Solución:

$$\int \sin^2 3x \cos^2 3x dx = \int \left[\frac{1-\cos 6x}{2} \times \frac{1+\cos 6x}{2} \right] dx = \frac{1}{4} \int 1 - \cos^2 6x dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 6x dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \sin^2 3x \cos^2 3x dx = \frac{1}{4} \int \frac{1-\cos 12x}{2} dx = \frac{1}{8} \int 1 - \cos 12x dx = \frac{1}{8} \left[x - \frac{1}{12}\sin 12x + c_1 \right];$$

$$\therefore \quad \int \sin^2 3x \cos^2 3x dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{96}\sin 12x + c.$$

6. Solución:

$$\int \sin 3x \cos 5x dx$$

Aplicando la identidad trigonométrica $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\sin(m-n)x + \frac{1}{2}\sin(m+n)x$, se tiene:

$$\sin 3x \cos 5x dx = \frac{1}{2}\sin(3-5)x + \frac{1}{2}\sin(3+5)x = \frac{1}{2}\sin(-2x) + \frac{1}{2}\sin 8x,$$

$$\Rightarrow \quad \sin 3x \cos 5x dx = -\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 8x$$

De tal manera que

$$\int \sin 3x \cos 5x dx = \int -\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 8x dx = -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x \right] + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{8}\cos 8x \right] + c;$$

$$\therefore \quad \int \sin 3x \cos 5x dx = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + c.$$

7. Solución:

$$\int \cos 4x \cos 3x dx$$

Aplicando la identidad trigonométrica $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\cos(m-n)x + \frac{1}{2}\cos(m+n)x$, se tiene:

$$\cos 4x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\cos(4-5)x + \frac{1}{2}\cos(4+3)x = \frac{1}{2}\cos(-x) + \frac{1}{2}\cos 7x,$$

$$\Rightarrow \quad \cos 4x \cos 3x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos 7x$$

De tal manera que

$$\int \cos 4x \cos 3x dx = \int \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos 7x dx = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{7}\sin 7x \right] + c;$$

$$\therefore \quad \int \cos 4x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{14}\sin 7x + c.$$

8. Solución:

$$\int \cot^3 x dx = \int \cot^2 x \cot x dx = \int (\csc^2 x - 1) \cot x = \int (\csc^2 x \cot x - \cot x) dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \cot^3 x dx = \int \csc^2 x \cot x dx - \int \cot x dx = \int \csc^2 x \cot x dx - \ln|\sin x| + c_1$$

Hallemos ahora, por sustitución, $\int \csc^2 x \cot x dx$:

$$\int \csc^2 x \cot x dx = -\int \cot x(-\csc^2 x dx) \quad \text{y} \quad \int \csc^2 x \cot x dx = -\int \csc x(-\csc x \cot x dx);$$

$$\therefore \quad \int \csc^2 x \cot x dx = -\frac{1}{2}\cot^2 x + c_2 \qquad \text{y} \quad \int \csc^2 x \cot x dx = -\frac{1}{2}\csc^2 x + c_3$$

De tal manera que se pueden dar dos respuestas, aparentemente *distintas*:

$$\int \cot^3 x dx = -\frac{1}{2}\cot^2 x - \ln|\sin x| + c \quad \text{y} \quad \int \cot^3 x dx = -\frac{1}{2}\csc^2 x - \ln|\sin x| + c.$$

Nota: la razón de la aparente ambigüedad de la respuesta radica en el hecho de que $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$; esto es, $\cot^2 x = \csc^2 x + c$.

9. Solución:

$$\int \sec^4 x dx = \int \sec^2 x \sec^2 x dx = \int (\tan^2 x + 1)\sec^2 x dx = \int \tan^2 x \sec^2 x dx + \int \sec^2 x dx;$$

$$\therefore \quad \int \sec^4 x dx = \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + c.$$

10. Solución:

$$\int \csc^3 x dx = \int \csc x \csc^2 x dx$$

Sea

$$u = \csc x, \quad \Rightarrow \quad du = -\csc x \cot x dx$$

$$dv = \csc^2 x dx, \quad \Rightarrow \quad v = -\cot x$$

Así

$$\int \csc^3 x dx = -\csc x \cot x - \int \csc x \cot^2 x dx = -\csc x \cot x - \int \csc x(\csc^2 x - 1) dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \csc^3 x dx = -\csc x \cot x - \int \csc^3 x dx + \int \csc x dx,$$

$$\Rightarrow \quad 2\int \csc^3 x dx = -\csc x \cot x + \ln|\csc x - \cot x| + c_1;$$

$$\therefore \quad \int \csc^3 x dx = -\frac{1}{2}\csc x \cot x dx + \frac{1}{2}\ln|\csc x - \cot x| + c.$$

11. Solución:

$$\int \tan^6 x \sec^4 x dx = \int \tan^6 x \sec^2 x \sec^2 x dx = \int \tan^6 x \sec^2 x(\tan^2 x + 1) dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \tan^6 x \sec^4 x dx = \int \tan^8 x \sec^2 x dx + \int \tan^6 x \sec^2 x dx;$$

$$\therefore \quad \int \tan^6 x \sec^4 x dx = \frac{1}{9}\tan^9 x + \frac{1}{7}\tan^7 x + c.$$

12. Solución:

$$\int \tan^3 x\sec^5 x dx = \int \tan^2 x\sec^4 x dx \tan x\sec x dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec^4 x(\sec x\tan x dx),$$

$$\Rightarrow \quad \int \tan^3 x\sec^5 x dx = \int \sec^6 x(\sec x\tan x dx) - \int \sec^4 x(\sec x\tan x dx)$$

Sea $u = \sec x, \quad \Rightarrow \quad du = \sec x\tan x dx$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int \tan^3 x\sec^5 x dx = \int u^6 du - \int u^4 du = \frac{1}{7}u^7 - \frac{1}{5}u^5 + c;$$

$$\therefore \quad \int \tan^3 x\sec^5 x dx = \frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{1}{5}\sec^5 x + c.$$

13. Solución:

$$\int \sec^3 x dx = \int \sec x\sec^2 x dx$$

Sea $u = \sec x, \quad \Rightarrow \quad du = \sec x\tan x dx$

$dv = \sec^2 x dx, \quad \Rightarrow \quad v = \tan x$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int \sec^3 x dx = \sec x\tan x - \int \sec x\tan^2 x dx = \sec x\tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \sec^3 x dx = \sec x\tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx,$$

$$\Rightarrow \quad 2\int \sec^3 x dx = \sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x| + c_1;$$

$$\therefore \quad \int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + c.$$

14. Solución:

$$\int \tan^2 x\sec^3 x dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec^3 x dx = \int \sec^5 x dx - \int \sec^3 x dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \tan^2 x\sec^3 x dx = \int \sec^3 x\sec^2 x dx - \left[\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + c_1\right]$$

Nota:
El resultado $\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + c_1$ se obtuvo en el ejercicio anterior.

Sea $u = \sec^3 x, \quad \Rightarrow \quad du = 3\sec^3 x\tan x dx$

$dv = \sec^2 x dx, \quad \Rightarrow \quad v = \tan x$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int \tan^2 x\sec^3 x dx = \sec^3 x\tan x - 3\int \tan^2 x\sec^3 x dx - \frac{1}{2}\sec x\tan x - \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| - c_1,$$

$$\Rightarrow \quad 4\int \tan^2 x\sec^3 x dx = \sec^3 x\tan x - \frac{1}{2}\sec x\tan x - \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| - c_1;$$

$$\therefore \quad \int \tan^2 x\sec^3 x dx = \frac{1}{4}\sec^3 x\tan x - \frac{1}{8}\sec x\tan x - \frac{1}{8}\ln|\sec x + \tan x| - c.$$

15. $\int \operatorname{sen}^6 t \cos^2 t\,dt$

Solución:

$$\int \operatorname{sen}^6 t\cos^2 t\,dt = \int \left(\operatorname{sen}^2 t\right)^3 \cos^2 t\,dt = \int \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^3 \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt,$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{1}{16}\int (1-\cos 2t)^3 (1+\cos 2t)tdt = \frac{1}{16}\int (1-\cos 2t)^2 (1-\cos 2t)(1+\cos 2t)dt$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{1}{16}\int (1-\cos 2t)^2 (1-\cos^2 2t)tdt = \frac{1}{16}\int (1-2\cos 2t+\cos^2 2t)(1-\cos^2 2t)dt,$$

$$\Rightarrow \quad \int \operatorname{sen}^6 t\cos^2 t\,dt = \frac{1}{16}\int \left(1-\cancel{\cos^2 2t}-2\cos 2t+2\cos^3 2t+\cancel{\cos^2 2t}-\cos^4 2t\right)dt,$$

$$\Rightarrow \quad \int \operatorname{sen}^6 t\cos^2 t\,dt = \frac{1}{16}\int \left(1-2\cos 2t+2\cos^3 2t-\cos^4 2t\right)dt,$$

$$\Rightarrow \quad \int \operatorname{sen}^6 t\cos^2 t\,dt = \frac{1}{16}\left[\int dt-\int 2\cos 2t\,dt+\int 2\cos^3 2t\,dt-\int \cos^4 2t\,dt\right],$$

$$\Rightarrow \quad \int \operatorname{sen}^6 t\cos^2 t\,dt = \frac{1}{16}\left[t-\operatorname{sen} 2t+\int 2\cos^2 2t\cos 2t\,dt-\int \left(\cos^2 2t\right)^2 dt\right],$$

$$\Rightarrow \quad \int \operatorname{sen}^6 t\cos^2 t\,dt = \frac{1}{16}\left[t-\operatorname{sen} 2t+2\int \left(1-\operatorname{sen}^2 2t\right)\cos 2t\,dt-\int \left(\frac{\cos 4t+1}{2}\right)^2 dt\right],$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{1}{16}\left[t-\operatorname{sen} 2t+2\left[\int \cos 2t\,dt-\int \operatorname{sen}^2 2t\cos 2t\,dt\right]-\frac{1}{4}\int \left(\cos^2 4t+2\cos 4t+1\right)dt\right],$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{1}{16}\left[t-\operatorname{sen} 2t+2\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t-\frac{1}{6}\operatorname{sen}^3 2t\right]-\frac{1}{4}\left[\int \cos^2 4t\,dt+\int 2\cos 4t\,dt+\int dt\right]\right],$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{1}{16}\left[t-\cancel{\operatorname{sen} 2t}+\cancel{\operatorname{sen} 2t}-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 2t-\frac{1}{4}\left[\int \frac{\cos 8t+1}{2}dt+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 4t+t\right]\right],$$

$$\Rightarrow \quad \int \operatorname{sen}^6 t\cos^2 t\,dt = \frac{1}{16}\left[t-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 2t-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\int (\cos 8t+1)dt+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 4t+t\right]\right],$$

$$\Rightarrow \quad \int \operatorname{sen}^6 t\cos^2 t\,dt = \frac{1}{16}\left[t-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 2t-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\operatorname{sen} 8t+t\right)+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 4t+t\right]\right]+c,$$

$$\Rightarrow \quad \int \operatorname{sen}^6 t\cos^2 t\,dt = \frac{1}{16}\left[t-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 2t-\frac{1}{64}\operatorname{sen} 8t-\frac{1}{8}t-\frac{1}{8}\operatorname{sen} 4t-\frac{1}{4}t\right]+c;$$

$$\therefore \quad \int \operatorname{sen}^6 t\cos^2 t\,dt = \frac{1}{16}\left[\frac{5}{8}t-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 2t-\frac{1}{8}\operatorname{sen} 4t-\frac{1}{64}\operatorname{sen} 8t\right]+c.$$

Sustitución trigonométrica

A menudo es posible hallar la antiderivada de una función cuando el integrando presenta expresiones de la forma:

$\sqrt{a^2-u^2}$, $\sqrt{a^2+u^2}$, ó bien $\sqrt{u^2-a^2}$; donde $a>0$ y u es una función de x.

Se elimina el radical haciendo la sustitución trigonométrica pertinente; el resultado es un integrando que contiene funciones trigonométricas cuya integración nos es familiar. En la siguiente tabla se muestra cuál debe ser la sustitución:

Expresión en el integrando	Sustitución trigonométrica
$\sqrt{a^2-u^2}$	$x=a\,\text{sen}\,\theta$
$\sqrt{a^2+u^2}$	$x=a\tan\theta$
$\sqrt{u^2-a^2}$	$x=a\sec\theta$

Ejercicios resueltos

En los siguientes ejercicios, obtenga la integral indefinida:

1. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$	2. $\int \frac{1}{(z^2-2z+5)^2}dz$	3. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
4. $\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx$	5. $\int \sqrt{x^2+4}dx$	6. $\int \frac{x}{1+x^4}dx$
7. $\int \frac{1}{x^2-1}dx$		

Soluciones

1. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

Solución:

En este ejercicio la expresión dentro del radical es de la forma a^2-u^2; por lo que la sustitución debe ser:

$$x=2\,\text{sen}\,\theta,\qquad -\pi/2<\theta<\pi/2$$

$$\Rightarrow\quad dx=2\cos\theta\,d\theta$$

De tal manera que:

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}=\int\frac{2\cos\theta\,d\theta}{(2\,\text{sen}\,\theta)^2\sqrt{4-(2\,\text{sen}\,\theta)^2}}=\int\frac{2\cos\theta\,d\theta}{4\,\text{sen}^2\theta\sqrt{4-4\,\text{sen}^2\theta}}=\int\frac{\cos\theta\,d\theta}{2\,\text{sen}^2\theta\sqrt{4(1-\text{sen}^2\theta)}},$$

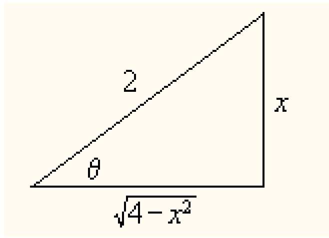
$$\Rightarrow\quad\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}=\int\frac{\cos\theta\,d\theta}{2\,\text{sen}^2\theta\cdot2\sqrt{\cos^2\theta}}=\int\frac{\cos\theta\,d\theta}{4\,\text{sen}^2\theta\cdot\cos\theta}=\frac{1}{4}\int\csc^2\theta\,d\theta=-\frac{1}{4}\cot\theta+c\qquad(1)$$

Como $x = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$, entonces

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{x}{2}$$

Con estos datos, construimos el triángulo rectángulo que se observa en la figura de la derecha.
De la figura, se deduce que:

$$\cot\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$



Sustituyendo estos valores en (1), se obtiene:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + c.$$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{(z^2-2z+5)^2}\,dz$

Solución:

$$\int \frac{1}{(z^2-2z+5)^2}\,dz = \int \frac{1}{(z^2-2z+1+4)^2}\,dz = \int \frac{1}{((z-1)^2+4)^2}\,dz$$

Sea

$$z-1 = 2\tan\theta, \quad \Rightarrow \quad dz = 2\sec^2\theta\, d\theta$$

De tal manera que:

$$\int \frac{1}{((z-1)^2+4)^2}\,dz = \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{(4\tan^2\theta+4)^2} = \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{(4(\tan^2\theta+1))^2} = \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{(4\sec^2\theta)^2} = \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{16\sec^4\theta},$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{((z-1)^2+4)^2}\,dz = \int \frac{d\theta}{8\sec^2\theta} = \frac{1}{8}\int \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{16}\int (\cos 2\theta + 1)\, d\theta,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{((z-1)^2+4)^2}\,dz = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta + \frac{1}{16}\theta + c = \frac{1}{32}(2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta) + \frac{1}{16}\theta + c,$$

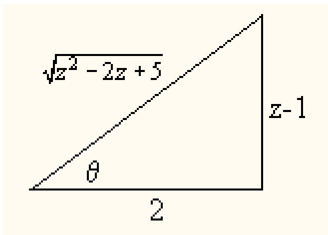
$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{(z^2-2z+5)^2}\,dz = \int \frac{1}{((z-1)^2+4)^2}\,dz = \frac{1}{16}(\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta) + \frac{1}{16}\theta + c \qquad (1).$$

Como $z-1 = 2\tan\theta$, entonces

$$\tan\theta = \frac{z-1}{2} \Leftrightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{z-1}{2}$$

Con estos datos, construimos el triángulo rectángulo que se observa en la figura de la derecha.
De la figura, se deduce que:

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{z-1}{\sqrt{z^2-2z+5}} \quad \text{y} \quad \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{z^2-2z+5}}$$



$(Fig.1)$

Sustituyendo estos valores en (1), se obtiene:

$$\int \frac{1}{(z^2-2z+5)^2}\,dz = \frac{1}{16}\left(\frac{z-1}{\sqrt{z^2-2z+5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{z^2-2z+5}}\right) + \frac{1}{16}\tan^{-1}\frac{z-1}{2} + c;$$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{(z^2-2z+5)^2}\,dz = \frac{1}{8}\frac{(z-1)}{(z^2-2z+5)} + \frac{1}{16}\tan^{-1}\frac{z-1}{2} + c.$$

3. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Solución:

En este ejercicio la expresión dentro del radical es de la forma $a^2 - u^2$; por lo que la sustitución debe ser:

$$x = \operatorname{sen}\theta, \qquad -\pi/2 < \theta < \pi/2$$

$$\Rightarrow \quad dx = \cos\theta d\theta$$

De tal manera que:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}} = \int \frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta}} = \int \frac{\cos\theta d\theta}{\cos\theta} = \int d\theta = \theta + C$$

Como $x = \operatorname{sen}\theta \Leftrightarrow \theta = \operatorname{sen}^{-1} x$; concluimos que:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{sen}^{-1} x + c.$$

4. $\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx$

Solución:

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx$$

En este ejercicio la expresión dentro del radical es de la forma $a^2 - u^2$; por lo que la sustitución debe ser:

$$x = 5\operatorname{sen}\theta, \qquad -\pi/2 < \theta < \pi/2$$

$$\Rightarrow \quad dx = 5\cos\theta d\theta$$

De tal manera que:

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{25-(5\operatorname{sen}\theta)^2}}{5\operatorname{sen}\theta}5\cos\theta d\theta = \int \frac{\sqrt{25-25\operatorname{sen}^2\theta}}{\operatorname{sen}\theta}\cos\theta d\theta,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{25(1-\operatorname{sen}^2\theta)}}{\operatorname{sen}\theta}\cos\theta d\theta = \int \frac{5\cos\theta\sqrt{\cos^2\theta}}{\operatorname{sen}\theta}dx = \int \frac{5\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}d\theta,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx = 5\int \frac{(1-\operatorname{sen}^2\theta)}{\operatorname{sen}\theta}d\theta = 5\left(\int \csc\theta d\theta - \int \operatorname{sen}\theta d\theta\right),$$

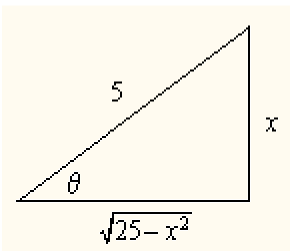
$$\Rightarrow \quad \int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx = 5\left(\ln\left|\csc\theta - \cot\theta\right| + \cos\theta\right) + c \qquad (1)$$

Nota: para observar la obtención de $\int \csc\theta d\theta$ hágase clic en el enlace insertado sobre este ejercicio (numeral 19).

