A.0

6/10/17

Probabilidad y Estadística
Primer Examen Parcial
Prof: Ricardo Ceballos Sebastián
19 de septiembre de 2017
Tipo B

Nombre del alumno(a): Sierra Yescas Eduardo   Boleta: 2016630394

Instrucciones: Resuelva de manera clara 5 de los siguientes 6 problemas. Cada problema vale 2 puntos.

1. Diez fichas numeradas del 1 al 10 se mezclan en una palangana (Urna). Se sacan de la palangana (Urna) dos fichas numeradas (X, Y) una y otra vez sin sustitución. ¿Cuál es la probabilidad de que $X + Y = 10$?

2. Una caja contiene esferas numeradas $1, 2, \ldots, n$. Se escogen dos esferas al azar. Encontrar la probabilidad de que los números sobre las esferas sean enteros consecutivos si,
   a) las esferas se escogen sin sustitución.
   b) las esferas se escogen con sustitución.

3. La urna 1 contiene x esferas blancas y y esferas rojas. La urna 2 contiene z esferas blancas y v esferas rojas. Se escoge una esfera al azar de la urna 1 y se pone en la urna 2. Entonces se escoge una esfera al azar de la urna 2. ¿Cuál es la probabilidad de que esta esfera sea blanca?

4. Cada uno de tres joyeros idéntidos tiene dos cajones. En cada cajón del primer joyero hay un reloj de oro. En cada cajón del segundo joyero hay un reloj de plata. En un cajón del tercer joyero hay un reloj de oro, mientras que en el otro cajón hay un reloj de plata. Si escogemos un joyero al azar, abrimos uno de los cajones y encontramos un reloj de plata. ¿Cuál es la probabilidad de que en el otro cajón exista un reloj de oro?

5. Probar que si A y B son eventos independientes, también lo son A y $\overline{B}$, $\overline{A}$ y B, $\overline{A}$ y $\overline{B}$.

6. Un lote contiene n artículos. Si se sabe que r artículos son defectuosos y se inspeccionan en un orden aleatorio.¿Cuál es la probabilidad de que el k-ésimo artículo (con $k \geq r$) inspeccionado sea el último defectoso en el lote?

... fichas numeradas del 1 al 10 en una palangana. Se sacan de la palangana fichas numeradas (X, Y) una y otra vez sin substitución ¿Cual es la probabilidad de que $X + Y = 10$

Solución

$S = \{(1,2), (1,3), \ldots, (10,9)\}$ $\#S = 10 \cdot 9 = 90$ por el principio fundamental del conteo

Sea A = a los numeros que sumados sean 10

$A = \{(1,9), (2,8), (3,7), (4,6), (6,4), (7,3), (8,2), (9,1)\}$ $\#A = 8$

2.0

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{8}{90}$$

② Una Caja contiene esferas numeradas $1, 2, 3, \ldots, n$. Se escogen 2 esferas al azar. Encontrar la probabilidad de que los números sobre las esferas sean consecutivos si

a) las esferas se escogen sin substitución

b) las esferas se escogen con substitución

Solución (B)

S = a las esferas dentro de la caja $\#S = n \cdot n = n^2$

A = a las 2 esferas consecutivas con remplazo 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... n-1, n

$\#A = (n-2) \cdot 2 + 2 = 2n - 4 + 2 = 2n - 2$

2.0

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{2n-2}{n^2}$$

Solución (A)

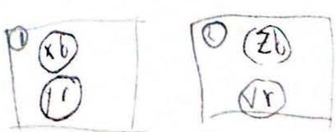
S = a las esferas dentro de la Caja $\#S = n \cdot (n-1) = n^2 - n$

B = a las 2 esferas consecutivas sin remplazo

$\#B = 2 + (n-2) \cdot 2 = 2n - 2$

$$P(B) = \frac{\#B}{\#S} = \frac{2n-2}{n^2 - n}$$

③ Una urna contiene "x" esferas blancas y "y" esferas rojas. La urna 2 contiene "z" esferas blancas y "v" esferas rojas. Se escoje una esfera al azar de la urna 1 y se pone en la urna 2. Entonces se escoje una esfera de la urna 2 ¿Cual es la probabilidad de que sea blanca?



