Lista de ejercicios No. 5 **Distribuciones continuas famosas.**

1) El tiempo de un viaje (ida y vuelta) de los camiones que transportan concreto hacia una obra de construcción en una carretera, está distribuido uniformemente en un intervalo de 50 a 70 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración del viaje sea mayor a 65 minutos si se sabe que la duración del viaje es mayor a 55 minutos?

Sol. 1/3

2) Según Y. Zimmels, los tamaños de partículas que se utilizan en experimentos de sedimentación tienen a menudo una distribución uniforme. En sedimentaciones con mezclas de partículas de diferente tamaño, las partículas mayores obstruyen los movimientos de las más pequeñas. Así que es importante estudiar la media y la varianza de los tamaños de partículas. Supón que partículas esféricas tienen diámetros con una distribución uniforme entre 0.01 y 0.05 cm. Determina la media y la varianza de los volúmenes de estas partículas. [Recuerda que el volumen de una esfera está dado por $(4/3)\pi r^3$]

Sol. $(6.5x10^{-6})\pi$ y $(3.525x10^{-11})\pi^2$

3) Un corredor de bienes raíces carga comisión fija de $50 más el 6% a las ganancias de los propietarios. Si la ganancia se distribuye de modo uniforme entre $0 y $2000, obtén la distribución de probabilidad de las remuneraciones totales del corredor.

Sol. R~U(50,170)

4) Supóngase que cinco estudiantes van a realizar un examen independientemente unos de otros y que el número de minutos que cualquier estudiante necesita para terminar el examen tienen una distribución exponencial con media 80. Supóngase que el examen empieza a las nueve de la mañana, determina la probabilidad de que al menos uno de los estudiantes termine el examen antes de las diez menos veinte de la mañana.

Sol. 0.9179

5) El tiempo requerido para que un individuo sea atendido en una cafetería es una v. a. que tiene una distribución exponencial con una media de cuatro minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sea atendida

a) en menos de 3 minutos?

b) en menos de 3 minutos al menos cuatro de los siguientes 6 días?

Sol. a) 0.527 **b)** 0.395

6) Un fabricante de un monitor de televisión comercial garantiza el cinescopio o tubo de imagen por un año (8679 hrs.). Los monitores se utilizan en terminales de aeropuerto para programas de vuelo, y están encendidos en uso continuo. La vida media de los tubos es de 20,000 hrs., y siguen una densidad de tiempo exponencial. El costo de fabricación, venta y entrega para el fabricante es de $300 y el monitor se vende en el mercado en $400. Cuesta $150 reemplazar el tubo fallado, incluyendo materiales y mano de obra. El fabricante no tiene obligación de sustituir el tubo si ya ha habido una primera sustitución. ¿Cuál es la utilidad esperada del fabricante?

Sol. 47.19

7) El tiempo Y que tarda en realizarse cierta tarea clave en la construcción de una casa es una v.a que tiene una distribución exponencial con una media de 10 hrs. El costo C para completar esa tarea está relacionado con el cuadrado del tiempo que tarda en completarse mediante la fórmula $C = 100 + 40Y + 3Y^2$ Encuentra el valor esperado C.

Sol. 1100

8) Se encontró que los intervalos de tiempo transcurridos entre dos accidentes de aviación, en el caso de todos los accidentes con víctimas ocurridos en vuelos de pasajeros en el interior de Estados Unidos entre 1949 y 1961, tienen aproximadamente una distribución exponencial con media de 44 días.

a) Si uno de los accidentes ocurrió el 1 de julio, ¿Cuál es la probabilidad de que otro accidente ocurra en el mismo mes?

b) Cuál es la varianza de los intervalos de tiempo entre dos accidentes para los años mencionados?

Sol. a) 0.4943 **b)** 1936

9) Supón que el tiempo empleado por un estudiante seleccionado al azar que utiliza una terminal conectada a un centro local de cómputo de tiempo compartido, tienen una distribución gamma con media de 20 minutos y varianza de 80 minutos^2.

a) ¿Cuáles son los valores de α y β?

b) Cuál es la probabilidad de que un estudiante utilice la terminal por lo menos 24 minutos?

