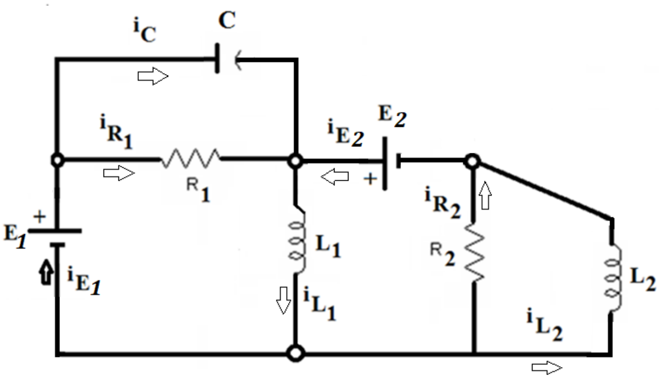
SAÜ MÜH. FAK. ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERANSİYEL DENKLEMLER FİNAL SINAV SORULARI

Soru 1) Şekil 1'de verilen devrede, durum denklemlerini verilen parametreler cinsinden bulunuz.
Not: Durum değişken vektörünü [v1 v2 v3.. i1 i2 i3...] sırasına göre oluşturunuz.
(30 P / PÇ1)



Şekil 1

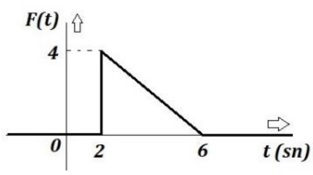
Soru 2) $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{3t} \\ u(t) \end{bmatrix}$ $x_1(0) = 0;\ x_2(0) = 0$ **(30 P / PÇ2)**

Yukarıda verilen durum denklemine ilişkin *tam çözümü* bulunuz. Özel çözümü *<u>BKY ile çözmek isterseniz</u>*, sabit denklemlerinde belirsizlik gördüğünüzde ilgili sabitler arasında sayı belirlemeniz gerekirse, büyük olan sabiti **1** olarak alabilirsiniz.

Soru 3) **a**) $\mathcal{L}\{F'(t)\} = sf(s) - F(0)$ olduğunu hatırlayarak (*yol gösterme*) **(15 P / PÇ3)**

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-3s}{s^2-6s+34}\right\} = ?$ değerini bulunuz.

b) Şekil 2'de verilen F(t) fonksiyonunun f(s) değerini bulunuz. **(10 P / PÇ3)**



Şekil 2

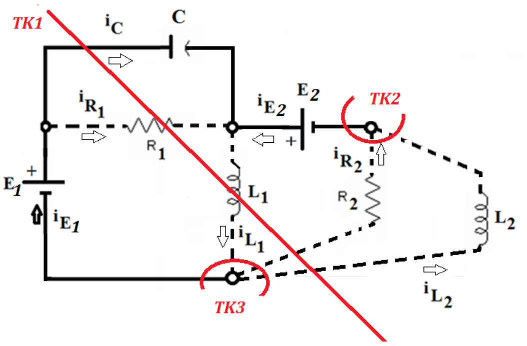
Soru 4) $(y^2 + x^2 + 2xy)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$ **(15 P / PÇ3)**

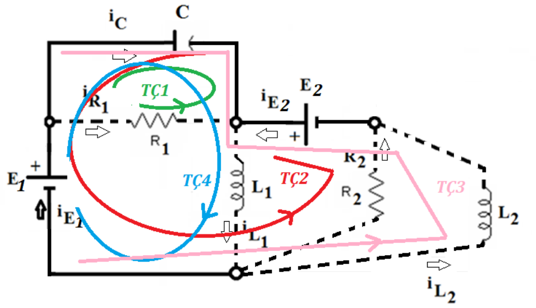
diferansiyel denkleminin *tam diferansiyel* denklem olup olmadığını kontrol ederek, tam diferansiyel denklem ise çözerek, değilse ($v = x + y$)'ye bağlı bir *integrasyon çarpanı* kullanarak y'ye ilişkin *genel çözümü* bulunuz.

