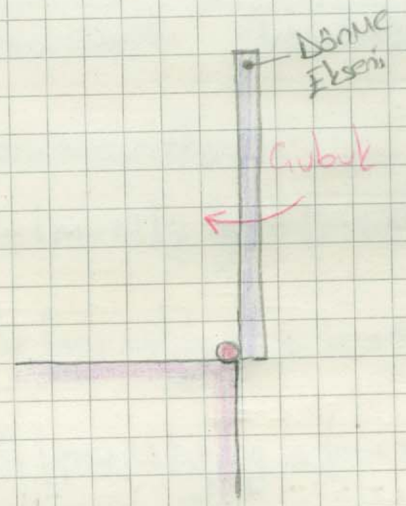
Örnek. Şekilde dolgan çubuk (uzunluğu 0,60 m ve kütlesi 1kg) bir ucundan geçen eksene göre, şekil düzleminde dönüyor. Eylemsizlik momenti $0{,}12\ kgm^2$ dir. Çubuk en alt noktadan geçerken, durmakta olan 0,20 kg'lık bir macun çubuğa yapışıyor. Eğer çarpışmadan hemen önce, çubuğun açısal sürati 2,4 rad/s ise, çarpışmadan hemen sonra çubuk-macun sisteminin açısal sürati ne olur?



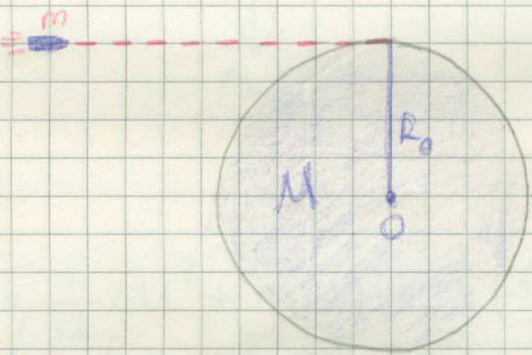
Çözüm

$$I w_0 = \left(I + m_0 L^2\right) w$$

$$w = \frac{I w_0}{I + m_0 L^2} = \frac{(0{,}12)(2{,}4)}{(0{,}12 + (0{,}2)(0{,}6)^2}$$

$$w = 1{,}5\ rad/s$$

Örnek. v hızı ile giden m kütleli bir mermi şekilde gösterildiği gibi R_0 yarıçaplı ve M kütleli bir silindirin kenarına çarpıyor ve içinde kalıyor. Başlangıçta durgun olan silindir yerinde sabit kalan simetri ekseni etrafında dönmeye başlıyor. Sürtünmeden kaynaklanan tork olmadığını kabul ederek bu çarpışmadan sonra silindirin açısal hızını bulun. Kinetik enerji korunur mu?



Çözüm

$$R_0 m v = I\omega$$

$$R_0 m v = \left(I_{sil} + mR_0^2\right)\omega$$

$$R_0 m v = \left(\frac{1}{2}MR_0^2 + mR_0^2\right)\omega$$

$$\cancel{R_0} m v = \left(\frac{1}{2}M + m\right)R_0^{\cancel{2}}\omega$$

$$\omega = \frac{mv}{\left(m + \frac{M}{2}\right)R_0}$$

Açısal momentum korunur. Kinetik enerji korunmaz.

$$K_s - K_i = \frac{1}{2}I_{sil}\omega^2 + \frac{1}{2}(mR_0^2)\omega^2 - \frac{1}{2}mv^2$$

$$K_s - K_i = \frac{1}{2}\left(\frac{MR_0^2}{2}\right)\omega^2 + \frac{1}{2}(mR_0^2)\omega^2 - \frac{mv^2}{2}$$

$$K_s - K_i = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} + m\right)\cancel{R^2}\left(\frac{mv}{\frac{M}{2}+m}\right)^2\frac{1}{\cancel{R^2}} - \frac{mv^2}{2}$$

$$K_s - K_i = \frac{1}{2}\left(\frac{m^2v^2}{\frac{M}{2}+m}\right) - \frac{mv^2}{2}$$

