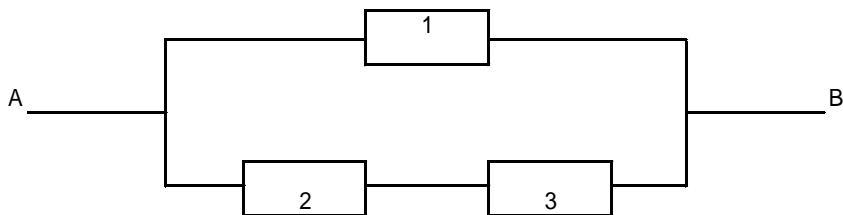


Lista de Ejercicio No. 3

Función de probabilidad

- 1) Considera un sistema de agua que fluye a través de unas válvulas de A a B. Las válvulas 1, 2 y 3 funcionan independientemente y cada una se abre correctamente mediante una señal con una probabilidad de 0.8. Encuentra la distribución de probabilidad para Y, el número de vías abiertas de A a B después de haber enviado la señal.



- 2) En un problema de una prueba aplicada a niños pequeños, se les pide que hagan corresponder cada uno de los tres dibujos de animales con la palabra que identifica a ese animal. Si un niño asigna aleatoriamente las tres palabras a los tres dibujos encuentra la distribución de probabilidad para Y, el número de correspondencias correctas.
- 3) Cinco pelotas numeradas del 1 al 5 se encuentran en una urna. Se sacan 2 pelotas al azar y se anotan sus números. Encuentra la distribución de probabilidad para lo siguiente:
- a) El mayor de los dos números seleccionados.
 - b) La suma de los dos números seleccionados.
- 4) De las personas que llegan a un banco de sangre, 1 de 3 tiene tipo sanguíneo O^+ , y 1 de 15 tipo O^- . Considérese 3 donantes, seleccionados aleatoriamente del banco de sangre. Sea X el número de donantes con sangre tipo O^+ y Y el número de donantes con sangre tipo O^- . Obtén las distribuciones de probabilidad para X y Y, Determina también la distribución de probabilidad para X+Y el número de donantes con sangre tipo O.
- 5) ¿Cuáles de las funciones siguientes son distribuciones de probabilidad discretas?

a)
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = 0 \\ \frac{2}{3} & x = 1 \\ 0 & \text{o.c} \end{cases}$$

b)
$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{5}{x} \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{1}{3}\right)^{5-x} & x = 0, 1, 2, 3, 4, 5. \\ 0 & \text{o.c} \end{cases}$$

- 6) La demanda de un producto es $-1, 0, 1, 2$ por día con las probabilidades respectivas de $1/5, 1/10, 2/5, 3/10$. Una demanda de -1 implica que se regresa una unidad. Encuentra la demanda esperada y la varianza.
- 7) Una v.a discreta X tiene la función de probabilidad $f_X(x) = k\left(\frac{1}{2}\right)^x$ $x=1, 2, 3$.
- a) Determina el valor de k.
 - b) Encuentra la media y la varianza de X.
 - c) Encuentra la función de distribución acumulada $F_X(x)$.

8) La v.a discreta N ($N=0, 1, \dots$) tiene probabilidades de ocurrencia de kr^n ($0 < r < 1$). Encuentra el valor apropiado de k .

9) Sea X el número de discos de jazz seleccionados. Encuentra la distribución de probabilidad para X si deben seleccionarse cuatro discos al azar de una colección que consiste en 5 discos de jazz, dos de música clásica y tres de rock.

10) Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución acumulada:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \frac{x^2}{2} - 2x + 2 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ -\frac{x^2}{2} + 4x - 7 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

- a) Encuentra la función de densidad $f(x)$
- b) Calcula la media y la varianza de X
- c) Calcula $P(X \geq 2.4 / X \leq 3.5)$

11) Si la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X está dada por:

$$f(x) = \frac{c}{\sqrt{x}} \quad \text{cuando } 0 \leq x \leq 4 \quad \text{y} \quad \text{cero en cualquier otro caso.}$$

- a) Determina el valor de c
- b) Calcula la media y la varianza de la distribución.

