4 DISTRIBUCION DE VARIAS VARIABLES ALEATORIAS.

En ciertas ocasiones es ineludible estudiar simultáneamente dos variables aleatorias. Para este tipo de problemas es necesario estudiar las variables aleatorias bidimensionales representadas por (*X*, *Y*) este par ordenado es también una v. a.

a) Si *X* y *Y* son v. a. discretas, el par ordenado (*X*, *Y*) será una v. a. bidimensional discreta.

b) Si *X* y *Y* son v. a. continuas, el par ordenado (*X*, *Y*) será una v. a. bidimensional continua.

Definición: La función de probabilidad conjunta de una v. a. bidimensional discreta está dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X = x,\ Y = y)$$

y cumple con las siguientes condiciones:

i) $P(X = x, Y = y) \geq 0 \ \ \forall (x,y)$

ii) $\sum_{y} \sum_{x} P(X = x, Y = y) = 1$

Definición: La función de densidad de probabilidad conjunta de una v. a. bidimensional continua debe cumplir con:

i) $f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \qquad -\infty < x < \infty \quad -\infty < y < \infty$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\,dxdy = 1$

iii) $P[a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d] = \int_{a}^{b} \int_{c}^{d} f_{x,y}(x,y)\,dydx$ donde a, b, c, y d son números reales.

Ejemplos:

1. En una planta automotriz, dos tareas estarán a cargo de robots. La primera consiste en soldar dos bisagras, y la segunda, en apretar tres tornillos. Sea *X* el número de soldaduras defectuosas, y *Y*, el número de tornillos apretados incorrectamente por automóvil producido.
Sea (*X*, *Y*) la representación de la v. a. bidimensional que da el número de soldaduras defectuosas y el número de tornillos apretados incorrectamente.

x/y	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0.840	0.030	0.020	0.010
1	0.060	0.010	0.008	0.002
2	0.010	0.005	0.004	0.001

a) Encuentra la probabilidad de que los robots no cometan errores.

b) Encuentra la probabilidad de que se comenta solamente un error.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el robot 1 (*X*) cometa más errores que el robot 2 (*Y*)?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya tornillos apretados incorrectamente?

e) ¿Cuál es el número esperado de soldaduras defectuosas?

2.- Supón que un fabricante de bombillas está interesado en el número de éstas que le han sido pedidas durante los meses de Enero y Febrero. *X* y *Y* indican el número de bombillas ordenadas durante esos dos meses, respectivamente. Supón que (*X*, *Y*) es una v. a. con la siguiente f.d.p conjunta.

$$f_{x,y}(x,y) = C \quad , \quad 5000 \le x \le 10{,}000 \quad y \quad 4000 \le y \le 9000$$

a) Encuentra el valor de la constante *C*.
b) $P(X \ge Y) = ?$

3.- Si la v. a. bidimensional continua (X, Y) tiene una f.d.p conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = x^2 + \frac{xy}{3} \qquad \begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \end{array}$$

a) Verifica que el volumen bajo la curva en le región definida es uno.
b) Encuentra $P(X + Y \ge 1)$

Definición: La función de distribución acumulada para la v. a bidimensional (*X*, *Y*) o bien la función de distribución acumulada conjunta esta dada por:

i) Caso discreto $F_{x,y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$

ii) Caso continuo $F_{x,y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{x,y}(x,y)\,dx\,dy$

Nota: $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y) = f_{X,Y}(x,y)$

Ejemplos:

4.- Y_1 y Y_2 tienen la función de densidad conjunta dada por

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \begin{cases} K y_1 y_2 & 0 \le y_1 \le 1 \quad , \quad 0 \le y_2 \le 1 \\ \\ 0 & o.c. \end{cases}$$

a) Determina el valor de *K* que la convierte en una función de densidad de probabilidad.

b) Encuentra la función $F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$

c) Calcula $P\left(Y_1 \le \frac{3}{7}, Y_2 \le \frac{4}{9}\right)$

d) Calcula $P\left(Y_1 \le \frac{3}{4}, Y_2 \le \frac{1}{2}\right)$

Si estamos interesados en la distribución de probabilidades de uno de los componentes de la v. a. bidimensional (*X, Y*) se dice que nos interesa la **distribución marginal** de *X* o bien la marginal de la v. a. *Y*.