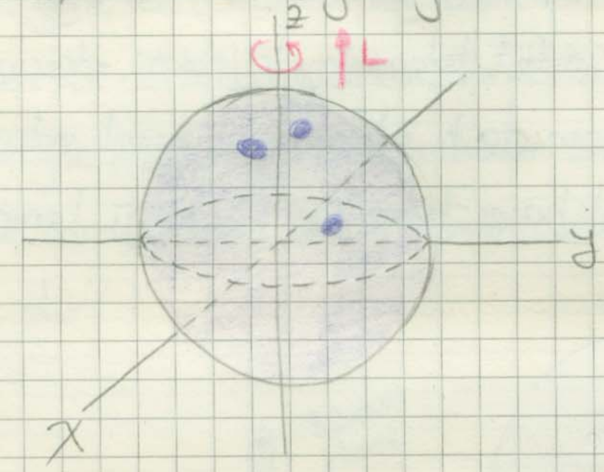
$$K_s - K_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{m^2v^2} - \frac{mM}{2}v^2 - \cancel{m^2v^2}}{\frac{M}{2}+m}\right)$$

$$K_s - K_i = -\frac{1}{4}\frac{mM}{\left(\frac{M+2m}{2}\right)}v^2$$

$$K_s - K_i = -\frac{mM}{2M+4m}v^2$$

Bu sonuç negatiftir. Bu nedenle $K_s < K_i$ olur. Enerji esnek olmayan çarpışma sonucu ısı enerjisine dönüşmüştür.

Örnek. Şekilde gösterilen bowling topu 10 dev/s'lik hızla döndüğüne göre açısal momentumunun büyüklüğünü tahmin ediniz. ($M = 6\,kg$, $R = 0{,}12\,m$)



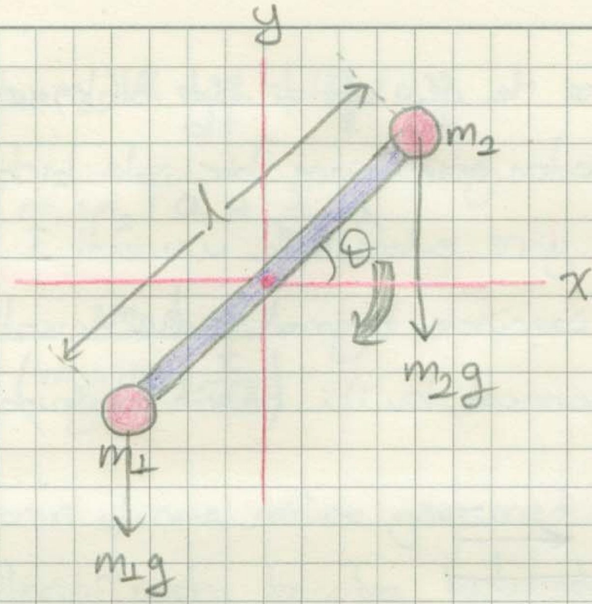
Çözüm

$$L = I\omega$$

$$= \left(\frac{2}{5} MR^2\right)\omega = \frac{2}{5}(6kg)(0{,}12m)^2\left(10\,\frac{dev}{s}\right)\left(2\pi\, rad/\cancel{dev}\right)$$

$$L = 2{,}17\ kgm^2/s \approx 2\ kgm^2/s$$ elde edilir.

Örnek. M kütleli ve l uzunluklu katı bir çubuk, merkezinden geçen sürtünmesiz bir mile tutturulmuştur (şekildeki gibi). Bu çubuğun uçlarında m_1 ve m_2 kütleli iki parçacık bulunmaktadır. Sistem düşey bir düzlem içinde ω açısal hızıyla dönmektedir. (a) sistemin açısal momentumunun büyüklüğü için bir ifade bulunuz (b) Çubuk yatayla θ açısı yaptığında, sistemin açısal ivmesinin büyüklüğü için bir ifade bulunuz.



