DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD PARA V. A. DISCRETAS

Distribución de Bernoulli

La variable aleatoria ***X*: resultado en un ensayo Bernoulli**, con valores posibles x=0, 1. Cero para el fracaso y uno para el éxito. Tiene una distribución de Bernoulli con parámetro *p*, dada por la expresión

$$f_X(x) = p^x q^{1-x} \qquad x = 0,1 \qquad \text{y cero en otro caso}$$

Con valor esperado $E(X) = p$, varianza $V(X) = pq$

La f.g.m. para esta variable es: $\psi_X(t) = q + pe^t$

Distribución Binomial

Definición: Un experimento es **binomial** si cumple con las dos condiciones siguientes:
i) Consiste de *n* ensayos Bernoulli independientes.
ii) La probabilidad de éxito *p* en cada ensayo es constante.
La variable aleatoria ***X*: número de éxitos** en un experimento binomial.
Con valores posibles *x*=0, 1, 2,..., *n*, tienen una distribución de probabilidad binomial con parámetros *n* y *p* denotada por $X \sim b(x;n,p)$ dada por

$$b(x;n,p) = f_X(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad x = 0,1,\dots,n \qquad \text{y cero en otro caso}$$

La f.g.m para X $\psi_X(t) = (q + pe^t)^n$ por lo tanto la esperanza está dada por: $E(X) = np$ y la varianza por: $V(X) = npq$

Teorema._ Si $X_1, X_2, \dots, X_k$ son *k* variables independientes y $X_i \sim b(x_i; n_i, p)$ i=1, 2, ..., *k*. Entonces la v.a $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$ tiene una distribución binomial con parámetros $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ y *p*.

Ejemplos:

1._ Una moneda, que tiene una probabilidad de 0.7 de caer cruz, se lanza nueve veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número impar de caras?

2._ Tres hombres A, B y C disparan a un blanco. Supóngase que A dispara 3 veces y la probabilidad de que dé en el blanco en un disparo concreto es 1/8, que B dispara 5 veces y la probabilidad de que dé en el blanco es 1/4 y C dispara sólo 2 veces con probabilidad de dar en el blanco de 1/2.
a) ¿Cuál es el número esperado de disparos que darán en el banco?
b) ¿Cuál es la varianza del número de disparos que darán en el blanco?

3._ La probabilidad de que un paciente se recupere de una rara enfermedad en la sangre es de 0.4. Si se sabe que 15 personas han contraído esta enfermedad ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) por lo menos 10 de ellos sobrevivan?
b) Sobrevivan de 3 a 8 personas?
c) se salven exactamente 5?

4._ Se sabe que de una producción de tornillos 12% son defectuosos; de dicha producción se selecciona una muestra de 10 tornillos.
a) Calcula la probabilidad de encontrar no más de dos tornillos defectuosos en la muestra.
b) ¿Cuántos de los tornillos de la muestra se espera sean defectuosos?

Distribución Geométrica

La v.a de interés ***X***, es el **número de ensayos hasta obtener el primer éxito**. Los valores posibles que toma la variable son x=1, 2, 3, … Se dice que X tiene una distribución geométrica con parámetro p denotada como X~$G(x;p)$ y se define como:

$$G(x;p) = P(X = x) = q^{x-1}p \quad \text{si} \quad x = 1, 2, \ldots \text{ y cero en otro caso.}$$

La f.g.m. para esta distribución está dada por: $\psi_X(t) = \dfrac{pe^t}{1-qe^t}$,

la media y la varianza por:

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{y} \quad V(X) = \frac{q}{p^2} \quad \text{respectivamente.}$$

La función de probabilidad acumulada es: $F_X(x) = 1 - q^x$

Ejemplos:

1._ Una compañía aeroespacial ha construido varios mísiles. La probabilidad de un disparo exitoso en cualquier prueba es 0.95. Suponiendo lanzamientos independientes ¿Cuál es la probabilidad de que la primer falla ocurra en el quinto disparo?

2._ Se va a realizar cierto experimento hasta que se obtenga un resultado exitoso. Los ensayos son independientes y el costo de efectuar el experimento es $25,000 dólares, sin embargo, si se produce una falla, hay que pagar una multa de $5000 dólares para poder iniciar el siguiente ensayo. Al experimentador le gustaría determinar el costo esperado del proyecto. Suponiendo que p=0.20.