5.- Para el ejemplo 1 de la planta automotriz encuentra la distribución marginal de *X* y de *Y*.

Observa que:

$$f_X(x) = P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y) = \sum_y f_{X,Y}(x,y)$$

$$f_Y(y) = P(Y = y) = \sum_x P(X = x, Y = y) = \sum_x f_{X,Y}(x,y)$$

Esta es la forma de proceder para el caso discreto, mientras que en el caso continuo, procedemos como sigue:

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \qquad \text{marginal} \quad \text{de} \quad X$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx \qquad \text{marginal} \quad \text{de} \quad Y$$

6.- El empuje X y la razón de la mezcla Y son dos características del funcionamiento de un motor a reacción.

Si (X, Y) es una v. a. bidimensional con f. d. p

$$f_{X,Y}(x,y) = 2(x + y - 2xy) \qquad 0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le 1$$

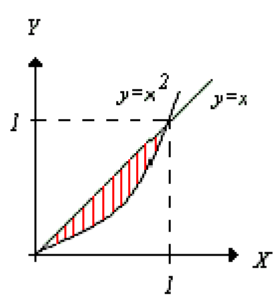
Encuentra las distribuciones marginales para X y Y.

7.- Se dice que la v. a. bidimensional (X, Y) se distribuye uniformemente en la región R si tiene f.d.p

$$f_{X;Y}(x,y) = \begin{cases} C & (x,y) \in R \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}$$

Encuentra el valor de la C.

8.- Supón que la v. a. bidimensional (X, Y) está distribuida uniformemente en la región sombreada R, encuentra su f. d. p y las marginales.



Definición: La distribución condicional está dada por:

i) Caso discreto $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}$ con $P(Y=y)>0$

ii) Caso continuo $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ con $f_Y(y)>0$

9.- Si (*X*, *Y*) tienen f.d.p conjunta $f_{X,Y}(x,y)=x^2+\dfrac{yx}{3}$ $0\le x\le 1$, $0\le y\le 2$, encuentra las distribuciones condicionales $f_{X|Y}(x|y)$ y $f_{Y|X}(y|x)$.

Definición: Sea (*X*, *Y*) una v. a. bidimensional. Se dice que las variables aleatorias *X* y *Y* son independientes si

i) Caso discreto $P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y)$

ii) Caso continuo $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

Teorema: Sea (*X*, *Y*) una v. a. bidimensional. Entonces *X* y *Y* son independientes si y sólo si

i) Caso discreto $P(X=x/Y=y)=P(X=x)$

ii) Caso continuo $f_{X|Y}(x/y)=f_X(x)$

10.- Supóngase que una máquina se usa para un trabajo específico en la mañana y para otro diferente en la tarde. *X* es el número de veces que la máquina falla en la mañana y *Y* el número de veces que falla en la tarde. En la tabla se muestra la distribución conjunta. ¿Son independientes las variables aleatorias *X* y *Y*?

X \ Y	***0***	***1***	***2***	$P(Y=y)$
0	0.10	0.20	0.20	0.5
1	0.04	0.08	0.08	0.2
2	0.06	0.12	0.12	0.3
$P(X=x)$	0.20	0.40	0.40	1.00

11.- Sean *X* y *Y* la duración de dos dispositivos electrónicos, con f. d. p conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)} \qquad y \geq 0 \quad , \qquad x \geq 0$$

¿Son *X* y *Y* variables aleatorias independientes?

Nota: Si la función de densidad conjunta se puede factorizar como el producto de una función de una de las variables y otra función de la variable restante entonces, las variables son independientes.