Como $x = 5\operatorname{sen}\theta$, entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{5}$$

Con estos datos, construimos el triángulo rectángulo que se observa en la figura de la derecha.



De la figura, se deduce que:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{25-x^2}}{5}, \quad \cot\theta = \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}, \quad \csc\theta = \frac{5}{x} \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), se obtiene:

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx = 5\left(\ln\left|\frac{5}{x}-\frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\right|+\frac{\sqrt{25-x^2}}{5}\right)+c;$$

$$\therefore \quad \int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx = 5\ln\left|\frac{5-\sqrt{25-x^2}}{x}\right|+\sqrt{25-x^2}+c.$$

5. $\int \sqrt{x^2+4}dx$

Solución:

$$\int \sqrt{x^2+4}dx \quad (1)$$

En este ejercicio la expresión dentro del radical es de la forma a^2+u^2; por lo que la sustitución debe ser:

$$\left.\begin{aligned} & x = 2\tan\theta \\ \Rightarrow \quad & dx = 2\sec^2\theta d\theta \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

De tal manera que, al sustituir (2) en (1), se obtiene:

$$\int \sqrt{x^2+4}dx = \int \sqrt{(2\tan\theta)^2+4}\cdot 2\sec^2\theta d\theta = \int \sqrt{4\tan^2\theta+4}\cdot 2\sec^2\theta d\theta,$$

$$\Rightarrow \quad \int \sqrt{x^2+4}dx = \int \sqrt{4(\tan^2\theta+1)}\cdot 2\sec^2\theta d\theta = \int 2\sqrt{\sec^2\theta}\cdot 2\sec^2\theta d\theta = 4\int \sec^3\theta d\theta,$$

$$\Rightarrow \quad \int \sqrt{x^2+4}dx = 4\left(\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta+\frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta|\right)+c = 2\sec\theta\tan\theta+2\ln|\sec\theta+\tan\theta|+c,$$

$$\Rightarrow \quad \int \sqrt{x^2+4}dx = 2\sec\theta\tan\theta+\ln(\sec\theta+\tan\theta)^2+c \quad (3)$$

Nota: para observar la obtención de $\int \sec^3\theta d\theta$ hágase clic en el enlace insertado sobre este ejercicio (numeral 13).

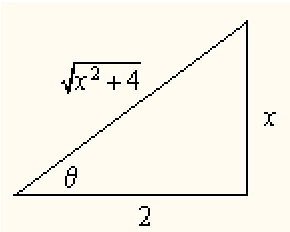
Como $x = 2\tan\theta$, entonces

$$\tan\theta = \frac{x}{2} \quad (4)$$

Con estos datos, construimos el triángulo rectángulo que se observa en la figura de la derecha.

De la figura, se deduce que:

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+4}}{2} \quad (5)$$



Sustituyendo (4) y (5) en (3), se obtiene:

$$\int \sqrt{x^2+4}dx = 2\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}\cdot\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}+\frac{x}{2}\right)^2+c = \frac{x\sqrt{x^2+4}}{2}+2\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^2+c.$$

6. $\int \frac{x}{1+x^4}dx$

Solución:

$$\int \frac{xdx}{1+x^4} \quad (1)$$

Sea

$$x^2 = \tan\theta \Leftrightarrow \theta = \tan^{-1}x^2, \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}\sec^2\theta d\theta \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), se obtiene:

$$\int \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta d\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec^2\theta} = \frac{1}{2}\int d\theta = \frac{1}{2}\theta + c \quad (3)$$

Por último, sustituyendo $\theta = \tan^{-1}x^2$ en (3), se obtiene:

$$\int \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\tan^{-1}x^2 + c.$$

7. $\int \frac{1}{x^2-1}dx$

Solución:

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx \quad (1)$$

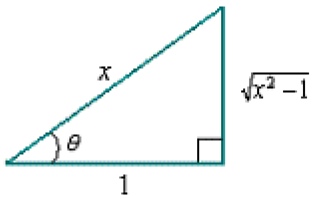
Sea

$$x = \sec\theta, \Rightarrow dx = \sec\theta\tan\theta d\theta \quad (2)$$

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \int \frac{1}{\sec^2\theta - 1}\sec\theta\tan\theta d\theta \qquad \{(2) \text{ en } (1)\},$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2-1}dx = \int \frac{\sec\theta\tan\theta d\theta}{\tan^2\theta} = \int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}d\theta = \int \csc\theta d\theta = \ln|\csc\theta - \cot\theta| + c \quad (3)$$

La figura de la derecha se construye a partir de la definición de $\sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$ y del hecho de que $\sec\theta = x$.



A partir de dicha figura se deduce que:

$$\csc\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, \; \cot\theta = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (4)$$

Finalmente, sustituyendo (4) en (3), se obtiene:

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right| + c = \ln\left|\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}\right| + c = \ln\sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2-1}} + c,$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2-1}dx = \ln\sqrt{\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}} + c = \ln\sqrt{\frac{(x-1)}{(x+1)}} + c = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/2} + c;$$

$$\therefore \int \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + c.$$

Integración de funciones racionales, por fracciones parciales, cuando el denominador sólo tiene factores lineales

Ejercicios resueltos

En los siguientes ejercicios, obtenga la integral indefinida:

1. $\int \frac{x^2}{x^2+x-6}dx$	2. $\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx$	3. $\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx$
4. $\int \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2}dx$	5. $\int \frac{5x^2-11x+5}{x^3-4x^2+5x-2}dx$	6. $\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}dx$
7. $\int \frac{dP}{P-P^2}$		

S o l u c i o n e s

1. $\int \frac{x^2}{x^2+x-6}dx$

Solución:

$$\frac{x^2}{x^2+x-6}=1-\frac{x-6}{x^2+x-6}\Leftrightarrow 1-\frac{x-6}{(x+3)(x-2)}$$

{expresando el integrando en la forma: parte entera-fracción propia. Y factorizando el denominador}

De tal manera que:

$$\int\frac{x^2}{x^2+x-6}dx=\int\left(1-\frac{x-6}{(x+3)(x-2)}\right)dx=x-\int\frac{x-6}{(x+3)(x-2)}dx+c_1 \qquad (\spadesuit)$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{x-6}{(x+3)(x-2)}\equiv\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-2} \qquad (1)$$

Se multiplican ambos miembros de (1) por el mínimo común denominador $(x+3)(x-2)$, y se simplifica:

$x-6\equiv A(x-2)+B(x+3)$,

$\Rightarrow \quad x-6\equiv Ax-2A+Bx+3B$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad x-6\equiv(A+B)x+(-2A+3B)$ {asociando de una forma adecuada} (2)

Como (2) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal menera que:

$A+B=1$ (3)

$-2A+3B=-6$ (4)

Multiplicamos (3) por 2, y la ecuación resultante la sumamos con la (4):

$$\begin{array}{r} 2A+2B=\ \ 2\\ \underline{-2A+3B=-6}\\ 5B=-4\Leftrightarrow B=-\frac{4}{5} \end{array} \qquad (5)$$

Sustituyendo (5) en (3) y operando aritméticamente, se obtiene:

$A=\frac{9}{5}$ (6)

Sustituyendo (5), (6) en (1), se obtiene:

$$\frac{x-6}{(x+3)(x-2)}\equiv\frac{9}{5(x+3)}-\frac{4}{5(x-2)}$$

De tala manera que:

$$\int\frac{x-6}{(x+3)(x-2)}dx=\frac{9}{5}\int\frac{1}{x+3}dx-\frac{4}{5}\int\frac{1}{x-2}dx;$$

$$\therefore \quad \int\frac{x-6}{(x+3)(x-2)}dx=\frac{9}{5}\ln(x+3)-\frac{4}{5}\ln(x-2)+c_2 \qquad (7)$$

Sustituyendo (7) en ($\spadesuit$), se obtiene:

$$\int\frac{x^2}{x^2+x-6}dx=x-\left(\frac{9}{5}\ln(x+3)-\frac{4}{5}\ln(x-2)+c_2\right)+c_1;$$

$$\therefore \quad \int\frac{x^2}{x^2+x-6}dx=x-\frac{9}{5}\ln(x+3)+\frac{4}{5}\ln(x-2)+c.$$

2. $\int\frac{5x-2}{x^2-4}dx$

Solución:

$$\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx = \int \frac{5x-2}{(x+2)(x-2)}dx \qquad \{\text{factorizando el denominador}\}$$

Expresamos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{5x-2}{(x+2)(x-2)} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} \qquad (1)$$

Se multiplican ambos miembros de (1) por el mínimo común denominador $(x+2)(x-2)$, y se simplifica:

$$5x-2 \equiv A(x-2) + B(x+2),$$

$$\Rightarrow \quad 5x-2 \equiv Ax - 2A + Bx + 2B \qquad \{\text{destruyendo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow \quad 5x-2 \equiv (A+B)x + (-2A+2B) \qquad \{\text{asociando de una forma adecuada}\} \qquad (2)$$

Como (2) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal menera que:

$$A + B = 5 \qquad (3)$$

$$-2A + 2B = -2 \qquad (4)$$

Multiplicamos (3) por 2, y la ecuación resultante la sumamos con la (4):

$$\begin{array}{r} 2A + 2B = 10 \\ \underline{-2A + 2B = -2} \\ 4B = 8 \Leftrightarrow B = 2 \qquad (5) \end{array}$$

Sustituyendo (5) en (3) y operando aritméticamente, se obtiene:

$$A = 3 \qquad (6)$$

Sustituyendo (5), (6) en (1), se obtiene:

$$\frac{5x-2}{(x+2)(x-2)} \equiv \frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2}$$

De tala manera que:

$$\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx = \int \frac{3}{x+2}dx + \int \frac{2}{x-2}dx;$$

$$\therefore \qquad \int \frac{5x-2}{x^2-4}dx = 3\ln(x+2) + 2\ln(x-2) + c.$$

3. $\displaystyle\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx$

Solución:

$$\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx = \int \frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}dx \qquad \{\text{factorizando el denominador}\}$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} \qquad (1)$$

Se multiplican ambos miembros de (1) por el mínimo común denominador $x(x-2)(x+1)$,
y se simplifica:

$$4x-2 \equiv A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2),$$

$$\Rightarrow \quad 4x-2 \equiv Ax^2 - Ax - 2A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - 2Cx \qquad \{\text{destruyendo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow \quad 4x-2 \equiv (A+B+C)x^2 + (-A+B-2C)x + (-2A) \qquad \{\text{asociando de una forma adecuada}\} \quad (2)$$

Como (2) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal menera que:

$$A+B+C=0 \qquad (3)$$

$$-A+B-2C=4 \qquad (4)$$

$$-2A=-2 \Leftrightarrow A=1 \qquad (5)$$

Sustituyendo (5) en (4), como también (5) en (3) y operando aritméticamente, se obtiene:

$$B-2C=5 \qquad (6)$$

$$B+C=-1 \qquad (7)$$

Restando (6) de (7), se obtiene:

$$\begin{array}{r} B+C=-1 \\ -B+2C=-5 \\ \hline 3C=-6 \Leftrightarrow C=-2 \qquad (8) \end{array}$$

Sustituyendo (8) en (6), y operando aritméticamente, se obtiene:

$$B=1 \qquad (9)$$

Sustituyendo (5), (8) y (9) en (1), se obtiene:

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)} \equiv \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+1}$$

De tal manera que:

$$\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{2}{x+1}dx;$$

$$\therefore \quad \int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx = \ln x + \ln(x-2) - 2\ln(x+1) + c.$$

4. $\displaystyle\int \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2}dx$

Solución:

$$\int \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - x^2}dx = \int \frac{3x^2 - x + 1}{x^2(x-1)}dx \qquad \{\text{factorizando el denominador}\}$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{3x^2 - x + 1}{x^2(x-1)} \equiv \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} \qquad (1)$$

Se multiplican ambos miembros de (1) por el mínimo común denominador $x^2(x-1)$, y se simplifica:

$$3x^2 - x + 1 \equiv A(x-1) + Bx(x-1) + Cx^2,$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 - x + 1 \equiv Ax - A + Bx^2 - Bx + Cx^2 \qquad \{\text{destruyendo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 - x + 1 \equiv (B + C)x^2 + (A - B)x - A \qquad \{\text{asociando de una forma adecuada}\} \qquad (2)$$

Como (2) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal menera que:

$$B + C = 3 \qquad (3)$$

$$A - B = -1 \qquad (4)$$

$$-A = 1 \Leftrightarrow A = -1 \qquad (5)$$

Sustituyendo (5) en (4) y operando aritméticamente, se obtiene:

$$B = 0 \qquad (6)$$

Sustituyendo (6) en (3) y operando aritméticamente, se obtiene:

$$C = 3 \qquad (7)$$

Sustituyendo (5), (6) y (7) en (1), se obtiene:

$$\frac{3x^2 - x + 1}{x^2(x-1)} \equiv \frac{-1}{x^2} + \frac{0}{x} + \frac{3}{x-1}$$

De tal manera que:

$$\int \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - x^2}dx = -\int \frac{1}{x^2}dx + 3\int \frac{1}{x-1}dx;$$

$$\therefore \quad \int \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - x^2}dx = \frac{1}{x} + 3\ln|x-1| + c.$$

5. $\int \frac{5x^2 - 11x + 5}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}dx$

Solución:

$$\int \frac{5x^2-11x+5}{x^3-4x^2+5x-2}dx=\int \frac{5x^2-11x+5}{(x-1)^2(x-2)}dx \qquad \{\text{factorizando el denominador}\}$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{5x^2-11x+5}{(x-1)^2(x-2)} \equiv \frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2} \qquad (1)$$

Se multiplican ambos miembros de (1) por el mínimo común denominador $x^2(x-1)$, y se simplifica:

$$5x^2-11x+5 \equiv A(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)^2 \qquad (2),$$

$$\Rightarrow \quad 5x^2-11x+5 \equiv Ax-2A+Bx^2-3Bx+2B+Cx^2-2Cx+C \qquad \{\text{destruyendo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow \quad 5x^2-11x+5 \equiv (B+C)x^2+(A-3B-2C)x+(-2A+2B+C)$$

{asociando de una forma adecuada} (3)

Como (3) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal menera que:

$$B+C=5 \qquad (4)$$

$$A-3B-2C=-11 \qquad (5)$$

$$-2A+2B+C=5 \qquad (6)$$

Si en (2) se sustituye la x por 2, se obtiene:

$$5(2)^2-11(2)+5 \equiv A(2-2)+B(x-1)(2-2)+C(2-1)^2;$$

$$\therefore \quad C=3 \qquad (7)$$

Sustituyendo (7) en (4) y operando aritméticamente, se obtiene:

$$B=2 \qquad (8)$$

Sustituyendo (7), (8) en (5), y operando aritméticamente, se obtiene:

$$A=1 \qquad (9)$$

Sustituyendo (7), (8) y (9) en (1), se obtiene:

$$\frac{5x^2-11x+5}{(x-1)^2(x-2)} \equiv \frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}$$

