UNIVERSIDAD MAYOR
FACULTAD DE INGENIERÍA
SEGUNDO SEMESTRE 2011

CÁLCULO INTEGRAL
APUNTES SERIES

CRITERIOS

1. Criterio del n-ésimo término para la divergencia

Si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ o no existe, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

2. Criterio de la suma acotada

Una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos no negativos converge sí y solo sí sus sumas parciales estan acotadas por arriba.

3. Criterio de la Integral

Sea f una función continua, positiva no creciente en el intervalo $[1, \infty[$ y suponga que $a_k = f(k)$ para todo entero k. Entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge sí y solo sí $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ converge.

4. Criterio Serie p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} p > 1 & \text{converge} \\ p \leq 1 & \text{diverge} \end{cases}$$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n$ converge si $-1 < r < 1$

6. Criterio de comparación ordinaria

Suponga que $0 \leq a_n \leq b_n \quad , n \geq N$

i) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, también $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

ii) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, también $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

7. Criterio de comparación al límite

Suponga que $a_n \geq 0, b_n > 0$ y que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, entonces

i) Si $0 < L < \infty$, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen o divergen juntas.

ii) Si $L = 0$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

8. Criterio del cociente

Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos y supongase que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$

i) Si $p < 1$ la serie converge.

ii) Si $p > 1$ o $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, la serie diverge.

iii) Si $p = 1$ el criterio no es concluyente.

9. Criterio de la raíz

Si $a_n > 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = R$, entonces

i) Si $R < 1$ la serie converge

ii) Si $R > 1$ la serie diverge

10. Criterio de la serie alternante

Sea $a_1 - a_2 + a_3 - a_4$.........

Una serie alternante con $a_n > a_{n+1} > 0$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie converge.

11. Criterio de la convergencia absoluta

Si $\sum |u_n|$ converge, entonces $\sum u_n$ converge.

12. Criterio del cociente absoluto

Sea $\sum u_n$ una serie de términos no nulos y suponga que $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = p$

i) Si $p < 1$ la serie converge absolutamente.

ii) Si $p > 1$ o $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, la serie diverge.

iii) Si $p = 1$ el criterio no es concluyente.

13. Condicionalmente convergente

Si $\sum u_n$ converge y $\sum |u_n|$ diverge, entonces la serie converge condicionalmente.

EJERCICIOS

1. Indique si la serie converge o diverge. Si converge, determine su suma.

a) $\sum_{k=0}^{\infty}\left[2\left(\frac{1}{4}\right)^k+3\left(\frac{-1}{5}\right)^k\right]$ $(R: \frac{31}{6})$

b) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{9}{8}\right)^k$ $(R: Diverge)$

c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-5}{k+2}$ $(R: Diverge)$

d) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(k+2)k}$ $\left(R: \frac{3}{2}\right)$

e) $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{3}{(k+1)^2}-\frac{3}{k^2}\right)$ $(R: 3)$

f) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^{k+1}}{7^{k-1}}$ $\left(R: \frac{112}{3}\right)$

g) $\sum_{k=6}^{\infty}\frac{2}{k-5}$ $(R: Diverge)$

2. Escriba el decimal como una serie infinita; luego determine la suma de la serie y, por último, use el decimal para escribir el decimal como el cociente de dos enteros.

a) $0,22222.......$

b) $0,499999999........$

c) $0,21212121.......$

3. Tres personas A, B y C dividen un premio como sigue. Primero lo dividen en cuartos, tomando cada uno una parte. Luego dividen el cuarto restante en cuartos, tomando una parte cada uno y así sucesivamente. Demuestre que cada uno recibe una tercera parte del premio.

4. Analice la convergencia de la siguiente serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))} \qquad (R : Diverge)$$

5. Use cualquiera de los criterios, para decidir acerca de la convergencia o divergencia de la serie. Justifique su conclusión indicando criterio.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^2+5}$ $(R : Diverge)$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{e^k}$ $(R : Converge)$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{\sqrt{k+2}}$ $(R : Converge)$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1000}{k(\ln(k))^2}$ $(R : Converge)$

e) $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k^3}$ $(R : Converge)$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ $(R : Converge)$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$ $(R : Converge)$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n$ $(R : Converge)$

