

Modelos de PERT/CPM: Probabilístico

> M. En C. Eduardo Bustos Farías



Existen proyectos con actividades que tienen tiempos inciertos, es decir, se tienen solo estimaciones de tiempo por lo cual deben ser tratados como variables aleatorias con distribuciones de probabilidad asociadas.

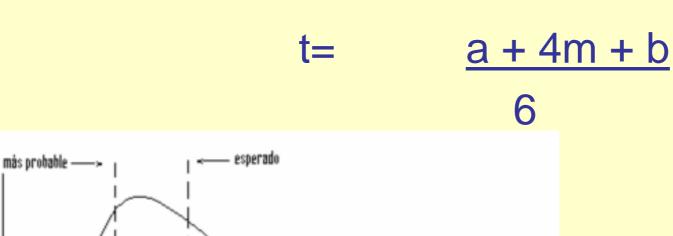
Para incluir los tiempos inciertos de las actividades en el análisis de la red, es necesario obtener tres estimaciones de tiempo para cada actividad. Las tres estimaciones son:

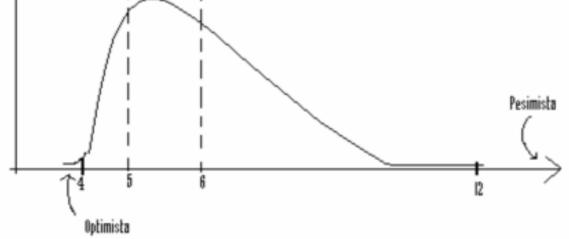
TIEMPO OPTIMISTA (a) Es el tiempo requerido para la actividad si todo marcha idealmente

TIEMPO MÁS PROBABLE (m) Es el tiempo requerido para la actividad con más probabilidades bajo condiciones estándar o normales.

TIEMPO PESIMISTA (b) Es el tiempo para la actividad cuando se afrontan demoras considerables.

Las tres anteriores estimaciones de tiempo permiten al administrador de un proyecto desarrollar una mejor apreciación del tiempo con una mayor probabilidad para cada actividad, el cual se calculará con la fórmula:





Por el tipo de distribución: (Beta)



### DIFERENCIAS ENTRE PERT Y CPM

- \* El tiempo más probable es el tiempo requerido para completar la actividad bajo condiciones normales.
- \* Los tiempos optimistas y pesimistas proporcionan una medida de la incertidumbre inherente en la actividad, incluyendo desperfectos en el equipo, disponibilidad de mano de obra, retardo en los materiales y otros factores.

# DIFERENCIAS ENTRE PERT Y CPM

- \* El tiempo esperado de finalización de un proyecto es la suma de todos los tiempos esperados de las actividades sobre la ruta crítica.
- \* De modo similar, suponiendo que las distribuciones de los tiempos de las actividades son independientes (realmente, una suposición fuertemente cuestionable), la varianza del proyecto es la suma de las varianzas de las actividades en la ruta crítica.

### DIFERENCIAS ENTRE PERT Y CPM

- \* En CPM solamente se requiere un estimado de tiempo.
- \* Todos los cálculos se hacen con la suposición de que los tiempos de actividad se conocen.
- \* A medida que el proyecto avanza, estos estimados se utilizan para controlar y monitorear el progreso.
- \* Si ocurre algún retardo en el proyecto, se hacen esfuerzos por lograr que el proyecto quede de nuevo en programa cambiando la asignación de recursos.

Con tiempos inciertos en las actividades, puede utilizarse la medida estadística común conocida como varianza para describir la dispersión o variabilidad en los valores de tiempo de actividades, la cual estará determinada por la siguiente fórmula:

Como podrá concluirse, en la medida en que existan diferencias grandes entre b y a se tendrá un elevado grado de incertidumbre en el tiempo de actividad.

PERT probabilístico parte de dos suposiciones:

 Que las actividades son estadísticamente independientes, lo cual permitirá sumar las varianzas de las actividades para obtener la varianza total del proyecto.

2. Que el tiempo de terminación de un proyecto es una variable normalmente distribuida, lo cual permite usar la distribución normal en el análisis.