De tala manera que:

$$\int \frac{5x^2-11x+5}{x^3-4x^2+5x-2}dx=\int \frac{1}{(x-1)^2}dx+\int \frac{2}{x-1}dx+\int \frac{3}{x-2}dx;$$

$$\therefore \quad \int \frac{5x^2-11x+5}{x^3-4x^2+5x-2}dx=-\frac{1}{x-1}+2\ln|x-1|+3\ln|x-2|+c=-\frac{1}{x-1}+\ln(x-1)^2+3\ln|x-2|+c.$$

6. $\displaystyle\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}dx$

Solución:

$$\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}dx = \int \frac{6x^2-2x-1}{x(2x-1)(2x+1)}dx \qquad \{\text{factorizando el denominador}\}$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{6x^2-2x-1}{x(2x-1)(2x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{2x+1} \qquad (1)$$

Se multiplican ambos miembros de (1) por el mínimo común denominador $x(2x-1)(2x+1)$, y se simplifica:

$$6x^2-2x-1 \equiv A(2x-1)(2x+1) + Bx(2x+1) + Cx(2x-1) \qquad (2),$$

$$\Rightarrow \quad 6x^2-2x-1 \equiv 4Ax^2 - A + 2Bx^2 + Bx + 2Cx^2 - Cx \qquad \{\text{destruyendo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow \quad 6x^2-2x-1 \equiv (4A+2B+2C)x^2 + (B-C)x + (-A) \qquad \{\text{asociando de una forma adecuada}\} \qquad (3)$$

Como (3) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal menera que:

$$4A+2B+2C = 6 \Leftrightarrow 2A+B+C = 3 \qquad (4)$$

$$B-C = -2 \qquad (5)$$

$$-A = -1 \Leftrightarrow A = 1 \qquad (6)$$

Sustituyendo (6) en (4) y operando aritméticamente, se obtiene:

$$B+C = 1 \qquad (7)$$

Sumando, término a término, (5) y (7), se obtiene:

$$\begin{array}{rl} B-C = & -2 \\ \underline{B+C =} & \underline{\ \ 1} \\ 2B \quad = & -1 \Leftrightarrow B = -\frac{1}{2} \qquad (8) \end{array}$$

Sustituyendo (8) en (7), y operando aritméticamente, se obtiene:

$$C = \frac{3}{2} \qquad (9)$$

Sustituyendo (6), (8) y (9) en (1), se obtiene:

$$\frac{6x^2-2x-1}{x(2x-1)(2x+1)} \equiv \frac{1}{x} - \frac{1}{2(2x-1)} + \frac{3}{2(2x+1)}$$

De tala manera que:

$$\int \frac{6x^2-2x-1}{x(2x-1)(2x+1)}dx = \int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x-1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{2x+1}dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln|2x-1| + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln|2x+1| + c;$$

$$\therefore \quad \int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}dx = \ln|x| - \frac{1}{4}\ln|2x-1| + \frac{3}{4}\ln|2x+1| + c.$$

7. $\int \frac{dP}{P-P^2}$

Solución:

$$\int \frac{dP}{P-P^2} = \int \frac{dP}{P(1-P)} \qquad \{\text{factorizando el denominador}\}$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{1}{P(1-P)} \equiv \frac{A}{P} + \frac{B}{1-P} \qquad (1)$$

Se multiplican ambos miembros de (1) por el mínimo común denominador $P(1-P)$, y se simplifica:

$$1 \equiv A(1-P) + BP \qquad (2),$$

$$\Rightarrow \quad 1 \equiv A - AP + BP \qquad \{\text{destruyendo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow \quad 1 \equiv (-A+B)P + (A) \qquad \{\text{asociando de una forma adecuada}\} \qquad (3)$$

Como (3) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal menera que:

$$-A + B = 0 \qquad (4)$$

$$A = 1 \qquad (5)$$

Sustituyendo (5) en (4) y operando aritméticamente, se obtiene:

$$B = 1 \qquad (6)$$

Sustituyendo (5) y (6) en (1), se obtiene:

$$\frac{1}{P(1-P)} \equiv \frac{1}{P} + \frac{1}{1-P}$$

De tala manera que:

$$\int \frac{dP}{P-P^2} = \int \frac{1}{P}dP + \int \frac{1}{1-P}dP \Leftrightarrow \int \frac{dP}{P-P^2} = \int \frac{1}{P}dP - \int \frac{1}{P-1}dP,$$

$$\therefore \quad \int \frac{dP}{P-P^2} = \ln P - \ln(P-1) + c.$$

Integración de funciones racionales, por fracciones parciales, cuando el denominador contiene factores cuadráticos

Ejercicios resueltos		
1. $\int \frac{1}{9x^4+x^2}dx$	**2.** $\int \frac{1}{x^3+x^2+x}dx$	**3.** $\int \frac{2x^3+9x}{(x^2+3)(x^2-2x+3)}dx$
4. $\int \frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}dx$	**5.** $\int \frac{(5z^3-z^2+15z-10)dz}{(z^2-2z+5)^2}$	**6.** $\int \frac{3}{x^4+x^2+1}dx$

S o l u c i o n e s

1. $\int \frac{1}{9x^4+x^2}dx$

Solución:

$$\int \frac{1}{9x^4 + x^2}dx = \int \frac{1}{x^2(9x^2+1)}dx \qquad \{\text{factorizando el denominador}\}$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{1}{x^2(9x^2+1)} \equiv \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{9x^2+1} \quad (1),$$

$\Rightarrow \quad 1 \equiv A(9x^2+1) + Bx(9x^2+1) + (Cx+D)x^2$

{multiplicando cada miembro de la identidad por el mínimo común denominador},

$\Rightarrow \quad 1 \equiv 9Ax^2 + A + 9Bx^3 + Bx + Cx^3 + Dx^2 \qquad$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 1 \equiv (9B+C)x^3 + (9A+D)x^2 + Bx + A \quad (2)$

Como (2) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal manera que:

$9B + C = 0 \quad (3)$

$9A + D = 0 \quad (4)$

$B = 0 \quad (5)$

$A = 1 \quad (6)$

Sustituyendo (5) en (3) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$C = 0 \quad (7)$

Sustituyendo (6) en (4) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$D = -9 \quad (8)$

Sustituyendo (5), (6), (7) y (8) en (1), se obtiene:

$$\frac{1}{x^2(9x^2+1)} \equiv \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x} + \frac{0x-9}{9x^2+1} = \frac{1}{x^2} - \frac{9}{9x^2+1}$$

De tal manera que:

$$\int \frac{1}{9x^4+x^2}dx = \int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{9}{9x^2+1}\right)dx = \int \frac{1}{x^2}dx - \int \frac{9dx}{9x^2+1};$$

$$\int \frac{1}{9x^4+x^2}dx = -\frac{1}{x} - 3\tan^{-1}3x + c.$$

Nota: para la observar la obtención de $\int \frac{9dx}{9x^2+1}$ haga clic en el vinculo correspondiente del marco izquierdo de esta ventana (Ejercicio 1).

2. $\int \frac{1}{x^3+x^2+x}dx$

Solución:

$$\int \frac{1}{x^3+x^2+x}dx = \int \frac{1}{x(x^2+x+1)}dx \qquad \{\text{factorizando el denominador}\}$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \qquad (1),$$

$\Rightarrow \qquad 1 \equiv A(x^2+x+1)+(Bx+C)x$

{multiplicando cada miembro de la identidad por el mínimo común denominador},

$\Rightarrow \qquad 1 \equiv Ax^2+Ax+A+Bx^2+Cx \qquad$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \qquad 1 \equiv (A+B)x^2+(A+C)x+A \qquad (2)$

Como (2) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal manera que:

$A+B=0 \qquad (3)$

$A+C=0 \qquad (4)$

$A=1 \qquad (5)$

Sustituyendo (5) en (3) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$B=-1 \qquad (6)$

Sustituyendo (5) en (4) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$C=-1 \qquad (7)$

Sustituyendo (5), (6), y (7) en (1), se obtiene:

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)} \equiv \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

De tal manera que:

$$\int \frac{1}{x^3+x^2+x}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \ln x - \int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx + c,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{x^3+x^2+x}dx = \ln x - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1+1}{x^2+x+1}dx + c = \ln x - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx + c,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{x^3+x^2+x}dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3} + c;$$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{x^3+x^2+x}dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3} + c.$$

Nota: para la observar la obtención de $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$ y de $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$ haga clic en el vinculo correspondiente del marco izquierdo de esta ventana, (Ejercicio25) y (Ejercicio2).

3. $\displaystyle\int \frac{2x^3+9x}{(x^2+3)(x^2-2x+3)}dx$

Solución:

$$\int \frac{2x^3+9x}{(x^2+3)(x^2-2x+3)}dx$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{2x^3+9x}{(x^2+3)(x^2-2x+3)} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+3} \quad (1),$$

$\Rightarrow \quad 2x^3+9x \equiv (Ax+B)(x^2-2x+3)+(Cx+D)(x^2+3)$

{multiplicando cada miembro de la identidad por el mínimo común denominador},

$\Rightarrow \quad 2x^3+9x \equiv Ax^3-2Ax^2+3Ax+Bx^2-2Bx+3B+Cx^3+3Cx+Dx^2+3D$

{destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 2x^3+9x \equiv (A+C)x^3+(-2A+B+D)x^2+(3A-2B+3C)x+(3B+3D) \quad (2)$

Como (2) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal manera que:

$A+C=2 \quad (3)$

$-2A+B+D=0 \quad (4)$

$3A-2B+3C=9 \quad (5)$

$3B+3D=0 \Leftrightarrow B+D=0 \quad (6)$

Sustituyendo (6) en (4) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$A=0 \quad (7)$

Sustituyendo (7) en (3) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$C=2 \quad (8)$

Sustituyendo (7) y (8)en (5) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$B=-3/2 \quad (9)$

Sustituyendo (9) en (6) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$D=3/2 \quad (10)$

Sustituyendo (7), (8), (9) y (10) en (1), se obtiene:

$$\frac{2x^3+9x}{(x^2+3)(x^2-2x+3)} \equiv -\frac{3}{2(x^2+3)} + \frac{4x+3}{2(x^2-2x+3)}$$

De tal manera que:

$$\int \frac{2x^3+9x}{(x^2+3)(x^2-2x+3)}dx = -\frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+3}dx + \frac{1}{2}\int \frac{4x+3}{x^2-2x+3}dx;$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{2x^3+9x}{(x^2+3)(x^2-2x+3)}dx = -\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(2\ln(x^2-2x+3)+\frac{7\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}(x-1)}{2}\right);$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{2x^3+9x}{(x^2+3)(x^2-2x+3)}dx = -\frac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{3} + \ln(x^2-2x+3) + \frac{7\sqrt{2}}{4}\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}(x-1)}{2} + c.$$

4. $\displaystyle\int \frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}dx$

Solución:

$$\int \frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}dx = \int \frac{2x^2+3x+2}{(x^2+2x+2)(x+2)}dx \qquad \{\text{factorizando el denominador}\}$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{2x^2+3x+2}{(x^2+2x+2)(x+2)} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{C}{x+2} \qquad (1),$$

$\Rightarrow \quad 2x^2+3x+2 \equiv (Ax+B)(x+2)+C(x^2+2x+2)$

{multiplicando cada miembro de la identidad por el mínimo común denominador},

$\Rightarrow \quad 2x^2+3x+2 \equiv Ax^2+2Ax+Bx+2B+Cx^2+2Cx+2C$

{destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 2x^2+3x+2 \equiv (A+C)x^2+(2A+B+2C)x+(2B+2C) \qquad (2)$

Como (2) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal manera que:

$A+C=2 \Leftrightarrow 2A+2C=4 \qquad (3)$

$2A+B+2C=3 \Leftrightarrow (2A+2C)+B=3 \qquad (4)$

$2B+2C=2 \Leftrightarrow B+C=1 \qquad (5)$

Sustituyendo (3) en (4) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$B=-1 \qquad (6)$

Sustituyendo (6) en (5) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$C=2 \qquad (7)$

Sustituyendo (7) en (3) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$A=0 \qquad (8)$

Sustituyendo (6), (7) y (8) en (1), se obtiene:

$$\frac{2x^2+3x+2}{(x^2+2x+2)(x+2)} \equiv -\frac{1}{x^2+2x+2} + \frac{2}{x+2}$$

De tal manera que:

$$\int \frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}dx = -\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx + \int \frac{2}{x+2}dx = -\int \frac{1}{(x^2+2x+1)+1}dx + 2\ln|x+2|+c,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}dx = -\int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx + \ln(x+2)^2+c;$$

$$\therefore \quad \int \frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}dx = -\tan^{-1}(x+1)+\ln(x+2)^2+c.$$

5. $\displaystyle\int \frac{(5z^3-z^2+15z-10)dz}{(z^2-2z+5)^2}$

Solución:

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{5z^3 - z^2 + 15z - 10}{(z^2 - 2z + 5)^2} \equiv \frac{Ax + B}{(z^2 - 2z + 5)^2} + \frac{Cx + D}{z^2 - 2z + 5} \qquad (1)$$

Se multiplican ambos miembros de (1) por el mínimo común denominador $(z^2 - 2z + 5)^2$,
y se simplifica:

$$5z^3 - z^2 + 15z - 10 \equiv Az + B + (Cz + D)(z^2 - 2z + 5) \qquad (2),$$

$$\Rightarrow \quad 5z^3 - z^2 + 15z - 10 \equiv Az + B + Cz^3 - 2Cz^2 + 5Cz + Dz^2 - 2Dz + 5D \qquad \{\text{destruyendo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow \quad 5z^3 - z^2 + 15z - 10 \equiv Cz^3 + (-2C + D)z^2 + (A + 5C - 2D)z + (B + 5D)$$

$$\{\text{asociando de una forma adecuada}\} \qquad (3)$$

Como (3) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal menera que:

$$C = 5 \qquad (4)$$

$$-2C + D = -1 \qquad (5)$$

$$A + 5C - 2D = 15 \qquad (6)$$

$$B + 5D = -10 \qquad (7)$$

Sustituyendo (4) en (5) y operando aritméticamente, se obtiene:

$$D = 9 \qquad (8)$$

Sustituyendo (8) en (7), y operando aritméticamente, se obtiene:

$$B = -55 \qquad (9)$$

Sustituyendo (4) y (8) en (6), y operando aritméticamente, se obtiene:

$$A = 8 \qquad (10)$$

Sustituyendo (4), (8), (9) y (10) en (1), se obtiene:

$$\frac{5z^3 - z^2 + 15z - 10}{(z^2 - 2z + 5)^2} \equiv \frac{8z - 55}{(z^2 - 2z + 5)^2} + \frac{5z + 9}{z^2 - 2z + 5}$$

De tal manera que:

$$\int \frac{(5z^3 - z^2 + 15z - 10)dz}{(z^2 - 2z + 5)^2} = \int \frac{8z - 55}{(z^2 - 2z + 5)^2} dz + \int \frac{5z + 9}{z^2 - 2z + 5} dz,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{(5z^3 - z^2 + 15z - 10)dz}{(z^2 - 2z + 5)^2} = 4\int \frac{2z - 55/4}{(z^2 - 2z + 5)^2} dz + \frac{5}{2}\int \frac{2z + 18/5}{z^2 - 2z + 5} dz,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{(5z^3 - z^2 + 15z - 10)dz}{(z^2 - 2z + 5)^2} = 4\int \frac{2z - 2 - 47/4}{(z^2 - 2z + 5)^2} dz + \frac{5}{2}\int \frac{2z - 2 + 28/5}{z^2 - 2z + 5} dz,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{(5z^3 - z^2 + 15z - 10)dz}{(z^2 - 2z + 5)^2} = 4\int \frac{2z - 2}{(z^2 - 2z + 5)^2} dz - 47\int \frac{1}{(z^2 - 2z + 5)^2} dz + \frac{5}{2}\int \frac{2z - 2}{z^2 - 2z + 5} dz + 14\int \frac{1}{z^2 - 2z + 5} dz$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{(5z^3 - z^2 + 15z - 10)dz}{(z^2 - 2z + 5)^2} = -\frac{4}{z^2 - 2z + 5} - 47\int \frac{1}{(z^2 - 2z + 5)^2} + \frac{5}{2}\ln|z^2 - 2z + 5| + 14\int \frac{1}{z^2 - 2z + 5} dz,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{(5z^3 - z^2 + 15z - 10)dz}{(z^2 - 2z + 5)^2} = -\frac{4}{z^2 - 2z + 5} - 47\left(\frac{1}{8}\frac{(z - 1)}{(z^2 - 2z + 5)} + \frac{1}{16}\tan^{-1}\frac{z - 1}{2}\right) + \frac{5}{2}\ln|z^2 - 2z + 5|$$

$$+ 14 \cdot \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{z - 1}{2} + c,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{(5z^3 - z^2 + 15z - 10)dz}{(z^2 - 2z + 5)^2} = -\frac{4}{z^2 - 2z + 5} - \frac{47}{8}\frac{(z - 1)}{(z^2 - 2z + 5)} - \frac{47}{16}\tan^{-1}\frac{z - 1}{2} + \frac{5}{2}\ln|z^2 - 2z + 5|$$

$$+ 7\tan^{-1}\frac{z - 1}{2} + c;$$

$$\therefore \quad \int \frac{(5z^3 - z^2 + 15z - 10)dz}{(z^2 - 2z + 5)^2} = \frac{-32 - 47(z - 1)}{8(z^2 - 2z + 5)} + \frac{-47 + 112}{16}\tan^{-1}\frac{z - 1}{2} + \frac{5}{2}\ln|z^2 - 2z + 5| + c;$$