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k+k}{k!}$ $(R : Converge)$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2\sqrt{n}}$ $(R : Converge)$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{2^n}$ $(R : Converge)$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+\cos(n)}{n^3}$ $(R : Converge)$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ $(R : Converge)$

n) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ $(R: Diverge)$

o) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$ $(R: Diverge)$

p) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$ $(R: Converge)$

q) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{5n^{1.1}}$ $(R: Converge)$

r) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{10n+1}$ $(R: Diverge)$

s) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\left(1+\sqrt{n}\right)}$ $(R: Converge)$

t) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^4}{2^n}$ $(R: converge)$

u) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n-1}{1}$ $(R: Diverge)$

v) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$ $(R: Converge)$

w) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n+1}}{n^2}$ $(R: Diverge)$

6. ¿ Para qué valores de p la siguiente serie converge?

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\left(\ln(n)\right)^p} \qquad (R: p>1)$$

7. Indique si la siguiente serie converge o diverge

$$\frac{1}{1^2+1}+\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}+\frac{4}{4^2+1}........$$

8. Demuestre que $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$, analizando la serie $\sum\frac{n!}{n^n}$.

9. Analice la convergencia o devergencia de :

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}...$$

10. Calcule la suma de:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^{2n}} \qquad \left(R : \frac{49}{50}\right)$$

11. Calcule la suma de :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n\,(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right) \qquad (R : 4)$$

12. Analice convergencia y divergencia de la serie según $p \in \mathbb{R} - \{0\}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n n!}{n^n}$$

13. Si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente. Demuestre que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ es divergente, siendo $b_n = a_n + 1$.

Series resueltas

1. Estudie la convergencia de las siguientes series

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^2 9^n}$

Desarrollo

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^2 9^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 9^n}$$

Criterio de la Raíz

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^2 9^n}} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}\left(\frac{3}{9}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}\frac{1}{3^n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{3} < 1$ la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 9^n}$ converge.

Así $\left| \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^2 9^n} \right|$ converge.

Por lo tanto tanto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^2 9^n}$ Converge Absolutamente.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3}+1}$

Desarrollo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = 1 \neq 0$$

Por lo tanto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3}+1}$ Diverge.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{1+n^2}$

Desarrollo

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{1+n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge serie $p > 1$

Por lo tanto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{1+n^2}$ Converge.

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$

Desarrollo

Comparación al limite

Sea $b_n = \frac{1}{2^n}$ (convergente)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n-n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n-n} = 1$$

Por lo tanto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-n}$ Converge.

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1000^n}$

Desarrollo

Criterio del cociente

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{1000^{n+1}} \div \frac{(n)!}{1000^n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{1000^{n+1}} \cdot \frac{1000^n}{(n)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{1000} = \infty \end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1000^n}$ Diverge

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n} n^3$

Desarrollo

Criterio de la raíz

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{-n}n^3} &= \lim_{n\to\infty} \left(e^{-n}n^3\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(e^{-1}n^{\frac{3}{n}}\right) \\ &= \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^3 = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n}n^3$ Converge.

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n}}{n!}$

Desarrollo

Criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^{2(n+1)}}{(n+1)!} \div \frac{4^{2n}}{n!} \quad = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{2(n+1)}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{4^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^2}{(n+1)} = 0$$

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n}}{n!}$ Converge.

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3n+4}$

Desarrollo

Criterio Comparación al limite

Sea $b_n = \frac{1}{n}$ (divergente)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2+3n+4}}{\frac{1}{n}} \quad = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+3n+4} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}} = 1$$

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3n+4}$ Diverge.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^4}{3^n}$

Desarrollo

Criterio convergencia absoluta

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{3^{(n+1)}} \cdot \frac{3^n}{n^4} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{n^4} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^4 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^4}{3^n}$ Converge Absolutamente.

j) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{2}{n}\right)$

Desarrollo

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{2}{n}\right) \quad = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}} = 2$$

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{2}{n}\right)$ Diverge.

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^5+1}$

Desarrollo

Criterio Comparación al limite

Sea $b_n = \frac{1}{n^4}$ (Convergente)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^5+1} \div \frac{1}{n^4} \quad = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^5+1} \cdot \frac{n^4}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{n^5+1} = 1$$

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^5+1}$Converge.

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

Desarrollo

Criterio de Comparación ordinaria

Se tiene que $\frac{1}{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

Se analizará $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$

Criterio comparación al limite

Sea $b_n = \frac{1}{n}$ (Divergente)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \div \frac{1}{n} \quad = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Así $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ Diverge

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ Diverge.