Çözüm

(a)

$$I = \frac{1}{12}Ml^2 + m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$I = \frac{l^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)$$

$$L = I\omega = \frac{l^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)\omega$$

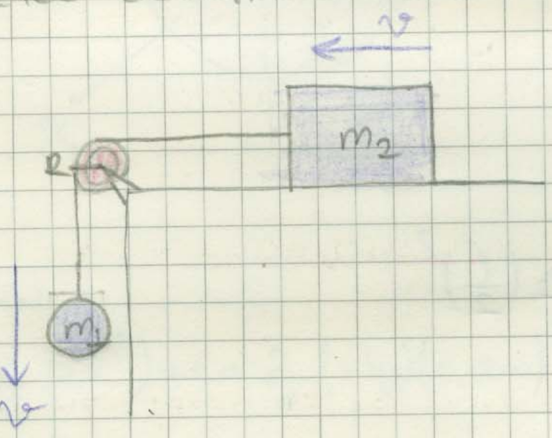
(b)

$$\sum \tau_{Net} = I\alpha$$

$$m_1 g \frac{l}{2}\cos\theta - m_2 g \frac{l}{2}\cos\theta = \frac{l^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)\alpha$$

$$\boxed{\frac{2(m_1 - m_2)g\cos\theta}{l\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)} = \alpha}$$

Örnek. m_1 kütleli bir küre ile m_2 kütleli bir blok, şekilde görüldüğü gibi, R yarıçaplı bir makaradan geçen ince bir iple birbirine bağlıdır. Makaranın, kendi eksenine göre eylemsizlik momenti I'dır. Blok, sürtünmesiz bir yatay düzlem üzerinde kaymaktadır. Açısal momentum ve tork kavramlarını kullanarak, bu iki cismin doğrusal ivmesi için bir ifade elde ediniz.



Çözüm

$$L = m_1 v R + m_2 v R + I \frac{v}{R}$$

$$\Sigma \tau_{net} = \frac{dL}{dt}$$

$(\Sigma \tau_{dış})$ dış kuvvetlerin yaptığı tork'a bakarsak m_2 kütlesinin ağırlığı yüzey tarafından Normal kuvvetiyle dengelendiği için bu kütle üzerinde net kuvvet sıfır olduğu için dış tork $(\tau_{dış})$'a bir katkıda bulunmaz. Dış tork'a tek etki m_1 cisminden gelir. Bu kütle makaranın dönmesini sağlayarak makara üzerinde bir tork oluşturur. O halde;

$$\Sigma \tau_{net} = \frac{dL}{dt}$$

$$m_1 g R = \frac{d}{dt}\left[(m_1+m_2) R v + \frac{I}{R} v\right]$$

......../......../........

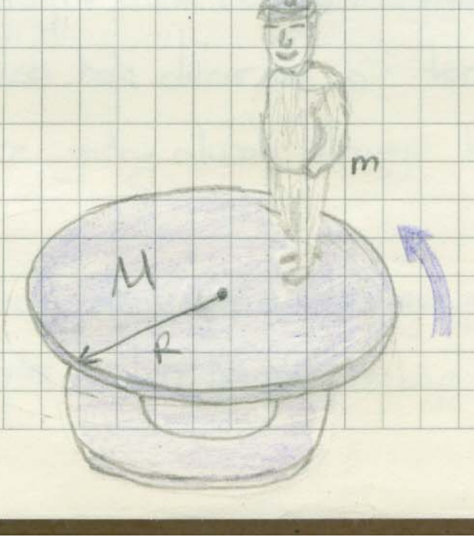
$$m_1 g R = (m_1+m_2) R \frac{dv}{dt} + \frac{I}{R}\frac{dv}{dt}$$

$$m_1 g = (m_1+m_2) a + \frac{I}{R^2} a$$

$$\boxed{a = \frac{m_1 g}{\left(m_1+m_2+\frac{I}{R^2}\right)}}$$

Not: Makaranın dönme miline göre net torku hesaplarken, ipteki gerilme kuvvetlerini neden hesaba katmadığımızı merak edebilirsiniz. Bunun sebebi, gerilme kuvvetlerinin, incelenen sistemin iç kuvvetleri olmalarıdır. Sadece dış kuvvetlerin torkları, açısal momentumun değişimine katkıda bulunur.