6. $\int \frac{3}{x^4+x^2+1}dx$

Solución:

$$\int \frac{3}{x^4+x^2+1}dx = \int \frac{3}{x^4+2x^2+1-x^2}dx = \int \frac{3}{(x^2+1)^2-x^2}dx = \int \frac{3}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}dx$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{3}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} \quad (1),$$

$\Rightarrow \quad 3 \equiv (Ax+B)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)$

{multiplicando cada miembro de la identidad por el mínimo común denominador},

$\Rightarrow \quad 3 \equiv Ax^3 - Ax^2 + Ax + Bx^2 - Bx + B + Cx^3 + Cx^2 + Cx + Dx^2 + Dx + D$

{destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 3 \equiv (A+C)x^3 + (-A+B+C+D)x^2 + (A-B+C+D)x + (B+D) \quad (2)$

Como (2) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal manera que:

$A+C=0 \quad (3)$

$-A+B+C+D=0 \quad (4)$

$A-B+C+D=0 \quad (5)$

$B+D=3 \quad (6)$

Sustituyendo (3) en (5) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$-B+D=0 \quad (7)$

Sumando (6) y (7) y despejando, se obtiene:

$D=\frac{3}{2} \quad (8)$

Sustituyendo (8)en (6) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$B=\frac{3}{2} \quad (9)$

Sustituyendo (6) en (4) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$A-C=3 \quad (10)$

Sumando (3) y (10) y despejando, se obtiene:

$A=\frac{3}{2} \quad (11)$

Sustituyendo (11)en (3) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$C=-\frac{3}{2} \quad (9)$

De tal manera que:

$$\frac{3}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} \equiv \frac{\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}}{x^2+x+1} + \frac{-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}}{x^2-x+1} = \frac{3}{2}\left[\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1}\right],$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{3}{x^4+x^2+1}dx = \frac{3}{2}\int\left[\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1}\right]dx = \frac{3}{2}\left[\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx - \int \frac{x-1}{x^2-x+1}dx\right], \ \ldots$$

$$\therefore \quad \int \frac{3}{x^4+x^2+1}dx = \frac{3}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)\right].$$

Integrales en las que aparecen expresiones cuadráticas

De la descomposición de fracciones parciales a veces resultan integrando con expresiones cuadráticas irreductibles. De la integración de este tipo de funciones nos ocuparemos en el siguiente ejercicio resuelto.

Ejercicios resueltos En los siguientes ejercicios evalúe la integral indefinida		
1. $\int \frac{4x+3}{x^2-2x+3}dx$		

S o l u c i o n e s

1. $\int \frac{4x+3}{x^2-2x+3}dx$

Solución:

$$\int \frac{4x+3}{x^2-2x+3}dx = 2\int \frac{2x+3/2}{x^2-2x+3}dx = 2\int \frac{2x-2+2+3/2}{x^2-2x+3}dx = 2\int \frac{2x-2+7/2}{x^2-2x+3}dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{4x+3}{x^2-2x+3}dx = 2\int \frac{2x-2}{x^2-2x+3}dx + 2\int \frac{7/2}{x^2-2x+3}dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{4x+3}{x^2-2x+3}dx = 2\ln(x^2-2x+3) + 7\int \frac{1}{x^2-2x+1+2}dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{4x+3}{x^2-2x+3}dx = 2\ln(x^2-2x+3) + 7\int \frac{1}{(x-1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{4x+3}{x^2-2x+3}dx = 2\ln(x^2-2x+3) + 7\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x-1}{\sqrt{2}} + c;$$

$$\therefore \quad \int \frac{4x+3}{x^2-2x+3}dx = 2\ln(x^2-2x+3) + \frac{7\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}(x-1)}{2} + c.$$

Integrales que producen funciones trigonométricas inversas

Como ya se ha dicho antes, de cada fórmula de derivación se deduce una fórmula correspondiente de integración. De las fórmulas para las derivadas de las funciones trigonométricas inversas, obtenemos el siguiente teorema que da algunas fórmulas de integrales indefinidas:

Teorema:

(i) $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + c, \quad a > 0$$

(ii) $$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + c, \quad a \neq 0$$

(iii) $$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + c, \quad a > 0$$

Ejercicios resueltos Evalúe la integral indefinida:

1. $\int \frac{9dx}{9x^2+1}$	2. $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$	3. $\int \frac{1}{x^2+3}dx$
4. $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$	5. $\int \frac{10}{x^2+1}dx$	

Soluciones

1. $\int \frac{9dx}{9x^2+1}$

Solución:

$$\int \frac{9dx}{9x^2+1} = 3\int \frac{3dx}{(3x)^2+1};$$

$$\therefore \quad \int \frac{9dx}{9x^2+1} = 3\tan^{-1}(3x)+c \qquad \{\text{aplicando la parte (ii) del Teorema}\}.$$

2. $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$

Solución:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2},$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+c \qquad \{\text{aplicando la parte (ii) del Teorema}\};$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3}+c.$$

3. $\int \frac{1}{x^2+3}dx$

Solución:

$$\int \frac{1}{x^2+3}dx = \int \frac{1}{x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}+c \qquad \{\text{aplicando la parte (ii) del Teorema}\};$$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{x^2+3}dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{3}+c.$$

4. $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$

Solución:

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+5} = \int \frac{dx}{(x^2-2x+1)+4} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+2^2},$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x-1}{2}+c \qquad \{\text{aplicando la parte (ii) del Teorema}\}.$$

5. $\int \frac{10}{x^2+1}dx$

Solución:

$$\int \frac{10}{x^2+1}dx = 10\int \frac{1}{x^2+1}dx;$$

$\therefore \quad \int \frac{10}{x^2+1}dx = 10\tan^{-1} x + c \qquad$ {aplicando la parte (ii) del Teorema}.

Miscelánea 1

1. $\int e^{\sqrt{x}}dx$	2. Hallar la longitud del arco de la curva $f(x) = x^3$ del punto (2,8) al punto (5,125)	
3. $\int \frac{\operatorname{sen} x dx}{1+\cos^2 x}$	4. $\int \frac{x}{1+x^4}dx$	5. $\int \frac{x-\sqrt{\tan^{-1} 2x}}{1+4x^2}dx$
6. $\int \frac{x}{\cos x^2}dx$	7. $\int \frac{2+\ln x}{x}dx$	8. $\int \frac{(x-4)dx}{(x-2)(x^2+1)}$
9. $\int x^3\sqrt{4-x^2}dx$	10. $\int \frac{x^2-9}{(x+2)(x^2+5)}$	11. $\int x \operatorname{sen} x^2 dx$
12. $\int \operatorname{sen} 5x dx$	13. $\int (x+1)^2 dx$	14. $\int \frac{x+6}{x+1}dx$
15. $\int 2xe^{-x}dx$	16. $\int \frac{x}{4+x^2}dx$	17. $\int \frac{dx}{x^4+1}$

Soluciones

1. Solución:

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}dx = 2\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

Sea $w = \sqrt{x}, \quad \Rightarrow \quad dw = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx;$

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\int we^{w}dw \quad (1)$$

Ahora, sea:

$$u = w, \quad \Rightarrow \quad du = dw$$

$$dv = e^{w}dw, \quad \Rightarrow \quad v = e^{w}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes, se obtiene:

$$\int we^{w}dw = we^{w} - \int e^{w}dw = we^{w} - e^{w} + c_1 \quad (2)$$

De tal manera que:

$$2\int we^{w}dw = 2(we^{w} - e^{w} + c_1) = 2we^{w} - 2e^{w} + c \quad (3)$$

Pero, $w = \sqrt{x}$; por lo tanto:

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c.$$

2. Solución:

$$f(x) = x^3,$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2$$

Tanto f como f' son funciones polinómicas; por lo que ambas son continuas en todos los reales y, en particular, son continuas en $[2,5]$.

$$L = \int_2^5 \sqrt{1+(3x^2)^2}\,dx = \int_2^5 \sqrt{1+9x^4}\,dx$$

Hallamos el valor aproximado de L aplicando la regla de Simpson, con $n = 6$:

$$L \approx \frac{5-2}{3(6)}[f(2)+4f(2,5)+2f(3)+4f(3,5)+2f(4)+4f(4,5)+f(5)],$$

$$\Rightarrow \quad L \approx \frac{1}{6}[12.0416+75.1066+54.0370+147.0544+96.0208+243.0329+75.0067],$$

$$\Rightarrow \quad L \approx \frac{1}{6}[702.3];$$

$$\therefore \quad L \approx 117.05$$

3. Solución:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x dx}{1+\cos^2 x} \quad (1)$$

Sea

$$u = \cos x, \quad \Rightarrow \quad du = -\operatorname{sen} x dx \Leftrightarrow -du = \operatorname{sen} x dx \quad (2)$$

Sustiutuyendo (2) en (1), se obtiene:

$$\int \frac{-du}{1+u^2} = -\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + C;$$

$$\therefore \quad \int \frac{\operatorname{sen} x dx}{1+\cos^2 x} = \tan^{-1}(\cos x) + C.$$

4. Solución:

$$\int \frac{x}{1+x^4}dx = \int \frac{x}{1+(x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+(x^2)^2} \quad (\clubsuit)$$

Sea $\quad u = x^2 \quad (1)$,

$\Rightarrow \quad du = 2xdx \quad (2)$

Sustituyendo (1) y (2) en ($\clubsuit$), se obtiene :

$$\int \frac{x}{1+(x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}u + C \quad (3);$$

$$\therefore \quad \int \frac{x}{1+(x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}x^2 + C \qquad \{(1) \text{ en } (3)\}.$$

5. Solución:

$$\int \frac{x-\sqrt{\tan^{-1}2x}}{1+4x^2}dx = \int \frac{x}{1+4x^2}dx - \int \frac{\sqrt{\tan^{-1}2x}}{1+4x^2}dx \quad (\clubsuit)$$

Vamos a integrar por separado cada una de las integrles del miembro derecho de ($\clubsuit$) :

$$\int \frac{x}{1+4x^2}dx = \frac{1}{8}\int \frac{8xdx}{1+4x^2} \quad (1)$$

Sea $\quad u = 1+4x^2 \quad (2)$,

$\Rightarrow \quad du = 8xdx \quad (3)$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene :

$$\int \frac{x}{1+4x^2}dx = \frac{1}{8}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{8}\ln u + C = \frac{1}{8}\ln(1+4x^2) + C_1 \quad (4).$$

$$\int \frac{\sqrt{\tan^{-1}2x}}{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{\tan^{-1}2x}\,\frac{2dx}{1+4x^2}dx \quad (5)$$

Sea $\quad u = \tan^{-1}2x \quad (6)$,

$$\Rightarrow \quad du = \frac{dx}{1+4x^2}dx \quad (7)$$

Sustituyendo (6) y (7) en (5), se obtiene :

$$\int \frac{\sqrt{\tan^{-1}2x}}{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + C_2 = \frac{1}{3}(\tan^{-1}2x)^{3/2} + C_2 \quad (8)$$

Sustituyendo (4) y (8) en ($\clubsuit$), se obtiene :

$$\int \frac{x-\sqrt{\tan^{-1}2x}}{1+4x^2}dx = \frac{1}{8}\ln(1+4x^2) + C_1 - \left[\frac{1}{3}(\tan^{-1}2x)^{3/2} + C_2\right];$$

$$\therefore \quad \int \frac{x-\sqrt{\tan^{-1}2x}}{1+4x^2}dx = \frac{1}{8}\ln(1+4x^2) - \frac{1}{3}(\tan^{-1}2x)^{3/2} + C \qquad \{C = C_1 - C_2\}.$$

6. Solución:

$$\int \frac{x}{\cos x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{\cos x^2} \quad (♣)$$

Sea $\quad u = x^2 \quad (1),$

$\Rightarrow \quad du = 2xdx \quad (2)$

Sustituyendo (1) y (2) en (♣), se obtiene :

$$\int \frac{x}{\cos x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\cos u} = \frac{1}{2}\int \sec u = \frac{1}{2}\ln\left|\sec u + \tan u\right| + C \quad (4);$$

$$\therefore \quad \int \frac{x}{\cos x^2}dx = \ln\left|\sec x^2 + \tan x^2\right| + C \qquad \{(1) \text{ en } (4)\}.$$

7. Solución:

$$\int \frac{2+\ln x}{x}dx = \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{\ln x}{x}dx = 2\ln x + \int \ln x\frac{dx}{x} \quad (1)$$

Sea

$u = \ln x \quad (2),$

$\Rightarrow \quad du = \dfrac{dx}{x} \quad (3)$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$\int \frac{2+\ln x}{x}dx = 2\ln x + \int udu = 2\ln x + \int udu = 2\ln x + \frac{1}{2}u^2 + C \quad (5);$$

$$\therefore \quad \int \frac{2+\ln x}{x}dx = 2\ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C \qquad \{(2) \text{ en } (5)\}.$$

8. Solución:

Vamos a expresar el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{(x-4)}{(x-2)(x^2+1)} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \qquad (\spadesuit)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{(x-4)}{(x-2)(x^2+1)} \equiv \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)},$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{(x-4)}{(x-2)(x^2+1)} \equiv \frac{Ax^2+A+Bx^2-2Bx+Cx-2C}{(x-2)(x^2+1)},$$

$$\Rightarrow \qquad (x-4) \equiv (A+B)x^2 + (-2B+C)x + (A-2C) \qquad (1)$$

Como (1) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal manera que:

$$A + B = 0 \Leftrightarrow B = -A \qquad (2)$$

$$-2B + C = 1 \qquad (3)$$

$$A - 2C = -4 \qquad (4)$$

Sustituyendo (2) en (3), se obtiene.

$$-2(-A) + C = 1 \Leftrightarrow 2A + C = 1 \qquad (5)$$

Multiplicamos la ecuación (4) por -2, y la ecuación resultante la sumamos con la (5):

$$\begin{array}{r} -2A + 4C = 8 \\ \underline{\;\;2A \;\;\; + C = 1} \\ 5C = 9 \Leftrightarrow C = \dfrac{9}{5} \qquad (6) \end{array}$$

Sustiutyendo (6) en (4), se obtiene:

$$A - 2\cdot\frac{9}{5} = -4 \Leftrightarrow A = \frac{-20+18}{5} \Leftrightarrow A = -\frac{2}{5} \qquad (7)$$

Sustiutyendo (7) en (2), se obtiene:

$$B = \frac{2}{5} \qquad (8)$$

De tal manetra que:

$$\frac{(x-4)}{(x-2)(x^2+1)} \equiv \frac{-\frac{2}{5}}{x-2} + \frac{\frac{2}{5}x+\frac{9}{5}}{x^2+1} \qquad \{(6),\ (7) \text{ y } (8) \text{ en } (\spadesuit)\},$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{(x-4)}{(x-2)(x^2+1)} \equiv -\frac{2}{5(x-2)} + \frac{2x+9}{5(x^2+1)} \qquad (9)$$

Así

$$\int \frac{(x-4)dx}{(x-2)(x^2+1)} = \int\left(-\frac{2}{5(x-2)} + \frac{2x+9}{5(x^2+1)}\right)dx = \frac{1}{5}\int\left(-\frac{2}{x-2} + \frac{2x+9}{x^2+1}\right)dx,$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{(x-4)dx}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{1}{5}\left(-\int\frac{2}{x-2}dx + \int\frac{2x}{x^2+1}dx + \int\frac{9}{x^2+1}dx\right);$$

$$\therefore \qquad \int \frac{(x-4)dx}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{1}{5}\left(-2\ln(x-2) + \ln(x^2+1) + 9\tan^{-1}x + C\right).$$

9. $\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$

Solución:

$$\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int x^2\sqrt{4-x^2}\,(-2xdx) \qquad \{\text{organizando convenientemente}\} \qquad (\spadesuit)$$

Sea

$u = 4 - x^2 \quad (1),$

$du = -2xdx \quad (2)$

De (1), se deduce que:

$x^2 = 4 - u \quad (3)$

Sustituyendo (1), (2) y (3) en ($\spadesuit$), se obtiene :

$$\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int (4-u)\sqrt{u}\,du = -\frac{1}{2}\int (4-u)u^{1/2}du = -\frac{1}{2}\int (4u^{1/2} - u^{3/2})du,$$

$$\Rightarrow \quad \int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{2}u^{3/2} - 2u^{1/2}\right)du = \frac{1}{2}\times\frac{2}{5}u^{5/2} - 2\times\frac{2}{3}u^{3/2} + c = \frac{1}{5}u^{5/2} - \frac{4}{3}u^{3/2} + c \qquad (\clubsuit)$$

Finalmente, sustituyendo (1) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{5}(4-x^2)^{5/2} - \frac{4}{3}(4-x^2)^{3/2} + c.$$

10. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 9}{(x+2)(x^2+5)}$

Solución:

Vamos a expresar el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{x^2-9}{(x+2)(x^2+5)} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+5} \qquad (\spadesuit)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2-9}{(x+2)(x^2+5)} \equiv \frac{A(x^2+5)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+5)},$$

$$\Rightarrow \quad x^2-9 \equiv A(x^2+5)+(Bx+C)(x+2) \Leftrightarrow x^2-9 \equiv Ax^2+5A+Bx^2+2Bx+Cx+2C,$$

$$\Rightarrow \quad x^2-9 \equiv (A+B)x^2+(2B+C)x+(5A+2C) \qquad (\clubsuit)$$

Como ($\clubsuit$) es una identidad, se cumple que:

$$A+B=1 \Leftrightarrow B=1-A \qquad (1)$$

$$2B+C=0 \qquad (2)$$

$$5A+2C=-9 \qquad (3)$$

Sustituyendo (1) en (2), se obtiene:

$$2(1-A)+C=0 \Leftrightarrow 2-2A+C=0 \Leftrightarrow 2A-C=2 \qquad (4)$$

Multiplicando la ecuación (4) por 2 y, sumando la ecuación resultante con la (3), se obtiene:

$$\begin{array}{l} 4A-2C=\ \ 4 \\ \underline{5A+2C=-9} \\ 9A \qquad\ \ =-5 \Leftrightarrow A=-\dfrac{5}{9} \qquad (5) \end{array}$$

Sustituyendo (5) en (1), se obtiene:

$$B=1-\left(-\frac{5}{9}\right) \Leftrightarrow B=1+\frac{5}{9} \Leftrightarrow B=\frac{14}{9} \qquad (6)$$

Sustituyendo (6) en (2), se obtiene:

$$2\left(\frac{14}{9}\right)+C=0 \Leftrightarrow C=-\frac{28}{9} \qquad (7)$$

Sustituyendo (6), (7) y (8) en ($\spadesuit$), se obtiene:

$$\frac{x^2-9}{(x+2)(x^2+5)} \equiv \frac{-\frac{5}{9}}{x+2} + \frac{\frac{14}{9}x-\frac{28}{9}}{x^2+5} \Leftrightarrow \frac{x^2-9}{(x+2)(x^2+5)} \equiv -\frac{5}{9}\times\frac{1}{(x+2)} + \frac{14}{9}\times\frac{x-2}{x^2+5}$$

De tal manera que.

$$\int \frac{x^2-9}{(x+2)(x^2+5)}dx = \int\left(-\frac{5}{9}\times\frac{1}{(x+2)} + \frac{14}{9}\times\frac{x-2}{x^2+5}\right)dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{x^2-9}{(x+2)(x^2+5)}dx = -\frac{5}{9}\int\frac{1}{(x+2)}dx + \frac{14}{9}\int\frac{x-2}{x^2+5}dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{x^2-9}{(x+2)(x^2+5)}dx = -\frac{5}{9}\ln|x+2| + \frac{14}{9}\left(\int\frac{xdx}{x^2+5} - \int\frac{2}{x^2+5}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{x^2-9}{(x+2)(x^2+5)}dx = -\frac{5}{9}\ln|x+2| + \frac{7}{9}\left(\int\frac{2xdx}{x^2+5} - \int\frac{4}{x^2+5}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{x^2-9}{(x+2)(x^2+5)}dx = -\frac{5}{9}\ln|x+2| + \frac{7}{9}\ln(x^2+5) - \frac{28}{9}\times\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}} + c;$$

$$\therefore \quad \int \frac{x^2-9}{(x+2)(x^2+5)}dx = -\frac{5}{9}\ln|x+2| + \frac{7}{9}\ln(x^2+5) - \frac{28\sqrt{5}}{45}\tan^{-1}\frac{\sqrt{5}x}{5} + c.$$

11. $\int x \operatorname{sen} x^2 dx$

Solución:

$$\int x \operatorname{sen} x^2 dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x^2 (2xdx) \quad (\clubsuit)$$

Sea

$$u = x^2 \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad du = 2xdx \quad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$\int x \operatorname{sen} x^2 dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} u du = \frac{1}{2}(-\cos u) + c = -\frac{1}{2}\cos u + c \quad (3)$$

Finalmente, susutituyendo (1) en (3), se obtiene:

$$\int x \operatorname{sen} x^2 dx = -\frac{1}{2}\cos x^2 + c.$$

12. $\int \operatorname{sen} 5xdx$

Solución:

$$\int \operatorname{sen} 5xdx \quad (\spadesuit)$$

Sea

$$u = 5x, \quad \Rightarrow \quad du = 5dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{5}du \quad (1)$$

Sustituyendo (1) en ($\spadesuit$), obtiene:

$$\int \operatorname{sen} 5xdx = \int \operatorname{sen} u\left(\frac{1}{5}du\right) = \frac{1}{5}\int \operatorname{sen} udu = \frac{1}{5}(-\cos u + c_1);$$

$$\therefore \quad \int \operatorname{sen} 5xdx = -\frac{1}{5}\cos 5x + c \qquad \{u = 5x,\ c = c_1/5\}.$$

13. $\int (x+1)^2 dx$

Solución:

$$\int (x+1)^2 dx \quad (\spadesuit)$$

Sea

$$u = x + 1, \quad \Rightarrow \quad du = dx \quad (1)$$

Sustituyendo (1) en ($\spadesuit$), obtiene:

$$\int (x+1)^2 dx = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + c;$$

$$\therefore \quad \int (x+1)^2 dx = \frac{1}{3}(x+1)^3 + c.$$

14. $\int \frac{x+6}{x+1}dx$

Solución:

$$\int \frac{x+6}{x+1}dx = \int \frac{x+1+5}{x+1}dx = \int \frac{x+1}{x+1}dx + \int \frac{5}{x+1}dx = \int dx + \int \frac{5}{x+1}dx = x + 5\int \frac{1}{x+1}dx \quad (\blacklozenge)$$

Sea

$$u = x+1, \;\Rightarrow\; du = dx \quad (1)$$

Sustituyendo (1) en (♦), obtiene :

$$\int \frac{x+6}{x+1}dx = x + 5\int \frac{1}{u}du = x + 5\ln|u| + c;$$

$$\therefore \quad \int \frac{x+6}{x+1}dx = x + 5\ln|x+1| + c.$$

15. $\int 2xe^{-x}dx$

Solución:

$$\int 2xe^{-x}dx$$

Sea

$$u = 2x, \;\Rightarrow\; du = 2dx$$

$$dv = e^{-x}dx \Leftrightarrow v = -e^{-x}$$

De tal modo, que al aplicar la fórmula de integración por partes, $\int udv = uv - \int vdu$, se obtiene:

$$\int 2xe^{-x}dx = -2xe^{-x} - \int -e^{-x}2dx = -2xe^{-x} + 2\int e^{-x}dx;$$

$$\therefore \quad \int 2xe^{-x}dx = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + c.$$

16. $\int \frac{x}{4+x^2}dx$

Solución:

$$\int \frac{xdx}{4+x^2} \quad (\blacklozenge)$$

Sea

$$u = 4+x^2, \;\Rightarrow\; du = 2xdx \Leftrightarrow xdx = \frac{1}{2}du \quad (1)$$

Sustituyendo (1) en (♦), se obtiene:

$$\int \frac{xdx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln u + c;$$

$$\therefore \quad \int \frac{xdx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\ln(4+x^2) + c.$$

17. $\int \frac{dx}{x^4+1}$

Solución:

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \int \frac{1}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}dx \qquad \{\text{factorizando}\}$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{1}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1} \qquad (1),$$

$\Rightarrow \qquad 1 \equiv (Ax+B)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)+(Cx+D)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)$

{multiplicando cada miembro de la identidad por el mínimo común denominador},

$\Rightarrow \qquad 1 \equiv Ax^3-\sqrt{2}Ax^2+Ax+Bx^2-\sqrt{2}Bx+B+Cx^3+\sqrt{2}Cx^2+Cx+Dx^2+\sqrt{2}Dx+D$

{destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \qquad 1 \equiv (A+C)x^3+(-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D)x^2+(A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D)x+(B+D) \qquad (2)$

Como (2) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal manera que:

$A+C=0 \qquad (3)$

$-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D=0 \qquad (4)$

$A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D=0 \qquad (5)$

$B+D=1 \qquad (6)$

Sustituyendo (3) en (5) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$-B+D=0 \qquad (7)$

Sumando (6) y (7) y despejando, se obtiene:

$D=\frac{1}{2} \qquad (8)$

Sustituyendo (8) en (6) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$B=\frac{1}{2} \qquad (9)$

Sustituyendo (6) en (4) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$A-C=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (10)$

Sumando (3) y (10) y despejando, se obtiene:

$A=\frac{\sqrt{2}}{4} \qquad (11)$

Sustituyendo (11) en (3) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$C=-\frac{\sqrt{2}}{4} \qquad (9)$

De tal manera que:

$$\frac{1}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)} \equiv \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1},$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\int\left[\frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{2x-2\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right]dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\int \frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx - \int \frac{2x-2\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx\right],$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\int \frac{2x+\sqrt{2}+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx - \int \frac{2x-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx\right],$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx + \int \frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \int \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx + \int \frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx\right],$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\ln\left|x^2+\sqrt{2}x+1\right| + \int \frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} - \ln\left|x^2-\sqrt{2}x+1\right| - \int \frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}dx\right],$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\ln\left|x^2+\sqrt{2}x+1\right| + \sqrt{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \ln\left|x^2-\sqrt{2}x+1\right| - \sqrt{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}dx\right],$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\ln\left|x^2+\sqrt{2}x+1\right| + \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) - \ln\left|x^2-\sqrt{2}x+1\right| - \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\right],$$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\ln\left|x^2+\sqrt{2}x+1\right| + 2\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right) - \ln\left|x^2-\sqrt{2}x+1\right| - 2\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x-1\right)\right]+c.$$

Miscelánea 2

1. $\int \frac{4dx}{e^{2x}-4}$	**2.** $\int \frac{dx}{e^{2x}+1}$	**3.** $\int \frac{\tan x+1}{\tan^2 x-1}dx$
4. $\int (\sec x+\tan x)^2 dx$	**5.** $\int \sec^4 x\cos^3 x dx$	**6.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{x}}$
7. $\int \frac{x^4+1}{x^5+3x}dx$		

S o l u c i o n e s

1. $\int \frac{4dx}{e^{2x}-4}$

Solución:

$$\int \frac{4dx}{e^{2x}-4} = \int \frac{4e^{x}dx}{e^{3x}-4e^{x}} \qquad \{\text{multiplicando tanto el numerador como el denominador por } e^{x}\} \qquad (1)$$

Sea

$$u = e^{x}, \ \Rightarrow \ du = e^{x}dx \qquad (2)$$

Sutituyendo (2) en (1), se obtiene:

$$\int \frac{4e^{x}dx}{e^{3x}-4e^{x}} = \int \frac{4du}{u^{3}-4u} = \int \frac{4du}{u(u^{2}-4)} = \int \frac{4du}{u(u-2)(u+2)} \qquad (\spadesuit)$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{4}{u(u-2)(u+2)} \equiv \frac{A}{u} + \frac{B}{u-2} + \frac{C}{u+2} \qquad (3)$$

Se multiplican ambos miembros de (3) por el mínimo común denominador $u(u-2)(u+2)$, y se simplifica:

$$4 \equiv A(u-2)(u+2) + Bu(u+2) + Cu(u-2) \qquad (4),$$

$$\Rightarrow \qquad 4 \equiv Au^{2} - 4A + Bu^{2} + 2Bu + Cu^{2} - 2Cu \qquad \{\text{destruyendo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow \qquad 4 \equiv (A+B+C)u^{2} + (2B-2C)u - 4A \qquad \{\text{asociando de una forma adecuada}\} \qquad (5)$$

Como (5) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal menera que:

$$A+B+C=0 \qquad (6)$$

$$2B-2C=0 \Leftrightarrow B-C=0 \qquad (7)$$

$$-4A=4 \Leftrightarrow A=-1 \qquad (8)$$

Sustituyendo (8) en (6) , se obtiene:

$$-1+B+C=0 \Leftrightarrow B+C=1 \qquad (9)$$

Sumando (7) y (9), se obtiene:

$$\begin{array}{l} B-C=0 \\ \underline{B+C=1} \\ 2B \qquad =1 \Leftrightarrow B=1/2 \qquad (10) \end{array}$$

Sustituyendo (10) en (7), se obtiene:

$$1/2 - C = 0 \Leftrightarrow C = 1/2 \qquad (11)$$

Ahora, sustituyendo (8), (10) y (11) en (3), se obtiene:

$$\int \frac{4du}{u(u-2)(u+2)} = \int \left(-\frac{1}{u} + \frac{1}{2(u-2)} + \frac{1}{2(u+2)}\right)du = -\ln u + \frac{1}{2}\ln(u-2) + \frac{1}{2}\ln(u+2) + c,$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{4du}{u(u-2)(u+2)} = -\frac{2}{2}\ln u + \frac{1}{2}\ln(u-2) + \frac{1}{2}\ln(u+2) + c = -\frac{1}{2}\ln u^{2} + \frac{1}{2}\ln(u-2) + \frac{1}{2}\ln(u+2) + c,$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{4e^{x}dx}{e^{3x}-4e^{x}} = \int \frac{4du}{u(u-2)(u+2)} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(u-2)(u+2)}{u^{2}}\right) + c = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u^{2}-4}{u^{2}}\right) + c \qquad (12)$$

Finalmente, sustituyendo (2) en (12), se obtiene:

$$\int \frac{4e^{x}dx}{e^{3x}-4e^{x}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{2x}-4}{e^{2x}}\right) + c.$$

2. $\int \frac{dx}{e^{2x}+1}$

Solución:

$$\int \frac{dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{e^{x}dx}{e^{3x}+e^{x}} \qquad \{\text{multiplicando tanto el numerador como el denominador por } e^{x}\} \quad (1)$$

Sea

$$u = e^{x}, \;\Rightarrow\; du = e^{x}dx \quad (2)$$

Sutituyendo (2) en (1), se obtiene:

$$\int \frac{e^{x}dx}{e^{3x}+e^{x}} = \int \frac{du}{u^{3}+u} = \int \frac{du}{u(u^{2}+1)} \quad (3)$$

Expresemos el integrando en (3) como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{1}{u(u^{2}+1)} \equiv \frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{u^{2}+1} \quad (4)$$

Se multiplican ambos miembros de (4) por el mínimo común denominador $u(u^{2}+1)$, y se simplifica:

$$1 \equiv A(u^{2}+1) + (Bu+C)u \quad (5),$$

$$\Rightarrow \quad 1 \equiv Au^{2} + A + Bu^{2} + Cu \qquad \{\text{destruyendo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow \quad 1 \equiv (A+B)u^{2} + Cu + A \qquad \{\text{asociando de una forma adecuada}\} \quad (6)$$

Como (6) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal menera que:

$$A+B=0 \quad (7)$$

$$C=0 \quad (8)$$

$$A=1 \quad (9)$$

Sustituyendo (8) en (7) , se obtiene:

$$1+B=0 \Leftrightarrow B=-1 \quad (10)$$

Ahora, sustituyendo (8), (10) y (10) en (4), se obtiene:

$$\int \frac{du}{u(u^{2}+1)} = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^{2}+1}\right)du = \int \frac{1}{u}du - \frac{1}{2}\int \frac{2udu}{u^{2}+1} = \ln u - \frac{1}{2}\ln\left(u^{2}+1\right) + c,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{du}{u(u^{2}+1)} = \frac{2}{2}\ln u - \frac{1}{2}\ln\left(u^{2}+1\right) + c = \frac{1}{2}\ln u^{2} - \frac{1}{2}\ln\left(u^{2}+1\right) + c = \frac{1}{2}\ln\frac{u^{2}}{u^{2}+1} + c \quad (11)$$

Finalmente, sustituyendo (2) en (11), se obtiene:

$$\int \frac{dx}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} + c.$$

3. $\displaystyle\int \frac{\tan x + 1}{\tan^2 x - 1} dx$

Solución:

$$\int \frac{\tan x + 1}{\tan^2 x - 1} dx = \int \frac{\tan x + 1}{(\tan x + 1)(\tan x - 1)} dx = \int \frac{1}{\tan x - 1} dx = \int \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x(\tan x - 1)} dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{\tan x + 1}{\tan^2 x - 1} dx = \int \frac{\sec^2 x dx}{(\tan^2 x + 1)(\tan x - 1)} \quad (1)$$

Sea

$$u = \tan x, \quad \Rightarrow \quad du = \sec^2 x dx \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), se obtiene:

$$\int \frac{\tan x + 1}{\tan^2 x - 1} dx = \int \frac{du}{(u^2 + 1)(u - 1)} \quad (3)$$

Expresemos el integrando en (3) como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{1}{(u^2 + 1)(u - 1)} \equiv \frac{Au + B}{u^2 + 1} + \frac{C}{u - 1} \qquad (4)$$