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{3e^{2n}+n^2}$

Desarrollo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{2n}}{3e^{2n}+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{2n}}{e^{2n}\left(3+\frac{n^2}{e^{2n}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(3+\frac{n^2}{e^{2n}}\right)} = \frac{1}{3}$$

Obs: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^{2n}} = 0 \ (L`H)$

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{3e^{2n}+n^2}$ Diverge.

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4^n+n}{n!}\right)$

Desarrollo

Criterio del Cociente

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}+n+1}{(n+1)!} \div \frac{4^n+n}{n!} &= \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}+n+1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{4^n+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}+n+1}{(n+1)(4^n+n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4^n\left(4+\frac{n}{4^n}+\frac{1}{4^n}\right)}{4^n(n+1)\left(1+\frac{n}{4^n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{n}{4^n}+\frac{1}{4^n}}{(n+1)\left(1+\frac{n}{4^n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{n}{4^n}+\frac{1}{4^n}}{1+n+\frac{n^2}{4^n}+\frac{n}{4^n}} = 0
\end{aligned}$$

Obs: $\lim_{n\to\infty} \frac{x}{4^x} = 0(L`H)$

Obs: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{4^n} = 0 \ (L`H)$

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4^n+n}{n!}\right)$ Converge

o) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$

Desarrollo

Criterio de la raíz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+2} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$ Converge.

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4+\cos(n)}{n^3}\right)$

Desarrollo

Criterio de Comparación Ordinario

Se tiene que $0 < \frac{4+\cos(n)}{n^3} \leq \frac{5}{n^3}$

Luego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^3} = 5 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, Converge, serie p

Por lo tanto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4+\cos(n)}{n^3} \right)$ Converge.

q) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n \ln^3(n)}$

Desarrollo

Criterio de la Integral

Sea $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x \ln^3(x)}, x \geq 2$.Así $f(x)$ es positiva y continua.

$f\prime(x) = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}} \ln^3 x} - \frac{3}{x^{\frac{3}{2}} \ln^4 x} < 0$ (decreciente)

Así f satisface las condiciones del criterio de la integral.

Como $\int_2^{\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}}{x \ln^3(x)}}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln^3(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{6 \ln^2(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{24 \ln(x)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{48} = \infty \end{aligned}$$

Asi $\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x \ln^3(x)} dx$ Diverge

Por lo tanto $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n \ln^3(n)}$ Diverge.

r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)$

Desarrollo

Criterio de la serie alternante

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right) = \frac{2}{3} \neq 0$

Por lo tanto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)$ Diverge.

2. Analice la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n+5}{4a_n+10}$ se se sabe que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Desarrollo

Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Así $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n+5}{4a_n+10} = \frac{1}{2}$

Por lo tanto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n+5}{4a_n+10}$ Diverge.

3. Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a 3 y $\{a_{n+1} - a_n\} = b_n + 2$.

Demuestre que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Desarrollo

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n + 2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} - a_n = 0$ entonces

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -2$

Por lo tanto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ Diverge.

4. Demuestre que para todo número real p, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{pn}}{n!}$ converge.

Desarrollo

Criterio del Cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{p(n+1)}}{(n+1)!} \div \frac{e^{pn}}{n!} \quad = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{p(n+1)}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{e^{pn}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{p}}{(n+1)} = 0$$

Por lo tanto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{pn}}{n!}$ Converge para todo número real p.

5. Demuestre que si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, también $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ diverge, $c \neq 0$.

Desarrollo

Supongamos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ converge.

Así $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{c} \sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ Converge.

Contradicción. Por lo tanto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ Diverge.

6. ¿Para qué valores de p la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^p}$ converge?

Desarrollo

Criterio de la Integral

Sea $f(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^p}, x \geq 2$.Así $f(x)$ es positiva y continua.

$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^p} dx$

Sea $u = \ln(x)$
$du = \frac{1}{x} dx$

Entonces $\int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{1}{u^p}$

Por lo tanto $p > 1$ para que $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^p}$ la serie converga.