3._ La compañía A planea visitar clientes potenciales hasta que se realice una venta considerable. Cada presentación de venta cuesta 1,000 dólares y cuesta 4,000 dólares viajar para visitar al siguiente cliente y realizar una nueva presentación.
a) ¿Cuál es el costo esperado de la realización de una venta si la probabilidad de hacer una venta después de cualquier presentación es 0.10?
b) Si la ganancia esperada en cada venta es 15,000 dólares, ¿Deben efectuarse los viajes?
c) Si el presupuesto para publicidad es de 100,000 dólares ¿Cuál es la probabilidad de que esta suma sea gastada sin que se logre ningún pedido?

4._ ¿Cuál es la probabilidad de lanzar una moneda normal al menos tres veces para obtener la primera cara?

5._Dado que se ha lanzado una moneda normal 10 veces, y se han obtenido cero caras. ¿Cuál es la probabilidad de que se tenga que lanzar al menos tres veces más para obtener la primera cara?

Propiedad._ Si X tiene una distribución geométrica entonces para dos enteros positivos cualesquiera s y t, se tiene que

$$P(X \geq s + t \mid X > s) = P(X \geq t)$$

6._ Sea Y una v.a geométrica con probabilidad de éxito igual a p, demuestra que:
a) para un entero positivo a, $P(Y > a) = q^a$
b) para los enteros positivos a y b $P(Y > a + b \mid Y > a) = P(Y > b)$

7._ Un contador público ha encontrado que 9 de 10 auditorias de compañías contienen errores importantes. Si el contador revisa la contabilidad de una serie de compañías.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera contabilidad con errores importantes se encuentre en la tercera contabilidad revisada?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera contabilidad con errores importantes se encuentre después de revisar la tercera?
c) Encuentra la media y la desviación estándar del número de contabilidades que hay que revisar para obtener la primera con errores importantes?

8._ Un jugador de baloncesto acierta 80% de sus lanzamientos de tiros libres a la canasta por partido. Calcula la probabilidad de que en solo uno de los siguientes cinco partidos, acierte su primera canasta de tiros libres, después del segundo lanzamiento de tiros libres. Considera que las condiciones de juego son independientes partido a partido.

La biblioteca de una escuela tiene 24 ejemplares de cierto texto de introducción a la Economía, de los cuales 8 son primeras impresiones, 10 segundas impresiones y 6 son terceras impresiones. El instructor del curso ha solicitado que 5 ejemplares sean puestos en reserva de 2 horas. Si los ejemplares se seleccionan al azar, de modo que cada subconjunto de 5 libros tenga la misma probabilidad de ser seleccionados. ¿Cuál es la probabilidad de que 2 de los libros seleccionados sean segundas impresiones?

Distribución Hipergeométrica

La v.a ***X***, es el **número de objetos de la muestra que posee la característica de interés**. Función de probabilidad, *X~H(x*;n,M,N*)*

$$H(x;n,M,N)=P(X=x)=f_X(x)=\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad x=0,\,1,\,\dots,n$$

Sujeto a las siguientes restricciones: $M \geq x \quad y \;\; N-M \geq n-x$

La media y la varianza están dadas por $E(X)=n\frac{M}{N}$ y $V(X)=n\left(\frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ respectivamente.

Ejemplos:

2._ 6 ejemplares de una población animal, considerados en vía de extinción en cierta región, han sido atrapados, marcados y puestos en libertad para que se mezclen con la población. Después de mezclarse, se eligió una muestra aleatoria de 10. Sea X la variable aleatoria que determina el número de animales marcados de la segunda muestra. Si hay en realidad 25 animales de este tipo en la región ¿Cuál es la probabilidad de X = 2 y X ≤ 2 ?

3._ Supóngase que una urna contienen cinco bolas rojas y diez azules. Si se seleccionan al azar sin reemplazo siete bolas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos tres bolas rojas?
b) ¿Cuál es la media y la varianza para X?
c) Si $\bar{X}$ representa la proporción de bolas rojas en la muestra ¿Cuáles son la media y la varianza de $\bar{X}$.

4._ En un almacén se tienen 10 impresoras de las cuales 4 son defectuosas. Una compañía selecciona 5 de las maquinas al azar.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que las 5 máquinas sean no defectuosas?
b) La compañía repara las impresoras defectuosas a un costo de 50 dólares cada una. Encuentra la media y la varianza del costo total de reparación.