Süre 120 dakikadır.
Yalnızca <u>*yalnızca formül barındıran*</u> 1 yapraklık hatırlatma kağıdı serbestir. Kitap vb. dokümanların kullanılması yasaktır. Soru kağıtları öğrencide kalacaktır. Çözümler SABİS sisteminde ilan edilecektir.

Başarılar dilerim. UA

Çözüm 1)





$TK_1: i_C + i_{R1} + i_{R2} + i_{L2} - i_{L1} = 0$

$TK_2: i_{R2} + i_{L2} - i_{E2} = 0$

$TK_3: i_{L1} - i_{R2} - i_{L2} - i_{E1} = 0$

$TÇ_1: v_C - v_{R1} = 0$

$TÇ_2: -v_C - E_2 + v_{R2} + E_1 = 0$

$TÇ_3: -v_C - E_2 + v_{L2} + E_1 = 0$

$TÇ_4: v_C + v_{L1} - E_1 = 0$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_C \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_C \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{i_C}{C} = \frac{-i_{R1} - i_{R2} - i_{L2} + i_{L1}}{C} = \frac{-\frac{v_C}{R1} - \frac{(v_C + E_2 - E_1)}{R2} - i_{L2} + i_{L1}}{C}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_C \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{C*R1} + \frac{1}{C*R2}\right) & \frac{1}{C} & \frac{-1}{C} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_C \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C*R2} & \frac{-1}{C*R2} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{di_{L1}(t)}{dt} = \frac{v_{L1}}{L1} = \frac{-v_C + E_1}{L1}$$

$$\frac{di_{L2}(t)}{dt} = \frac{v_{L2}}{L2} = \frac{v_C + E_2 - E_1}{L2}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_{L1}(t) \\ i_{L2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{C*R1} + \frac{1}{C*R2}\right) & \frac{1}{C} & \frac{-1}{C} \\ \frac{-1}{L1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{L2} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_{L1}(t) \\ i_{L2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C*R2} & \frac{-1}{C*R2} \\ \frac{1}{L1} & 0 \\ \frac{-1}{L2} & \frac{1}{L2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$ (her bir satır 10 puan)

Çözüm 2)

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&-5\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{3t}\\u(t)\end{bmatrix}$$

$$\det(\alpha I-A)=\alpha^2-9=(\alpha-3)(\alpha+3)=0;\qquad \alpha_1=3;\qquad \alpha_2=-3$$

Homojen çözüm:

$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K\\M\end{bmatrix}e^{3t}+\begin{bmatrix}N\\R\end{bmatrix}e^{-3t}$; ifadesi çözüm sağ tarafsız denklemde yerine yazılırsa;

$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}_h=C_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^{3t}+C_2\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}e^{-3t}$ (*) (10 puan)

elde edilir. (*) ifadesinin açık formu aşağıda verilmiştir:

$x_{1h}=C_1e^{3t}-C_2e^{-3t}$

$x_{2h}=C_1e^{3t}+2C_2e^{-3t}$

Problem hem *BKY* hem de *LSD* ile ayrı ayrı çözülecektir.

a) *BKY* ile çözüm

$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}_p=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}t*e^{3t}+\begin{bmatrix}C\\D\end{bmatrix}e^{3t}+\begin{bmatrix}E\\F\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}3Ate^{3t}+Ae^{3t}+3Ce^{3t}\\3Bte^{3t}+Be^{3t}+3De^{3t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Ate^{3t}+Ce^{3t}+E\\Bte^{3t}+De^{3t}+F\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&-5\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{3t}\\u(t)\end{bmatrix}$$

$3A=A+2B$ (1)

$A+3C=C+2D+4$ (2)

$0=E+2F-5$ (3)

$3B=4A-B$ (4)

$B+3D=4C-D$ (5)

$0=4E-F+1$ (6)

$A=B=8/3$

$E=1/3;\quad F=7/3;$

$C-D=2/3$ (*)

Yukarıdaki (*) ifadesinde büyük olan C sabiti (*soruda belirtildiği üzere*) **1** olarak alınırsa $D=1/3$ olarak elde edilir.

