10.6. Torka Tekrar Göz Atmak

Şekil 10.5 (a) xy düzleminde A noktasındaki bir parçacığı gösteriyor. Parçacığa tek bir $\vec{F}$ kuvveti etki ediyor ve parçacığın O merkezine göre konum vektörü $\vec{r}$ oluyor. Sabit O noktasına göre parçacığa etki eden $\vec{\tau}$ (tork) bir vektörel niceliktir ve şöyle tanımlanır:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

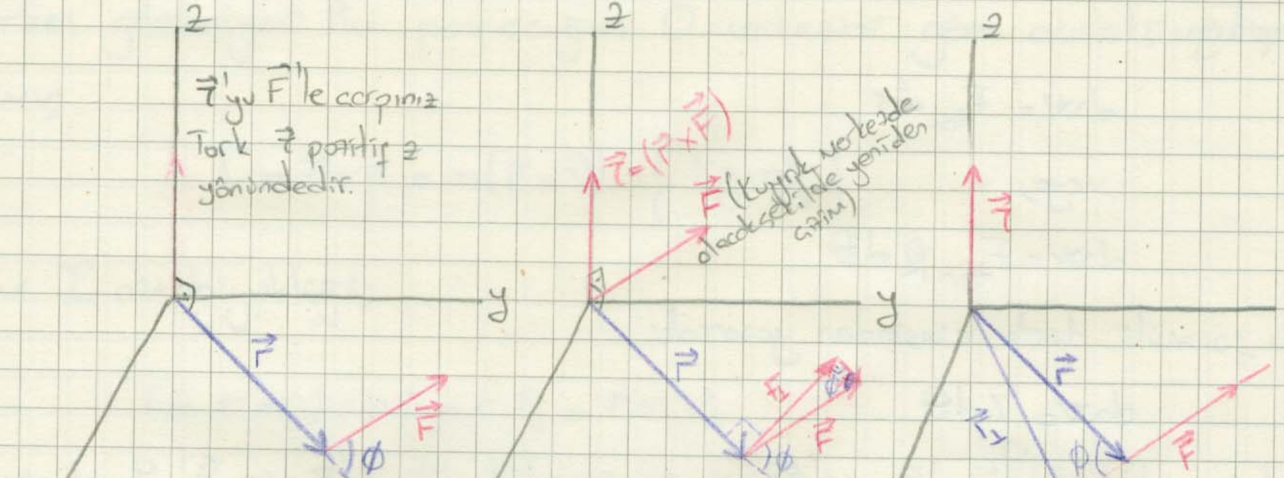
Eğer $\vec{r}$ vektörü ile $\vec{F}$ arasındaki açı ϕ ise torkun büyüklüğü;

$$\tau = rF\sin\phi$$

olur. Burada $F\sin\phi$, $\vec{F}$ vektörünün $\vec{r}$ vektörüne dik bileşenidir. Bu formül;

$$\tau = r_\perp F$$

olarak da yazılabilir. Burada $r_\perp = r\sin\phi$, $\vec{F}$'nin kuvvet koludur (O ile $\vec{F}$'nin etki çizgisi arasındaki dik mesafedir.



Şekil 10.5. Torku tanımlamak. (a) xy düzleminde olan bir $\vec{F}$ kuvveti, A noktasındaki bir parçacığa etki ediyor. (b) Bu kuvvet parçacık üzerinde, O merkezine göre, bir $\vec{\tau}\,(=\vec{r}\times\vec{F})$ torku oluşturuyor. Vektör çarpımında sağ el kuralıyla, tork vektörü pozitif z yönünde oluyor. Büyüklüğü, (b)'de $rF_\perp$ ve (c)'de $r_\perp F$ olarak gösteriliyor.

......../......../.........

Örnek. Koordinatları (0, -4m, 5m) olarak verilen bir pireye, $\vec{F}_1 = (3N\hat{k})$ ve $\vec{F}_2 = (-2N)\hat{j}$ kuvvetleri etki ederse, merkeze göre ona etki eden tork, birim vektör gösterimi ile ne olur?