Solución

Sea XB Sacar una pelota blanca de la urna 1 y ZB de la urna 2

Sea YR Sacar una pelota roja de la urna 1 y VR de la urna 2

$$= P(ZB|XB) \cdot P(ZB|YR) = \frac{P(ZB \cap XB)}{P(XB)} \cdot \frac{P(ZB \cap YR)}{P(YR)}$$

$$P(ZB) = \frac{Z}{Z+V+1}$$

Siendo que son eventos independientes

$$P(ZB|XB) \cdot P(ZB|YR) = P(ZB) \cdot P(ZB) = \left(\frac{Z}{Z+V+1}\right)^2$$

4) Cada uno de 3 Joyeros identicos tiene 2 cajones. En cada cajon del primer Joyero hay 1 reloj de oro. En cada cajon del segundo Joyero hay 1 reloj de plata. En 1 cajon del 3er Joyero hay 1 reloj de oro mientras que en el otro cajon hay un reloj de plata. ~~¿Cual es la prob~~ Si escojemos 1 joyero al azar, abrimos uno de los cajones y encontramos un reloj de plata ¿Cuál es la probabilidad de que en el otro cajon exista un reloj de oro?

Solucion

Sea A el evento Sacar un reloj de oro de los cajones
Sea B el evento Sacar un reloj de plata de los cajones
Sea S los relojes total $\#S=6$

$$P(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{1}{3}$$

dadas las condiciones del problema, tambien se puede ver como ¿Cual es la probabilidad de escojer el 3er Joyero?

Sea S los joyeros $\#S=3$
Sea A escojer el 3er joyero

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{1}{3}$$

~~5~~ 6) Un lote contiene n articulos. Si se sabe que r articulos son defectuosos y se inspeccionan en un orden aleatorio ¿Cual es la probabilidad de que el K-ésimo articulo (con $k \geq r$) inspeccionado sea el ultimo defectuoso en el lote

Solución

$k \geq r \leq n$

Sea S la cantidad de articulos $\#S=n$
Sea A el evento inspeccionar un elemento
Sea B el evento sea el ultimo artículo defectuoso en la lista

$P(A|B) =$

5.0

Probabilidad y Estadística: Segundo examen parcial
Prof: Ricardo Ceballos Sebastián
17 de noviembre de 2017
Tipo B

17-Nov-17

Nombre del alumno(a): Sierra Yescas Eduardo

Instrucciones: Resuelva de manera clara 5 de los siguientes 6 problemas. Cada problema tiene un valor de 2 puntos.

1. Un tazón contiene 5 fichas que no pueden distinguirse unas de otras. Tres de las fichas están marcadas con \$2 y las dos restantes con \$4. Un jugador saca del tazón dos fichas al azar sin remplazo, y se le paga con una cantidad igual a la suma de los valores indicados en las dos fichas. Si el costo por jugar es \$5.60, ¿es justo el juego?

2. El período de hospitalización, en días, para pacientes que siguen un tratamiento para cierto tipo de desorden renal es una variable aleatoria $Y = X + 4$, donde X tiene la función de densidad,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{32}{(x+4)^3}, & x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre el número promedio de días que una persona está hospitalizada para seguir el tratamiento contra este desorden. Encuentre la varianza de la variable aleatoria Y.

3. Una variable aleatoria X tiene una media $\mu = 12$, una varianza $\sigma^2 = 9$, y una distribución de probabilidad conocida. Utilizando el teorema de Chebyshev, encuentre:

   a) $P(6 < X < 18)$,
   b) $P(3 < X < 21)$.

4. Calcule la $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$, donde X tiene la función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty,$$

y compárela con el resultado dado en el teorema de Chebyshev.

5. Al formar números binarios con n dígitos, la probabilidad de que aparezca un dígito incorrecto es 0.002. Si los errores son independientes, ¿cuál es la probabilidad de encontrar 0, uno más de un dígito incorrecto en un número binario de 25 dígitos? Si el computador forma 10^6 de tales números de 25 dígitos por segundo, ¿Cuál es la probabilidad de que se forme un número incorrecto durante cualquier período de un segundo? Poisson

6. La probabilidad de un lanzamiento exitoso es igual 0.8. Supongamos que se hacen ensayos de lanzamientos hasta que han ocurrido 3 lanzamientos exitosos.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que sean necesarios 6 intentos?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que sean necesarios menos de 6 intentos?
   c) Supongamos que cada uno de los ensayos de lanzamiento cuesta \$5,000. Además, un lanzamiento que fracase produce un costo adicional de \$500. Calcular el costo esperado para la situación descrita.

