Teorema.

Sea {an} una serie con an= r2, con r= cte.

1. Lim rn=0 si |r|<1

n->∞

1. Lim r2=∞ si |r|>1

n->∞

Teorema 2.

Sea {an} una sucesión

Si lim |an|=0 lim an=0.

n->∞

n->∞

Teorema 3.

Si lim an=L y la función es continua en L.

n->∞

Entonces el lim [f(an)=f(L)].

n->∞

∞

Prueba de la divergencia o criterio del e-nesimo termino. Si lim an no existe o si lim an≠0 la serie ∑ an es divergente.

n=1

n->∞

n->∞

Nota: si lim an= 0 no se sabe nada sobre si es convergente o divergente.

Series de términos positivos.

Criterio de la integral.

∞

Supongo que f es una función continua positiva y deficiente en [1,∞) y sea an=f(n). Entonces la serie ∑ an es convergente si, la integral impropia ∫ f(x)dx es convergente.

∞

1

∞

n=1

1. Si ∫ f(x)dx converge, entonces ∑ an converge.

n=1

∞

1

∞

1. Si ∫ f(x)dx diverge, entonces ∑ an divergen.

n=1

∞

1

Nota: cuando aplicamos el criterio de la integral no es necesario que la serie inicie en 1.

Criterio básico de la comparación C.B.C.

∞

∞

Sean ∑ an  y ∑ bn dos series de términos positivos.

n=1

n=1

∞

∞

1. Si ∑ bn converge an ≤ bn para todo n, entonces ∑ an converge.

n=1

n=1

∞

∞

1. Si ∑ bn diverge y si an ≥ bn para todo n, entonces ∑ an diverge.

n=1

n=1

C.C.L.

∞

∞

Si ∑ an y ∑ bn son dos series de términos positivos.

n=1

n=1

1. Si lim = c>o, entonces las dos series converjan o diverjan.

n→∞

∞

∞

∞

1. Si lim =0 y ∑ bn converge, entonces ∑ bn converge, entonces ∑ an converge.

n=1

n=1

n=1

n->∞

∞

∞

1. Si lim = ∞ y ∑ bn diverge, entonces ∑ an diverge.

n=1

n=1

n->∞

Regla de comparación o criterio de la razón.

∞

1. Si lim |=L<1,en tal caso la ∑ an es absolutamente convergente y en consecuencia convergente.

n=1

n->∞

∞

1. Si lim =L>1 o lim =∞, entonces la ∑ an, es divergente.

n=1

n->∞

n->∞

1. Si lim =1, la regla no es concluyente.

n->∞

Prueba de la raíz.

1. Si lim =L<1, enseguida ∑ an es absolutamente convergente ( y en consecuencia convergente).

0

n->∞

∞

1. Si lim =L>1, o lim =∞, entonces la ∑ an es divergente.

n=1

n->∞

n->∞

1. Si lim =1, la prueba de la raíz no es concluyente.

n->∞

Teorema.

Si la serie de potencias ∑cn (x-a)n posee un radio de convergencia R>0, en tal caso la función distinta por:

F’(x)=co+c1(x-a)+c2(x-a)2+c5(x-a)3.

Es derivable (y por lo tanto continua), en el intervalo (a-R,a+R) y

∞

1. F’(x)=c1+2c2(x-a)+3c3(x-a)2+…=∑ ncn(x-a)-1.

n=1

∞

n=0

n=0

∞

1. 0(x-a)++ +∑ c+∑ .

Las ecuaciones (i) e (ii) de teorema 2 se pueden volver a escribir como:

n=0

∞

n=0

∞

1. [∑ cn(x-a)n]=∑ [cn(x-a)n].

∞

∞

1. ∫ ∑ cn(x-a)n]=∑ .

n=0

n=0

Teorema

Si f se representa como una serie de potencias en a, es decir, si

f(x)= |x-a|<R

por lo tanto, su coeficiente las da l formula

Cn=

Al sustituir esta fórmula en la serie se obtiene:

f(x)=∑

=f(a)+ + + + … + f(x)=

=C0+C1(x-a)+C2+C3+…+ Cn

Si x+a

f(a)=C0

La serie de la ecuación anterior se denomina serie de Taylor de la función f en a ( o también llamada con respecto a “a” ) para el caso especial en que a=0, la serie de Taylor se transforma en

f(x)+ =f(0)+ + + … +

Este caso surge con bastante frecuencia y se denomina serie de Maclaurin.