12) Sea la función $f(x) = \frac{1}{8}(x+c)$ con $2 \leq x \leq 4$

- a) ¿Para qué valor de la constante c $f(x)$ es una f.d.p.?
- b) Determina la varianza de la f.d.p.

13) Sea X una v. a. continua con la siguiente distribución: $f(x) = \frac{1}{2}x$ si $0 \leq x \leq 2$

- a) Calcula $f(1 \leq x \leq 1.5)$
- b) Calcula la media y la varianza de la distribución.

14) Un jugador lanza una moneda tres veces. Gana \$8 si salen 3 caras, \$3 si salen 2 caras y \$1 si sale solamente una cara. Si el juego es legal, ¿Cuánto perderá si no salen caras?

15) Un distribuidor obtiene un beneficio de \$50 por cada artículo que se recibe en buen estado y sufre una pérdida de \$6 por cada artículo que no se encuentre en buen estado. Si la probabilidad de que un artículo se reciba en buen estado es de 0.4, ¿Cuál es beneficio esperado del distribuidor por cada artículo recibido?

16) Una escuela organiza una rifa en la que cada número cuesta \$10. Se ofrecen 7 premios de \$100, 2 de \$50 y 4 de \$25. Supongamos que se compra un número de los 500 posibles, ¿Cuál es la ganancia esperada?

- 17) Una pequeña empresa de taxis dispone de 4 vehículos. A lo largo de un mes, cada taxi recibe: cero multas de tránsito con una probabilidad de 0.3, una multa de tránsito con probabilidad de 0.5, o dos multas de tránsito con probabilidad de 0.2, ¿Cuál es el número esperado de multas de tránsito que acumula la flota de los 4 taxis?
- 18) La ganancia bruta anual en miles de pesos de un determinado cantante de rock es una variable aleatoria con un valor esperado de \$400 000 y una desviación estándar de \$80 000. El representante del cantante recibe el 15% de la ganancia del cantante. Determina el valor esperado y la desviación estándar de la cantidad recibida por el representante.
- 19) Una abogada debe decidir entre cobrar a un cliente una tarifa fija de \$2000 o bien una tarifa condicionada de \$8000, que únicamente cobrará si gana el caso. Ella estima que la probabilidad de ganar el caso es de 0.3. Calcula la desviación estándar de la cantidad recibida si:
- a) opta por la tarifa fija
 - b) opta por la tarifa condicionada.
- 20) Un estudiante de derecho que está a punto de graduarse no sabe si desea ejercer como abogado o dedicarse a los negocios familiares. Ha decidido que su decisión dependa de si aprueba o no un examen muy importante, y hará como máximo cuatro intentos. Se dedicará a la abogacía si aprueba el examen y se dedicará a los negocios familiares si lo reprueba en los cuatro intentos. Supón que cada vez que se presenta al examen la probabilidad de que lo apruebe es 0.3, con independencia de los resultados previos. Denota por X el número de veces que presenta el examen.
- a) ¿Cuáles son los valores posibles de X ?
 - b) ¿Cuál es la distribución de probabilidad de X ?
 - c) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe el examen?
 - d) Encuentra $E(X)$
 - e) Calcula $V(X)$

Respuestas para los problemas de la lista de ejercicios No.3

1)

Y	$f_x(y)$
0	0.072
1	0.416
2	0.512

8) $1 - r$

2)

Y	$f_x(y)$
0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{6}$

9)

X	$P(x)$
0	0.0238
1	0.23809
2	0.47619
3	0.23809
4	0.023

3)

a)

X	$f_x(x)$
2	$\frac{1}{10}$
3	$\frac{2}{10}$
4	$\frac{3}{10}$
5	$\frac{4}{10}$

b)

Y	$f_y(y)$
3	0.1
4	0.1
5	0.2
6	0.2
7	0.2
8	0.1
9	0.1

11) $c = \frac{1}{4}$

12) $c = 1$

13) a) $\frac{5}{16}$ b) $\frac{4}{3}, \frac{20}{9}$

14) 20

15) \$16.40

16) - \$8.2

4)

17) 3.6

X	$P(x)$
0	0.296
1	0.444
2	0.222
3	0.037

Y	$P(Y=y)$
0	0.813
1	0.174
2	0.0124
3	0.00029

$Z = X + Y$	$f_z(z)$
0	0.216
1	0.432
2	0.288
3	0.064

18) 60,000, 12,000

19) a) 0 b) 3,666

20) b)

X	$P(X=x)$
1	0.3
2	0.21
3	0.147
4	0.343

c) 0.7599 d) 2.53 e) 1.5349

5) Ambas.

