# VARIABLES ALEATORIAS

Una **variable aleatoria** es una función que asocia un número real con cada elemento del espacio muestral.

## VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

Una variable aleatoria X se llama **variable aleatoria discreta** si se puede contar su conjunto de resultados posibles

**Ejemplos:**

1. Un capataz en una fábrica tiene tres hombres y cuatro mujeres trabajando para él. Desea elegir dos trabajadores para una labor especial y decide seleccionarlos al azar. Sea Y el número de mujeres en su elección. Encuentra la probabilidad para cada uno de los valores de Y.

2. Considera el experimento de lanzar una moneda 3 veces, la probabilidad de que caiga cara en un lanzamiento es *p*. Supón que por cada cara ganamos 1 peso y por cada cruz perdemos 1 peso, sea *X* la cantidad total ganada al cabo de los tres lanzamientos. Lista los elementos del espacio muestral, asigna un valor de *X* para cada evento simple del espacio muestral y un valor para su probabilidad.
Si *A* es el evento de que la ganancia es 1 peso, ¿Cuál será su probabilidad?

**Definición:** La función *f* definida sobre R como $f_X(x) = P_X(x) = P(X = x)$ se conoce como la **función de masa** de probabilidad (función de densidad, función de probabilidad o función de densidad de probabilidad) de la v.a *X* si cumple con las propiedades siguientes:

**i)** $f_X(x) \geq 0 \quad \forall \quad x \in \mathrm{R}$

**ii)** $\{ x \mid f_X(x) \neq 0 \}$ es un conjunto finito o infinito numerable.

**iii)** $\sum_x f_X(x) = 1$

3. En base al ejemplo anterior, se dijo que la probabilidad de una cara en un lanzamiento era p. Si p=0.4 calcular la función de masa para la v.a. X.

**Definición:** Se define a la **función de probabilidad acumulada** de la v.a. *X* en el número *x*, $F_X(x)$ con $-\infty < x < \infty$ como $F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{X \leq x} P(X = x) = \sum_{X \leq x} f_X(x)$

Con las propiedades siguientes:

**i)** $0 \leq F_X(x) \leq 1 \quad , \quad -\infty < x < \infty$

**ii)** $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ & $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

**iii)** Si $x_1 \leq x_2$ entonces $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

**Propiedades de la función de probabilidad acumulada.**

$$P(X=x)=F_X(x)-F_X(x-1)$$
$$P(X\le x)=F_X(x)$$
$$P(X<x)=F_X(x-1)$$
$$P(X\ge x)=1-F_X(x-1)$$
$$P(X>x)=1-F_X(x)$$
$$P(a\le X\le b)=F_X(b)-F_X(a-1)$$

**4.** Sea *X* una v.a con posibles valores *x*=0, 1, 2 tal que *P(X*=0*)*=3/7, *P(X*=1*)*=1/7 y *P(X*=2*)*=3/7. Encuentra y grafica la función de probabilidad acumulada para la variable *X*.

**5.** Se sabe que al lanzar una moneda, a menudo sale cara tres veces más que sello. Esta moneda se lanza 3 veces. Sea *X* la v.a que representa el número de caras que aparecen:
a) Encuentra la función de masa de probabilidad de *X*.
b) Encuentra la función de probabilidad acumulada de *X*.
c) Grafica ambas funciones.

**6.** Sea X una variable aleatoria cuya función de probabilidad acumulada está dada por:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x<1\\ 0.17 & \text{si} \quad 1\le x<2\\ 0.28 & \text{si} \quad 2\le x<3\\ 0.52 & \text{si} \quad 3\le x<4\\ 0.62 & \text{si} \quad 4\le x<5\\ 1 & \text{si} \quad x\ge 5\end{cases}$$

Calcula las siguientes probabilidades:
**a)** $P(x<2)$
**b)** $P(x\le 2)$
**c)** $P(x>4)$
**d)** $P(2\le x\le 4)$
**e)** $P(1<x\le 4)$

**Definición:** Si *X* es una v.a discreta con función de probabilidad $f_X(x)$, la esperanza, **valor esperado** o media de la v.a *X* está dada por

$$E(X)=\sum_x xf_X(x)=\sum_x xP(X=x)$$

**7.** Con base al ejemplo 3. ¿Cuál es el valor esperado de la variable X: ganancia al cabo de los tres lanzamientos?

**8.** Un fabricante produce artículos de tal modo que el 10% es defectuoso y el 90% no lo es. Si se produce un artículo defectuoso el fabricante pierde $1.00, mientras que un artículo sin defectos le produce una utilidad de $5.00. Si *X* es la utilidad neta por artículo, encuentra su valor esperado.