Çözüm

$$\tau_1 = \vec{r} \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -12\hat{i}\ (Nm)$$

$$\tau_2 = \vec{r} \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 10\hat{i}\ Nm$$

$$\tau = -2\hat{i}\ (Nm)$$

10.7. Dönme Hareketinde İş ve Güç

Bir çocuğun bir oyun bahçesinde şekil 10.6 (a)'da görülen atlı karıncayı iterek koşmasını inceleyelim. Çocuğun uyguladığı $\vec{F}_{ten}$ kuvvetinin yaptığı iş:

$$dW = F_{ten}\, ds$$

veya

$$dW = F_{ten}\, R\, d\theta$$

Bu formülü tork cinsinden yazarsak:

$$dW = \tau\, d\theta$$

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau\, d\theta = \tau(\theta_2 - \theta_1) = \tau\Delta\theta$$

olur. ~~dW~~

$$dW = \tau\, d\theta = I\alpha\, d\theta = I\frac{d\omega}{dt}\, d\theta = I\frac{d\theta}{dt}\, d\omega = I\omega\, d\omega$$

İntegral işlemini yaparsak

$$W = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega \, d\omega = \frac{1}{2} I\omega_2^2 - \frac{1}{2} I\omega_1^2 = \Delta K$$

olur.

$$\frac{dw}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} \quad \text{ise} \quad P = \tau \omega$$

10.8. Açısal Momentum

Çizgisel momentumun ($\vec{P}$) korunumu ilkesinin ne kadar önemli olduğunu hatırlayınız. Bu ilke örneğin iki arabanın çarpışması gibi durumların sonuçlarını, çarpışma detaylarını bilmeden öngörmemizi sağlıyor. Burada çizgisel momentumun $\vec{P}$'nin, açısal konumdaki karşılığı olan açısal momentumu ($\vec{L}$) inceleyeceğiz. Şekil 10.6'da kütlesi m, çizgisel momentumu $\vec{P}$ olan bir parçacığın xy- düzlemindeki A noktasından geçerken gösteriyor. Bu parçacığın O merkezine göre açısal momentumu;

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \quad \left\{ kgm^2/s \right\}$$

olur. $\vec{L}$'nin büyüklüğü;

$$L = rmv\sin\phi = rP_\perp = rmv_\perp$$

Burada $P_\perp$ $\vec{P}$'nin $\vec{r}$'ye dik bileşeni, $v_\perp$ ise $\vec{v}$'nin $\vec{r}$'ye dik bileşenidir.

Veya

$$L = r_\perp P$$

Burada $r_\perp = r\sin\phi$, O ile $\vec{P}$'nin uzantısı arasındaki dik bileşenidir.

......../......../........

Açısal momentumu ancak belirlenen bir merkeze göre anlamı vardır. Yönü her zaman, konum ve çizgisel momentum vektörlerinin oluşturduğu düzleme diktir.

10.9. Açısal Formda Newton'un II. Yasası

Çizgisel momentum cinsinden Newton'un II. yasası

$$\vec{F}_{Net} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

olarak verilir. Açısal momentum ile tork arasındaki ilişkisi ise

$$\vec{\tau}_{Net} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

olur. Bu formülün ispatını yapalım:

Açısal momentumun zamana göre türevini alırsak

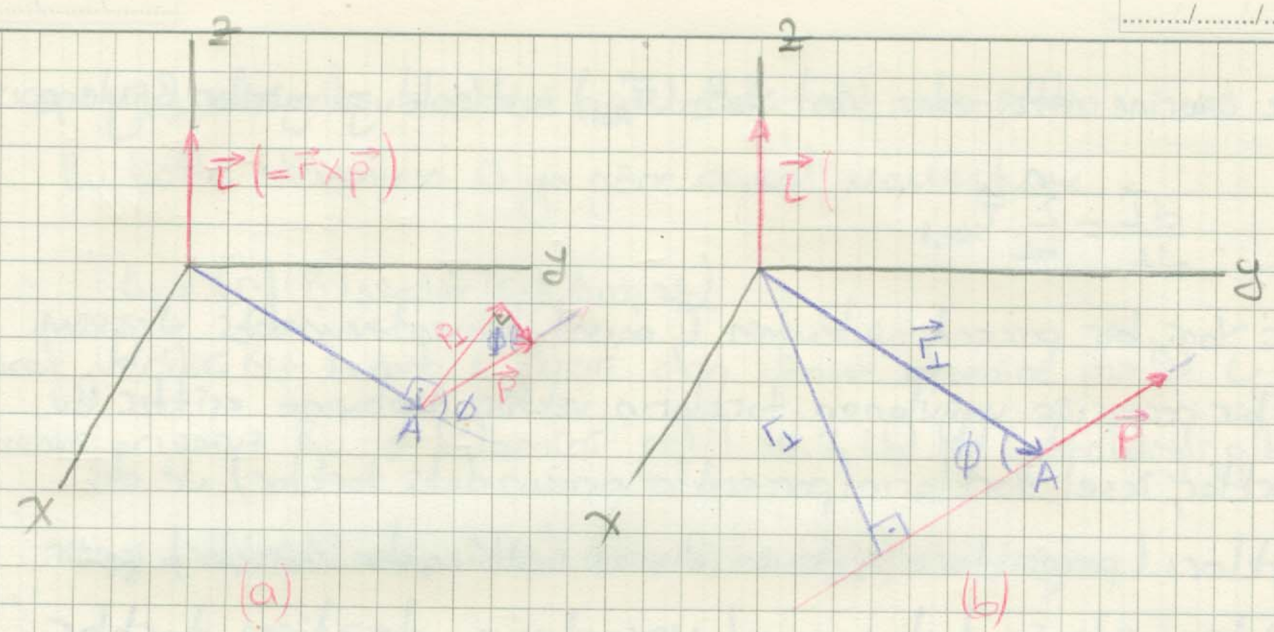
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[m(\vec{r}\times\vec{v})\right] = m\left[\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{v}\right]$$