Se multiplican ambos miembros de (4) por el mínimo común denominador $(u^2 + 1)(u - 1)$, y se simplifica:

$$1 \equiv (Au + B)(u - 1) + C(u^2 + 1) \qquad (5),$$

$$\Rightarrow \quad 1 \equiv Au^2 - Au + Bu - B + Cu^2 + C \qquad \{\text{destruyendo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow \quad 1 \equiv (A + C)u^2 + (-A + B)u + (-B + C) \qquad \{\text{asociando de una forma adecuada}\} \quad (6)$$

Como (6) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal menera que:

$$A + C = 0 \qquad (7)$$

$$-A + B = 0 \qquad (8)$$

$$-B + C = 1 \qquad (9)$$

Sumando, término a término, (7) y (8), se obtiene:

$$\begin{array}{r} A + C = 0 \\ \underline{-A + B = 0} \\ B + C = 0 \end{array} \quad (10)$$

Sumando, término a término, (9) y (10), se obtiene:

$$\begin{array}{r} -B + C = 1 \\ \underline{B + C = 0} \\ 2C = 1 \Leftrightarrow C = 1/2 \end{array} \quad (11)$$

Sustituyendo (11) en (7) , se obtiene:

$$A + 1/2 = 0 \Leftrightarrow A = -1/2 \quad (12)$$

Sustituyendo (12) en (8) , se obtiene:

$$-(-1/2) + B = 0 \Leftrightarrow 1/2 + B = 0 \Leftrightarrow B = -1/2 \quad (13)$$

Ahora, sustituyendo (11), (12) y (13) en (4), se obtiene:

$$\frac{1}{(u^2 + 1)(u - 1)} \equiv \frac{-1/2u - 1/2}{u^2 + 1} + \frac{1/2}{u - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{(u^2 + 1)(u - 1)} \equiv \qquad (14)$$

Al sustituir (14) en (3), se obtiene:

$$\int \frac{\tan x+1}{\tan^2 x-1}dx = \int \frac{du}{(u^2+1)(u-1)} = \int\left(-\frac{u+1}{2(u^2+1)}+\frac{1}{2(u-1)}\right)du = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{u+1}{u^2+1}\right)du,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{\tan x+1}{\tan^2 x-1}dx = \int \frac{du}{(u^2+1)(u-1)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{u}{u^2+1}-\frac{1}{u^2+1}\right)du,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{\tan x+1}{\tan^2 x-1}dx = \int \frac{du}{(u^2+1)(u-1)} = \frac{1}{2}\left(\ln(u-1)-\frac{1}{2}\ln(u^2+1)-\arctan(u)\right) \quad (15)$$

Por último, sustituyendo (2) en (15), se obtiene:

$$\int \frac{\tan x+1}{\tan^2 x-1}dx = \frac{1}{2}\left(\ln(\tan x-1)-\frac{1}{2}\ln(\tan^2 x+1)-\arctan(\tan x)\right);$$

$$\therefore \quad \int \frac{\tan x+1}{\tan^2 x-1}dx = \frac{1}{2}\left(\ln(\tan x-1)-\frac{1}{2}\ln(\tan^2 x+1)-x\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(\tan x-1)-\frac{1}{2}\ln(\sec^2 x)-x\right).$$

4. $\int (\sec x+\tan x)^2 dx$

Solución:

$$\int (\sec x+\tan x)^2 dx = \int (\sec^2 x+2\sec x\tan x+\tan^2 x)dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int (\sec x+\tan x)^2 dx = \int \sec^2 x dx+\int 2\sec x\tan x dx+\int \tan^2 x dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int (\sec x+\tan x)^2 dx = \tan x+2\sec x+\tan x-x+c = 2(\tan x+\sec x)-x+c.$$

5. $\int \sec^4 x\cos^3 x dx$

Solución:

$$\int \sec^4 x\cos^3 x dx = \int \frac{1}{\cos^4 x}\cos^3 x dx = \int \frac{1}{\cos x}dx = \int \sec x dx = \ln(\sec x+\tan x).$$

Haz clic sobre el enlace en este ejercicio para observar la obtención de $\int \sec x dx$ (Numeral 17).

7. $\int \frac{x^4+1}{x^5+3x}dx$

Solución:

$$\int \frac{x^4+1}{x^5+3x}dx = \frac{1}{5}\left[\int \frac{5x^4+3}{x^5+3x}dx + \int \frac{2}{x^5+3x}dx\right] \quad (\blacklozenge)$$

Hallemos:

$$\int \frac{(5x^4+3)dx}{x^5+3x} \quad (1)$$

Sea $u = x^5+3x, \Rightarrow du = (5x^4+3)dx \quad (2)$

Sustituyendo (2) en (1), se obtiene:

$$\int \frac{du}{u} = \ln u;$$

$$\int \frac{(5x^4+3)dx}{x^5+3x} = \ln(x^5+3x) \quad (3)$$

Hallemos:

$$\int \frac{2}{x^5+3x}dx = \int \frac{2}{x(x^4+3)}dx \quad (4)$$

Vamos a expresar el integrando en (4) como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{2}{x(x^4+3)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx^3+Cx^2+Dx+E}{x^4+3} \quad (5) \Leftrightarrow 2 \equiv A(x^4+3)+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex,$$

$\Rightarrow \quad 2 \equiv (A+B)x^4+Cx^3+Dx^2+Ex+3A;$ de tal modo que:

$A+B=0 \quad (6)$

$C=0 \quad (7)$

$D=0 \quad (8)$

$E=0 \quad (9)$

$3A=2 \Leftrightarrow A=\frac{2}{3} \quad (10)$

De (6) y (10), se deduce que:

$B=-\frac{2}{3} \quad (11)$

Sustituyendo (7), (8), (9), (10) y (11) en (5), se obtiene:

$$\frac{2}{x(x^4+3)} \equiv \frac{2}{3x} - \frac{2x^3}{3(x^4+3)} \quad (12)$$

De tal modo que:

$$\int \frac{2}{x(x^4+3)}dx = \int \frac{2}{3x}dx - \int \frac{2x^3}{3(x^4+3)}dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{6}\int \frac{4x^3dx}{x^4+3} \quad \{(12) \text{ en } (4)\},$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{2}{x(x^4+3)}dx = \frac{2}{3}\ln x - \frac{1}{6}\ln(x^4+3) \quad (13)$$

Sustituyendo (3) y (13) en ($\blacklozenge$) y adicionando la constante de integración, se obtiene:

$$\int \frac{x^4+1}{x^5+3x}dx = \frac{1}{5}\left[\ln(x^5+3x) + \frac{2}{3}\ln x - \frac{1}{6}\ln(x^4+3)\right] + c.$$

Miscelánea 3

En los siguientes ejercicios deduzca las fórmulas de reducción dadas:

1. $\int (x^2-a^2)^m dx = \dfrac{x\left(x^2-a^2\right)^m}{2m+1} - \dfrac{2ma^2}{2m+1}\int (x^2-a^2)^{m-1}dx,\ m \neq -1/2$

2. $\int (a^2 \pm x^2)^m dx = \dfrac{x\left(a^2 \pm x^2\right)^m}{2m+1} + \dfrac{2ma^2}{2m+1}\int (a^2 \pm x^2)^{m-1}dx,\ m \neq -1/2$

3. $\int x^m e^{ax} dx = \dfrac{1}{a}x^m e^{ax} - \dfrac{m}{a}\int x^{m-1}e^{ax}dx$

4. $\int \operatorname{sen}^m x\cos^n x\,dx = \dfrac{\operatorname{sen}^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n} + \dfrac{n-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^m x\cos^{n-2}x\,dx$

Soluciones

1. $\int (x^2-a^2)^m dx = \dfrac{x\left(x^2-a^2\right)^m}{2m+1} - \dfrac{2ma^2}{2m+1}\int (x^2-a^2)^{m-1}dx,\ m \neq -1/2$

Solución:

$$\int (x^2-a^2)^m dx \qquad (1)$$

$$\int v\,du = uv - \int u\,dv : \text{ fórmula de integración por partes} \qquad (2)$$

Sea

$$\left.\begin{aligned} u &= (x^2-a^2)^m, \ \Rightarrow\ du = 2mx(x^2-a^2)^{m-1}dx \\ dv &= dx, \ \Rightarrow\ v = x \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3), obtenidas a partir de (1), en la fórmula de integración por partes (2), se obtiene:

$$\int (x^2-a^2)^m dx = x(x^2-a^2)^m - \int 2mx^2(x^2-a^2)^{m-1}dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int (x^2-a^2)^m dx = x(x^2-a^2)^m - 2m\int (x^2-a^2+a^2)(x^2-a^2)^{m-1}dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int (x^2-a^2)^m dx = x(x^2-a^2)^m - 2m\left[\int (x^2-a^2)(x^2-a^2)^{m-1}dx + \int a^2(x^2-a^2)^{m-1}dx\right],$$

$$\Rightarrow \quad \int (x^2-a^2)^m dx = x(x^2-a^2)^m - 2m\left[\int (x^2-a^2)^m dx + a^2\int (x^2-a^2)^{m-1}dx\right],$$

$$\Rightarrow \quad \int (x^2-a^2)^m dx = x(x^2-a^2)^m - 2m\int (x^2-a^2)^m dx - 2ma^2\int (x^2-a^2)^{m-1}dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int (x^2-a^2)^m dx + 2m\int (x^2-a^2)^m dx = x(x^2-a^2)^m - 2ma^2\int (x^2-a^2)^{m-1}dx,$$

$$\Rightarrow \quad (2m+1)\int (x^2-a^2)^m dx = x(x^2-a^2)^m - 2ma^2\int (x^2-a^2)^{m-1}dx;$$

$$\therefore \quad \int (x^2-a^2)^m dx = \frac{x(x^2-a^2)^m}{2m+1} - \frac{2ma^2}{2m+1}\int (x^2-a^2)^{m-1}dx.$$

2. $\int (a^2 \pm x^2)^m dx = \dfrac{x(a^2 \pm x^2)^m}{2m+1} + \dfrac{2ma^2}{2m+1}\int (a^2 \pm x^2)^{m-1}dx,\ m \neq -1/2$

Solución:

$$\int (a^2 \pm x^2)^m dx \quad (1)$$

$$\int vdu = uv - \int udv : \text{fórmula de integración por partes} \quad (2)$$

Sea

$$\left.\begin{array}{l} u = (a^2 \pm x^2)^m, \ \Rightarrow \ du = \pm 2mx(a^2 \pm x^2)^{m-1}dx \\ dv = dx, \ \Rightarrow \ v = x \end{array}\right\} \quad (3)$$

Sustituyendo las ecuaciones en (3), obtenidas a partir de (1), en la fórmula de integración por partes (2), se obtiene:

$$\int (a^2 \pm x^2)^m dx = x(a^2 \pm x^2)^m \mp \int 2mx^2 (a^2 \pm x^2)^{m-1}dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int (a^2 \pm x^2)^m dx = x(a^2 \pm x^2)^m \mp 2m\int (a^2 \pm x^2 - a^2)(a^2 \pm x^2)^{m-1}dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int (a^2 \pm x^2)^m dx = x(a^2 \pm x^2)^m \mp 2m\left[\int (a^2 \pm x^2)(a^2 \pm x^2)^{m-1}dx - a^2\int (a^2 \pm x^2)^{m-1}dx\right],$$

$$\Rightarrow \quad \int (a^2 \pm x^2)^m dx = x(a^2 \pm x^2)^m \mp 2m\int (a^2 \pm x^2)(a^2 \pm x^2)^{m-1}dx \pm 2ma^2\int (a^2 \pm x^2)^{m-1}dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int (a^2 \pm x^2)^m dx = x(a^2 \pm x^2)^m \mp 2m\int (a^2 \pm x^2)^m dx \pm 2ma^2\int (a^2 \pm x^2)^{m-1}dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int (a^2 \pm x^2)^m dx \pm 2m\int (a^2 \pm x^2)^m dx = x(a^2 \pm x^2)^m \pm 2ma^2\int (a^2 \pm x^2)^{m-1}dx,$$

$$\Rightarrow \quad (1 \pm 2m)\int (a^2 \pm x^2)^m dx = x(a^2 \pm x^2)^m \pm 2ma^2\int (a^2 \pm x^2)^{m-1}dx;$$

$$\therefore \quad \int (a^2 \pm x^2)^m dx = \frac{x(a^2 \pm x^2)^m}{(1 \pm 2m)} \pm \frac{2ma^2}{(1 \pm 2m)}\int (a^2 \pm x^2)^{m-1}dx.$$

3. $\int x^m e^{ax} dx = \dfrac{1}{a}x^m e^{ax} - \dfrac{m}{a}\int x^{m-1}e^{ax}dx$

Solución:

$$\int x^m e^{ax}dx \quad (1)$$

$$\int vdu = uv - \int udv : \text{fórmula de integración por partes} \quad (2)$$

Sea

$$\left.\begin{array}{l} u = x^m, \ \Rightarrow \ du = mx^{m-1} \\ dv = e^{ax}dx, \ v = \dfrac{1}{a}e^{ax} \end{array}\right\} \quad (3)$$

Sustituyendo las ecuaciones en (3), obtenidas a partir de (1), en la fórmula de integración por partes (2), se obtiene:

$$\int x^m e^{ax}dx = \frac{1}{a}x^m e^{ax} - \int \frac{m}{a}e^{ax}x^{m-1}dx;$$

$$\therefore \quad \int x^m e^{ax}dx = \frac{1}{a}x^m e^{ax} - \frac{m}{a}\int x^{m-1}e^{ax}dx.$$

4. $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x dx$

Solución:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx \Leftrightarrow \int \cos^{n-1} x \operatorname{sen}^m x \cos x dx \quad (1)$$

$$\int v du = uv - \int u dv : \text{ fórmula de integración por partes} \quad (2)$$

Sea

$$\left.\begin{aligned} u &= \cos^{n-1} x, \Rightarrow du = -(n-1)\cos^{n-2} x \operatorname{sen} x dx \\ dv &= \operatorname{sen}^m x \cos x dx, \Rightarrow v = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Sustituyendo las ecuaciones en (3), obtenidas a partir de (1), en la fórmula de integración por partes (2), se obtiene:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = \cos^{n-1} x \times \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1} + \int \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1}(n-1)\cos^{n-2} x \operatorname{sen} x dx,$$

$$\Rightarrow \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \operatorname{sen}^{m+2} x \cos^{n-2} x dx \quad (4)$$

Se tiene que

$$\operatorname{sen}^{m+2} x \cos^{n-2} = \operatorname{sen}^m x \operatorname{sen}^2 x \cos^{n-2} = \operatorname{sen}^m x(1-\cos^2 x)\cos^{n-2},$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^{m+2} x \cos^{n-2} = \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} - \operatorname{sen}^m x \cos^n \quad (5)$$

Sustituyendo (5) en (4), se obtiene:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\left[\int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} dx - \int \operatorname{sen}^m x \cos^n dx\right],$$

$$\Rightarrow \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} dx - \frac{n-1}{m+1}\int \operatorname{sen}^m x \cos^n dx,$$

$$\Rightarrow \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx + \frac{n-1}{m+1}\int \operatorname{sen}^m x \cos^n dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} dx,$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{n-1}{m+1}\right)\int \operatorname{sen}^m x \cos^n dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} dx,$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m+1+n-1}{m+1}\right)\int \operatorname{sen}^m x \cos^n dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} dx,$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m+n}{m+1}\right)\int \operatorname{sen}^m x \cos^n dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} dx,$$

$$\Rightarrow (m+n)\int \operatorname{sen}^m x \cos^n dx = \operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} dx;$$

$$\therefore \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x dx.$$

.Tablas de integrales

1. $\int k\,f(u)du = k\int f(u)du$ 2. $\int [f(u)+g(u)+\ldots]du = \int f(u)du + \int g(u)du + \ldots$ 3. $\int u dv = uv - \int v du$	4. $\int du = u + c$ 5. $\int k du = ku + c$ 6. $\int u^n du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + c;\ n \neq -1$ 7. $\int u^{-1}du = \int \frac{1}{n}du = \ln\|u\| + c$
8. $\int e^u du = e^u + c$ 9. $\int a^u du = \frac{1}{\ln a}a^u + c$ 10. $\int ue^u du = e^u(u-1) + c$ 11. $\int u^n e^u du = u^n e^u - n\int u^{n-1}e^u$ 12. $\int u^n a^u du = \frac{u^n a^u}{\ln a} - \frac{n}{\ln a}\int u^{n-1}a^u$ 13. $\int \frac{e^u}{u^n}du = -\frac{e^u}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{e^u}{u^{n-1}}du$ 14. $\int \frac{a^u}{u^n}du = -\frac{a^u}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{\ln a}{n-1}\int \frac{a^u}{u^{n-1}}du$	15. $\int \ln u du = u\ln u - u + c$ 16. $\int u^n \ln u du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}((n+1)\ln u - 1) + c$ 17. $\int \frac{1}{u\ln u}du = \ln\|\ln u\| + c$