#### EJEMPLO 1

Pert probabilístico



#### El proyecto para desarrollar un producto nuevo (electrodoméstico) consta de las siguientes actividades y tiempos:

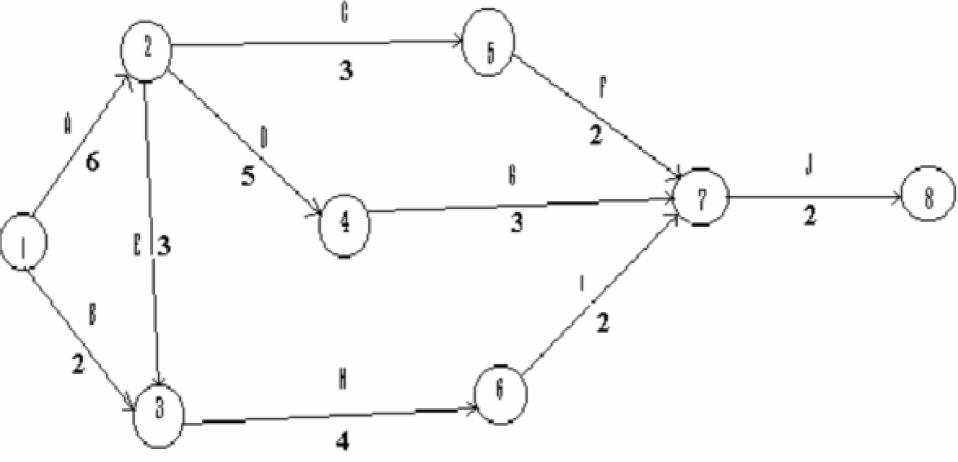
ACTIVIDAD	ACTIVIDAD PRECEDENTE	a	TIEMPOS m	(SEMANAS) b	t	VARIANZA
A	/	4	5	12	6	1.78
В	/	1	1.5	5	2	0.44
C	A	2	3	4	3	0.11
D	A	3	4	11	5	1.78
E	A	2	3	4	3	0.11
F	C	1.5	2	2.5	2	0.03
G	D	1.5	3	4.5	3	0.25
Н	B, E	2.5	3.5	7.5	4	0.69
I	Н	1.5	2	2.5	2	0.03
J	<b>F</b> , <b>G</b> , <b>I</b>	1	2	3	2	0.11

### SOLUCIÓN



# La red de actividades es:





- \* RUTA CRÍTICA: A-E-H-I-J
- \* TIEMPO: 17 semanas.
- \* Al igual que las actividades de la ruta crítica dirigen el tiempo total de determinación del proyecto, la variación de las actividades en la ruta puede ocasionar variaciones en el tiempo total que se requiere para terminar el proyecto.
- Por lo general la variación en las actividades que no están en la ruta crítica no tiene efecto alguno sobre el tiempo total para la finalización del proyecto, debido al margen u holgura correspondiente a esas actividades.
- \* Debemos, por lo tanto, utilizar la varianza de las actividades incluidas en la ruta crítica para determinar la varianza del tiempo de determinación del proyecto.
- \* Por lo dicho anteriormente y para calcular la varianza total:

 $\sigma^2 = \sigma^2 A + \sigma^2 E + \sigma^2 H + \sigma^2 I + \sigma^2 J$  $\sigma^2 = 1.78 + 0.11 + 0.69 + 0.03 + 0.11 = 2.72$ 

Así pues, la desviación estándar se puede calcular a partir de la varianza:

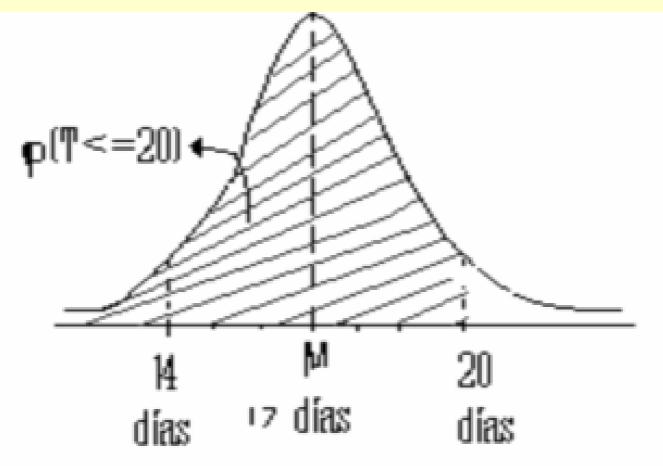
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2.72} = 1.65$$

\* Con la distribución normal puede calcularse la probabilidad de cumplir con una fecha especificada para la terminación del proyecto.

Por ejemplo, vamos a suponer que los administradores han asignado 20 semanas para el proyecto anterior, ¿Cuál es la probabilidad de que se cumpla con ese límite de 20 semanas?

Se pide calcular la probabilidad de que T <= 20





$$Z = X - M = 20 - 17 = 1.82$$
 $\sigma_e = 1.65$ 



Utilizando Z= 1.82 y la tabla de distribución normal, se observa que la probabilidad de que se satisfaga el limite de 20 semanas para el proyecto es: 0.9656, 96.56%, que es igual a 96.6%

Areas de la curva normal Tabla 3 0 2 .00 .01 .02 .03 .05 .07 .08 04 .06 .0000 .0080 .0120 .0160 .0199 .0239 0279 0319 .0359 0040 0.0 .0714 0398 .0438 .0478 .0517 0557 .0596 .0636 0675 .07530.1 .0793 .0832 .0871 .0910 .0948 .0987.1026 1064 1103 1141 0.2 .1179 .1217 .1255 1293 1331 1368 1406 .1480 .1517 0.3 1443 0.4 .1554 .1591 .1628 .1664 .1700 1736 1772 1808 1844 1879 .1915 .1950 .1985 2019 .2054 .2088 .2123 .2157 .2190 2224 0.5 .2257 2291 2324 2357 2389 2422 2454 2486 .2517 2549 0.6 .2580 .2642 2704 2764 2673 2734 2794 .28232852 0.7 2611 .2967 2995 .2881 2910 2939 .3023 .3051 .3078 .3106 .3133 0.8 .3159 .3212 .3289 .3315 0.9 .3186 .3238 3264 .3340 .3365 .3389 .3413 1.0 3438 3461 .3485 3508 3531 3554 .3577 3599 .3621 .3643 .3686 .3708 .3729 .3749 .3770 3665 .3790 3810 3830 1.1 .3925 .3962 1.2 .3849 .3888 .3907 3944 3980 3997 4015 3869 .4032 .4082 4099 1,3 .4049 .4066 .4115 .4131 4147 .4162 4177 4192 4207 .4222 .4236 4251 4265 .4279 .4292 4306 .4319 1.4 1.5 ,4332 .4345 .4357 4370 4382 .4394 .4406 .4418 .4429 4441 .4452 .4463 4474 4484 4495 4505 4515 .4525 4535 .4545 1.6 .4564 4599 .4582 .4633 1.7 4554 4573 .4591 .4608 4616 4625 ,4641 .4649 4656 .4664 4671 .4678 .4686 ,4693 .4699 4706 1.8 4713 .4719 .4726 .4732 .4738 .4744 .4750 .4756 19 4761 4767 .4772 .4783 .4788 4793 4798 .4803 .4812 2.0 .4778 4808 .4817 2.1 482 4826 .4830.4834 4838 4842 4846 .48504854 4857 4881 .4884 .4890 2.2 .4861 4864 .4868 .4871 .4875 .4878 4887 .4893 .4901 4904 .4909 2.3 4896 ,4898 4906 .4911 4913 4916 4929 4925 .4927 4931 4932 4934 .4936 2.4 .4918 .4920 .4922 .4938 4943 .4945 .4946 4948 .4949 .4951 .4952 4940 .4941 2.5 .4953 .4955 4960 4962 .4963 4964 2.6 .4956 .49574959 .4961 2.7 .4965 .4966 .4967 4968 .4969 4970 .4971.4972 4973 4974 .4977 .4977 .4978 .4979 4981 2.8 .4974 .4975 .4976 .4979 .4980 .4981 .4985 .4985 .4986 4982 4984 .4984 .4985 2.9 .4982 .4983 .4987 .4988 .4988 .4989 .4989 .4989 ,4990 .4987 .4987 3.0

