



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO**  
**SUBDIRECCIÓN ACADÉMICA**  
**DEPARTAMENTO DE FORMACIÓN BÁSICA**  
**ACADEMIA DE CIENCIAS BÁSICAS**



**NOTAS DEL CURSO DE *PROBABILIDAD Y ESTADISTICA***

**BIBLIOGRAFIA**

- De Groot Morris H. *Probabilidad y estadística*. Addison Wesley Iberoamericana, 694 pgs.
- Devore Jay L. *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. Thomson, 4ª edición, 712 pgs.
- Hines William H & Douglas C. Montgomery. *Probabilidad y estadística para ingeniería y administración*. CECSA. 3ª edición, 834 pgs.
- Mendenhall William, Wackerly & Scheaffer. *Estadística matemática con aplicaciones*. Gpo. Editorial Iberoamérica, 2ª edición, 772 pgs.
- Meyer. *Probabilidad y aplicaciones estadísticas*. Addison Wesley Longman. Edición revisada, 480 pgs.
- Walpole, Myers & Myers. *Probabilidad y estadística para ingenieros*. Pearson, 6ª edición, 739 pgs.
- Velasco Wisniewski. *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*, Thomson 326 pags.
- Weimer, Richard C. *Estadística*. CECSA, 839 pag
- Navidi, William. *Estadística para ingenieros y científicos*, Mc Graw Hill, 868 pgs.

## 1 INTRODUCCION A LA PROBABILIDAD

### 1.1 Generalidades

La teoría de la probabilidad es la rama de las matemáticas que estudia los fenómenos que dependen de sucesos fortuitos, esta clase de fenómenos se conocen como aleatorios.

La probabilidad es el estudio de los fenómenos puramente aleatorios

### Modelos probabilísticos y determinísticos

Cada vez que utilizamos las matemáticas con el objeto de estudiar fenómenos observables es indispensable empezar por construir un modelo matemático para tales fenómenos. Estos pueden ser de dos tipos:

- i) **Modelo determinístico:** Es aquél en que las condiciones en las que se verifica un experimento determinan el resultado del mismo.
- ii) **Modelo probabilístico o estocástico:** Es aquél que involucra cierto error que depende de cosas fortuitas.

### Espacio muestral y eventos

#### Definición:

- i) Un **experimento** es cualquier proceso cuyos resultados no se conocen de antemano con certeza.
- ii) El **espacio muestral**  $S$  del experimento es la colección o conjunto de todos los posibles resultados del experimento.
- iii) Un **evento** o **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral.

#### Ejemplos:

1.\_ **Experimento:** Se lanza una moneda 3 veces.

**Notación:**

**Espacio muestral:**

**Eventos:**

2.\_ **Experimento:** Un vehículo llega a una intersección de carreteras y puede dar vuelta a la derecha, a la izquierda o seguir de frente.

**Notación:**

**Espacio muestral:**

**Eventos:**

3.\_ **Experimento:** Se lanza una moneda hasta obtener una cruz (x) o tres caras (c).

4.\_ **Experimento:** Se lanzan dos dados. Lista los elementos del espacio muestral asociado a este experimento si se apuntan los números que salen. Define un segundo espacio muestral donde los elementos representen la suma de las caras.

### Operaciones entre eventos

#### Definición:

- i) El **complemento de un evento**  $A$  con respecto al espacio muestral  $S$  es el conjunto de todos los elementos de  $S$  que no están en  $A$ . Se denota como  $A'$ ,  $A^c$  o  $\bar{A}$ .  
 $A' = \{x / x \in S \text{ y } x \notin A\}$
- ii) La **intersección de dos eventos** es el conjunto de elementos que pertenecen a los dos eventos al mismo tiempo y se escribe  $A \cap B = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\}$
- iii) Dos eventos son **excluyentes** o **disjuntos** si no se interceptan, es decir  $A \cap B = \emptyset$
- iv) La **unión de dos eventos** es el conjunto de elementos que están en cualquiera de los dos eventos o en ambos y se denota  $A \cup B = \{x / x \in A \text{ o } x \in B\}$

#### Leyes de D'Morgan

- i)  $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- ii)  $(A \cap B)' = A' \cup B'$

### Interpretación de la probabilidad

**Clásica.**\_ Está basada en el concepto de resultados igualmente verosímiles, es decir se asume que cada uno de los resultados tiene la misma oportunidad de ocurrir.

**Frecuentista.**\_ La probabilidad de un evento es interpretada como la frecuencia relativa con la que se obtendría ese resultado si el proceso se repitiera un gran número de veces, en condiciones similares.