Distribución de Poisson

La variable aleatoria representa el número total de ocurrencias de un fenómeno durante un período de tiempo fijo o en una región fija del espacio. Esta v.a tiene una distribución de probabilidad de Poisson con parámetro λ , dada por:

$$P(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad \text{si } x = 0, 1, 2, \ldots$$

Función generadora de momentos $\psi_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$, Media y varianza: $\mu = V(X) = \lambda$.

Teorema._ Si las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son independientes y $X_i \sim P(x;\lambda_i)$ para i=1, 2, ... , k. Entonces la v.a $X = \sum_{i=1}^{k} X_i$ tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$.

Ejemplos:

1._ Supón que en un fin de semana concreto el número de accidentes en un cierto cruce tienen una distribución de Poisson con media 0.7. ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos tres accidentes en el cruce durante el fin de semana?

2._ Supón que el número de defectos en un rollo de tela fabricado con un cierto proceso tiene una distribución de Poisson con media 0.4. Si se inspecciona una muestra aleatoria de cinco rollos de tela. ¿Cuál es la probabilidad de que el número total de defectos en los cinco rollos sea al menos 6?

3._ Supón que 300 errores están distribuidos al azar a lo largo de un libro de 500 páginas. Encontrar la probabilidad de que una página dada contenga:

a) Exactamente 2 errores
b) 2 o más errores.

4._ Supón que en una población de 50,000 personas hay un promedio anual de 2 suicidas. Para una población de 100,000 personas, calcula la probabilidad de que en un año dado haya:

a) Un suicida
b) 2 o más suicidas.

5._ Supón que en promedio, el 2% de la población sean zurdos. Hallar la probabilidad de que en 100 personas haya al menos 3 zurdos.

6._ Supón que un libro con n páginas contiene en promedio λ errores por página. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos haya m páginas que contengan más de k errores?

7._ Sea Y una v.a de Poisson con media λ. Encuentra $E[Y(Y-1)]$ y usa este resultado para demostrar que $V(Y)=\lambda$.

Aproximación entre las distribuciones Binomial y Poisson

Si n es grande mientras que la probabilidad de ocurrencia de un evento *p* cercana a cero, podemos decir que la distribución binomial se aproxima bastante a la distribución de Poisson con media $\lambda = np$

Ejemplos:

1._ Supongamos que el 2% de los objetos fabricados en una empresa son defectuosos. Hallar la probabilidad de que haya 3 objetos defectuosos en una muestra de 100 objetos.

2._ Supóngase que en una gran población la proporción de personas que tienen una cierta enfermedad es 0.01. Se determinará la probabilidad de que en un grupo aleatorio de 200 personas al menos cuatro tengan la enfermedad.

3._ Supóngase que la proporción de personas daltónicas en cierta población es 0.005. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya más de una persona daltónica en un grupo de 600 personas seleccionadas aleatoriamente?

4._ La probabilidad de trillizos en nacimientos humanos es aproximadamente 0.001. ¿Cuál es la probabilidad de que en un gran hospital haya exactamente un conjunto de trillizos entre 700 nacimientos?

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD PARA V. A. CONTINUAS

Distribución Uniforme

Se dice que la v.a continua *X,* tiene una distribución uniforme si su función de probabilidad está dada por la expresión:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \qquad a < x < b \quad \text{y cero en otro caso}$$

La notación para esta distribución es $X \sim U(a,b)$ y se lee "la v.a *X* se distribuye uniformemente en el intervalo (a,b).

La función de probabilidad acumulada está dada por: $F_X(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$ si $a<x<b$.

Valor esperado, varianza y f.g.m.

$$E(X) = \frac{b+a}{2} \qquad V(X) = \frac{(a-b)^2}{12} \qquad \psi_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}$$

Ejemplos:

1._ Si X se distribuye uniformemente y es simétrica respecto al origen y tiene varianza 1. ¿Cuánto vale a y cuanto b?

2._ Si $X \sim U(0,4)$. ¿Cuál es la probabilidad de que las raíces de $y^2+4xy+x+1=0$ sean reales?

Distribución Exponencial.