$$= m\left[\vec{r}\times\vec{a} + \underbrace{\vec{v}\times\vec{v}}_{0}\right]$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m(\vec{r}\times\vec{a}) = \vec{r}\times m\vec{a}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F}_{Net}$$

$$\vec{\tau}_{Net} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



Şekil 10.6: Açısal momentumun tanımlanması. A noktasından geçen bir parçacık $\vec{p}$ çizgisel momentumuna sahiptir, $\vec{p}$ vektörü xy düzlemindedir. Parçacığın O merkezine göre $\vec{L}(=\vec{r}\times\vec{p})$ açısal momentumu vardır. Sağ el kuralı ile, açısal momentum pozitif z yönünde olur. (a) $\vec{L}$ vektörünün büyüklüğü $L = rP_\perp = rmv_\perp$ olarak veriliyor. (b) $\vec{L}$ vektörünün büyüklüğü $L = r_\perp p = r_\perp mv$ şeklinde de verilebilir.

10.10. Parçacıklardan Oluşan Bir Sistemin Açısal Momentumu

Şimdi dikkatimizi, parçacıklardan oluşan bir sistemin, bir merkeze göre açısal momentumuna çevirelim. Sistemin toplam açısal momentumu

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \cdots \vec{L}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i$$

olarak verilir. Zaman ilerledikçe her bir parçacığın açısal momentumu, birbirleriyle olan etkileşmelerden veya dışarıdan gelen etkilerle değişebilir. $\vec{L}$'deki son değişmeyi

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt}$$

hesaplayabiliriz. Bu çeşitlikle $\frac{d\vec{L}}{dt}$'nin, i'nci parçacık için, yine o parçacık üzerine etki eden net tork ($\vec{\tau}_{Net}$) eşit olduğu görülür. Böylece

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_{Net,i}$$

olur. Yani, bir parçacık sisteminin $\vec{L}$ açısal momentumundaki değişim, herbir parçacığa uygulanan torkların vektör toplamına eşittir. Bu torklar, içsel torkların (parçacıklar arasındaki torklar) ve dış torkları (parçacıklara sistemin dışından etki eden torklar) içerir. Böylece sistemin toplam açısal momentumunu değiştiren torklar sadece sisteme etki eden dış torklardır. Böylece,

$$\vec{\tau}_{Net} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{(Parçacıklar sistemi)}$$

olur.

10.11. Sabit Bir Eksene Göre Dönen Hacimli Katı Bir Cismin Açısal Momentumu

Şimdide sabit bir eksene göre dönen hacimli katı bir cismi oluşturan parçacıklar sistemi için açısal momentumu inceleyelim. Şekil 10.7 (a) böyle bir cismi gösteriyor. Sabit eksen bir z eksenidir ve cisim o eksene göre ω sabit açısal süratiyle dönmektedir. Cismin açısal momentumunu z eksenine göre bulmak istiyoruz. Açısal momentumu cisimdeki kütle elemanlarının z eksenine göre açısal momentumlarını toplayarak bulabiliriz. Şekil 10.7 (a) z eksenine göre dairesel bir yol boyunca dönen böyle tipik bir Δm kütle elemanını gösteriyor. Kütle elemanının konumu, O merkezine göre verilmiş, r konum vektörü ile gösterilmiştir. Kütle elemanının çembersel hareketinin yarıçapı $r_\perp$, elemanla z ekseni arasındaki dik mesafedir.