Örnek. Dairesel disk şeklindeki yatay bir tabla (platform), sürtünmesiz, düşey bir mil etrafında yatay bir düzlemde dönmektedir. (Aşağıdaki şekil.) Tabla $M = 100$ kg'lık bir kütleye ve $R = 2$m'lik bir yarıçapa sahiptir. $m = 60$ kg kütleli bir öğrenci, dönen tablanın kenarından merkezine doğru yavaşça yürümektedir. Öğrenci, dönen tablanın kenarındayken sistemin açısal hızı 2rad/s ise, öğrencinin merkezden $r = 0,5$ m uzaklıktaki bir noktaya ulaştığındaki açısal hızı ne olur?



...../...../.....

Çözüm

Buradaki hız değişimi, dönen bu+ patencisinin kollarını kendine doğru çektiği zaman onun açısal hızındaki artışa benzemektedir.

I_p : Dönen tablanın eylemsizlik momenti

$I_ö$: Öğrencinin eylemsizlik momenti

ve öğrenciyi m noktasal kütle ile temsil edersek;

$$I_i = I_p + I_ö = \frac{1}{2} MR^2 + mR^2$$

$r < R$ olduğunda (bu mesafeye geldiğinde öğrenci)

$$I_s = I_{p_s} + I_{ö_s} = \frac{1}{2} MR^2 + mr^2$$

değerine düşer eylemsizlik.

Açısal momentumun korunumu;

$$I_i w_i = I_s w_s$$

$$\left(\frac{1}{2} MR^2 + mR^2\right) w_i = \left(\frac{1}{2} MR^2 + mr^2\right) w_s$$

$$w_s = \left(\frac{\frac{1}{2} MR^2 + mR^2}{\frac{1}{2} MR^2 + mr^2}\right) w_i$$

$$w_s = \left(\frac{200+240}{200+15}\right) 2 = 4{,}1 \ rad/s$$

........../........../..........

10.13. Jiroskopun YALPALANMASI

Basit bir jiroskop merkezinden bir kolla bağlanmış ve bu kol etrafında serbestçe dönebilen bir tekerlektir. Eğer dönmeyen bir jiroskobu Şekil 10.8(a)'daki gibi, kolun bir ucundan bir desteğe tutturarak serbest bırakırsak, jiroskop aşağı doğru, destek ucuna göre dönerek düşer. Düşme dönmeyi içerdiğinden

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

olarak yazılabilir. Bu denklem bize aşağı doğru dönmeye (düşme) neden olan torkun jiroskopun başlangıçta sıfır olan açısal momentumunu değiştirdiğini söyler. Bu torkun kaynağı, jiroskopa etki eden $M\vec{g}$ yerçekimi kuvvetidir, ve bu kuvveti tekerleğin kütle merkezinden alabiliriz. O noktasından olan desteğin ucuna göre kuvvet kolu, şekil 10.8(b)'de görüldüğü gibi $\vec{r}$'dir. Torkun büyüklüğü şöyle olur:

$$\tau = Mgr \sin 90° = Mgr.$$

Hızlıca dönen bir jiroskop farklı davranır. Kolun küçük bir açıyla yukarıya kaldırılıp serbest bırakıldığını varsayalım. Bir taraftan teker dönerken önce çok ~~az~~ aşağı doğru düşer (denge noktasına göre dönerek). Ama sonra teker kendi etrafında hala dönerken bir taraftan destek noktası O'dan geçen bir eksene göre yatay olarak dönmeye başlar ki bu harekete yalpalama denir.

Dönen bir jiroskop dönmeyenin düştüğü gibi düşmedi de neden yukarıda kaldı? Anahtar şudur: Dönen jiroskop bırakıldığında $M\vec{g}$'nin oluşturacağı tork, dönmeyende olduğu gibi başlangıçta sıfır olan açısal momentumu değil, jiroskobun dönmesinden dolayı sıfır olmayan bir açısal momentumu değiştirmelidir.