Sol. a) $\alpha = 5$ y $\beta = 1/4$ **b)** 0.2851

10) Los tiempos de respuesta en una terminal en línea para cierta computadora, tienen aproximadamente una distribución gamma, con media de 4 segundos y varianza de 8 s^2. Obtén la función de densidad de probabilidad para los tiempos de respuesta.

11) Los ingresos anuales de los jefes de familia en cierta sección de una ciudad tienen aproximadamente una distribución gamma con $\alpha = 1{,}000$ y $\beta = 1/2$

a) Determina la media y la varianza de estos ingresos.

b) ¿Esperarías encontrar muchos ingresos superiores a 40, 000 dólares en esta área de la ciudad?

Sol. a) 2,000 y 4,000

****

Lista de ejercicios No. 6 **Distribución Normal**

1) Supóngase que la resistencia a la ruptura de una cuerda, en libras, se distribuye normalmente con media de 100 y varianza 16. Cada 100 pies de alambre para cuerda produce una utilidad de $25 si la resistencia a la ruptura es mayor de 95. Si la resistencia es menor o igual a 95, la cuerda puede utilizarse con un propósito diferente y se obtienen una utilidad de $10 por alambre. Encuentra la utilidad esperada por alambre.

Sol. $23.4116

2) La presión de activación de una válvula producida por cierta compañía es una variable aleatoria normal con valor esperado de 26libras por pulgada cuadrada y desviación estándar de 4 libras por pulgada cuadrada. ¿Qué porcentaje de las válvulas producidas por la compañía tienen una presión de activación comprendida entre 20 y 32 libras por pulgada cuadrada?

Sol. 0.8664

3) Se especifica que el diámetro exterior de un árbol de transmisión (flecha), llamémoslo D, debe ser de 4 pulgadas. Supóngase que D es una variable aleatoria distribuida normalmente con media de 4 pulgadas y varianza 0.01 pulgadas cuadradas. Si el diámetro real se diferencia del valor especificado por más de 0.05 pulgadas, pero en menos de 0.08 pulgadas, la pérdida del fabricante es de \$0.5, si el diámetro real se diferencia del diámetro especificado en más de 0.08 pulgadas, la perdida es de \$1.00. La pérdida L, es una variable aleatoria, encuentra la distribución de probabilidad de L y calcula el valor esperado de la perdida.

Sol. P(L=0.5)=0.1432, P(L=1)=0.4238, E(L)=\$0.5204

4) Supóngase que X tiene una distribución normal con media μ y varianza σ^2 . Determina *c*, como coeficiente y como función de la media y la varianza, tal que $P(X \le c) = 2P(X > c)$.

Sol. $c = 0.43\sigma + \mu$

5) El diámetro de un cable eléctrico esta distribuido normalmente con media 0.8 y varianza 0.0004. El cable se considera defectuosos si el diámetro se diferencia de su promedio en más de 0.025 ¿Cuál es la probabilidad de obtener un cable defectuoso?

Sol. 0.2112

6) El dispositivo automático de apertura de un paracaídas militar de carga se ha diseñado para abrir el paracaídas cuando éste se encuentre a 200m de altura sobre el suelo. Supongamos que la altitud de apertura en realidad tienen una distribución normal con valor medio de 200m y desviación estándar de 30m. Habrá daño al equipo si el paracaídas se abre a una altitud de menos de 100m ¿Cuál es la probabilidad de que haya daño a la carga en al menos uno de cinco paracaídas lanzado independientemente?

Sol. 0.00214162

7) Un tipo particular de tanque de gasolina para un automóvil compacto está diseñado para contener 15 galones. Supón que la capacidad real *X* de un tanque escogido al azar de este tipo esté normalmente distribuido con media de 15 galones y desviación estándar de 0.2 galones.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un tanque seleccionado al azar contenga entre 14.7 y 15.1 galones?

b) Si el automóvil en el que se instala un tanque seleccionado al azar recorre exactamente 25 millas por galón, ¿Cuál es la probabilidad de que el automóvil pueda recorrer 370 millas sin reabastecerse?