6) $E(x) = 0.8$, $V(x) = 1.16$

7)

$$\text{a) } \frac{8}{7}; \quad \text{b) } \frac{11}{7}, \frac{26}{49}; \quad \text{c) } F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{4}{7} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{6}{7} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

- 1) Una estudiante realiza un examen de opción múltiple con 16 preguntas. Cada pregunta tiene cinco alternativas. Si ella adivina en 12 de las 16 interrogantes, ¿Cuál es la probabilidad de que acierte en al menos 8 preguntas?
- 2) Un fabricante de válvulas admite que su control de calidad ha decaído, de modo que actualmente la probabilidad de producir una válvula defectuosa es 0.5. Si se fabrican un millón de válvulas al mes y eliges al azar entre estas válvulas 10,000 muestras cada una formada por 15 válvulas. ¿En cuántas muestras esperas encontrar
 - a) Exactamente 13 válvulas buenas?
 - b) Menos de 13 válvulas buenas?
- 3) Imagina que 15% de la población es zurda y que no hay ambidiestros. Si tú detienes a las siguientes 5 personas que encuentres, suponiendo independencia en la elección de estas personas, ¿Cuál es la probabilidad de que:
 - a) todas sean zurdas?
 - b) Todas sean diestras?
 - c) Dos sean zurdas?
 - d) Al menos una sea zurda?
- 4) Un puente de cuota cobra \$1.00 por cada autobús de pasajeros y \$2.5 por otros vehículos. Supóngase que durante las horas diurnas, el 60% de todos los vehículos son autobuses de pasajeros. Si 25 vehículos cruzan el puente durante un periodo particular diurno, ¿cuál es el ingreso resultante de cuotas esperado?
- 5) La probabilidad de que una persona muera de cierta infección respiratoria es 0.002. Encuentra la probabilidad de que mueran menos de cinco de los siguientes 2000 infectados de esta forma.
- 6) Se sabe que la probabilidad de que un estudiante de una preparatoria local presente escoliosis (curvatura de la espina dorsal) es 0.004. De los siguiente 1875 estudiantes que se revisan en búsqueda de escoliosis; encuentra la probabilidad de que
 - a) menos de cinco presenten el problema
 - b) 8, 9 o 10 presenten el problema.
- 7) Una venta en particular involucra 4 artículos seleccionados al azar de un gran lote que contiene 10% de defectuosos. Sea Y el número de defectuosos entre los 4 artículos vendidos. El comprador de los artículos regresará los defectuosos para ser reparados, y el costo de reparación está dado por $C = 3Y^2 + Y + 2$ encuentra el costo esperado de reparación.
- 8) La limusina perteneciente a un aeropuerto tiene espacio para cuatro pasajeros en cualquier viaje. La compañía aceptará un máximo de seis reservaciones por viaje y un pasajero debe tener una reservación. Por registros anteriores, 20% de quienes hacen reservaciones no se presentan para el viaje. Si se hacen seis reservaciones, ¿Cuál es la probabilidad de que, por lo menos, un individuo con reservación no tenga espacio para el viaje?
- 9) En la ESCOM la probabilidad de que ocurra una tormenta en cualquier día durante la primavera es 0.05. Suponiendo independencia ¿cuál es la probabilidad de que la primera tormenta ocurra el 5 de abril? Suponiendo que la primavera comienza el primero de marzo.