La v.a X tiene una distribución exponencial con parámetro $\beta>0$, y se escribe $X \sim exp(x;\ \beta)$ si su f.d.p es de la forma:

$$f_X(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

La función de distribución acumulada de la v.a. es; $F_X(x) = 1 - e^{-\beta x}$

La f.g.m., la media y la varianza de esta distribución están dadas por:

$$\psi_X(t) = \frac{\beta}{\beta - t} \qquad E(X) = \frac{1}{\beta} \qquad V(X) = \frac{1}{\beta^2}$$

Demuestra que $P(x \ge t) = e^{-\beta t}$

Esta distribución también tiene la propiedad de falta de memoria pues para $t>0$ y $h>0$

$$P(X \ge t + h \mid X \ge t) = P(X \ge h)$$

Teorema: Supóngase que las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ constituyen una muestra aleatoria (esto quiere decir que son independientes y con la misma función de densidad de probabilidad) de una distribución exponencial con parámetro β. Entonces la distribución de $Y = min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una distribución exponencial con parámetro $n\beta$.

Ejemplos:

1._ El motor y el tren de transmisión de un automóvil nuevo están garantizados por un año. Las vidas medias de estos componentes se estiman en tres años, y el tiempo transcurrido hasta la falla tiene una distribución exponencial. La ganancia en un auto nuevo es de $1,000.00. Incluyendo los costos de refacciones y de mano de obra, la agencia debe pagar $250.00 para reparar la falla. ¿Cuál es la utilidad esperada por automóvil?

2._ ¿Hay una densidad exponencial que cumple la siguiente condición? $P(X \le 2) = \dfrac{2P(X \le 3)}{3}$. Si es así encuentra el valor del parámetro de la distribución.

3._ Se sabe que un componente electrónico tiene una vida útil representada por una densidad exponencial con tasa de falla de 10^{-5} fallas por hora. ¿Cuál es la fracción de componentes que fallan antes de su vida media?

4._ Supóngase que las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son independientes y que $X_i \sim exp(x_i;\ \beta_i)$ con $i=1,...,k$. Si $Y = min(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ ¿Cómo se distribuye Y?

5._ Supón que cierto sistema contiene tres componentes que funcionan independientemente unos de otros y que están conectados en serie de forma que el sistema falla tan pronto como uno de los componentes falla. Si el tiempo de vida de cada uno de los componentes medido en horas se distribuye exponencialmente con parámetros 0.001, 0.003 y 0.006 respectivamente. Determina la probabilidad de que el sistema no falle antes de 100 horas.

6._ Si un sistema electrónico contiene n componentes similares que funcionan independientemente unos de otros y que están conectados en serie (el sistema falla tan pronto como uno de los componentes falla). El tiempo de vida de cada componente medido en horas, tiene una distribución exponencial con media μ. Encuentra la media y la varianza del tiempo de espera hasta que falle el sistema.

Función Gamma.

Definición: La función gamma para $\alpha>0$ se define como $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$

Nota: Para que la integral converja se requiere $x > 0$
y tiene las siguientes propiedades

1) Si $\alpha > 1$ entonces $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$
2) Si $n \in Z^+$ entonces $\Gamma(n) = (n-1)!$
3) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Distribución Gamma.

Se dice que la v.a ***X*: tiempo de espera entre dos sucesos**, tiene una **distribución** de probabilidad **Gamma** con parámetros $\alpha>0$ y $\beta>0$ y se escribe $X \sim Gamma(x;\alpha,\beta)$ si su f.d.p está definida como:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & x > 0 \\ 0 & \text{o.c} \end{cases}$$

La f.g.m, la media y la varianza para esta distribución están dadas por:

$$\psi_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^\alpha \qquad E(X) = \frac{\alpha}{\beta} \qquad V(X) = \frac{\alpha}{\beta^2} \qquad F_X(x) = 1 - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{e^{-\beta x}(\beta x)^k}{k!}$$

Notas:

1._ Si las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_\alpha$ tienen una distribución exponencial con parámetro β y son independientes unas de otras. Entonces la v.a $X = \sum_{i=1}^{\alpha} X_i$ se distribuye como $\Gamma(x;\alpha,\beta)$.

2._ Si las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son independientes y $X_i \sim \Gamma(x_i;\alpha_i,\beta)$ para i=1,2,...,k. Entonces la v.a $X = \sum_{i=1}^{k} X_i$ se distribuye como $X\sim \Gamma(x;\alpha = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i,\beta)$.