Bu kütle elemanının O'ya göre açısal momentumu

$$L_i = (r_i)(P_i)\sin 90° = (r_i)(\Delta m_i v_i)$$

olarak verilir. Biz burada, z ekseni olan dönme eksenine paralel L_i bileşenini arıyoruz. Bu z bileşenini şekil 10.7 (b)'de görüldüğü gibi

$$L_{iz} = L_i \sin\theta = (r_i \sin\theta)(\Delta m_i v_i) = (r_{\perp i})(\Delta m_i v_i)$$

olarak yazılabilir. Böylece;

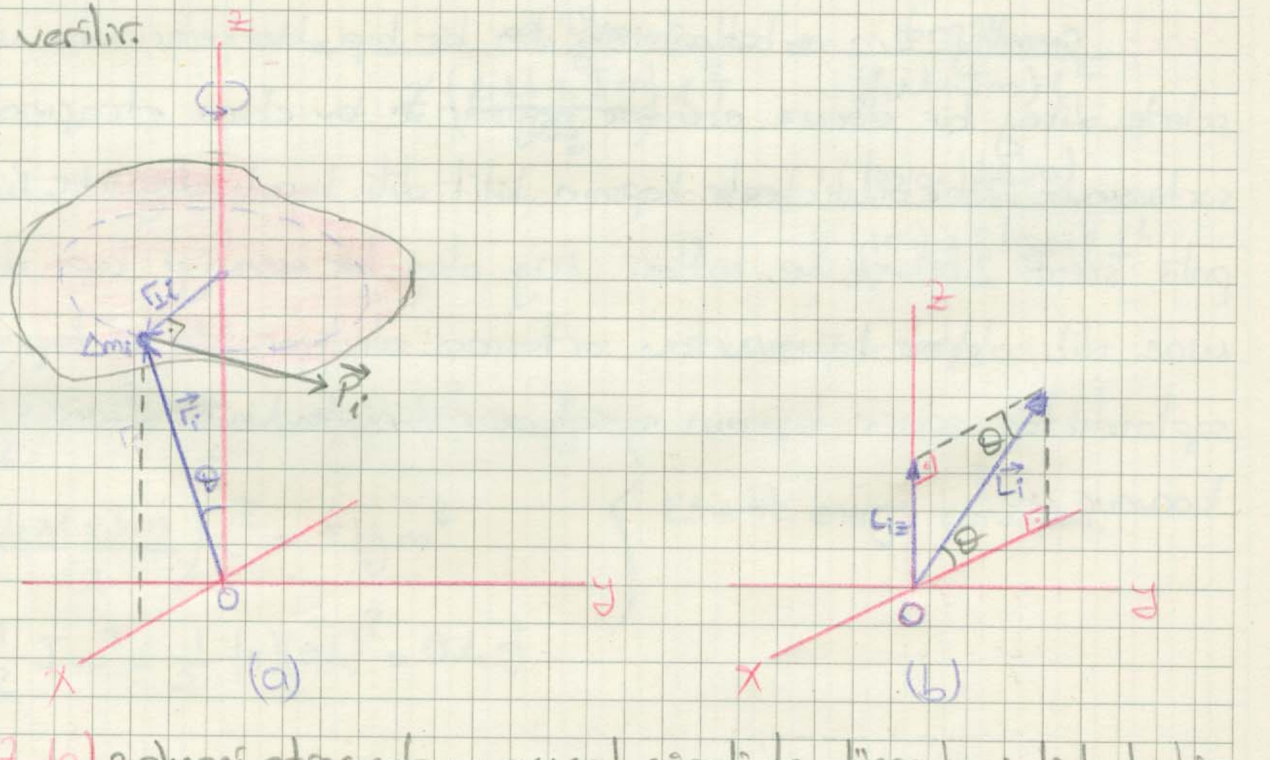
$$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{iz} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i v_i r_{\perp i} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i (w r_{\perp i}) r_{\perp i}$$

$$L_z = w\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_{\perp i}^2\right)$$

olur. Böylece hacimli katı bir cisim için açısal momentum

$$L = I w$$

olarak verilir.