Sol. a) 0.62465 b) 0.8414

8) La distribución de peso de paquetes enviados de cierto modo es normal con valor medio de 10 libras y desviación estándar de 2 libras. El servicio de paquetería desea establecer un valor de peso *c*, mas allá del cual habrá cargo extra. ¿Cuál es el valor de *c* tal que 99% de todos los paquetes pesen por lo menos 1 libra abajo del peso con cargo extra?

Sol. c=15.66

9) Se sabe que es normal la distribución de resistencia para resistores de cierto tipo, 10% de todos los resistores tiene una resistencia que excede 10.256Ω y 5% tienen una resistencia menor de 9.671Ω. ¿Cuáles son el valor de la media y de la desviación estándar de la distribución de la resistencia?

Sol. 10 y 0.2

10) El tiempo que dura encendida una lámpara fluorescente es una variable aleatoria normal con media de 400 horas y desviación estándar de 40 horas. Si un individuo compra dos lámparas, una de las cuales sirve de repuesto para reemplazar a la otra en cuanto se funda, ¿Cuál es la probabilidad de que con ambas lámparas se disponga de más de 750 horas de luz?

Sol. 0.8106

11) Represente por X el número de páginas de texto, de una tesis de doctorado en matemáticas seleccionada al azar. Aun cuando X puede tomar solo valores enteros positivos, suponga que está distribuida normalmente en forma aproximada con valor esperado de 90 y desviación estándar de 15. ¿Cuál es la probabilidad de que una tesis seleccionada al azar contenga

a) a lo sumo 100 páginas?

b) Entre 80 y 110 páginas?

Sol. a) 0.76832 **b)** 0.68756

12) Los datos del Departamento de Agricultura muestran que el consumo de manzanas de una mujer elegida al azar se distribuye de forma normal con media de 19.9 libras y una desviación estándar de 3.2 libras, mientras que el consumo de manzanas de un hombre elegido al azar se distribuye de forma normal con media de 20.7 libras y varianza de 11.56 libras^2. Si se eligen aleatoriamente un hombre y una mujer, ¿Cuál es la probabilidad de que el consumo de manzanas de la mujer sea mayor que el del hombre?

Sol. 0.4325

13) Un ensamble consta de 3 componentes colocados uno al lado de otro. La longitud de cada componente se distribuye normalmente con media de 2 pulgadas y desviación estándar 0.2 pulgadas. Las especificaciones requieren que todos los ensambles estén entre 5.7 y 6.3 pulgadas de longitud. ¿Cuántos ensambles cumplirán con estos requerimientos?

Sol. 61.02%

14) Los pesos de los libros de texto de Química son una variable aleatoria normal con media de 3.5 libras y desviación estándar de 2.2 libras, mientras que los libros de texto de introducción a la Economía siguen una distribución normal con media de 4.6 libras y desviación estándar de 1.3 libras. Si Alicia pretende inscribirse en un curso de introducción a la Química y en uno de introducción a la Economía, calcula la probabilidad de que:

a) el peso de ambos libros de texto sobrepase las 9 libras.

b) el libro de Economía pese más que el libro de Química.

Sol. a) 0.3632 **b)** 0.6664

15) La sala de conferencias de cierta universidad cuenta con 160 lugares. Por su experiencia, la universidad sabe que el 40% de los invitados a dicha conferencia no se presentan. Basándose en esto la universidad reparte 300 invitaciones. Aplicando la aproximación normal, calcula la probabilidad de que:

a) se presenten menos de 150 invitados

b) al menos una persona se quede sin asiento

Sol. a) 0.8508, **b)** 0.0125

1) Considera una situación en la que se miden la tensión superficial y la acidez de un producto químico. Estas variables se codifican de modo tal que la tensión superficial se mide en una escala $0 \le x_1 \le 2$ y la acidez se mide en una escala $2 \le x_2 \le 4$. La función de densidad de probabilidad conjunta está dada como

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = k(6 - x_1 - x_2)$$

- **a)** Encuentra el valor de *k*.
- **b)** Calcula $P(X_1 < 1, X_2 < 3)$.
- **c)** $P(X_1 + X_2 \le 4)$
- **d)** $P(X_1 < 1.5)$
- **e)** Encuentra las marginales

2) Supón que la v.a bidimensional (X,Y) tienen f.d.p conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = kx(x-y) \quad 0 < x < 2 \quad \text{y} \quad -x < y < x$$

Encuentra el valor de *k*.
Encuentra las f.d.p marginales.