7. Demuestre que $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = -\ln(2)$

Desarrollo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1 - \tfrac{1}{k^2}\right) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \tfrac{1}{k^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\tfrac{k^2-1}{k^2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \ln\left(k^2 - 1\right) - \ln\left(k^2\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1)(k+1) - \ln\left(k^2\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) + \ln(k+1) - \ln(k) - \ln(k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} (\ln(k-1) - \ln(k)) + \sum_{k=2}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \\
&= \lim_{n\to\infty} ((\ln(1) - \ln(n)) + (\ln(n+1) - \ln(2))) \\
&= \lim_{n\to\infty} \ln\left(\tfrac{n+1}{n}\right) - \ln(2) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) - \ln(2) \\
&= \ln(1) - \ln(2) = -\ln(2)
\end{aligned}$$

8. Compruebe que la siguiente serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{k^2+3}$ diverge usando el criterio de la integral.

Desarrollo

Sea $f(x) = \frac{x}{x^2+3}, x \geq 2$.Así $f(x)$ es positiva y continua.

$f\prime(x) = -\frac{x^2+3}{(x^2+3)^2} < 0$ (decreciente)

Así f satisface las condiciones del criterio de la integral.

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{x}{x^2+3} dx &= \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{x}{x^2+3} dx = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2} \ln\left(x^2+3\right) \Big/_2^b \\ &= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2} \ln\left(b^2+3\right) - \frac{1}{2} \ln(7) = \infty \end{aligned}$$

Como $\int_2^{\infty} \frac{x}{x^2+3} dx$ Diverge

$\sum_{k=2}^{n} \frac{k}{k^2+3}$ Diverge.

9. Determine la suma de la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2^{n+1}-1)(2^n-1)}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \frac{2^n}{(2^{n+1}-1)(2^n-1)} &= \frac{A}{2^{n+1}-1} + \frac{B}{2^n-1} \\ &\Rightarrow A = -1 \\ &\Rightarrow B = 1 \\ \frac{2^n}{(2^{n+1}-1)(2^n-1)} &= \frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{2^1-1} - \frac{1}{2^2-1}\right) + \left(\frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{2^3-1}\right) \cdots \left(\frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1}\right) \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} = \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}-1}\right) = 1$$

10. Sume si es posible la siguiente serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$

Desarrollo

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Ambas son series geométricas, luego:

$$\begin{aligned}\sum_{n=}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n &= \frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

11. Estudie el caracter de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n^2+n}{3^{n+1}n(n+1)}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n^2+n}{3^{n+1}n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n(n+1)}{3^{n+1}n(n+1)}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^{n+1}n(n+1)}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}\end{aligned}$$

La primera de estas series es telescópica, así

$$\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{3}\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{3}\lim_{m\to\infty}\frac{1}{1}-\frac{1}{m+1}=\frac{1}{3}$$

La segunda serie es geométrica, así

$$\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{6}=$$

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n^2+n}{3^{n+1}n(n+1)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

12. Sabiendo que $a_n>0$ y $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es convergente, analizar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a_n)^2}{n+a_n}$

Desarrollo

Se tiene que $0\leq\frac{(a_n)^2}{n+a_n}\leq\frac{a_n^2}{a_n}=a_n$

Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n)^2}{n+a_n}$ converge.

13. Determine el valor al cual converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}$

Desarrollo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{2}{n(n+2)} \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \left(\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\right) \\
&= \lim_{m\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{m+1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}\right)\right) = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

14. Demuestre que la serie $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots$ converge y calcule su calor.

Desarrollo

El término general de la serie es $\frac{k}{(k+1)!}$, así la serie es $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$

Criterio del cociente

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(n+2)!} \div \frac{n}{(n+1)!} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n(n+2)!} \\
&= 0 < 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$ converge.

Para calcular su valor, calculemos la suma parcial

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \\
&= 1 - \frac{1}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Así

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

Por lo tanto $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = 1$

15. Se arroja una pelota desde una altura de 100 metros. Cada vez que golpea el suelo, rebota hasta $\frac{2}{3}$ de su altura anterior. Calcule la distancia total que recorre hasta llegar al reposo.

Desarrollo

$S = 100 + 2 \cdot 100 \left(\frac{2}{3}\right) + 2 \cdot 100 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \cdot 100 \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots\cdots$

$= 100 + 2 \cdot 100 \left(\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdots\cdots \right)$

$= 100 + 200 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$

$= 100 + 200 \left(\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} \right)$

$= 500$

Por lo tanto recorre 500 metros.