Şekil 10.7. (a) z ekseni etrafında w açısal sürati ile dönen hacimli katı bir cisim. Cisimdeki bir Δm_i kütle elemanı, z ekseni etrafında r_i yarıçaplı dairesel bir yörüngede dönüyor. Burada kütle elemanı, $r_\perp$ yarıçapı x eksenine paralel olduğu anda gösterilmiştir.

(b) (a) şıkkındaki kütle elemanının O'ya göre, $\vec{L}_i$ açısal momentumu. z bileşeni L_{iz}'de gösteriliyor.

10-12 Açısal Momentumun Korunumu

Eğer bir sisteme etki eden bir dış kuvvet yoksa $\tau_{Net}=0$ böylece;

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=0 \quad \text{veya} \quad \vec{L}=\text{bir sabit}$$

olur. Bu sonuç açısal momentumun korunum yasası olarak bilinir; şu şekilde

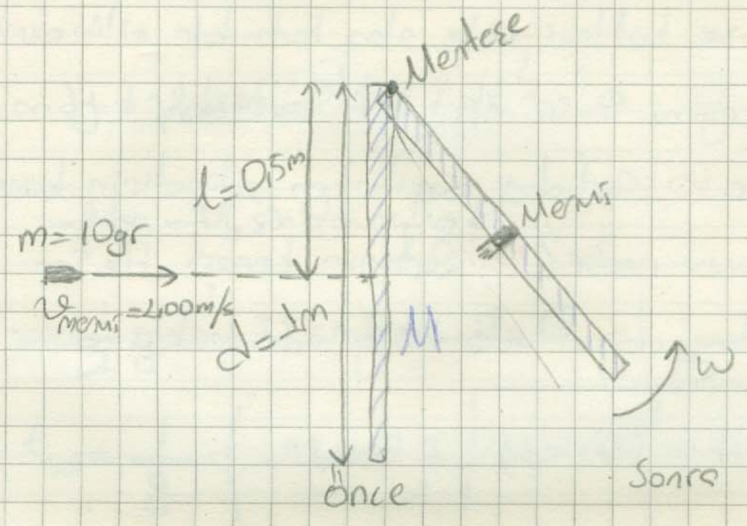
$$\left(\begin{array}{c}\text{bir } t_i \text{ başlangıç anındaki} \\ \text{açısal momentum}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\text{daha sonraki bir } t_s \text{ anındaki} \\ \text{açısal momentum}\end{array}\right)$$

veya şu şekilde yazılabilir:

$$\vec{L}_i=\vec{L}_{son} \quad \text{(yalıtılmış sistem)}$$

Eğer sisteme etki eden net dış kuvvet sıfır ise, sistemin içinde ne değişirse değişsin, sistemin $\vec{L}$ açısal momentumu sabit kalır.

Örnek. Genişliği 1m ve kütlesi 15kg olan bir kapı, bir kenarından menteşelerle dikey bir dönme eksenine bağlıdır ve bu eksen etrafında sürtünmesiz dönebilmektedir. Kapının kilit dili kapalı değildir. Bir polis sürati 400 m/s ve kütlesi 10g olan bir mermiyi kapı düzlemine dik olarak kapının tam ortasına ateşliyor. Mermi kapıya saplandıktan sonra kapının açısal süratini bulunuz. Kinetik enerji korunur mu?



Çözüm

$$m v_{mermi} \frac{l}{2} = I \omega \quad ; \quad \left[I = I_{kalas} + I_{mermi} \right]$$

$$\omega = \frac{m v_{mermi}}{2I} = \frac{m v_{mermi}}{2(I_{kalas} + I_{mermi})}$$

$$\omega = \frac{m v_{mermi}}{2\left(\frac{1}{3} M l^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)}$$

$$\omega = \frac{m v_{mermi}}{\cancel{2}\left(\frac{4M+3m}{\cancel{12}\,6}\right) l^2} = \frac{6 m v_{mermi}}{(4M+3m) l^2}$$

$$\omega = \frac{6(0{,}01)(400)}{\left[4(15)+3(0{,}01)\right] 1^2}$$

$$\omega = 0{,}4 \text{ rad/s}$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}(0{,}01)(400)^2 = 800 \text{ j}$$