Sıfır olmayan bu ilk açısal momentumu yalpalama hareketine neden olduğunu anlamak için, önce jiroskobun dönmesinden dolayı $\vec{L}$ açısal momentumunu düşünelim. Durumu basitleştirmek için, jiroskopun dönme hızının çok yüksek olduğunu, yani yalpalama açısal momentumunun $\vec{L}$'nin yanında ihmal edilebileceğini varsayın. Yalpalamaya başladığında kolun 10.8(b)'de olduğu gibi yatay durumda olduğunu varsayın. L'nin büyüklüğü

$$L = I\omega$$

olarak verilir. Burada I jiroskopun eylemsizlik momenti, ω'da tekerin kol etrafındaki dönme açısal süratidir. Şekil 10.8 (b)'de gördüğü gibi $\vec{L}$ vektörü kol boyunca yönelmiştir. $\vec{L}$, $\vec{r}$'ne paralel olduğundan, $\vec{\tau}$ torku $\vec{L}$'ye dik olmalıdır. $d\vec{L}$ değişimi

$$d\vec{L} = \vec{\tau}\, dt$$

olarak yazılabilir. Ancak çok hızlı dönen jiroskop varsa $|\vec{L}|$'nın büyüklüğü sabittir. Böylece tork, $\vec{L}$'nin sadece yönünü değiştirebilir büyüklüğünü değil.

Yalpalama hızı Ω'yı bulmak için, önce $d\vec{L}$'nin büyüklüğünü bulalım.

$dL = \tau dt = Mgr dt$

$\vec{L}$, küçük bir dt zaman aralığında küçük bir miktar artarsa, kol ve $\vec{L}$, z ekseni etrafında küçük bir $d\phi$ açısı kadar yalpalama hareketi yapar. (Şekil 10.8 (c)'de

$d\phi$ açısı anlaşılır olsun diye abartılarak çizilmiştir.) $L = I\omega$ ve $dL = \tau dt = Mgr\,dt$ yardımıyla $d\phi$ açısını şöyle buluruz:

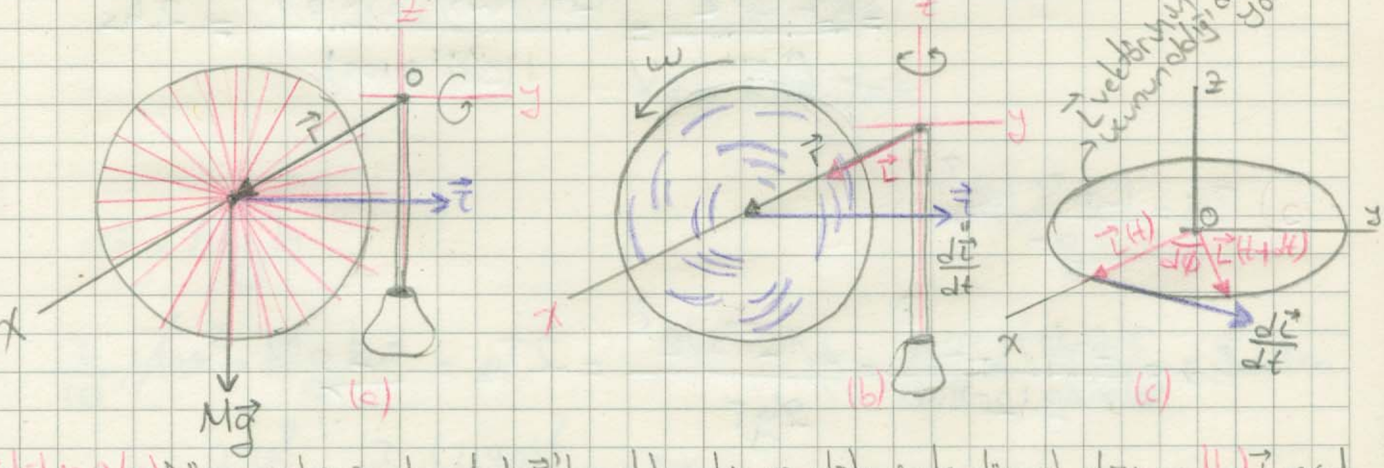
$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{Mgr\,dt}{I\omega}$$

Bu denklemi dt'ye bölüp, yalpalama hızı olarak $\Omega = \frac{d\phi}{dt}$ yazarsak, şunu elde ederiz.