<u>Ejemplos:</u>

1._ Un sistema redundante opera de la siguiente manera. Cuando la unidad 1 falla el tablero de decisiones pone la unidad 2 hasta que falla y entonces activa la unidad 3. El interruptor de decisión se supone perfecto, por lo que la vida del sistema puede representarse como la suma de las vidas de los subsistemas. Si las vidas de los subsistemas son independientes entre sí y cada subsistema tiene una vida X_j, j=1, 2, 3, con densidad $g(x_j) = \frac{e^{-x_j/100}}{100}$, $x_j \geq 0$. Encuentra la probabilidad de que el sistema opere por lo menos 260 horas.

2._ Una caja de caramelos contiene 24 barras. El tiempo entre pedidos por barra se distribuye exponencialmente con media 10 minutos. Supón que se vende el primer caramelo en cuanto se abre la caja. ¿Cuál es la probabilidad de que una caja abierta a las 8:00 A.M. se haya terminado al medio día?

3._ El tiempo de reabastecimiento de cierto producto cumple con la distribución Gamma con media 40 y varianza 400. Determina la probabilidad de que un pedido se envíe dentro de los 8 días posteriores a su solicitud.

Distribución Normal

Se dice que la v.a X tiene una distribución normal o Gaussiana con parámetros μ y σ^2 y se escribe $X\sim N(x;\ \mu,\sigma^2)$ si su f.d.p es de la forma:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} & -\infty < x < \infty,\ -\infty < \mu < \infty,\ \sigma^2 > 0 \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}$$

La f. g. m. está dada por $\psi_X(t) = e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$

Y la función de distribución acumulada ésta dada por: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$

Observa que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ es una normal con media 0 y varianza 1. Esta normal recibe el nombre de Normal estándar, se representa con la letra zeta y se escribe $Z \sim N(z;0,1)$.

Para mayor facilidad se tabularon los valores para la normal estándar. La distribución acumulada en z se denota por: $\phi(z) = F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

Para consultar las tablas de la normal estándar, primero se estandariza la distribución normal con media μ y σ^2, $N(x;\ \mu, \sigma^2)$ mediante la fórmula: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

Ejemplos:

Calcula los siguientes valores

1. $P(z \le -0.7)$
2. $P(z \le 1.03)$
3. $P(z \le 0.36)$
4. $P(z \ge -1.1)$
5. $P(z > 2.4)$
6. $P(-0.5 \le z \le 1.1)$
7. $P(-0.38 \le z \le 1.72)$
8. $P(0.2 \le z \le 1.4)$
9. $P(-1.5 \le z \le -0.7)$
10. $\Phi(z) = 0.3094$
11. $\Phi(z) = 0.1541$
12. $\Phi(z) = 0.9930$

13._ Los puntajes del Coeficiente Intelectual (C: I.) de las personas están distribuidos normalmente con una media de 100 y una desviación estándar de 16. Si se elige una persona al azar ¿Cuál es la probabilidad de que tenga un C. I.

a) entre 100 y 115?
b) Superior a 90?

14._ La resistencia al rompimiento en Newton de una tela sintética denotada por X se distribuye normal con media de 800 y varianza 144. El comprador de la tela requiere que ésta tenga una resistencia de por lo menos 772N. Se selecciona al azar y se prueba una muestra de tela ¿Cuál es la probabilidad de que el comprador se lleve la tela?

15._ Se observó durante un largo período que la cantidad semanal gastada en el mantenimiento y en las reparaciones en cierta fábrica tiene aproximadamente una distribución normal con una media de $400 y una desviación estándar de $20. Si el presupuesto para la próxima semana es de $450.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que los costos reales sean mayores que la cantidad presupuestada?
b) ¿De cuánto tendría que ser el presupuesto para reparaciones semanales y mantenimiento para que la cantidad presupuestada solamente sea rebasada con una probabilidad de 0.1?

Teorema: Si X tiene una distribución normal con media μ y varianza σ^2 y si $Y=aX+b$ donde a y b son constantes con a diferente de cero, entonces Y tiene una distribución normal con media $a\mu+b$ y varianza $a^2\sigma^2$.

Teorema: Si las variables aleatorias $X_1,...,X_k$ son independientes y $X_i \sim N(x_i;\ \mu_i,\ \sigma_i^2)$ entonces $X_1+\cdots+X_k$ tiene una distribución normal con media $\mu=\mu_1+\cdots+\mu_k$ y varianza $\sigma_1^2+\cdots+\sigma_k^2$.