Buna göre *genel çözüm*;

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_g = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-3t} + \begin{bmatrix} 8/3 \\ 8/3 \end{bmatrix} t * e^{3t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \end{bmatrix} e^{3t} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 7/3 \end{bmatrix}$$ (15 puan)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{0} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{0} + \begin{bmatrix} 8/3 \\ 8/3 \end{bmatrix} 0 * e^{3t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \end{bmatrix} e^{0} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 7/3 \end{bmatrix}$$

$C_1 = -16/9$; $C_2 = -4/9$ elde edilir. Buna göre *tam çözüm* aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} -7/9 \\ -13/9 \end{bmatrix} e^{3t} + \begin{bmatrix} (4/9) \\ -(8/9) \end{bmatrix} e^{-3t} + \begin{bmatrix} 8/3 \\ 8/3 \end{bmatrix} t * e^{3t} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 7/3 \end{bmatrix}$$ (*) (5 puan)

b) *LSD* ile çözüm

$$x_{1h} = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-3t}$$

$$x_{2h} = C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{-3t}$$

$$C_1{}' e^{3t} - C_2{}' e^{-3t} = 4e^{3t} - 5 \qquad (1)$$

$$C_1{}' e^{3t} + 2C_2{}' e^{-3t} = 1 \qquad (2)$$

(1) eşitliği -1 ile çarpılıp (2) eşitliği ile toplanırsa;

$$3C_2{}' e^{-3t} = -4e^{3t} + 6$$

$$C_2{}' = (-4/3)e^{6t} + 2e^{3t} \qquad (3)$$

$$C_2(t) = -(2/9)\, e^{6t} + (2/3)\, e^{3t} + C2 \qquad (4)$$

(3) eşitliği (2) eşitliğinde kullanılırsa;

$$C_1{}' e^{3t} - 8e^{3t} + 4 = 1$$

$$C_1{}' = (8/3) - 3e^{-3t}$$

$$C_1(t) = (8/3)t + e^{-3t} + C1 \qquad (5)$$

(4) ve (5) eşitlikleri;

$$x_{1h} = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-3t}$$

$$x_{2h} = C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{-3t}$$

eşitliklerinde yerlerine yazılırsa;

$$x_{1g} = C1e^{3t} - C2\, e^{-3t} + (8/3)te^{3t} + (2/9)\, e^{3t} + (1/3)$$

$$x_{2g} = C1e^{3t} + 2C2e^{-3t} + (8/3)te^{3t} - (4/9)\, e^{3t} + (7/3)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_g = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-3t} + \begin{bmatrix} 8/3 \\ 8/3 \end{bmatrix} te^{3t} + \begin{bmatrix} 2/9 \\ -4/9 \end{bmatrix} e^{3t} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 7/3 \end{bmatrix} \quad \text{(15 puan)}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{0} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{0} + \begin{bmatrix} 8/3 \\ 8/3 \end{bmatrix} 0 * e^{0} + \begin{bmatrix} 2/9 \\ -4/9 \end{bmatrix} e^{0} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 7/3 \end{bmatrix}$$

$C_1 = -1 \quad ; C_2 = -4/9$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} -7/9 \\ -13/9 \end{bmatrix} e^{3t} + \begin{bmatrix} (4/9) \\ -(8/9) \end{bmatrix} e^{-3t} + \begin{bmatrix} 8/3 \\ 8/3 \end{bmatrix} t * e^{3t} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 7/3 \end{bmatrix} \quad (**) \quad \textit{Tam çözüm(5 puan)}$$

(*) ve (**) ifadeleri karşılaştırıldığında, *LSD* ile *BKY* ile elde edilen *tam çözümlerinin* ***örtüştüğü*** görülmektedir.