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega} \quad \text{(yalpalanma açısal hızı)} \ (\ast)$$

Bu sonuç, dönme hızı ω'nın büyük olduğu varsayımında geçerlidir. ω büyüdükçe, Ω'nın küçüldüğüne dikkat ediniz. Yerçekimi kuvveti $M\vec{g}$ olmasaydı, yalpalamanın olmayacağına da dikkat ediniz, çünkü I'nın, M kütlesinin fonksiyonu olmasından $\Omega = \frac{Mgr}{I\omega}$ formülündeki kütle gider, böylece Ω kütleden bağımsız hale gelir.

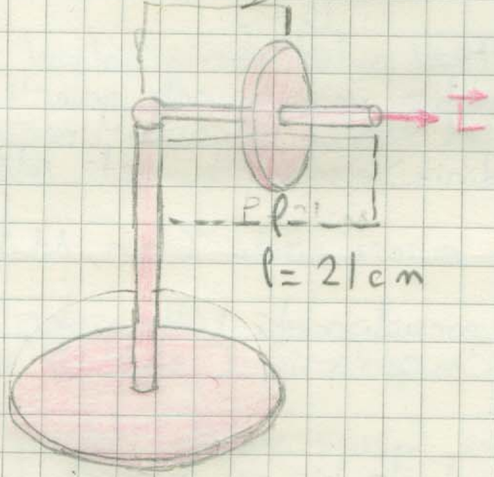
Eğer dönen jiroskopun kolu yatayla bir açı yapacak şekilde dursa da $\Omega = \frac{Mgr}{I\omega}$ formülü geçerlidir. Ayrıca, dönen bir topaç içinde geçerlidir, çünkü dönen topaç esas olarak, yatayla açı yapmış bir jiroskoptur.



Şekil 10.8.(a) Dönmeyen bir jiroskop, tork $\vec{\tau}$'dan dolayı bir xz düzleminde dönerek düşüyor. (b) $\vec{L}$ açısal momentumu ile hızlı dönen bir jiroskop, z-ekseni etrafında dönüyor. Yalpalama hareketi xy düzleminde. (c) Açısal momentumdaki değişim $d\vec{L}/dt$ $\vec{L}$'nin O etrafında dönmesine neden oluyor.

Örnek. Oyuncak bir jiroskop 21cm uzunluğunda ince bir mile takılan 170g'lık 5,5 cm yarıçaplı bir diskten oluşmaktadır (aşağıdaki şekil). Jiroskop 45 dev/s'de dönmektedir. Jiroskobun bir ucu bir destek üzerinde duruyor ve diğer ucu destek etrafında yatay olarak presesyon (yalpalama) yapıyor. (a) Jiroskopun bir dönüşü ne kadar zaman alır? (b) Jiroskopun bütün boyutları ikiye katlanırsa (yarıçap 11 cm) bir defa dönmesi ne kadar zaman alır?