12.- Sea (*X, Y*) una v. a. bidimensional con f. d. p conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = 8xy \qquad 0 \leq x \leq y \leq 1$$

¿Son independientes *X* y *Y*?

Recomendación: Primero se analiza al recorrido de las variables, si estos son independientes, se procede a encontrar las marginales y ver sí se verifica que la f.d.p conjunta es igual al producto de las marginales.

Definición: La esperanza de la v.a bidimensional (*X, Y*) está dada por:

***i*)** Caso discreto $\qquad E(X,Y) = \sum_{y}\sum_{x} xyP(X = x,\ Y = y)$

***ii*)** Caso continuo $\qquad E(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\ f_{X,Y}(x,y)dxdy$

Teorema.- Si *g*(*X, Y*) es una función de la v.a bidimensional (*X, Y*), entonces la esperanza de la función está dada, como en el caso unidimensional, por la expresión:

***i*)** Caso discreto $\qquad E[g(X,Y)] = \sum_{y}\sum_{x} g(x,y)P(X = x,\ Y = y)$

***ii*)** Caso continuo $\qquad E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\ f_{X,Y}(x,y)dxdy$

13.- Sea (*X, Y*) una v.a bidimensional con f.d.p conjunta dada por $f_{X,Y}(x,y)$.

Encuentra $E[g(X,Y)]$ si $g(X,Y) = X$

14.- La distribución conjunta para Y_1 , el número de contratos asignados a la empresa *A*, y Y_2 , el número de contratos asignados a la empresa *B*, está dado por las entradas de la tabla siguiente.

Y_2	Y_1		
	0	1	2
0	1/9	2/9	1/9
1	2/9	2/9	0
2	1/9	0	0

a) Demuestra que la marginal para Y_1 es $bin(y_1, n = 2,\ p = 1/3)$.
b) Encuentra $E(Y_1 - Y_2)$

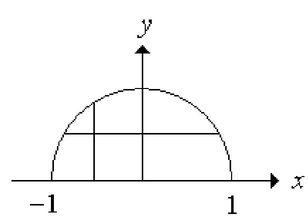
15 Y_1 , Y_2 corresponde a las proporciones de tiempo, en un día de trabajo, que los empleados I y II, respectivamente, ocupan realmente en hacer sus tareas asignadas. La función de densidad conjunta para Y_1 y Y_2 esta dada por

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} y_1 + y_2 & 0 \le y_1 \le 1 \qquad 0 \le y_2 \le 1 \\ 0 & \text{o.c} \end{cases}$$

El operario I tiene mayor productividad que el operario II, y una medida de la productividad total de los dos empleados está dada por $30Y_1 + 25Y_2$. Calcula el valor esperado de esta medida de la productividad.

16.- Supón que (*X*, *Y*) se distribuye de manera uniforme sobre el semicírculo del diagrama. De tal modo que $f_{X,Y}(x, y) = 2/\pi$ si (*x*, *y*) está en el semicírculo. Encuentra las

a) Distribuciones marginales de *X* y *Y*.
b) Distribución de probabilidad condicional.



16.- Dadas las siguientes distribuciones conjuntas determina si *X* y *Y* son independientes.

a) $g(x, y) = 4xye^{-(x^2+y^2)}$ $\qquad x \ge 0,\ y \ge 0$

b) $f(x, y) = 3x^2y^{-3}$ $\qquad 0 \le x \le y \le 1$

c) $f(x, y) = 6(1 + x + y)^{-4}$ $\qquad x \ge 0,\ y \ge 0$

17.- X y Y corresponden a la vida útil, expresada en horas, de componentes de tipo I y tipo II, respectivamente, en un sistema electrónico. La función de densidad conjunta para X y Y está dada por $f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{8}xe^{-(x+y)/2}$ $\quad x>0,\ y>0$

Un modo de medir la eficiencia relativa de los dos componentes es el cálculo de la razón $\frac{y}{x}$. Encuentra la eficiencia relativa esperada.