Corolario (1): Si las variables aleatorias $X_1,...,X_k$ son independientes con $X_i \sim N(x_i;\ \mu_i,\ \sigma_i^2)$ y si $a_1,...,a_k$ y b son constantes para las que al menos uno de los valores $a_1,...,a_k$ es distinto de cero, entonces la variable $X=a_1X_1+\cdots+a_kX_k+b$ tiene una distribución normal con media $\mu=a_1\mu_1+\cdots+a_k\mu_k+b$ y varianza $\sigma^2=a_1^2\sigma_1^2+\cdots+a_k^2\sigma_k^2$.

Corolario (2): Supóngase que las variables aleatorias $X_1,...,X_n$ constituyen una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza σ^2. Sea la variable aleatoria $\overline{X}$ conocida como la media muestral. Entonces $\overline{X} \sim N(\overline{x};\mu,\sigma^2/n)$.

Ejemplos:

16._ Un tornillo con diámetro exterior distribuido normalmente con media 1.2 y varianza 0.0016 se enrosca en una tuerca que tiene un diámetro interior distribuido normalmente con media 1.25 y varianza 0.0009 ¿Cuál es la probabilidad de que el tornillo no quepa en la tuerca?

17._ La dureza de Rockwell de una aleación particular se distribuye normalmente con media de 70 y desviación estándar de 4.

a) Si un espécimen se acepta sólo si su dureza está entre 62 y 72. ¿Cuál es la probabilidad de que un espécimen elegido al azar tenga una dureza aceptable?
b) Si el intervalo de dureza aceptable es (70-*c*, 70+*c*) ¿Para qué valor de *c* el 95% de los especímenes tendrían una dureza aceptable?
c) En el caso de que el intervalo aceptable sea el indicado en a) y la dureza de cada uno de 9 especímenes seleccionados al azar se determine en forma independiente ¿Cuál es el número esperado de especímenes aceptables de entre los 9?

18_ Se sabe que cierta bombilla eléctrica tiene una salida que se distribuye normalmente con media de 2500 pie-candela y desviación estándar de 75 pie-candela. Determina un límite de especificación inferior tal que sólo 5% de las bombillas fabricadas sean defectuosas.

Teorema Central del límite.

Sean X_1, X_2,...,X_n una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza σ^2. Entonces, si n es lo suficientemente grande, $\overline{X}$ tiene una distribución normal aproximada con $\mu_{\overline{X}} = \mu$ y $\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$, es decir $\overline{X} \to N(\overline{x}; \mu, \frac{\sigma^2}{n})$

De forma equivalente, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ se distribuye aproximadamente de forma normal con media $\mu_X = n\mu$ y varianza $\sigma^2_x = n\sigma^2$, es decir, $X \to N(x; n\mu, n\sigma^2)$

Ejemplos:

1._ Supóngase que se lanza una moneda 900 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener más de 495 caras?

2._ Se selecciona una muestra aleatoria de tamaño 80 de una distribución uniforme en el intervalo (0,1). Encuentra $P\left(\left|\overline{X}_n - 0.5\right| \leq 0.1\right)$.

3._ Supóngase que la distribución del número de defectos en un determinado rollo de tela es una distribución de Poisson con media 5 y que para una muestra aleatoria de 125 rollos se cuenta el número de defectos en cada rollo. Determina la probabilidad de que el número promedio de defectos por rollo en la muestra sea menor que 5.5.

4._ Se empacan 250 piezas pequeñas en una caja. Los pesos de las piezas son variables aleatorias independientes con media de 0.5 libras y desviación estándar de 0.1 libras. Se cargan 20 cajas en una tarima. ¿Cuál es la probabilidad de que las piezas en la tarima excedan 2510 libras de peso despreciando tanto el peso de la tarima como el de la caja?

Aproximación de la distribución Normal a la Binomial

Si repetimos *n* ensayos Bernoulli de manera independiente, se tiene que $E(X_i)=p$ y $V(X_i)=pq$ con

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si éxito en el } i\text{-ésimo ensayo.} \\ 0 & \text{si fracaso en el } i\text{-ésimo ensayo.} \end{cases}$$

el TCL garantiza que para *n* grande

$$\bar{X} \sim N(x; \mu_{\bar{X}} = \mu = p, \sigma^2_{\bar{X}} = \sigma^2/n = pq/n)$$

$$\text{y que } X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(x; \mu_X = n\mu = np, \sigma_X = n\sigma^2 = npq)$$

Si *n* es suficientemente grande se aproxima la distribución binomial con una normal.