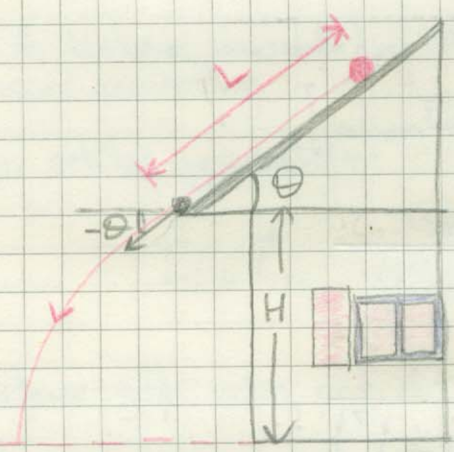
$$I = \left(\frac{4M+3m}{12}\right) l^2 = 5 \text{ kgm}^2$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2}(5)(0{,}4)^2 = 0{,}4 \text{ j}$$

Kinetik enerji korunmaz.

........./........./.........

Örnek. Şekilde yarıçapı 10 cm ve kütlesi 12 kg olan katı bir silindirin, hareketsiz durumdan başlayarak, eğimi $\theta=30°$ olan bir çatıdan, $L=6m$ kaymadan yuvarlandığı görülüyor. (a) Çatıdan ayrılırken silindirin kendi merkezine göre açısal momentumu nedir? (b) Çatının kenarı $H=5m$ yüksekliktedir. Silindir yere, yatay doğrultuda hangi mesafede düşer?



Çözüm

$$mgh=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I w^2$$

$$mgh=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\frac{m\cancel{R^2}}{2}\frac{v^2}{\cancel{R^2}}$$

$$2mgh=\frac{3mv^2}{2} \rightarrow v=\sqrt{\frac{4}{3}gh}=\sqrt{\frac{4}{3}gL\sin\theta}$$

$$v=2\sqrt{\frac{gL\sin\theta}{3}}=2\sqrt{\frac{(9,8)(6)\sin 30°}{3}}$$

$$v=6,26\ m/s$$

$$v=wR$$

$$w=\frac{v}{R}=\frac{6,26}{10\times10^{-2}}=62,6\ rad/s$$

(b)

$$y = v_0 \sin(-\theta) t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$-H = -v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta\, t - H = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{1}{g}\left(-v_0 \sin\theta \mp \sqrt{(v_0 \sin\theta)^2 - 4\left(\frac{1}{2}g\right)(-H)} \right)$$

$$= \frac{1}{9{,}8}\left(-(6{,}26)\sin 30 \mp \sqrt{(6{,}26 \sin 30)^2 + 2(9{,}8)(5)} \right)$$

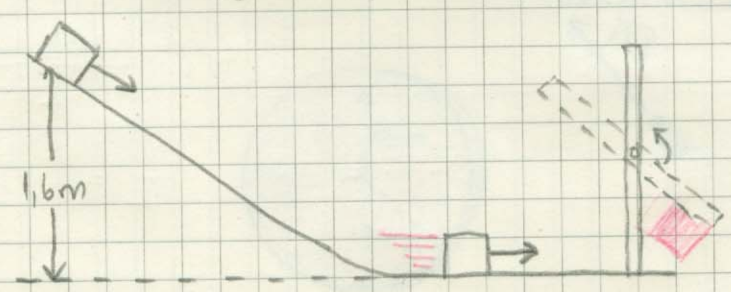
$$t_{1,2} = \frac{1}{9{,}8}\left(-3{,}13 \mp 10{,}882 \right) \quad ; \quad t_1 = 0{,}740\,s$$

$$x = v_0 \cos\theta\, t$$

$$x = (6{,}26)\cos 30\,(0{,}740)$$

$$x = 4{,}012\,m \approx 4\,m$$

Örnek. 0,5 kg'lık küçük bir kütle, sürtünmesiz bir eğik düzlem üzerinde, yerden 1,6 m yukarıda dururken kaymaya başlar. Kütle eğik düzlemin dibine ulaştığında bir süre düz bir yüzey üzerinde kaydıktan sonra, kütlesi 3,2 kg, uzunluğu da 1 m olan ve orta noktasından tutturulmuş düzgün dikey bir çubuğun altına çarpıp yapışır (aşağıdaki şekil). Çubuk dönme hareketine hangi açısal hızla başlar?