**Notas:**

- Si la v.a *X* puede tomar un número infinito numerable de valores, entonces se dice que la esperanza de *X* existe si y sólo si $\sum_x |x| f_X(x) < \infty$, es decir la serie tiene que ser absolutamente convergente.

- Si *X* es una v.a discreta con función de probabilidad $f_X(x)$ y $g(x)$ una función de valores reales de *x*, se tiene que el valor esperado de la función de la v.a está dado por:

$$E[g(x)] = \sum_x g(x) f_X(x)$$

**Propiedades del valor esperado**

Sea *X* una v.a discreta con función de probabilidad $f_X(x)$

**P1._** Si *a* y *b* son constantes y $Y=aX+b$, entonces $E(Y)=aE(X)+b$

**9.** Demuestra ésta propiedad

**P2._** Si $X_1, X_2, ..., X_n$ son variables aleatorias con valores esperados $E(X_i)$, $i=1, 2, ..., n$ respectivamente, entonces la esperanza de la suma de las variables aleatorias es la suma de las esperanzas de las variables.

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

**10.** En un juego de dinero, el valor esperado (E) del juego se considera como el juego del jugador. Se dice que el juego es favorable al jugador si E es positivo, y desfavorable si E es negativo. Si E=0, el juego es legal.
En un casino, un jugador lanza un dado corriente. Si sale un número primo gana esa cantidad en dólares, pero si el número no es primo pierde esa cantidad en dólares. Hallar el valor del juego para el jugador.

**Definición._** Si *X* es una v.a con media $E(X) = \mu$, la **varianza de** *X* se define como
$V(X) = E(X-\mu)^2$

**11.** Demuestra que $V(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$

**Propiedades de la varianza**

**P1._** La varianza de una constante es cero. Si *a*=Cte entonces $V(a) = 0$

**P2._** La varianza del producto de una constante por una variable es el producto del cuadrado de la constante por la varianza de la variable $V(aX) = a^2 V(X)$

**P3._** Si $X$ y $Y$ son independientes entonces $E(XY) = E(X)E(Y)$ por lo tanto $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

Generalizando, se tiene que si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables aleatorias independientes entonces

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

**12.** Si X es una v.a con media y varianza dadas por $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$ . Demuestra que $E[X(X-1)] = \mu(\mu-1) + \sigma^2$ .

**Función generadora de momentos**

**Definición:** Si $X$ es una v.a con $E(X) = \mu_X$ y $k$ un entero positivo entonces hay dos tipos de momentos:

**1._** $k$-ésimo momento alrededor del origen definido como $\mu_k^o = E(X^k) = \sum_x x^k f_X(x)$

**2._** $k$-ésimo momento alrededor de la media o $k$-ésimo momento central, definido por:

$$\mu_k^c = E[(X - \mu_X)^k] = \sum_x (x - \mu_X)^k f_X(x)$$

**Definición:** Si $X$ es una v.a discreta, la función generadora de momentos f.g.m. se define como:

$$\psi_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} f_X(x)$$

**Propiedades de la f.g.m**

**P1._** Si $X$ es una v.a con f.g.m $\psi_X(t)$ y $Y=aX+b$ es otra v.a, con $a$ y $b$ constantes, entonces

$$\psi_Y(t)=e^{bt}\psi_X(at)$$

**P2._** Si $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ son variables aleatorias independientes con f.g.m $\psi_{X_i}(t)$, $i$=1, 2, ... , $n$ y $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$, entonces la f.g.m de la variable $Y$, está dada por $\psi_Y(t)=\prod_{i=1}^{n}\psi_{X_i}(t)$

**Ejemplos:**

**13.** Supóngase que $X$ es una v.a con $E(X)=1$, $E(X^2)=2$ y $E(X^3)=5$. Determina el valor del tercer momento central de $X$.

**14.** Determina la media y la varianza de la v.a $X$ si se sabe que su f.g.m está dada por $\psi_X(t)=\frac{1}{4}\left(3e^t+e^{-t}\right)$ para $-\infty<t<\infty$.