Versión estractada de la tabla I de Stanstical Tables and Formulas, por A. Hald (New York: John Wiley & Sons, Inc., 1952). Reproducido con autorización de A. Hald y de la casa editora, John Wiley & Sons, Inc.



Ahora vamos a suponer una asignación de 14 semanas ¿Cuál es la probabilidad de terminar el proyecto en 14 semanas?

$$Z = X - M = 14 - 17 = -1.82 = 0.0344,$$
 $\sigma_e$  1.65

es decir 3.4% de probabilidad.

#### EJEMPLO 2

SHARP COMPANY
PERT PROBABILÍSTICO



## SHARP COMPANY PROBABILÍSTICO

Tres estimaciones de tiempo (optimista, más probable y pesimista) para las actividades del caso de la Sharp Company

Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Optimistic time (a)	Most likely time (m)	Pessimistic time (b)
1	Α		3	5.5	11
2	В		1	1.5	5
3	C	Α	1.5	3	4.5
4	D	В	1.2	3.2	4
5	E	С	2	3.5	8
6	F	D	1.8	2.8	5
7	G	E	3	6.5	7
8	Н	F	2	4.2	5.2
9	I	G,H	0.5	0.8	2.3
10	J		0.8	2.1	2.8

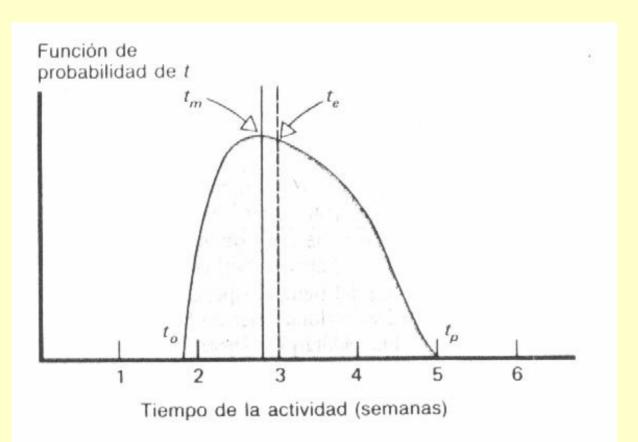


FIGURA 6-9. Distribución de probabilidad para los tiempos de actividad de "fabricar el empaque" para la Sharp Company



### SOLUCIÓN



### Ruta crítica de Sharp Company



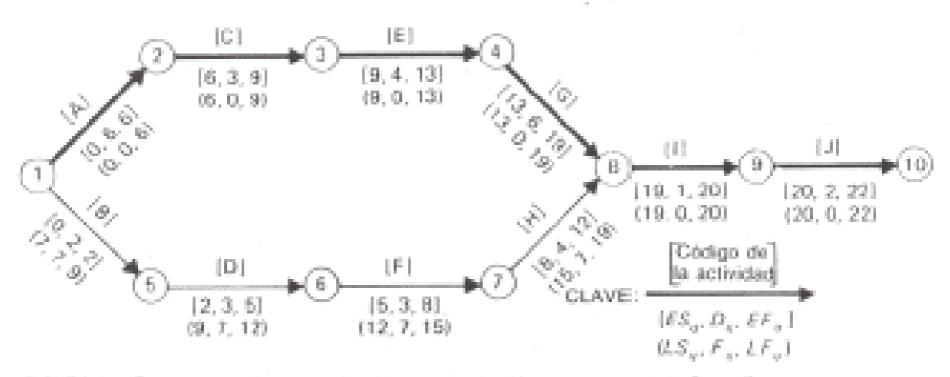


FIGURA 6-8. Tiempos más tejanos de inicación y de terminación para el caso de la Sharp Company.