- 10) En tiempo ocupado de un conmutador telefónico está muy cerca de su capacidad, por lo que los usuarios tienen dificultad al hacer sus llamadas. Puede ser de interés conocer el número de intentos necesarios a fin de conseguir un enlace telefónico. Supón que la probabilidad de conseguir un enlace durante el tiempo ocupado es 0.05. Nos interesa conocer la probabilidad de que se necesiten cinco intentos para una llamada exitosa.
- 11) Un explorador de petróleo perfora una serie de pozos en cierta área para encontrar un pozo productivo. La probabilidad de que tenga éxito en una prueba es 0.2.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer pozo productivo sea el tercer pozo perforado?
 - b) ¿Cuál es la probabilidad de que el explorador no vaya a encontrar un pozo productivo si solamente puede perforar a lo más 10 pozos?
- 12) Supóngase que el costo de efectuar un experimento es \$1000. Si el experimento falla, se incurre en un costo adicional de \$300 debido a ciertos cambios que deben efectuarse antes de que se intente un nuevo experimento. Si la probabilidad de éxitos en cualquiera de los ensayos es 0.2, si los ensayos aislados son independientes y si los experimentos continúan hasta que se obtiene el primer resultado exitoso, ¿cuál es el costo esperado del procedimiento completo?
- 13) Un lote de 25 cinescopios se somete a un procedimiento de pruebas de aceptación. El procedimiento consiste en extraer 5 tubos al azar, sin reemplazo, y probarlos. Si dos o menos tubos fallan, los restantes se aceptan. De otro modo el lote se rechaza. Si el lote contiene 4 tubos defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que el lote se acepte?
- 14) Estudios de biología y el ambiente a menudo etiquetan y sueltan a sujetos a fin de estimar el tamaño y el grado de ciertas características en la población. Se capturan 10 animales de cierta población que se piensa extinta o cerca de la extinción, se etiquetan y se liberan en cierta región. Después de un período se selecciona en la región una m.a. de 15 animales del tipo. ¿Cuál es la probabilidad de que cinco de estos seleccionados sean animales etiquetados si hay 25 animales de este tipo en la región?
- 15) Una fuerza de tarea gubernamental sospecha que algunas fábricas violan los reglamentos contra la contaminación ambiental con respecto a la descarga de cierto tipo de producto, 20 empresas están bajo sospecha pero no todas se pueden inspeccionar. Supón que tres de las empresas violan los reglamentos. ¿Cuál es la probabilidad de que
- a) en la inspección de 5 empresas no se encuentre ninguna violación?
 - b) el plan anterior encuentre 2 que violan el reglamento?
- 16) Supón que X tiene una distribución de Poisson. Si $P(X = 2) = (2/3)P(X = 1)$. Calcula $P(X = 0)$ y $P(X = 3)$.
- 17) Una fuente radiactiva se observa durante 7 intervalos cada uno de 10 segundos de duración y se cuenta el número de partículas emitidas durante cada periodo. Supón que el número de partículas emitidas, digamos X , durante cada periodo observado tiene una distribución de Poisson con parámetro 5. ¿Cuál es la probabilidad de que:
- a) en cada uno de los 7 intervalos de tiempo, se emitan 4 o más partículas?
 - b) Al menos en uno de los 7 intervalos de tiempo se emitan 4 o más partículas?