Çözüm 3)

a)
$\mathcal{L}\{F'(t)\} = sf(s) - F(0) \rightarrow \; sf(s) = \mathcal{L}\{F'(t)\} + F(0)$

Soruda istenilen cevap ise;

$\mathcal{L}^{-1}\{sf(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(0)\} + F'(t)$ (1)

ifadesidir.

$$\frac{s^2 - 3s}{s^2 - 6s + 34} = \frac{s(s-3)}{(s-3)^2 + 5^2} = sf(s) \rightarrow f(s) = \frac{s-3}{(s-3)^2 + 5^2} \rightarrow F(t) = e^{3t}\cos(5t)$$

$F(0) = 1$ (2)

$F'(t) = -5\sin(5t)e^{3t} + 3\cos(5t)e^{3t}$ (3)

(2) ve (3) eşitlikleri (1) eşitliğinde kullanılırsa;

$\mathcal{L}^{-1}\{sf(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(0)\} + F'(t) = \mathcal{L}^{-1}\{1\} - 5\sin(5t)e^{3t} + 3\cos(5t)e^{3t}$

$\mathcal{L}^{-1}\{sf(s)\} = dirac(t) - 5\sin(5t)e^{3t} + 3\cos(5t)e^{3t}$ (15 puan)

elde edilir.

b) $F(t) = -u(t-2) * t + 6u(t-2) + u(t-6) * t - 6u(t-6)$

$\mathcal{L}\{F(t)\} = \; e^{-2s}\left(\frac{-1}{s^2} - \frac{2}{s}\right) + e^{-2s}\frac{6}{s} + e^{-6s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{6}{s}\right) - e^{-6s}\frac{6}{s}$

$\mathcal{L}\{F(t)\} = \; e^{-2s}\left(\frac{-1}{s^2} + \frac{4}{s}\right) + e^{-6s}\frac{1}{s^2}$ (10 puan)

Cevap 4)

$M(x,y) = y^2 + x^2 + 2xy$ ve $N(x,y) = x^2 - y^2$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2y + 2x \neq 2x = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ (TAM DİF. DENKLEM ***değildir***)

$\frac{\mu'(v)}{\mu(v)} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M*\frac{\partial v}{\partial y} - N*\frac{\partial v}{\partial x}} = \frac{\mu'}{\mu} = \frac{2x-(2x+2y)}{(y^2+x^2+2xy)*1-(-y^2+x^2)*1} = \frac{-2y}{2y(x+y)} = \frac{-1}{(x+y)} = \frac{-1}{v}$

$\frac{\mu'(v)}{\mu(v)} = \frac{-1}{v}$

$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{-dv}{v} \rightarrow \mu = \frac{1}{v} = \frac{1}{x+y}$ (5 puan)

$\frac{(y^2+x^2+2xy)}{x+y} dx + \frac{(x^2-y^2)}{x+y} dy = 0$

$\frac{(x+y)^2}{x+y} dx + \frac{(x+y)(x-y)}{x+y} dy = 0 \rightarrow \boldsymbol{(x+y)dx + (x-y)dy = 0}$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1 = 1 = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ (TAM DİF. DENKLEM)

$\frac{\partial u}{\partial x} = M = x + y$

$\frac{\partial u}{\partial y} = N = x - y$

1.yol:

$u(x,y) = \int (x+y) * \partial x + C(y)$

$u(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + C(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = x - y = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2} + xy\right) + C'(y)$

$C'(y) = x - y - x = -y$

$\frac{dC(y)}{dy} = -y$

$C(y) = \frac{-y^2}{2} + C_1$

$u(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + xy + C_1 = C$

$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + xy = \bar{C}$ (*genel çözüm-ilkel*) (10 puan)

2.yol:

$u(x,y) = \int (x-y) * \partial y + C(x)$

$u(x,y) = -\frac{y^2}{2} + xy + C(x)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = x + y = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y^2}{2} + xy\right) + C'(x)$

$C'(x) = x + y - y$

$\frac{dC(x)}{dx} = x$

$C(x) = \frac{x^2}{2} + C_1$

$u(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + xy + C_1 = C$

$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + xy = \bar{C}$ (*genel çözüm-ilkel*) (10 puan)