 Recuérdese que la ruta crítica incluía las actividades A, C, E, G, I y J, con un tiempo esperado de terminación de 22 semanas. Por tanto, la varianza para el proyecto es:

$$\sigma^{2} = \sigma_{tA}^{2} + \sigma_{tC}^{2} + \sigma_{tE}^{2} + \sigma_{tG}^{2} + \sigma_{tJ}^{2} + \sigma_{tJ}^{2}$$

$$= 1.78 + 0.56 + 1.00 + 0.44 + 0.09 + 0.11$$

$$= 3.98 semanas$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{3.98} = 2$$
semanas



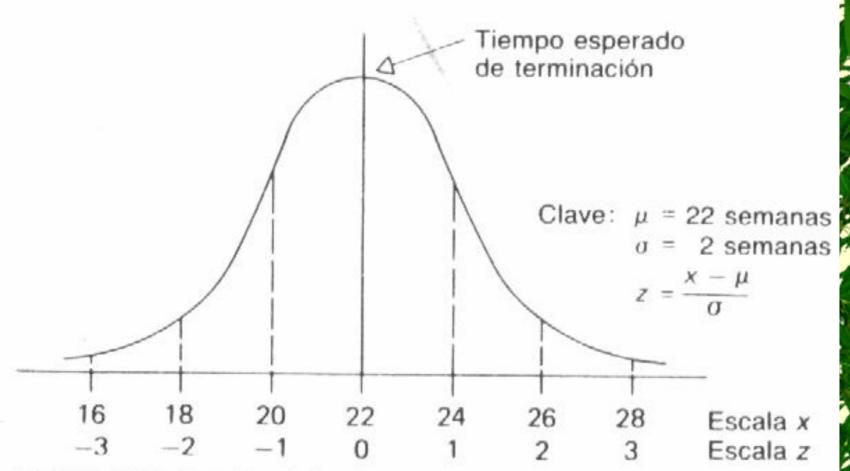


FIGURA 6-10. Variación de los tiempos de terminación del proyecto para el caso de la Sharp Company: distribución normal

- Puesto que la variación en el tiempo de duración del proyecto sigue una distribución normal, puede utilizarse lo que se sabe acerca de esta distribución para hacer un planteamiento de probabilidades con respecto a una fecha específica de terminación del proyecto; dada una fecha objetivo específica de terminación, puede calcularse la probabilidad de que el proyecto se termine en esa fecha o antes.
- \* Como ejemplo, suponga que Bill Bowen, vicepresidente de la Sharp Company, ha indicado que sería deseable terminar el proyecto antes de 6 meses (26 semanas), y le gustaría conocer la probabilidad de que esto ocurriera.
- \* Para determinar este valor de la probabilidad, primero se convierte el valor de 26 semanas a un valor de Z.
- \* Se sabe que el valor de Z está expresado mediante la siguiente función:  $Z = \frac{X \mu}{Z}$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

\* Por tanto, x = 26,  $\mu = 22$  (nuestro tiempo esperado de terminación), y  $\sigma = 2$ , el valor de Z es

$$Z = \frac{26 - 22}{2} = 2$$

- \* Utilizando Z = 2.0 y una tabla para la distribución normal, se encuentra que a probabilidad asociada (y por ello el porcentaje del área total que se encuentra bajo la curva y a la izquierda de x = 26) es 0.5000 + 0.4772 = 0.9772.
- Ver tabla en la siguiente diapositiva.
- \* La probabilidad de que el proyecto se termine en 26 semanas o menos es 0.9772; por tanto, el señor Bowen puede tener bastante confianza en que el proyecto pueda terminarse hacia esa fecha.