Sierra Yescas Eduardo

① Solución

Sea X la V.A que mida la suma de las 2 Fichas

Sabemos que aleatoriamente puede agarrar las siguientes opciones

$S = \{(2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\}$

x	4	6	8
$f(x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

2.0

$P(X=4) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$, $P(X=6) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10}$, $P(X=8) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} =$

Sabemos que un juego es Justo si $\mu = 1$ o si el costo por juego $= \mu$

$\mu = E(X) = \sum x f(x) = 4\left(\frac{3}{10}\right) + 6\left(\frac{6}{10}\right) + 8\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{12 + 36 + 8}{10} = \frac{56}{10} = 5.6$

el costo por juego es de \$5.6 y lo que se gana es \$5.6 ∴ el juego es Justo

② Solución

$Y = X + 4$ $\qquad f(x) = \begin{cases} \frac{32}{(x+4)^3} & x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso, } x \leq 0 \end{cases}$

$\mu = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} y \cancel{f(x)}dx + \int_{0}^{\infty} y f(x)dx = \int_{0}^{\infty} (x+4) \frac{32}{(x+4)^3} dx = 32 \int_{0}^{\infty} (x+4)^{-2} dx$

$= 32 \lim_{a\to\infty} \int_{0}^{a} (x+4)^{-2} dx = 32 \lim_{a\to\infty} \frac{-1}{(x+4)} \Big|_{0}^{a} = 32 \lim_{a\to\infty} \frac{1}{x+4} \Big|_{a}^{0}$

$= \frac{32}{4} - \cancel{32(0)} = 8 \qquad \mu = 8$

~~1~~ 2.0

$\sigma = E((Y-\mu)^2) = \int_{0}^{\infty} (y-\mu)^2 f(x)dx = \int_{0}^{\infty} (x+4-8)^2 \frac{32}{(x+4)^3} dy = 32 \int_{0}^{\infty} \frac{(x-4)^2}{(x+4)^2} dx = 32 \int_{0}^{\infty} \left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2 dy$

(No existe)

sen = co / hip

cos = ca / hip

tan = co / ca

3) Solución $\mu = 12$ $\sigma^2 = 9$

a) $P(6 < X < 18) = P(6-12 < X-12 < 18-12) = P(6 < X-12 < 6)$

$P(6 < X < 18) = P(|X-12| < 6)$

$P(|X-12| < 6) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{e^2} = 1 - \frac{9}{36} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$P(|X-12| < 6) \geq \frac{3}{4}$

2.0

b) $P(3 < X < 21) = P(3-12 < X-12 < 21-12) = P(-9 < X-12 < 9)$

$P(3 < X < 21) = P(|X-12| < 9)$

$\geq$ $<$

$P(|X-12| < 9) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{e^2} = 1 - \frac{9}{81} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

$P(|X-12| < 9) \geq \frac{8}{9}$

4) $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$ donde X tiene la función de densidad

$F(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ $-\infty < x < \infty$

$x = 0$

$\mu = \frac{dF(x)}{dx}$ $\sigma^2 = \frac{d^2 F_x}{dx^2}$

$\frac{dF(x)}{dx} = -\frac{1}{2} e^{-|x|} = -\frac{1}{2}$ | $\frac{dF(x)}{dx^2} = \frac{1}{2} = \sigma^2$ $\sigma = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = \int_{-\frac{1}{2} - 2\sqrt{\frac{1}{2}}}^{-\frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \frac{1}{2} \int_{-2\sqrt{\frac{1}{2}}}^{2\sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-|x|} dx = -\frac{1}{2} e^{-|x|} \Big|_{-2\sqrt{\frac{1}{2}}}^{-\frac{1}{2} 2\sqrt{\frac{1}{2}}}$

$= -\frac{1}{2} e^{-|2\sqrt{\frac{1}{2}}|} + \frac{1}{2} e^{-|2\sqrt{\frac{1}{2}}|} = 0$ X

Por Chebyshev

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = P(-2\sigma < X - \mu < 2\sigma) = P(|X - \frac{1}{2}| < 2\sqrt{\frac{1}{2}})$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = P(|X - \frac{1}{2}| < 2\sqrt{\frac{1}{2}}) \geq 1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2\sqrt{1}}{\sqrt{2}}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0.2928$

Q