18. $$\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + c$$

19. $$\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + c$$

20. $$\int \tan u\,du = \ln\left|\sec u\right| + c$$

21. $$\int \cot u\,du = \ln\left|\operatorname{sen} u\right| + c$$

22. $$\int \sec u\,du = \ln\left|\sec u + \tan u\right| + c$$

23. $$\int \csc u\,du = \ln\left|\csc u - \cot u\right| + c$$

24. $$\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + c$$

25. $$\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + c$$

26. $$\int \tan^2 u\,du = \tan u - u + c$$

27. $$\int \cot^2 u\,du = -\cot u - u + c$$

28. $$\int \sec^2 u\,du = \tan u + c$$

29. $$\int \csc^2 u\,du = -\cot u + c$$

30. $$\int \operatorname{sen}^3 u\,du = -\frac{1}{3}(2 + \operatorname{sen}^2 u)\cos u + c$$

31. $$\int \cos^3 u\,du = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 u)\operatorname{sen} u + c$$

32. $$\int \tan^3 u\,du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln\left|\cos u\right| + c$$

33. $$\int \cot^3 u\,du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln\left|\operatorname{sen} u\right| + c$$

34. $$\int \sec^3 u\,du = \frac{1}{2}\sec u\tan u + \frac{1}{2}\ln\left|\sec u + \tan u\right| + c$$

35. $$\int \csc^3 u\,du = -\frac{1}{2}\csc u\cot u + \frac{1}{2}\ln\left|\csc u - \cot u\right| + c$$

36. $$\int \sec u\tan u\,du = \sec u + c$$

37. $$\int \csc u\cot u\,du = -\csc u + c$$

38. $$\int e^{au}\operatorname{sen} nu\,du = \frac{e^{au}}{a^2 + n^2}(a\operatorname{sen} nu - n\cos nu) + c$$

39. $$\int e^{au}\cos nu\,du = \frac{e^{au}}{a^2 + n^2}(a\cos nu + n\operatorname{sen} nu) + c$$

40. $$\int \operatorname{sen}^n u\,du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u\cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\,du$$

41. $$\int \cos^n u\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u\operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\,du$$

42. $$\int \tan^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\,du$$

43. $$\int \cot^n u\,du = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\,du$$

44. $$\int \sec^n u\,du = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} u\tan u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\,du$$

45. $$\int \csc^n u\,du = -\frac{1}{n-1}\csc^{n-2} u\cot u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\,du$$

46. $$\int u\operatorname{sen} u\,du = \operatorname{sen} u - u\cos u + c$$

47. $$\int u\cos u\,du = \cos u + u\operatorname{sen} u + c$$

48. $$\int u^2\operatorname{sen} u\,du = 2u\operatorname{sen} u + (2 - u^2)\cos u + c$$

49. $$\int u^2\cos u\,du = 2u\cos u + (u^2 - 2)\operatorname{sen} u + c$$

50. $$\int u^n\operatorname{sen} u\,du = -u^n\cos u + n\int u^{n-1}\cos u$$

51. $$\int u^n\cos u\,du = u^n\operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u$$

52. $$\int \operatorname{sen} mu\operatorname{sen} nu\,du = -\frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{2(m-n)} + c$$

53. $$\int \operatorname{sen} mu\cos nu\,du = -\frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)} + c$$

54. $$\int \cos mu\cos nu\,du = \frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{2(m-n)} + c$$

55. $$\int \operatorname{sen}^m u\cos^n u\,du = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} u\cos^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^{m-2} u\cos^n u\,du$$

56. $\int \operatorname{sen}^{-1} u\,du = u \operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + c$

57. $\int \cos^{-1} u\,du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + c$

58. $\int \tan^{-1} u\,du = u \tan^{-1} u - \ln \sqrt{1+u^2} + c$

59. $\int \cot^{-1} u\,du = u \cot^{-1} u + \ln \sqrt{1+u^2} + c$

60. $\int \sec^{-1} u\,du = u \sec^{-1} u - \ln \left|u + \sqrt{u^2-1}\right| + c$

$= u \sec^{-1} u - \cosh^{-1} u + c$

61. $\int \csc^{-1} u\,du = u \csc^{-1} u + \ln \left|u + \sqrt{u^2-1}\right| + c$

$= u \csc^{-1} u + \cosh^{-1} u + c$

62. $\int u \operatorname{sen}^{-1} u\,du = \frac{2u^2-1}{4} \operatorname{sen}^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + c$

63. $\int u \cos^{-1} u\,du = \frac{2u^2-1}{4} \cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + c$

64. $\int u \tan^{-1} u\,du = \frac{u^2+1}{2} \tan^{-1} u - \frac{u}{2} + c$

65. $\int u^n \operatorname{sen}^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left(u^{n+1} \operatorname{sen}^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}du}{\sqrt{1-u^2}}\right),$

$n \neq -1$

66. $\int u^n \cos^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left(u^{n+1} \cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1}du}{\sqrt{1-u^2}}\right),$

$n \neq -1$

67. $\int u^n \tan^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left(u^{n+1} \tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}du}{1+u^2}\right),$

$n \neq -1$

68. $\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + c$

69. $\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + c$

70. $\int \tanh u\,du = \ln |\cosh u| + c$

71. $\int \coth u\,du = \ln |\operatorname{senh} u| + c$

72. $\int \operatorname{sech} u\,du = \tan^{-1}(\operatorname{senh} u) + c$

73. $\int \operatorname{csch} u\,du = \ln \left|\tanh \tfrac{1}{2}u\right| + c$

74. $\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u + c$

75. $\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + c$

76. $\int \operatorname{sech} u \tanh u\,du = -\operatorname{sech} u + c$

77. $\int \operatorname{csch} u \coth u\,du = -\operatorname{csch} u + c$

78. $\int \operatorname{senh}^2 u\,du = \frac{1}{4}\operatorname{senh} 2u - \frac{1}{2}u + c$

79. $\int \cosh^2 u\,du = \frac{1}{4}\operatorname{senh} 2u + \frac{1}{2}u + c$

80. $\int \tanh^2 u\,du = u - \tanh u + c$

81. $\int \coth^2 u\,du = u - \coth u + c$

82. $\int u \operatorname{senh} u\,du = u \cosh u - \operatorname{senh} u + c$

83. $\int u \cosh u\,du = u \operatorname{senh} u - \cosh u + c$

84. $\int e^{au} \operatorname{senh} nu\,du = \frac{e^{au}}{a^2-n^2}(a \operatorname{senh} nu - n \cosh nu) + c$

85. $\int e^{au} \cosh nu\,du = \frac{e^{au}}{a^2-n^2}(a \cosh nu - n \operatorname{senh} nu) + c$

86. $\int \frac{u\,du}{a+bu} = \frac{1}{b^2}\left(a+bu - a\ln|a+bu|\right) + c$

87. $\int \frac{u^2du}{a+bu} = \frac{1}{b^3}\left(\frac{1}{2}(a+bu)^2 - 2a(a+bu) + a^2\ln|a+bu|\right) + c$

88. $\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{a+bu} + \ln|a+bu|\right) + c$

89. $\int \frac{u^2du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a+bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a\ln|a+bu|\right) + c$

90. $\int \frac{u\,du}{(a+bu)^3} = \frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{2(a+bu)^2} - \frac{1}{a+bu}\right) + c$

91. $\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + c$

92. $\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + c$

93. $\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} + \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + c$

94. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + c$

95. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + c = \begin{cases} \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{u}{a} + c, & \text{si } |u| < a \\ \frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{u}{a} + c, & \text{si } |u| > a \end{cases}$

96. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c = \begin{cases} -\frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{u}{a} + c, & \text{si } |u| < a \\ -\frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{u}{a} + c, & \text{si } |u| > a \end{cases}$

97. $\int u\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{15b^3}(3bu-2a)(a+bu)^{3/2} + c$

98. $\int u^2\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{105b^3}(15b^2u^2-12abu+8a^2)(a+bu)^{3/2} + c$

99. $\int u^n\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2u^n(a+bu)^{3/2}}{b(2n+3)} - \frac{2an}{b(2n+3)}\int u^{n-1}\sqrt{a+bu}\,du$

100. $\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu-2a)\sqrt{a+bu} + c$

101. $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3}(3b^2u^2-4abu+8a^2)\sqrt{a+bu} + c$

102. $\int \frac{u^n\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a+bu}}{b(2n+1)} - \frac{2an}{b(2n+1)}\int \frac{u^{n-1}}{\sqrt{a+bu}}du$

103. $\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + c, & \text{si } a > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + c, & \text{si } a < 0 \end{cases}$

104. $\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$

105. $\int \frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u} = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

106. $\int \frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u^n} = -\frac{(a+bu)^{3/2}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-5)}{2a(n-1)}\int \frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u^{n-1}}$

107. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c$

108. $\displaystyle\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c$

109. $\displaystyle\int u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c$

110. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 + a^2}\,du}{u} = \sqrt{u^2 + a^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right| + c$

111. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}\,du}{u} = \sqrt{u^2 - a^2} - a\sec^{-1}\frac{u}{a} + c$

112. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du}{u^2} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c$

113. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \mp \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c$

114. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right| + c$

115. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + c$

116. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \mp\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{a^2u} + c$

117. $\displaystyle\int (u^2 \pm a^2)^{3/2}du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm 5a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c$

118. $\displaystyle\int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \pm\frac{u}{a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + c$

119. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a}+c$

120. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a}+c$

121. $\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a}+c$

122. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2-u^2}-a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right|+c = \sqrt{a^2-u^2}-a\cosh^{-1}\frac{a}{u}+c$

123. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}-\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a}+c$

124. $\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a}+c$

125. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right|+c = -\frac{1}{a}\cosh^{-1}\frac{a}{u}+c$

126. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u}+c$

127. $\int (a^2-u^2)^{3/2}\,du = -\frac{u}{8}(2u^2-5a^2)\sqrt{a^2-u^2}+\frac{3a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a}+c$

128. $\int \frac{du}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}}+c$

129. $\int \sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au-u^2}+\frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(1-\frac{u}{a}\right)+c$

130. $\int u\sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{2u^2-au-3a^2}{6}\sqrt{2au-u^2}+\frac{a^3}{2}\cos-1\left(1-\frac{u}{a}\right)+c$

131. $\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u}\,du = \sqrt{2au-u^2}+a\cos^{-1}\left(1-\frac{u}{a}\right)+c$

132. $\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u^2}\,du = -\frac{2\sqrt{2au-u^2}}{u}-\cos^{-1}\left(1-\frac{u}{a}\right)+c$

133. $\int \frac{du}{\sqrt{2au-u^2}} = \cos^{-1}\left(1-\frac{u}{a}\right)+c$

134. $\int \frac{u\,du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\sqrt{2au-u^2}+a\cos^{-1}\left(1-\frac{u}{a}\right)+c$

135. $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{u+3a}{2}\sqrt{2au-u^2}+\frac{3a^2}{2}a\cos^{-1}\left(1-\frac{u}{a}\right)+c$

136. $\int \frac{du}{u\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{\sqrt{2au-u^2}}{au}+c$

137. $\int \frac{du}{(2au-u^2)^{3/2}} = \frac{u-a}{a^2\sqrt{2au-u^2}}+c$

138. $\int \frac{u\,du}{(2au-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a\sqrt{2au-u^2}}+c$

Integración numérica

Para calcular la integral definida, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, es preciso obtener previamente una integral indefinida. Aunque se conocen diversos métodos para hallar la integral indefinida de una cantidad considerable de funciones, existen funciones para las cuales estos métodos no son aplicables. Este inconveniente se supera haciendo uso de la integración numérica. La integración numérica permite evaluar la integral definida de una función continua en un intervalo cerrado con la exactitud deseada. En este apartado vamos a estudiar dos métodos de integración numérica: la Regla del trapecio y la Regla de Simpson (debida a Thomas no a Homero).

Regla del trapecio :

Si f es continua en $[a,\ b]$, y los números $a = x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n = b$ forman una partición regular de $[a,\ b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right].$$

Estimación del error en la regla del trapecio:

Si $M \in \mathbb{R}^+$ y $\left|f''(x)\right| \le M,\ \forall x \in [a,\ b]$, entonces el error que se comete al usar la Regla del Trapecio no es mayor que

$$\frac{M(b-a)^3}{12n^2}.$$

Regla de Simpson :

Si f es continua en $[a,\ b]$, y n es un número par. Y si $a = x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n = b$ forman una partición regular de $[a,\ b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

Estimación del error en la regla de Simpson:

Si $M \in \mathbb{R}^+$ y $\left|f^{(4)}(x)\right| \le M,\ \forall x \in [a,\ b]$, entonces el error que se comete al usar la Regla de Simpson no es mayor que

$$\frac{M(b-a)^5}{180n^4}.$$

Ejercicios resueltos

En los ejercicios 1 a 3, use (a) la Regla del Trapecio y (b) la Regla de Simpson, con el valor de *n* indicado para estimar las integrales definidas. Aplique valores aproximados de $f(x_k)$ que tengan una precisión de cuatro decimales y redondee las respuestas a dos decimales.

Ninguna de las integrales definidas de los ejercicios 4 a 6 puede ser evaluada exactamente en términos de funciones elementales. Utilice la Regla de Simpson, con el valor de *n* que se indica, para determinar un valor aproximado de la integral definida dada. Exprese el resultado con tres cifras decimales.

1. $\int_1^4 \frac{1}{x}dx,\ n=6$	**2.** $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx,\ n=4$	**3.** $\int_1^{5/2}\left(\sqrt[3]{x^2+8}\right)dx,\ n=6$
4. $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx,\ n=6$	**5.** $\int_1^{1.8} \sqrt{1+x^3}\,dx,\ n=4$	**6.** $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}dx,\ n=8$

Solu ciones

1. $\int_1^4 \frac{1}{x}dx,\ \text{n} = 6$

<u>Solución:</u>

(a) $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$

$$\int_1^4 \frac{1}{x}dx \approx \frac{4-1}{2(6)}\left[f(1) + 2f(1.5) + 2f(2) + 2f(2.5) + 2f(3) + 2f(3.5) + f(4)\right] \quad (1)$$

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1,\ f(1.5) = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3},\ f(2) = \frac{1}{2},\ f(2.5) = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5},\ f(3) = \frac{1}{3},\ f(3,5) = \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7},$$

$$f(4) = \frac{1}{4},$$

$$\Rightarrow \quad \int_1^4 \frac{1}{x}dx \approx \frac{3}{12}\left[1 + 2\cdot\frac{2}{3} + 2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{2}{5} + 2\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{2}{7} + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4}\left[1 + \frac{4}{3} + 1 + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} + \frac{1}{4}\right],$$

$$\Rightarrow \quad \int_1^4 \frac{1}{x}dx \approx \frac{1}{4}\left[\frac{420 + 560 + 420 + 336 + 280 + 240 + 105}{420}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{2361}{420}\right] = \frac{2361}{1680};$$

$$\therefore \quad \int_1^4 \frac{1}{x}dx \approx 1.41.$$

(b) $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$

$$\int_1^4 \frac{1}{x}dx \approx \frac{4-1}{3(6)}\left[f(1) + 4f(1.5) + 2f(2) + 4f(2.5) + 2f(3) + 4f(3.5) + f(4)\right] \quad (1)$$

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1,\ f(1.5) = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3},\ f(2) = \frac{1}{2},\ f(2.5) = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5},\ f(3) = \frac{1}{3},\ f(3,5) = \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7},$$

$$f(4) = \frac{1}{4},$$

$$\Rightarrow \quad \int_1^4 \frac{1}{x}dx \approx \frac{3}{18}\left[1 + 4\cdot\frac{2}{3} + 2\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{2}{5} + 2\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{2}{7} + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{6}\left[1 + \frac{8}{3} + 1 + \frac{8}{5} + \frac{2}{3} + \frac{8}{7} + \frac{1}{4}\right],$$

$$\Rightarrow \quad \int_1^4 \frac{1}{x}dx \approx \frac{1}{6}\left[\frac{420 + 1120 + 420 + 672 + 280 + 480 + 105}{420}\right] = \frac{1}{6}\left[\frac{2361}{420}\right] = \frac{3497}{2520};$$

$$\therefore \quad \int_1^4 \frac{1}{x}dx \approx 1.39.$$

2. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx,\ \text{n} = 4$

Solución:

(**a**) $\Delta x = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{1} = 0.25$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \approx \frac{1-0}{2(4)}\left[f(0) + 2f(0.25) + 2f(0.5) + 2f(0.75) + f(1)\right] \quad (1)$$

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{1+0^2}} = 1,\ f(0.25) = \frac{1}{\sqrt{1+0.25^2}} \approx 0.9701,\ f(0.5) = \frac{1}{\sqrt{1+0.5^2}} \approx 0.8944,$$

$$f(0.75) = \frac{1}{\sqrt{1+0.75^2}} \approx 0.8000,\ f(1) = \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} \approx 0.7071,$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \approx \frac{1}{8}\left[1 + 2\cdot(0.9701) + 2\cdot(0.8944) + 2\cdot(0.8) + 0.7071\right],$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \approx \frac{1}{8}\left[1 + 1.9402 + 1.7888 + 1.6 + 0.7071\right] = \frac{7.0361}{8};$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \approx 0.88$$

(**b**) $\Delta x = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{1} = 0.25$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \approx \frac{1-0}{3(4)}\left[f(0) + 4f(0.25) + 2f(0.5) + 4f(0.75) + f(1)\right] \quad (1)$$