Areas de la curva normal Tabla 3 0 2 .00 .01 .02 .03 .05 .07 04 .06 .08 .0000 .0080 .0120 .0160 .0239 0279 0319 .0359 0040 .0199 0.0 .0714 0398 .0438 .0478 .0517 0557 .0596 .0636 0675 .07530.1 .0793 .0832 .0871 .0910 .0948 .0987.1026 1064 1103 1141 0.2 .1179 .1217 .1255 1293 1331 1368 1406 .1480 .1517 0.3 1443 0.4 .1554 .1591 .1628 .1664 .1700 1736 1772 1808 1844 1879 .1915 .1950 .1985 2019 .2054 .2088 .2123 .2157 .2190 2224 0.5 2324 .2257 2291 2357 2389 2422 2454 2486 .2517 2549 0.6 .2580 .2642 2704 2764 0.7 2673 2734 2794 .28232852 2611 .2967 2995 .2881 2910 2939 .3023 .3051 .3078 .3106 .3133 0.8 .3159 .3212 .3289 .3315 0.9 .3186 .3238 3264 .3340 .3365 .3389 .3413 1.0 3438 3461 .3485 3508 3531 .3554 .3577 3599 .3621 .3643 .3686 .3708 .3729 .3749 .3770 3665 .3790 3810 3830 1.1 .3925 .3962 1.2 .3849 .3888 .3907 3944 3980 3997 4015 3869 .4032 .4082 4099 1,3 .4049 .4066 .4115 .4131 4147 .4162 4177 4192 4207 .4222 .4236 4251 4265 .4279 .4292 4306 .4319 1.4 1.5 ,4332 .4345 .4357 4370 4382 .4394 .4406 .4418 .4429 4441 .4452 .4463 4474 4484 4495 4505 4515 .4525 4535 .4545 1.6 4554 4591 4599 .4633 1.7 .4564 .4573 .4582 .4608 4616 4625 1.8 4641 .4656 .4664 4671 .4678 .4686 ,4693 .4699 4706 .4649 4713 .4719 .4726 .4732 4738 .4744 .4750 .4756 19 4761 4767 .4772 .4783 .4788 4793 ,4798 .4803 .4812 2.0 .4778 4808 .4817 2.1 482 4826 .4830.4834 .4838 4842 4846 .48504854 4857 2.2 .4861 4881 .4884 .4890 4864 .4868 .4871 .4875 .4878 .4887 .4893 .4901 4904 .4909 2.3 4896 ,4898 4906 .4911 4913 4916 4929 4925 .4927 4931 4932 4934 .4936 2.4 .4918 .4920 .4922 .4938 4943 .4945 .4946 4948 .4949 .4951 .4952 4940 .4941 2.5 .4953 .4955 4960 4962 .4963 4964 2.6 .4956 .49574959 .4961 2.7 .4965 .4966 .4967 4968 .4969 4970 .4971.4972 4973 4974 .4977 .4977 .4978 .4979 4981 2.8 .4974 .4975 .4976 .4979 .4980 .4981 .4985 .4985 .4986 4982 4984 .4984 .4985 2.9 .4982 .4983 .4987 .4988 .4988 .4989 .4989 .4989 ,4990 .4987 .4987 3.0

Versión estractada de la tabla I de Statistical Tables and Formulas, por A. Hald (New York: John Wiley & Sons, Inc., 1952). Reproducido con autorización de A. Hald y de la casa editora. John Wiley & Sons, Inc.

29

### SOLUCIÓN CON WINQSB



					The second second
Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Optimistic time (a)	Most likely time (m)	Pessimistic time (b)
1	A		3	5.5	11
2	В		1	1.5	5
3	C	Α	1.5	3	4.5
4	D	В	1.2	3.2	4
5	E	С	2	3.5	8
6	F	D	1.8	2.8	5
7	G	E	3	6.5	7
8	Н	F	2	4.2	5.2
9	I	G,H	0.5	0.8	2.3
10	J	1	0.8	2.1	2.8