**15.** Sea $X$ una v.a con media $\mu$ y varianza $\sigma^2$ y sea $\psi_X(t)$ su f.g.m para $-\infty<t<\infty$. Si $c$ es una constante positiva y $Y$ una v.a con f.g.m $\psi_Y(t)=e^{c[\psi_X(t)-1]}$ para $-\infty<t<\infty$. Determina las expresiones de la media y la varianza de $Y$ en función de la media y la varianza de $X$.

**16.** Si $\psi_X(t)=\frac{e^t}{6}+\frac{2e^{2t}}{6}+\frac{3e^{3t}}{6}$. Encuentra:

a) la esperanza de la v.a.
b) su varianza.
c) Su función de densidad de probabilidad.

## VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Una **variable aleatoria** es **continua** si puede asumir cualquier valor en uno o más intervalos de números reales y la probabilidad de que asuma un valor específico dado es cero.

**Definición:** Una **función de densidad continua** (para la v.a continua) es una función no negativa con las propiedades:

i) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

ii) $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f_X(x)dx$

**Definición:** La **función de distribución o función de probabilidad acumulada** para una v.a. $X$ continua, con función de densidad $f_X(x)$ está dada por

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx, \quad -\infty < x < \infty$$

**Observación:**

**i)** $f_X(x) = F'_X(x), \quad -\infty < x < \infty$ en todos los puntos donde $f_X(x)$ es continua .

**ii)** $f_X(x) = 0$ en otro caso.

**Propiedades**

$$P(X \leq b) = F_X(b)$$
$$P(X \geq a) = 1 - F_X(a)$$
$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

**Ejemplos:**

**1.** Una v.a. continua $X$ que puede asumir valores entre 1 y 3 tienen una función de densidad dada por $f_X(x)$=1/2.

**a)** Demuestra que es una función de densidad de probabilidad.
**b)** Encuentra $P(1.7 < X < 2.7)$.
**c)** Cuánto vale $P(X \leq 1.6)$.
**d)** Encuentra $F_X(x)$ y úsalo para encontrar $P(1.7 < X < 2.7)$

**2.** Si la función de probabilidad de una v. a. continua X es

$$f_X(x) = \begin{cases} ce^{-2x} & x > 0 \\ 0 & \text{o.c} \end{cases}$$

**a)** Determina el valor de *c*.
**b)** Encuentra *P*(1<*X*<2).

**3.** Sea Y una v.a continua con función de densidad

$$f_Y(y) = \begin{cases} cy^2 & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{o.c} \end{cases}$$

Encuentra el valor de c, la función de probabilidad acumulada y grafica ambas funciones.

**4.** Sea X una v.a. continua, encuentra el valor de k para que la siguiente función sea una f.d.p.

$$f_X(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ k - x & \text{si} \quad 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{o.c} \end{cases}$$

**5.** Sea Y una v.a. continua con función de distribución acumulada:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{y^2 + 1} & \text{si} \quad y \ge 0 \end{cases}$$

Calcula las siguientes probabilidades:

**a)** $P(2 \le Y < 5)$
**b)** $P(Y > 3)$
**c)** $P(Y \le 3 / Y \ge 1)$

**Valor esperado y varianza de una variable aleatoria continua.**

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \mu_X$$

$$V(X) = E[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x)dx = \sigma_X^2$$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx - \mu_X^2$$

$$\psi_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)dx$$

**Ejemplos:**

**6.** La concentración de plomo en la gasolina varia actualmente entre 0.1 y 0.5 gramos por litro inclusive. Considera la función $f_X(x) = \begin{cases} 12.5x - 1.25 & 0.1 \le x \le 0.5 \\ 0 & \text{o.c} \end{cases}$ donde $X$ es el número de gramos de plomo por litro de gasolina.

**a)** Prueba que es una función de densidad de probabilidad.
**b)** ¿Cuál es la probabilidad de que su concentración en un litro de gasolina seleccionado al azar se ubique entre 0.2 g/l y 0.3 g/l?
**c)** Calcular la función de distribución acumulada para X.
**d)** Utiliza la función acumulada para calcular la probabilidad de que la concentración de plomo en un litro de gasolina seleccionado aleatoriamente sea de 0.25 g/l a 0.35 g/l.
**e)** Calcular la media y la varianza.

**7.** Para la siguiente función

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{4(1 - x^3)}{3} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{o.c} \end{cases}$$

**a)** Demuestra que es una función de densidad de probabilidad.
**b)** Encuentra la media y la varianza.
**c)** Encuentra la $F_X(x)$