Corrección por continuidad

$$P(X=x) \approx P(x-0.5 \le X \le x+0.5).$$
$$P(X \ge x) \approx P(X \ge x-0.5)$$
$$P(X \le x) \approx P(X \le x+0.5)$$
$$P(a \le X \le b) \approx P(a-0.5 < X < b+0.5)$$

Ejemplos:

1._ Se tira una moneda 100 veces. Calcular la probabilidad de que salga sello exactamente 60 veces.

2._ En el muestreo de un proceso de producción que produce artículos de los cuales 20% son defectuosos se selecciona una m.a. de tamaño 100. ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más 15 artículos sean defectuosos en la muestra?

3._ Un encuestador considera que el 20% de los votantes en cierta área está a favor de una emisión de valores bursátiles. Si se seleccionan 64 votantes al azar de un gran número de votantes en esta área, aproxima la probabilidad de que la fracción de votantes en la muestra a favor de la emisión de los valores no difiera en más de 0.06 de la fracción que él supone es la correcta.

4._ Una línea aérea se da cuenta de que 5% de las personas que hacen sus reservaciones para cierto vuelo no se presentan. Si la aerolínea vende 160 boletos para un vuelo con solamente 155 asientos ¿Cuál es la probabilidad de que haya un asiento disponible para cada persona con reservación que se presenta para el vuelo?

5._ Como un control de la abundancia relativa de cierta especie de pez en dos lagos, se hacen 50 observaciones con respecto a los resultados de la captura mediante trampas para cada lago. Para cada observación el experimento solamente anota si está o no la especie deseada. La experiencia previa ha mostrado que ésta especie aparecerá en las trampas del lago A aproximadamente 10% de las veces y en las trampas del lago B en aproximadamente 20% de las veces. Utiliza estos resultados para aproximar la probabilidad de que la diferencia entre las proporciones de las muestras difiera en a lo más 0.1 de la diferencia de las proporciones reales.

Teorema de Chebyshev

Es de gran ayuda cuando no conocemos la f.d.p exacta de la v.a, pero conocemos los valores para su media y su varianza. Por ser desconocida la f.d.p no podemos encontrar probabilidades exactas de cualquier evento, pero este teorema pone una cota para la probabilidad de que la v.a se encuentre dentro de *k* veces la desviación estándar respecto a la media.

Teorema._ Sea *X* una v.a (discreta o continua) con f.d.p desconocida con media μ y varianza σ^2, para $k>0$ se cumple la siguiente desigualdad

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Nota:

Del Teorema anterior podemos deducir que: $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$

Ejemplos:

1._ La gerente de un taller de reparaciones no conoce la distribución de probabilidad del tiempo que se requiere para completar un trabajo. Sin embargo, de acuerdo con el desempeño pasado, ella ha podido estimar la media y la varianza como 14 días y 2 $(\text{días})^2$, respectivamente. Encuentra un intervalo en el que la probabilidad de que un trabajo se termine en ese tiempo sea de 0.75.

2._ El servicio postal requiere, en promedio, 2 días para entregar una carta en una ciudad. La varianza se estima como 0.4 $(\text{día})^2$. Si un ejecutivo desea que el 95% de sus cartas se entreguen a tiempo, ¿Con cuánta anticipación las debe depositar en el correo?.

3._ Una v.a *X* tiene una media $\mu = 10$ y una varianza $\sigma^2 = 4$. Encuentre

a) $P(|X - 10| \geq 3)$

b) $P(|X - 10| < 3)$

c) $P(5 < X < 15)$

d) El valor de la constante, *C* tal que $P(|X - 10| \geq C) \leq 0.004$

4._ Una máquina que se utiliza para llenar cajas de cereales, descarga en promedio μ onzas por caja. Un fabricante quiere que la descarga real en onzas, X, quede a una onza de μ al menos en 75% de las veces. ¿Cuál es el mayor valor de la desviación estándar de X, que puede admitir si deben cumplirse los objetivos del fabricante?