										1100
vity Analysis for SHARP PROBABILISTICO										
10-06-2002 18:47:35	Activity Name	On Critical Path	Activity Mean Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)	Activity Time Distribution	Standard Deviation
1	Α	Yes	6	0	6	0	6	0	3-Time estimate	1.3333
2	В	no	2	0	2	7	9	7	3-Time estimate	0.6667
3	С	Yes	3	6	9	6	9	0	3-Time estimate	0.5
4	D	no	3	2	5	9	12	7	3-Time estimate	0.4667
5	E	Yes	4	9	13	9	13	0	3-Time estimate	1
6	F	no	3	5	8	12	15	7	3-Time estimate	0.5333
7	G	Yes	6	13	19	13	19	0	3-Time estimate	0.6667
8	Н	no	4	8	12	15	19	7	3-Time estimate	0.5333
9	ı	Yes	1	19	20	19	20	0	3-Time estimate	0.3
10	J	Yes	2	20	22	20	22	0	3-Time estimate	0.3333
	Project	Completion	Time	=	22	weeks				

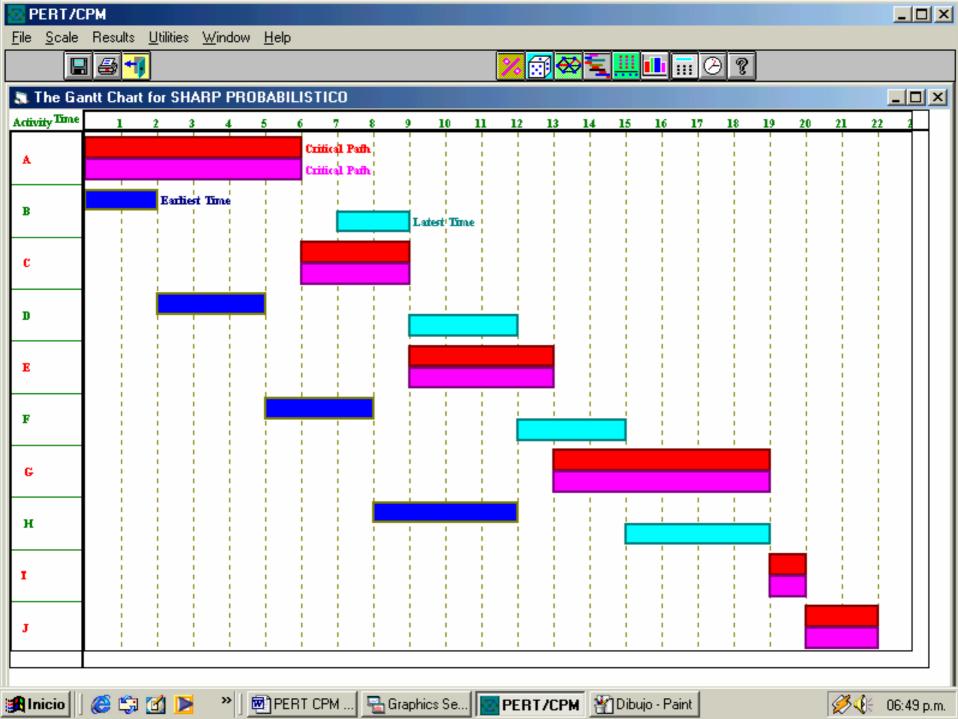
1

=

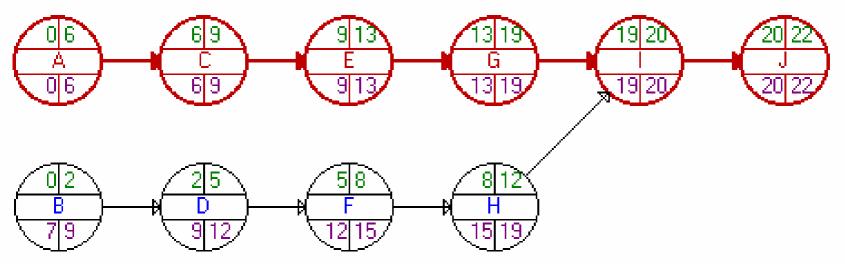
Number of

Critical

Path(s)







10-06-2002	Critical Path 1
1	Α
2	C
3	E
4	G
5	I
6	J
Completion Time	22
Std. Dev.	1.92



×

The following probability calculation assumes that activities are independent and so are paths. It also assumes that the project has a large enough number of activities to assume the normal distribution, which is used to estimate the probability of finishing a critical path in the desired time. Therefore, when the activities are not independent or the number of activities is not large, the analysis may be biased.