$\vec{r} = \frac{21}{2} = 10{,}5\,cm$



Çözüm

a) $$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\frac{Mgr}{I\omega}} = \frac{2\pi I\omega}{Mgr} = \frac{2\pi\left(\frac{\cancel{M}R^2}{\cancel{2}}\right)(\cancel{2}\pi f)}{\cancel{M}gr}$$

$$= \frac{(2\pi^2 f)R^2}{gr} = \frac{(2\pi^2)(45)(5{,}5\times10^{-2})^2}{(9{,}8)(0{,}105)} = 2{,}6\,s$$

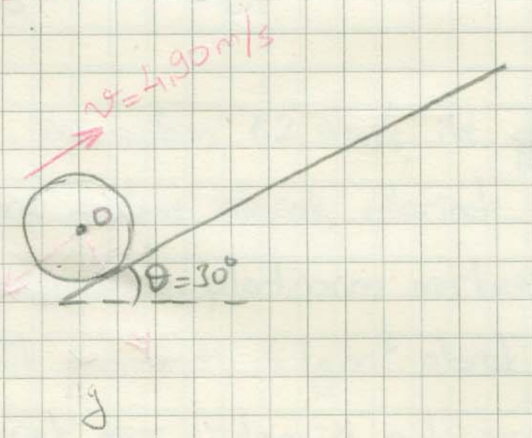
b) $$T_{ilk} = \frac{(2\pi^2 f)R^2}{gr}$$

$$T_{son} = \frac{(2\pi^2 f)(2R)^2}{g(2r)} = \frac{\cancel{4}(2\pi^2 f)R^2}{\cancel{2}gr} = 2T_{ilk} = 5{,}2\,s$$

........./........./.........

Örnek. Ağırlığı 36N olan katı bir küre, açısı 30° olan bir eğik düzlemden yukarı doğru yuvarlanıyor. Eğik düzlemin altındayken kürenin çizgisel hızı, 4,90 m/s olarak veriliyor. (a) Eğik düzlemin başında kürenin kinetik enerjisi nedir? (b) Küre eğik düzlemde ne kadar yol alır? (c) (b) şıkkının cevabı kürenin kütlesine bağlı mıdır? (Not: Eğik düzlem sürtünmesizdir.)

Çözüm:



(a)

$$KE = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

$$= \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5} M\cancel{R^2}\frac{v^2}{\cancel{R^2}}$$

$$= \frac{1}{2} M\left(1 + \frac{2}{5}\right)v^2 \Rightarrow KE = \frac{7}{10} Mv^2$$

$$= \frac{7}{10}\left(\frac{36}{9,8}\right)(4,90)^2$$

$$KE = 61,7 \text{ Joule}$$

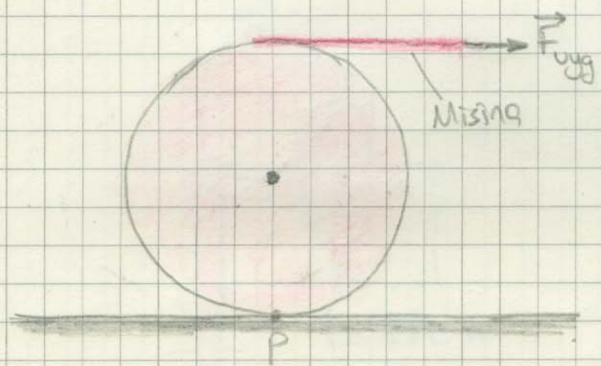
(b)

$$KE = Mgh$$

$$\frac{7}{10}\cancel{M}v^2 = \cancel{M}gh \qquad x = \frac{h}{\sin\theta} = \frac{1,715}{\sin 30°} = 3,43\text{m}$$

$$h = \frac{7v^2}{10g} = \frac{7}{10}\frac{(4,90)^2}{9,8} = 1,715\text{m}$$

Örnek. Şekilde, etrafına misina sarılmış dolgun katı bir silindiri ve ona etkiyen, yatay 12N'luk bir $\vec{F}_{uyg}$ kuvvetini gösteriyor. Kütlesi 10kg ve yarıçapı 0,10m olan silindir, yatay düzlemde düzgünce yuvarlanıyor. (a) Silindirin kütle merkezinin ivmesinin büyüklüğü nedir? (b) Silindirin kütle merkezine göre, açısal ivmesinin büyüklüğü nedir? (c) Silindire etki eden sürtünme kuvveti, birim vektör gösterimi ile ne olur?