**Subjetiva.**\_ tiene que ver con el grado de conocimiento de la persona sobre el evento y en base a esta experiencia la persona asigna una probabilidad conveniente.

## 1.2 Elementos de análisis combinatorio

### Factoriales

#### Principio Fundamental de Conteo

Si hay  $m$  formas de hacer una cosa, y  $n$  formas de hacer otra, entonces existen  $n \times m$  formas de hacer ambas.

1. ¿De cuántas formas distintas se puede resolver una prueba de falso-verdadero que consta de 9 preguntas?
2. Para ir de la ciudad  $A$  a la ciudad  $B$  hay tres caminos; de la ciudad  $B$  a la  $C$  existen cuatro caminos; de la ciudad  $C$  a la  $D$  sólo dos. ¿De cuántas maneras se puede ir de la ciudad  $A$  a la  $D$  sin tener que pasar por la misma ciudad más de una vez?

### Diagramas de árbol

**Definición:** Una **permutación** es un arreglo de objetos distintos donde el orden es importante.

Una permutación difiere de otra si el orden o el contenido del arreglo es diferente.

$${}_n P_k = P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

#### Definición:

Una **combinación** es un arreglo de objetos distintos donde no importa el orden.

$${}_n C_k = C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

#### Ejemplos:

1. En un cuadrangular de fútbol ¿De cuántas maneras puede quedar la tabla de posiciones?
2. ¿De cuántas maneras se puede acomodar a 6 personas en una banca?
3. ¿De cuántas maneras puedo acomodar 7 piedras preciosas en una pulsera de plata?
4. ¿De cuántas maneras se pueden subir 8 personas a un autobús? Si:
  - a) No hay restricción alguna
  - b) Tres personas insisten en subir juntas

- c) Dos personas en particular no quieren subir juntas.
5. En la estación Hidalgo del metro, después de descender los pasajeros, quedan cuatro asientos vacíos. Si por la puerta más próxima entran 97 personas ¿De cuántas formas distintas pueden ser ocupados los asientos?
  6. Un examen extraordinario incluye un total de 13 preguntas. Si se deben responder solo 9 ¿Cuántas formas distintas hay de resolver el examen?
  7. Veintitrés personas se saludan de mano unas a otras ¿Cuántos saludos se hicieron en total?
  8. Una persona quiere hacer un regalo de dulces a su hijo, de manera que lleve dulces de tres tipos: chocolates, caramelos y gomitas. Si en la tienda le dicen que cuentan con 12 variedades de chocolates, 15 de caramelos y 10 tipos de gomitas, ¿de cuántas maneras puede formar el arreglo?
  9. En una empresa hay 9 vacantes, cuatro deben ser llenadas por hombres y cinco por mujeres. Si hay 16 candidatos, seis de ellos son hombres y el resto mujeres, ¿De cuántas maneras pueden ocupar las vacantes?
  10. Si no se permiten repeticiones
    - a) ¿Cuántos números de tres dígitos pueden formarse a partir de los dígitos 2, 3, 4, 5, 7, 8 y 9?
    - b) ¿Cuántos de estos son menores de 400?
    - c) ¿Cuántos son pares?
    - d) ¿Cuántos son impares?
    - e) ¿Cuántos son múltiplos de 5?
  11. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar, en un librero, 4 libros de matemáticas, 3 libros de historia, 3 libros de química y 2 libros de psicología, de tal manera que todos los libros sobre el mismo tema estén juntos?
  12. ¿Cuántos equipos que incluyan 2 ingenieros en electrónica y 1 ingeniero en sistemas computacionales se pueden formar si se dispone de 4 ingenieros en electrónica y 3 ingenieros en sistemas computacionales?
  13. ¿Cuántas fichas tiene un domino si se usan  $n$  números y cada ficha es de la forma  $(x,y)$  siendo  $x$  y  $y$  no necesariamente diferentes y  $(x,y)=(y,x)$ ?
  14. ¿Cuántos números telefónicos diferentes de ocho dígitos se pueden formar si el primer dígito no puede ser cero?