Completion time based on mean/ex	pecte	d time:		22 weeks	
Number of critical paths:				1	
Desired completion time in	week:	2	6		
Critical Path:	Stand	ard Dev.:	Prob	ability (%):	
A> C> E> G> I> J	1.916	66	98.1548		
Compute Probability Cancel		Print		Help	

### EJERCICIO PARA RESOLVER



В	A	1	1.5	5	2	0.67	0.44	0.67	
С	В	1.5	3	4.5	3	0.50	0.25	0.50	
D	C	1.2	3.2	4	3	0.47	0.22	0.47	
E	D	2	3.5	8	4	1.00	1.00	1.00	
F	E	1.8	2.8	5	3	0.53	0.28	0.53	
G	F	3	6.5	7	6	0.67	0.44	0.67	
Н	G	2	4.2	5.2	4	0.53	0.28	0.53	
I	Н	0.5	8.0	2.3	1	0.30	0.09	0.30	
J	I	8.0	2.1	2.8	2	0.33	0.11	0.33	
Dibuje la red de actividades del proyecto y la gráfica de Gantt. Calcule la ruta crítica, la duración y la desviación estándar del proyecto.									
								AND DESCRIPTION OF THE PERSON NAMED IN	

**TIEMPO** 

**OPTIMI** 

3

STA

**PRECED** 

**ENTES** 

**ACTIVIDAD** 

**TIEMPO** 

**MÁSPROBABLE** 

5.5

**TIEMPO** 

**PESIMISTA** 

**TIEMPO** 

11

**ESPERADO** 

6

**DESVIACIÓN** 

1.33

**ESTÁNDAR** 

**VARIANZA** 

1.33

1.78

### EJERCICIO PARA RESOLVER



ACTIVIDAD	TIEMPO	TIEMPO MÁS	TIEMPO	TIEMPO		VARIANZA	DESVIACIÓN	
	OPTIMISTA	PROBABLE	PESIMISTA	ESPERADO			ESTÁNDAR	
Α	1	3	5	3	0.67	0.44	0.67	
В	3	4.5	9	5	1.00	1.00	1.00	
С	2	3	4	3	0.33	0.11	0.33	
D	2	4	6	4	0.67	0.44	0.67	
E	4	7	16	8	2.00	4.00	2.00	
F	1	1.5	5	2	0.67	0.44	0.67	
G	2.5	3.5	7.5	4	0.83	0.69	0.83	
Н	1	2	3	2	0.33	0.11	0.33	
I	4	5	6	5	0.33	0.11	0.33	
J	1.5	3	4.5	3	0.50	0.25	0.50	
K	1	3	5	3	0.67	0.44	0.67	
	Dibuje la red de actividades del proyecto y la gráfica de Gantt. Calcule la ruta crítica, la duración y la desviación estándar del proyecto.							

### EJERCICIO PARA RESOLVER



Considere las actividades de un proyecto de corto plazo que se enlistan a continuación:

- \* Determinar la ruta crítica
- \* ¿Cuánto tiempo de holgura o margen tiene la actividad C si es que lo tiene?
- Calcular la probabilidad de que concluya el proyecto en 30 semanas o menos.





ACTIVIDAD	ACTIVIDAD PRECEDENTE	A	TIEMPOS M	(SEMANAS) B	T	$\sigma^2$
A	/	5	6	7	6	0.11
В	/	5	12	13	11	1.8
C	A	6	8	10	8	0.44
D	A	4	10	10	9	1.0
E	C	5	6	13	7	1.8
F	B, D	7	7	10	7.5	0.25
G	E, F	4	7	10	7	1.0
	•					

Considere las actividades de un proyecto de corto plazo que se enlistan a continuación:

Determinar la ruta crítica ¿Cuánto tiempo de holgura o margen tiene la actividad C si es que lo tiene?

Calcular la probabilidad de que concluya el proyecto en 30 semanas o menos.