Çözüm

(a) P noktasına göre;

$$F(2R) = I\alpha$$

$$2FR = \left(\frac{MR^2}{2} + MR^2\right)\frac{a_{KM}}{R}$$

$$2F\cancel{R} = \frac{3M\cancel{R}}{2}a_{KM} \Rightarrow a_{KM} = \frac{4}{3}\frac{F}{M} = \frac{4}{3}\frac{(12)}{(10)}$$

$$a_{KM} = 1{,}6 \ m/s^2$$

(b) $a = \alpha R \Rightarrow \alpha_{KM} = \frac{a_{KM}}{R}$

$$\alpha_{KM} = \frac{1{,}6}{(0{,}10)} = 16 \ rad/s^2$$

(c) Newtonun II. yasasından yola çıkarsak;

$$(12N) - f_s = Ma_{KM}$$

$$f_s = 12 - (10)(1,6)$$

$$f_s = -4N$$

Bu sonuç kuvvetin yönünü ters seçtiğimizi gösterir. Böylece

$$f_s = (4N)\hat{i}$$

olur.

Örnek. Bir adam 1,2 dev/s ile dönen bir platform üzerinde, kolları iki yana açılmış olarak, ellerinde tuğlalarla duruyor. Adamın, tuğlaların ve platformun, platform merkezinden dik geçen eksene göre eylemsizlik momenti $6\,kgm^2$ olarak verilmiştir. Adam tuğlaları hareket ettirerek, eğer sistemin eylemsizlik momentini $2\,kgm^2$'ye düşürüyorsa (a) platformun son açısal sürati ve (b) sistemin yeni kinetik enerjisinin ilkine oranı ne olur?

Çözüm

(a)

$$I_{ilk} = 6\,kgm^2 \,,\; I_{son} = 2\,kgm^2$$

Açısal momentumun korunumundan;

$$I_{ilk}\,w_{ilk} = I_{son}\,w_{son}$$

$$I_{ilk}\,f_{ilk} = I_{son}\,f_{son}$$

$$f_{son} = \frac{I_{ilk}\,f_{ilk}}{I_{son}} = \frac{6(1,2)}{2}$$

$$f_{son} = 3,6\,\frac{dev}{s}$$

(b)

$$\frac{K_s}{K_i} = \frac{\frac{1}{2} I_{son}(w_s)^2}{\frac{1}{2} I_{ilk}(w_i)^2}$$

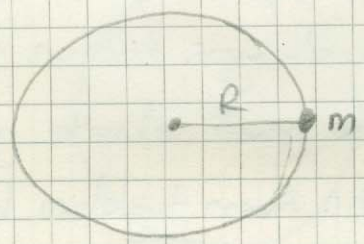
$$\frac{K_s}{K_i} = \frac{I_{son}\,f_s^2}{I_{ilk}\,f_i^2} = \frac{2(3,6)^2}{6(1,2)^2}$$

$$\frac{K_s}{K_i} = 3$$

Kinetik enerjinin artışı şöyle açıklanabilir: Adam tuğlaları vücuduna daha yaklaştırarak eylemsizlik momentini azaltmış ve iş yapmıştır. Bu enerji, adamın iç enerjisinden kaynaklanır.

Örnek. Yarıçapı 0,10 m olan bir plak, merkezinden geçen dik bir eksende, 4,7 rad/s'lik bir açısal hızla serbestçe dönmektedir. Plağın eksenine göre eylemsizlik momenti 5×10^{-4} kgm^2'dir. Kütlesi 0,020 kg olan yapışkan bir parça (cam macunu) plağın üzerine tepeden dik olarak düşüp kenarına yapışıyor. Macun plağa yapıştıktan hemen sonra plağın açısal sürati ne olur?

Çözüm



$$I\omega = I_{son}\,\omega'$$

$$I\omega = (I + m_c R^2)\,\omega'$$

$$\omega' = \frac{I\omega}{(I + m_c R^2)} = \frac{(5\times10^{-4})(4,7)}{(5\times10^{-4} + (0,020)(0,10)^2)} = 3,35 \text{ rad/s}$$