**DEFINICIÓN DE SERIE INFINITA**

Una serie es una sucesión de elementos que, ordenados, mantienen un cierto vínculo entre sí. La noción de infinito, por su parte, se vincula a aquello que carece de fin.

**Serie infinita**

Una serie infinita, por lo tanto, es una seguidilla de unidades que no tiene final. El concepto opuesto es el de serie finita, que se caracteriza por finalizar en un determinado momento.

Podemos comprender la noción de serie infinita si pensamos en ciertas series numéricas. Tomemos el caso de la serie numérica compuesta por los números múltiplos de 2. Dicha serie es una serie infinita ya que los números múltiplos de 2 son infinitos: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12…

Puede entenderse a las series como conjuntos. La serie numérica de números positivos impares menores a 10, en este sentido, es el conjunto que incluye los números 1, 3, 5, 7 y 9. Como se puede advertir, se trata de una serie finita. En cambio, si quisiéramos hacer referencia a la serie de números impares, será una serie infinita: un conjunto con componentes infinitos.

Dado que los números son infinitos, podemos enumerar todo tipo de series numéricas infinitas. Incluso es posible considerar series infinitas descendentes: por ejemplo, si mencionamos la serie compuesta por los números menores a 1: 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6…

Además de todo lo expuesto, no podemos pasar por alto el hecho de que son muchos y diversos los tipos de series infinitas que existen. No obstante, entre los más significativas podemos destacar, por ejemplo, a los siguientes:

**-Serie geométrica**. Bajo esta denominación se halla, por ejemplo, una serie de tipo infinito que se caracteriza por el hecho de que cada término se obtiene a partir de lo que es la multiplicación del término anterior por una constante determinada.

-**Serie convergente.** A la hora de poder determinar si una serie infinita es convergente o no, se puede recurrir al uso de variadas herramientas. En concreto, entre las más habituales están las p-series, que son sumatorias de funciones; el teorema de las series geométricas, el criterio de comparación directa, el criterio de comparación por paso del límite del cociente, el criterio de la integral de Cauchy, el criterio de d´Alembert y el criterio de Leibniz, entre otras muchas.

**Cómo determinar si una serie infinita es convergente**

Las series infinitas pueden ser abrumadoras y complicadas debido a que son difíciles de visualizar. Es muy difícil ver con una simple inspección si una serie es o no convergente; hace algunos siglos habría tomado horas de prueba resolver una sola pregunta. Pero ahora, gracias a matemáticos brillantes, contamos con criterios de convergencia para determinar si una serie converge o no, lo cual es muy práctico. Estas pruebas sirven para hallar si una serie es convergente o divergente, no para calcular la suma. Asegúrate también de que tengas un conocimiento decente de cálculo.

**Pasos:**

1. Realiza la primera prueba básica. Hay un teorema claro que establece que si la suma al infinito de una función f converge, entonces el límite de la función f es 0. Por ejemplo, digamos que tenemos la función x^2; esta no tiene límite, así que la suma al infinito diverge. Sin embargo, en la función 1/x el límite es 0, así que debemos continuar. Si el límite no es igual a cero, entonces inmediatamente sabremos que la serie es divergente. NOTA: La conversa no es verdadera: si el límite es cero, esto no implica que la serie es convergente. Necesitaremos hacer más pruebas.
2. Busca series geométricas. Este es un teorema muy claro y fácil de localizar, así que deberías buscarlo siempre. Una serie geométrica es una suma infinita, donde la fórmula es r^k, donde k es variable y r es mayor que -1 y menor que 1. Las series geométricas siempre serán convergentes. Ademas, incluso podrás calcular la suma de la serie con la fórmula 1/(1-r).
3. Busca p-series. Las p-series son sumatorias de funciones con la forma 1/(x^p), donde x es cualquier número. El teorema establece que si p es mayor que uno, entonces la serie es convergente; y si p es menor o igual a uno, entonces la serie es divergente. Esto significa que en nuestro primer ejemplo, 1/x diverge; al igual que 1/(x^1), y en este caso p=1. A esto se le llama serie armónica. 1/(X^2) converge porque 2 es mayor que 1.

Qué hacer si ninguna de las pruebas anteriores funciona. Si una prueba no es concluyente o resulta ser irrelevante, intenta usar otra prueba, como los criterios de convergencia. No siempre es obvio con cual probar primero; la práctica hará que tomes mejores decisiones, pero no hay un método establecido para determinar cuál criterio escoger.

1. Criterio de comparación directa. Asumamos que tienes dos series de términos positivos: a(n) y b(n). Entonces, i) si la suma infinita de b(n) converge y a(n) es menor que b(n) (para un n suficientemente grande), entonces la suma de a(n) también converge. ii) Si b(n) diverge y a(n)>b(n), entonces a(n) también diverge. Ejemplo, supongamos que tenemos la serie 2/x; podemos comparar esto a 1/x. Dado que ya sabemos que 1/x es divergente, y debido a que 2/x > 1/x, se sigue que 2/x también diverge. Entonces, el método básico es usar una serie conocida para determinar si la serie desconocida es convergente o divergente.
2. Criterio de comparación por paso al límite del cociente (“limit comparison test”). Si a(n) y b(n) son series de términos positivos y el límite de a(n)/b(n) existe y es mayor que 0, entonces ambas series serán convergentes o ambas series serán divergentes. Nuevamente, eso requiere usar una serie conocida. El método generalmente consiste en elegir una segunda serie cuya mayor potencia sea igual a la mayor potencia de la serie que nos fue dada. Por ejemplo, si nos dan la serie 1/(x^3+2x+1), entonces lo razonable es compararla con 1/(x^3).
3. Criterio de la integral de Cauchy (“integral test”). Asumamos que una función es positiva, continua y decreciente para un x mayor o igual a uno. Entonces, la serie infinita f(n) es convergente si: la integral de 1 a infinito de f(x) existe; por otra parte, será divergente si la integral no existe. Así que básicamente, integra la función y calcula el límite al infinito. Si existe, entonces la serie es convergente; si no existen, entonces la serie es divergente.
4. Criterio de Leibniz (“alternating series test”). Si a(k)>a(k+1)>0 para un valor de k suficientemente grande, y el límite de a(n) es 0, entonces la serie alternada (-1)^n a(n) es convergente. Dicho más fácilmente, si tienes una serie alternada (una serie donde cada término cambia su signo), entonces elimina la parte alternada de la función y calcula el límite de lo que queda. Si el límite existe, entonces la serie es convergente.
5. Criterio de d'Alembert, criterio del cociente o criterio de la razón (“ratio test”). Dada una serie infinita a(n), deberás hallar a(n+1), el término general para el siguiente término en la serie. Luego, calcula a(n+1)/a(n), utiliza un módulo de continuidad de ser necesario. Calcula el límite de a(n+1)/a(n); si el límite existe, te puede decir una de tres cosas. 1) Si el límite es menor que uno, entonces la serie es convergente. 2) Si el límite es mayor que uno, entonces la serie es divergente. 3) Si el límite es igual a uno, entonces la prueba no es concluyente y no se puede establecer nada sobre la convergencia de la serie.

Estos son los principales criterios de convergencia y son sumamente útiles. Si ninguno de estos funciona, lo más probable es que el problema sea irresoluble o que hayas cometido un error. Estos criterios se pueden aplicar a más cosas como series de potencia, series de Taylor y muchas otras. Es muy útil conocer estos criterios, pues realmente no hay una manera más simple de determinar si hay o no convergencia.