- 18)** Un estacionamiento tiene dos entradas. Los coches llegan a la entrada 1 de acuerdo con una distribución de Poisson con una media de tres por hora, y a la entrada 2 de acuerdo con una distribución de Poisson con una media de 4 por hora. ¿Cuál es la probabilidad de que tres coches lleguen al estacionamiento durante una hora dada?
- 19)** El chef de un restaurante prepara una ensalada revuelta que contiene, en promedio, cinco vegetales. Encuentra la probabilidad de que la ensalada contenga más de 5 vegetales
- a) en un día dado
 - b) en tres de los siguientes 4 días
 - c) por primera vez en abril el día 5.
- 20)** Supón que aviones pequeños llegan a cierto aeropuerto según un proceso de Poisson, con tasa de 8 aviones por hora, de modo que el número de llegadas durante un periodo de t horas es una v.a de Poisson con parámetro $\lambda=8t$.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 5 aviones pequeños lleguen durante un período de una hora? ¿Por lo menos 5? ¿Por lo menos 10?
 - b) ¿Cuál es el valor esperado y la desviación estándar del número de aviones pequeños que lleguen durante un periodo de 90 minutos?
 - c) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 20 aviones pequeños lleguen durante un periodo de $2\frac{1}{2}$ hrs.? ¿De que a lo sumo lleguen 10 durante este periodo?
- 21)** El dueño de una tienda tiene existencias de cierto artículo y decide utilizar la siguiente promoción para disminuir la existencia. El artículo tiene un precio de \$100. El dueño reducirá el precio a la mitad por cada cliente que compre el artículo durante un día en particular. Así el primer cliente pagará \$50 por el artículo, el segundo pagará \$25, y así sucesivamente. Supón que el número de clientes que compra el artículo durante el día tiene una distribución de Poisson con media 2. Encuentra el costo esperado del artículo al final de día.
- 22)** Determina el número esperado de niños de una familia con 8 hijos, suponiendo que el sexo del niño es igualmente probable. ¿Cuál es la probabilidad de que el número esperado de niños suceda?
- 23)** Los individuos que tienen dos genes de anemia desarrollan esta enfermedad, mientras que los individuos que no tienen ningún gen de la anemia o tienen solamente uno no la padecen. Si dos personas, ambas teniendo un solo gen, tienen descendencia, el hijo recibirá dos genes de la anemia con probabilidad de 0.25. Supón que todos los miembros de tres parejas tienen solo un gen de la anemia y que cada una de las parejas citadas tiene un descendiente. Calcula la probabilidad de que:
- a) Ninguno de los descendientes desarrolle la enfermedad.
 - b) Al menos dos de los descendientes desarrollen la enfermedad.
- 24)** El número esperado de caras obtenidas en 10 lanzamientos de una moneda es 6. ¿Cuál es la probabilidad de que resulten 8 caras en los diez lanzamientos?
- 25)** En promedio, una persona gana 1 de cada 1000 juegos de lotería, si una persona paga el mismo billete de lotería en 500 sorteos distintos, calcular la probabilidad de que:
- a) Nunca gane
 - b) Gane al menos dos premios

- 26)** María hornea galletas de chispas de chocolate en grupos de 90 galletas, si ella agrega 360 chispa de chocolate a la masa, ¿Cuál es la probabilidad de que una galleta:
- a) no tenga chispas de chocolate?
 - b) tenga cinco o más chispas de chocolate?
- 27)** De los 50 edificios de un parque industrial, 12 no cumplen con el código eléctrico. Si se seleccionan aleatoriamente 10 de estos edificios para inspeccionarlos, ¿Cuál es la probabilidad de que 3 de ellos no cumplan con el código eléctrico?
- 28)** Un pedido consta de 52 llantas, el comprador seleccionará de forma aleatoria 5 llantas para probarlas. Si dos o más llantas están defectuosas regresará el pedido. ¿Cuál es la probabilidad de que el pedido sea aceptado si sabemos que el pedido trae 7 llantas defectuosas?
- 29)** La probabilidad de que cierta computadora que corre cierto sistema operativo se descomponga en determinado día es de 0.1. Determina la probabilidad de que la máquina se descomponga por primera vez en el duodécimo día después de la instalación del sistema operativo.

Respuestas a los ejercicios de la lista No. 4

1. 5.81×10^{-4}	15. a) 0.3991 b) 0.1315
2. a) 32 b) 9963	16. 0.264, 0.104
3. a) 7.5×10^{-5} b) 0.4437 c) 0.1382 d) 0.5563	17. a) 0.1158 b) 0.999
4. 40	18. 0.0521
5. 0.6282	19. a) 0.385 b) 0.140 c) 0.055
6. a) 0.1321 b) 0.3376	20. a) 0.091, 0.9, 0.283 b) 3.464, c) 0.011
7. 3.96	21. $100e^{-1}$
8. 0.6553	22. 0.2734
9. 8.3×10^{-3}	23. a) 0.4218 b) 0.156
10. 0.041	24. 0.1209
11. a) 0.128 b) 0.1073	25. a) 0.6065 b) 0.090
12. 6200	26. a) 0.0183 b) 0.3711
13. 0.98	27. 0.2703
14. 0.2315	28. 0.8713
	29. 0.0314