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{1+0^2}} = 1,\ f(0.25) = \frac{1}{\sqrt{1+0.25^2}} \approx 0.9701,\ f(0.5) = \frac{1}{\sqrt{1+0.5^2}} \approx 0.8944,$$

$$f(0.75) = \frac{1}{\sqrt{1+0.75^2}} \approx 0.8000,\ f(1) = \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} \approx 0.7071,$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \approx \frac{1}{12}\left[1 + 4(0.9701) + 2(0.8944) + 4(0.8) + 0.7071\right],$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \approx \frac{1}{12}\left[1 + 3.8804 + 1.7888 + 3.2 + 0.7071\right] = \frac{10.5763}{12};$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \approx 0.88$$

3. $\int_1^{5/2}\left(\sqrt[3]{x^2} + 8\right)dx,\ n = 6$

Solución:

(**a**) $\Delta x = \dfrac{5/2-1}{6} = \dfrac{3/2}{6} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4} = 0.25$

$$\int_1^{5/2}\left(\sqrt[3]{x^2+8}\right)dx \approx \frac{5/2-1}{2(6)}\left[f(1)+2f(1.25)+2f(1.5)+2f(1.75)+2f(2)+2f(2.25)+f(2.5)\right]$$

$f(1)=\sqrt[3]{1^2+8}\approx 2.0800,\; f(1.25)=\sqrt[3]{1.25^2+8}\approx 2.1225,\; f(1.5)=\sqrt[3]{1.5^2+8}\approx 2.1722,$

$f(1.75)=\sqrt[3]{1.75^2+8}\approx 2.2282,\; f(2)=\sqrt[3]{2^2+8}\approx 2.2894,\; f(2.25)=\sqrt[3]{2.25^2+8}\approx 2.3551,$

$f(2.5)=\sqrt[3]{2.5^2+8}\approx 2.4244,$

$\Rightarrow \quad \displaystyle\int_1^{5/2}\left(\sqrt[3]{x^2+8}\right)dx \approx \frac{1}{8}\left[2.0800+2(2.1225)+2(2.1722)+2(2.2282)+2(2.2894)+2(2.3551)+2.4244\right]$

$\Rightarrow \quad = \dfrac{26.8392}{8};$

$\therefore \quad \displaystyle\int_1^{5/2}\left(\sqrt[3]{x^2+8}\right)dx \approx 3.35$

(**b**) $\Delta x = \dfrac{5/2-1}{6} = \dfrac{3/2}{6} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4} = 0.25$

$$\int_1^{5/2}\left(\sqrt[3]{x^2+8}\right)dx \approx \frac{5/2-1}{3(6)}\left[f(1)+4f(1.25)+2f(1.5)+4f(1.75)+2f(2)+4f(2.25)+f(2.5)\right]$$

$f(1)=\sqrt[3]{1^2+8}\approx 2.0800,\; f(1.25)=\sqrt[3]{1.25^2+8}\approx 2.1225,\; f(1.5)=\sqrt[3]{1.5^2+8}\approx 2.1722,$

$f(1.75)=\sqrt[3]{1.75^2+8}\approx 2.2282,\; f(2)=\sqrt[3]{2^2+8}\approx 2.2894,\; f(2.25)=\sqrt[3]{2.25^2+8}\approx 2.3551,$

$f(2.5)=\sqrt[3]{2.5^2+8}\approx 2.4244,$

$\Rightarrow \quad \displaystyle\int_1^{5/2}\left(\sqrt[3]{x^2+8}\right)dx \approx \frac{1}{12}\left[2.0800+4(2.1225)+2(2.1722)+4(2.2282)+2(2.2894)+4(2.3551)+2.4244\right]$

$\Rightarrow \quad = \dfrac{40.2508}{12};$

$\therefore \quad \displaystyle\int_1^{5/2}\left(\sqrt[3]{x^2+8}\right)dx \approx 3.35$

4. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{\operatorname{sen} x}{x}dx,\ \mathrm{n}=6$

5. $\displaystyle\int_1^{1.8}\sqrt{1+x^3}\,dx,\ \mathrm{n}=4$

6. $\displaystyle\int_0^{2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}dx,\ \mathrm{n}=8$

Integrales impropias

Las denominadas *integrales impropias* son una clase especial de *integrales definidas* (integrales de Riemann) en las que el intervalo de integración o la función en el integrando o ambos presentan ciertas particularidades.

$\int_a^b f(x)dx$ es impropia si se presenta uno de los siguientes casos:

- $a = -\infty$ o $b = \infty$, o, $a = -\infty$ y $b = \infty$
- $f(x)$ no es acotada en alguno de los puntos de $[a, b]$, dichos puntos se llaman *singularidades* de $f(x)$.

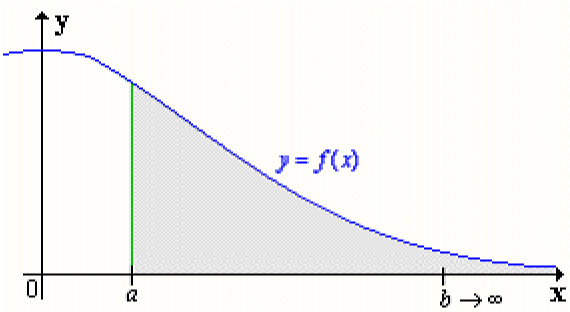
Definición 1:

(i) Si f es continua $\forall x \geq a$, entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

si el límite existe.

Observe la fig. 1.



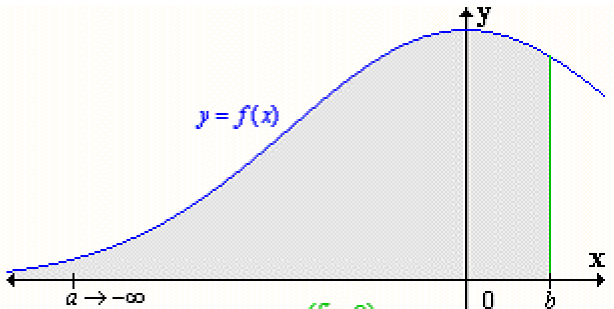
(fig.1)

(ii) Si f es continua $\forall x \leq b$, entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$

si el límite existe.

Observe la fig. 2.



(fig.2)

Definición 2:

Si f es continua $\forall x \in \mathbb{R}$, y $c \in \mathbb{R}$; entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)dx.$$

si los límites existen.

Definición 3:

(i) Si f es continua $\forall x \in (a, b]$, y $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$; entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

si el límite existe.

(ii) Si f es continua $\forall x \in [a, b)$, y $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$; entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

si el límite existe.

Definición4:

Si f es continua en todo número de $[a,\ b]$, excepto en c y $a < c < b$, y si además $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t \to c^+} \int_t^b f(x)dx$$

si los límites del miembro derecho existen.

Cuando los límites, en las definiciones anteriores, existen, se dice que la integral es *convergente*, en caso contrario, se dice que la integral es *divergente*.

Ejercicios resueltos

En los ejercicios 1 a 14, si la integral es convergente, evalúela.

1. $\int_0^\infty e^{-x}dx$ **2.** $\int_{-\infty}^0 x5^{-x^2}dx$ **3.** $\int_{-\infty}^\infty x\cosh x\, dx$

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx$ **5.** $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{3}{x^2+9}dx$

S o l u c i o n e s

1. $\int_0^\infty e^{-x}dx$

Solución:

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{b \to \infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b \to \infty}\left(\left[-\frac{1}{e^x}\right]_0^b\right) = \lim_{b \to \infty}\left(-\frac{1}{e^b}+\frac{1}{e^0}\right) = \lim_{b \to \infty}\left(-\frac{1}{e^b}+1\right) = (0+1);$$

$\therefore \quad \int_0^\infty e^{-x}dx = 1.$

2. $\int_{-\infty}^0 x5^{-x^2}dx$

Solución:

$$\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} x5^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} 5^{-x^2}(xdx) \quad (\clubsuit)$$

Sea

$$u = -x^2 \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad du = -2xdx, \;\Rightarrow\; -\frac{1}{2}du = xdx \quad (2)$$

Cuando: $\begin{cases} x = 0,\ u = 0 \\ x = a,\ u = -a^2 \end{cases} \quad (3)$

Sustituyendo (1), (2) y (3) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{-a^2}^{0} 5^{u}\left(-\frac{1}{2}du\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}\int_{-a^2}^{0} 5^{u}du\right) = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\int_{-a^2}^{0} 5^{u}du,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\left.\frac{5^{u}}{\ln 5}\right]_{-a^2}^{0}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{5^{0}}{\ln 5} - \frac{5^{-a^2}}{\ln 5}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{\ln 5} - \frac{1}{5^{a^2}\ln 5}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln 5} - 0\right) = -\frac{1}{2\ln 5}.$$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} x\cosh x\,dx$

Solución:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\cosh x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} x\cosh x\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} x\cosh x\,dx \quad (\clubsuit)$$

Sea

$$u = x, \;\Rightarrow\; du = dx$$

$$\Rightarrow \quad dv = \cosh x\,dx, \;\Rightarrow\; v = \sinh x$$

De tal modo que, aplicando el método de integración por partes, se obtiene:

$$\int x\cosh x\,dx = x\sinh x - \int \sinh x\,dx = x\sinh x - \cosh x$$

Por lo que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\cosh x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left(\left(x\sinh x - \cosh x\right]_{a}^{0}\right) + \lim_{b\to\infty}\left(\left(x\sinh x - \cosh x\right]_{0}^{b}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} x\cosh x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left(0\cdot\sinh 0 - \cosh 0 - (a\sinh a - \cosh a)\right) + \lim_{b\to\infty}\left(b\sinh b - \cosh b - (0\cdot\sinh 0 - \cosh 0)\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} x\cosh x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left(0 - 1 - a\sinh a + \cosh a\right) + \lim_{b\to\infty}\left(b\sinh b - \cosh b - (0-1)\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} x\cosh x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left(0 - 1 - a\sinh a + \cosh a\right) + \lim_{b\to\infty}\left(b\sinh b - \cosh b - (0-1)\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} x\cosh x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left(\cosh a - a\sinh a - 1\right) + \lim_{b\to\infty}\left(b\sinh b - \cosh b + 1\right)$$

La integral es divergente.

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}$

Solución:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{x}dx + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-x}dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = \lim_{a\to-\infty}\left(e^{x}\right]_{a}^{0}\Big) + \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^{x}}\right]_{0}^{b}\Big) = \lim_{a\to-\infty}\left(e^{0}-e^{a}\right) + \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^{b}}+\frac{1}{e^{0}}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = \lim_{a\to-\infty}\left(1-e^{a}\right) + \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^{b}}+1\right) = (1-0)+(0+1);$$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = 2.$$

5. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{3}{x^{2}+9}dx$

Solución:

$$\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{3}{x^{2}+9}dx = 3\lim_{b\to\infty}\int_{\sqrt{3}}^{b} \frac{1}{x^{2}+3^{2}}dx = 3\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3}\right]_{\sqrt{3}}^{b}\Big) = 3\cdot\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left(\tan^{-1}\frac{x}{3}\right]_{\sqrt{3}}^{b}\Big),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{3}{x^{2}+9}dx = \lim_{b\to\infty}\left(\tan^{-1}\frac{x}{3}\right]_{\sqrt{3}}^{b}\Big) = \lim_{b\to\infty}\left(\tan^{-1}\frac{b}{3} - \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6};$$

$$\therefore \quad \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{3}{x^{2}+9}dx = \frac{1}{3}\pi.$$

Miscelánea de ejercicios de cálculo integral

<table>
<tr><td colspan="3">1. Calcule el área de la región limitada por la curva de $y^{2}=x$ y la recta $x=4$.
2. Calcule el área de la región limitada por las curvas de las funciones $f(x)=x$ y $g(x)=x^{3}$.</td></tr>
<tr><td>3. Resolver $\displaystyle\int\sqrt{\frac{\cos^{-1}x}{1-x^{2}}}dx$</td><td>4. Resolver $\displaystyle\int e^{x}2^{e^{x}}3^{e^{x}}dx$</td><td>5. $\displaystyle\int x^{p-1}\operatorname{sen}x^{p}\cos x^{p}dx$</td></tr>
</table>

Soluciones

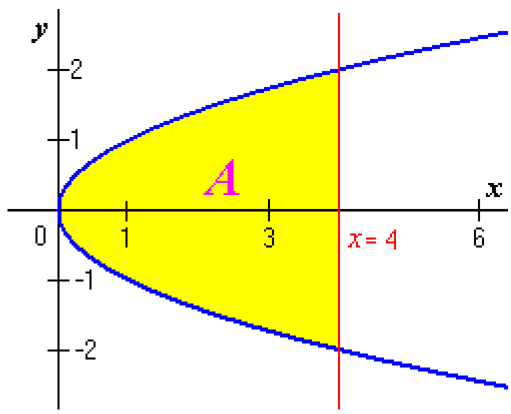
1. Solución:

$$y^{2}=x \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{x}$$

$$A = 2\int_{0}^{4}\sqrt{x}dx = 2\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_{0}^{4},$$

$$\Rightarrow \quad A = 2\left[\frac{2}{3}4^{3/2}-\frac{2}{3}0^{3/2}\right] = 2\left[\frac{16}{3}-0\right];$$

$$\therefore \quad A=\frac{32}{3} \text{ unidades cuadradas.}$$

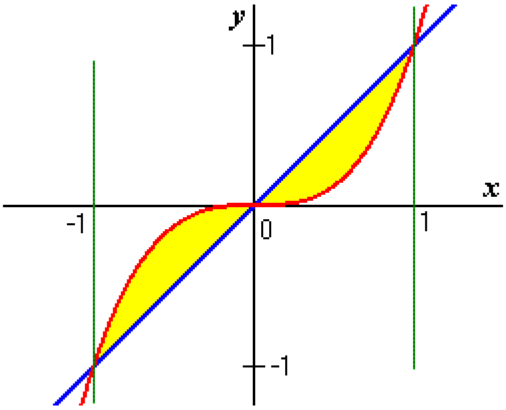


2. Solución:

$g(x) > f(x)$ en el intervalo $[-1,0]$

$f(x) > g(x)$ en el intervalo $[0,1]$

Por lo tanto, el área de la región se calcula mediante:



$$A = \int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx + \int_{0}^{1}(x - x^3)dx,$$

$$\Rightarrow \quad A = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1},$$

$$\Rightarrow \quad A = 0 - \left(\frac{1}{4}(-1)^4 - \frac{1}{2}(-1)^2\right) + \frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{4}(1)^4 - 0,$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2};$$

$\therefore \quad A = \frac{1}{2}$ unidades cuadradas.

3. Solución:

$$\int\sqrt{\frac{\cos^{-1}x}{1-x^2}}dx = \int\frac{\sqrt{\cos^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int\sqrt{\cos^{-1}x}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\right) \quad (1)$$

Sea

$$u = \cos^{-1}x \quad (2),$$

$$\Rightarrow \quad du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad (3)$$

Sustituendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$\int\sqrt{\frac{\cos^{-1}x}{1-x^2}}dx = -\int\sqrt{u}du = -\frac{2}{3}u^{3/2} + C \quad (4);$$

$$\therefore \quad \int\sqrt{\frac{\cos^{-1}x}{1-x^2}}dx = -\frac{2}{3}(\cos^{-1}x)^{3/2} + C \qquad \{(2) \text{ en } (4)\}.$$

4. Solución:

$$\int e^x 2^{e^x} 3^{e^x} dx = \int (2\cdot 3)^{e^x} e^x dx = \int 6^{e^x} e^x dx \quad (1)$$

Sea

$$u = e^x \quad (2),$$

$$\Rightarrow \quad du = e^x dx \quad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$\int e^x 2^{e^x} 3^{e^x} dx = \int 6^u du = 6^u \ln 6 + C \quad (4);$$

$$\therefore \quad \int e^x 2^{e^x} 3^{e^x} dx = 6^{e^x}\ln 6 + C \qquad \{(2) \text{ en } (4)\}.$$

5. $\int x^{p-1}\operatorname{sen} x^p \cos x^p dx$

Solución:

$$\int x^{P-1}\operatorname{sen} x^{P} \cos x^{P} dx \Leftrightarrow \frac{1}{4}\int 2x^{P-1}\left(2\operatorname{sen} x^{P} \cos x^{P}\right) dx \Leftrightarrow \frac{1}{4p}\int \operatorname{sen} 2x^{P}\, 2p x^{P-1} dx \qquad (\clubsuit)$$

Sea

$$\left.\begin{aligned} & u = 2x^{P}, \\ \Rightarrow \quad & du = 2px^{P-1} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Sustituyendo (1) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$\frac{1}{4p}\int \operatorname{sen} u\, du = \frac{1}{4p}(-\cos u + c) = -\frac{1}{4p}\cos u + C \qquad (2)$$

Finalmente, sustituyendo (1) en (2), se obtiene:

$$\frac{1}{4p}\int \operatorname{sen} 2x^{P}\, 2px^{P-1} dx = -\frac{1}{4p}\cos 2x^{P} + C$$

De tal manera que:

$$\int x^{P-1}\operatorname{sen} x^{P} \cos x^{P} dx = -\frac{1}{4p}\cos 2x^{P} + C.$$