15. Marcos y Enrique van a jugar un partido de tenis. El primero en ganar dos juegos seguidos o que gane un total de tres juegos, gana el partido. Hallar el número de formas en que se puede desarrollar el partido.
16. Los equipos A y B juegan el campeonato mundial de beisbol, donde el equipo que primero gane cuatro juegos gana el campeonato. Hallar el número de posibilidades que se pueden dar en la liguilla sabiendo que A gana el primer juego y que el equipo que gana el segundo también gana el cuarto

### 1.3 Axiomas de probabilidad

#### Definición:

Sea un espacio muestral  $S$  asociado a un experimento y  $A$  es un evento cualquiera de  $S$ , **la probabilidad del evento**  $A$  es una función que asigna a  $A$  un número real  $P(A)$  con las siguientes propiedades:

- i)  $0 \leq P(A) \leq 1$   
 ii)  $P(S) = 1$   
 iii) Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son eventos mutuamente excluyentes en  $S$  entonces:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

- iv) Si  $A_1, A_2, \dots$  es una secuencia numerable de eventos mutuamente excluyentes en  $S$ , entonces:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

**Teorema.** Sean  $A, B$  y  $C$  tres eventos cualesquiera de un espacio muestral  $S$  asociado a un experimento, entonces:

- i)  $P(\emptyset) = 0$   
 ii)  $P(A') = 1 - P(A)$   
 iii)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$   
 iv)  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$   
 v)  $P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k P(A_i) - \sum_{i < j=2}^k P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < r=3}^k P(A_i \cap A_j \cap A_r) + \dots + (-1)^{k-1} P\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right)$   
 vi) Si  $A \subset B$  entonces  $P(A) \leq P(B)$

**Ejemplos:**

1.\_ La probabilidad de que Juan apruebe el curso de probabilidad es  $\frac{2}{3}$  y la probabilidad de que apruebe el curso de estadística es  $\frac{4}{9}$ . Si la probabilidad de aprobar ambos cursos es  $\frac{1}{4}$ . ¿Cuál es la probabilidad de que Juan ...

- a) Apruebe cuando menos uno de estos cursos?
- b) Repruebe probabilidad?
- c) Repruebe las dos materias?

2.\_ Se construye un dado de manera que el 1 y el 2 ocurran con el doble de la frecuencia que se presenta el 5, el cual ocurre con una frecuencia 3 veces superior al 3, al 4 o al 6. Si se lanza una vez, encuentra la probabilidad de que:

- a) El número sea par.
- b) El número sea 4.
- c) El número sea mayor que 4.

3.\_ Se está realizando la inspección final de aparatos de televisión después del ensamble. Se identifican tres tipos de defectos como críticos, mayores y menores y una empresa de envíos por correo los clasifica en C, M o m respectivamente. Se analizan los datos con los siguientes resultados:

Aparatos que sólo tienen defectos críticos 2%  
 Aparatos que sólo tienen defectos mayores 5%  
 Aparatos que sólo tienen defectos menores 7%  
 Aparatos que sólo tienen defectos críticos y mayores 3%  
 Aparatos que sólo tienen defectos críticos y menores 4%  
 Aparatos que sólo tienen defectos mayores y menores 3%  
 Aparatos que tienen los tres tipos de defectos 1%

a) ¿Qué porcentaje de los aparatos no tienen defectos?

Los aparatos con defectos críticos o mayores (o ambos) deben manufacturarse nuevamente.

b) ¿Qué porcentaje corresponde a esta categoría?

4.\_ Considera los eventos  $A$  y  $B$  tales que  $P(A) = \frac{1}{3}$  y  $P(B) = \frac{1}{2}$ . Determina el valor de

$P(B \cap A^c)$  para cada una de las siguientes condiciones:

- a)  $A$  y  $B$  son disjuntos,
- b)  $A$  está contenido en  $B$
- c)  $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

5.\_ Un ingeniero de una fábrica de microcircuitos inspeccionará un lote de obleas de silicio para tratar de encontrarles defectos. Supóngase que hay cuatro obleas defectuosas en un recipiente que contiene 20 obleas. Para esa inspección se seleccionan 2 obleas al azar. Calcula la probabilidad de que

- a) ninguna de ellas tenga defectos
- b) por lo menos una de las 2 no tenga defectos.

6.\_ Supón que en un grupo de 500 estudiantes de último año de facultad se encuentra que 210 fuman, 258 consumen bebidas alcohólicas, 216 comen entre comidas, 122 fuma y consumen bebidas alcohólicas, 83 comen entre comidas y consumen bebidas alcohólicas, 97 fuman y comen entre comidas, y 52 tienen esos tres hábitos nocivos para la salud.

Si se selecciona al azar a un miembro de este grupo, encuentra la probabilidad de que el estudiante:

- a) Fume pero no consuma bebidas alcohólicas
- b) Coma entre comidas y consuma bebidas alcohólicas pero no fume.
- c) Ni fume ni coma entre comidas.