Sol. a) *k*=1/8 **b)** $f_X(x) = \frac{x^3}{4}$ con $0 < x < 2$ y $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{y}{4} + \frac{y^3}{48} & \text{con } 0 < x < 2 \\ \frac{1}{3} - \frac{y}{4} + \frac{5y^3}{48} & \text{con } -2 \le y \le 0 \end{cases}$

3) Para que valores de *k* es $f_{X,Y}(x,y) = ke^{-(x+y)}$ una f.d.p conjunta de (X,Y) en la región 0<*x*<1, 0<*y*<1?

Sol. $k = \frac{1}{(1-e^{-1})^2}$

4) Supón que la v.a bidimensional (X,Y) está distribuida uniformemente en el cuadrado cuyos vértices son (1,0), (0,1), (-1,0) y (0,-1). Encuentra las marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.

Sol. *k*=1/2 y $f_X(x) = 1 - |x|$ para $-1 < x < 1$ y $f_Y(y) = 1 - |y|$ para $-1 < y < 1$.

5) Supón que la f.d.p conjunta de (X,Y) está dada por $f_{X,Y}(x,y) = e^{-y}$ para $x > 0,\ y > x$. Encuentra:

- **a)** Las marginales para *X* y para *Y*.
- **b)** $P(X > 2 \mid Y < 4)$

Sol. a) $f_X(x) = e^{-x}$ con $x > 0$ y $f_Y(y) = ye^{-y}$ para $y > 0$ **b)** $(e^{-2} - 3e^{-4})/(1 - 5e^{-4})$.

6) Cuando un automóvil es detenido por una patrulla, se revisa el desgaste de cada neumático y cada faro delantero se verifica para ver si está correctamente alineado. Denotemos por *X* el número de faros delanteros que necesitan ajuste y por *Y* el número de neumáticos defectuosos.

- **a)** Si *X* y *Y* son independientes con $f_X(0) = 0.5,\ f_X(1) = 0.1,\ f_X(2) = 0.4$, y $f_Y(0) = 0.6,\ f_Y(1) = 0.1,\ f_Y(2) = f_Y(3) = 0.05$, $f_Y(4) = 0.2$ Escribe la función de probabilidad conjunta de la v.a bidimensional (X,Y) mediante una tabla.
- **b)** Calcula $P(X \le 1, Y \le 1)$ y verifica que es igual al producto $P(X \le 1)P(Y \le 1)$.
- **c)** ¿Cuál es la probabilidad de no violaciones [$P(X + Y = 0)$]?

7) La función de distribución conjunta de las variables aleatorias X y Y está dada por:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{5}(1-e^{-3x})(y+2) & \text{si} \quad x\geq 0, \quad -2\leq y\leq 3\\ 1-e^{-3x} & \text{si} \quad x\geq 0, \quad y\geq 3\\ 0 & \text{en cualquier otro caso}\end{cases}$$

¿Las variables aleatorias X y Y son independientes? Justifica tu respuesta.

8) Supón que dos amigos tienen una cita para verse entre las 8 y 9 de la mañana en su restaurante preferido y se ponen de acuerdo en que ninguno de ellos esperará al otro más de 20 minutos. Al suponer que los tiempos de llegada de los amigos son variables aleatorias X y Y independientes y tienen una distribución uniforme entre las 8 y 9 horas.

a) Determina la función de densidad conjunta.
b) Encuentra *E(X,Y)*
c) Encuentra el valor esperado de cada una de las variables.
d) ¿Cuál es la probabilidad de que los amigos no se encuentren?

Sol. a) $f_{X,Y}(X,Y)=\frac{1}{3600}, \quad 0\leq x\leq 60 \;\text{ y }\; 0\leq y\leq 60$ **b)** *E(X,Y)=900* min^2.
c) *E(X)=E(Y)=30 min.* **d)** $\frac{4}{9}$