S es la población de egresados de la primera generación de la ESCOM, se clasifican según su condición de sexo y estado de ocupación como se muestra en la tabla siguiente.

	Empleado	Desempleado	Total
Masculino	460	40	500
Femenino	140	260	400
Total	600	300	900

Se va a invitar a uno de estos egresados aleatoriamente para que dé un seminario sobre las oportunidades que los ingenieros egresados de la ESCOM tienen en el campo laboral.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que el invitado tenga empleo?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que el invitado sea un hombre con empleo?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que el invitado sea hombre si se sabe que tiene empleo?
- d) Dado que la elegida es una mujer ¿Cuál es la probabilidad de que esté desempleada?



## Probabilidad Condicional

**Definición:** La **probabilidad condicional de B dado A** está dada por

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \text{ con } P(A) > 0.$$

### Observación:

- 1) Si  $P(A) = 0$  entonces la probabilidad condicional no está definida.
- 2) La probabilidad condicional cumple las propiedades que hemos visto para la probabilidad de un evento pero ahora el espacio muestral que antes era  $S$  se ha reducido al evento  $A$ . Así por ejemplo se tiene que:

$$P(B|A) + P(B'|A) = 1$$

$$P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$$

### **Ejemplos:**

1. La población de la ciudad X es 40% masculina y 60% femenina. Si el 50% de los hombres fuman y 30% de las mujeres fuman. ¿Cuál es la probabilidad de que un fumador sea hombre?
2. Se tienen 2 urnas cada una con 2 cajones. La urna 1 tiene una moneda de oro en un cajón y una de plata en el otro, mientras que la urna 2 tiene una moneda de oro en cada uno de los cajones. Se escoge una urna al azar y de esta se escoge un cajón al azar, se saca la moneda y se observa que es de oro ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda provenga de la urna 2?
3. A un sospechoso se le aplica un suero de la verdad que se sabe es confiable en 90% cuando la persona es culpable y en 99% cuando la persona es inocente. En otras palabras, el 10% de los culpables se considera inocente cuando se usa el suero y el 1% de los inocentes se juzga culpable. Si el sospechoso se escogió de un grupo del cual sólo 5% ha cometido alguna vez un crimen y el suero indica que la persona es culpable. ¿Cuál es la probabilidad de que sea inocente?
4. Se conduce una investigación detallada de accidentes aéreos. La probabilidad de que un accidente por falla estructural se identifique correctamente es 0.9 y la probabilidad de que un accidente que no se debe a una falla estructural se identifique en forma incorrecta como un accidente por falla estructural es 0.2. Si el 25% de los accidentes aéreos se debe a fallas estructurales, determina la probabilidad de que un accidente aéreo que se ha identificado como debido a una falla estructural en realidad haya ocurrido por una falla de este tipo.

## Eventos independientes y Regla de la multiplicación

### Ejemplo:

1. Considera una caja con 4 bolitas etiquetadas del 1 al 4. Se saca una de ellas al azar y se observa el número de la etiqueta. Con los eventos  $A=\{1, 2\}$  y  $B=\{1, 3\}$ . Calcular:
  - a)  $P(A)$
  - b)  $P(B)$
  - c)  $P(A \cap B)$
  - d)  $P(A/B)$

Definición: Los eventos A y B son independientes si  $P(B) = P(B/A)$ .

Es decir, la ocurrencia de A no influye en la ocurrencia de B, pase o no pase A la probabilidad de B no cambia.

A y B son independientes, sabemos que  $P(B) = P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \therefore$

Observación: Si

$P(B \cap A) = P(B)P(A)$  es otra manera de definir que A y B son eventos independientes.

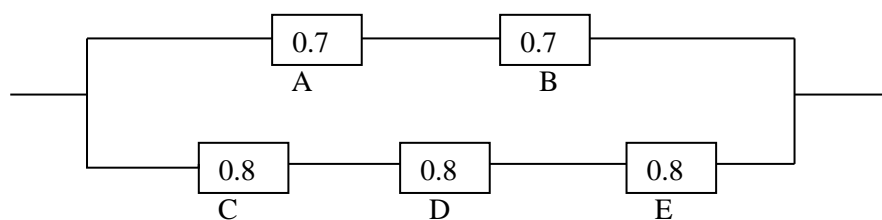
Nota.\_ Se dice que los eventos A, B y C son mutuamente independientes si se cumplen las condiciones siguientes:

- i)  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- ii)  $P(A \cap C) = P(A)P(C)$
- iii)  $P(B \cap C) = P(B)P(C)$
- iv)  $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

### Ejemplos:

2. Los administradores de cierta industria han notado que su producto A tiene un tiempo de duración de un año, con una probabilidad de 0.6, mientras que un producto B tiene un tiempo de duración de un año, con una probabilidad de 0.8. Si la duración de los productos es independiente, ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los productos dure un año?
3. Si A y B son independientes entonces:
  - a) ¿A' y B' son independientes?
  - b) ¿A y B' son independientes?

4. La probabilidad de que Tomás esté vivo dentro de 20 años es de 0.7 y la probabilidad de que Nancy esté viva dentro de 20 años es 0.9. Si se asume independencia entre ambos eventos ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los dos esté vivo dentro de 20 años?
5. Supón que A, B y C son eventos mutuamente independientes y que  $P(A \cap B) \neq 0$ . Muestra que  $P(C | A \cap B) = P(C)$
6. Supón que en un sistema de tuberías de agua como el que se muestra en la figura las compuertas funcionan de manera independiente con las probabilidades indicadas.
- ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema funcione?
  - Dado que el sistema funciona ¿Cuál es la probabilidad de que la componente A no funcione?
  - Si se sabe que el sistema no funciona ¿Cuál es la probabilidad de que A tampoco funcione?



**Teorema de la multiplicación**  $P(A \cap B) = P(A | B)P(B) = P(B | A)P(A)$

Este teorema se puede generalizar de la manera siguiente

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

**Ejemplo:**

7. La probabilidad de que le apliquen rayos X a una persona que llega a su dentista es de 0.6, la probabilidad de que una persona a la que se le han aplicado rayos X se le cure una caries es de 0.3, y la probabilidad de que a alguna persona a la que se le han aplicado rayos X y a la que se le ha curado una caries, se le extraiga también un diente es de 0.1. ¿Cuál es la probabilidad de que a una persona que visite a su dentista se le apliquen rayos X, se le cure una caries y se le extraiga un diente?

## Regla de Bayes

### Probabilidad total

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B | A_i)P(A_i)$$

### Teorema de Bayes.

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B | A_i)P(A_i)}$$

### Ejemplos:

1.\_ De los viajeros que llegan a un aeropuerto pequeño, 60% utilizan aerolíneas importantes, 30% viaja mediante aviones privados, y el resto usa aviones comerciales que no pertenecen a las aerolíneas importantes. De las personas que usan aerolíneas importantes 50% viaja por negocios, mientras que 60% de los pasajeros de los aviones privados y 90% de los que usan otras aeronaves comerciales también viaja por negocios. Supóngase que se selecciona al azar una persona que llega a este aeropuerto. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona

- a) viaje por negocios?
- b) Viaje por negocios en avión comercial?
- c) Haya viajado en avión privado dado que lo hace por negocios?

2.\_ Cuando los artículos llegan al final de una línea de producción, un supervisor escoge los que deben pasar por una inspección completa, 10% de todos los artículos son defectuosos, 60% de todos los artículos defectuosos y 20% de todos los artículos buenos pasan por una inspección completa. ¿Cuál es la probabilidad de que un artículo

- a) haya pasado por la inspección completa?
- b) sea defectuoso dado que pasó por una inspección completa?

3.\_ En cierta región del país se sabe por experiencias pasadas que la probabilidad de elegir a un adulto de más de 40 años con cáncer es de 0.02. Si la probabilidad de que un doctor diagnostique en forma correcta que una persona tiene cáncer es de 0.78 y la probabilidad de que diagnostique en forma incorrecta que una persona tiene cáncer si no lo tiene es de 0.06.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que diagnostique que una persona tiene cáncer?
- b) Si el diagnóstico del doctor es que el paciente tiene cáncer. ¿Cuál es la probabilidad de que en efecto tenga la enfermedad?
- c) Y ¿Cuál la probabilidad de que no la tenga?

4.\_ Cinco urnas llevan los números 1, 2, 3, 4 y 5 respectivamente. La urna  $i$  contiene  $i$  bolas blancas y  $(5-i)$  bolas negras, con  $i=1, \dots, 5$ . Se selecciona al azar una urna y después se sacan sin reposición dos bolas de dicha urna.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas seleccionadas sean blancas?
- b) Dado que ambas bolas seleccionadas son blancas ¿Cuál es la probabilidad de que se haya seleccionado la urna 3?