Çözüm

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9,8)(1,6)} = 5,6\,m/s$$

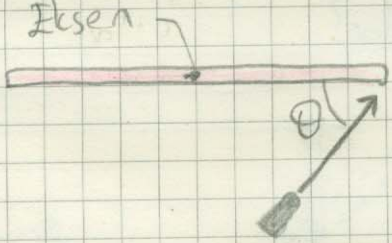
$$mv\frac{L}{2} = I\omega$$

$$\omega = \frac{mvL}{2I} = \frac{mvL}{2(I_ç + I_k)}$$

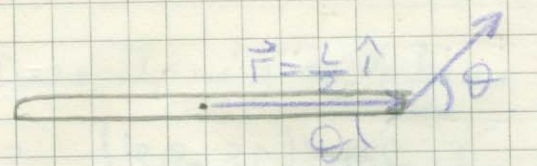
$$\omega = \frac{mvL}{2\left(\frac{1}{12}ML^2 + m\frac{L^2}{4}\right)} = \frac{mvL}{2\left(\frac{M+3m}{\cancel{12}\,6}\right)L^2}$$

$$\omega = \frac{6mv}{(M+3m)L} = \frac{6(0,5)(5,6)}{(3,2+3(0,5))1} = 3,6\,rad/s$$

Örnek. Kütlesi 4 kg ve uzunluğu 0,500 m olan ince düzgün bir çubuk, yatay düzlemde, merkezinden geçen dikey bir eksene göre dönebilmektedir. Çubuk, dönme düzleminden ateşlenen 3 gr'lık bir mermi, çubuğun ucuna çarpmadan önce çubuk durağan durumdadır. Tepeden görünüşe göre, merminin aldığı yol, çubukla θ = 60°'lik bir açı yapıyor (şekildeki gibi). Eğer mermi çubuğa saplanırsa ve çubuğun çarpışmadan hemen sonraki açısal hızı 10 rad/s olursa, çarpmadan hemen önce merminin sürati nedir?



Çözüm



$$\vec{v} = v\cos\theta\,\hat{i} + v\sin\theta\,\hat{j}$$

$$\vec{r} = \frac{L}{2}\hat{i}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = m \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{L}{2} & 0 & 0 \\ v\cos\theta & v\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \left(m\frac{L}{2}v\sin\theta\right)\hat{k}$$

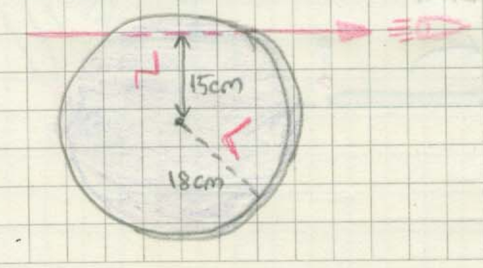
$$I = \frac{1}{12}ML^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{12} + \frac{mL^2}{4} = \frac{(M+3m)L^2}{12}$$

$$I = \frac{(4+3(0{,}003))}{12}(0{,}5)^2 = 0{,}083\ kgm^2$$

$$mv\frac{L}{2}\sin\theta = I\omega$$

$$v = \frac{2I\omega}{mL\sin\theta} = \frac{2(0{,}083)(10)}{(0{,}003)(0{,}5)(\sin 60)} = 1{,}3\times10^3\ m/s$$

Örnek: Kütlesi 5g olan ve hızı da 330 m/s olan bir mermi, durmakta olan bir tekerleğin içinden geçmektedir (şekildeki gibi). Tekerlek, kütlesi 2kg ve yarıçapı da 18 cm olan katı bir disktir. Mermi, tekerleğin içinden merkeze olan dik uzaklığı 15 cm olacak şekilde geçmektedir. Merminin son hızı ise 220 m/s'dir. Bu durumda tekerleğin açısal hızı, açısal momentumu ve kinetik enerjisi ne olur? Hareket enerjisi korunur mu?



Çözüm

$$L^{(\text{önce})} = L^{(\text{sonra})}$$

$$m v_0 r' = I\omega + m v' r'$$

$$m v_0 r' - m v' r' = I\omega$$

$$m r'(v_0 - v') = I\omega$$

$$m r'(v_0 - v') = \frac{1}{2} M r^2 \omega$$

$$\omega = \frac{2 m r'(v_0 - v')}{M r^2}$$

$$\omega = \frac{2(0{,}005)(0{,}15)(330-220)}{2(0{,}18)^2}$$

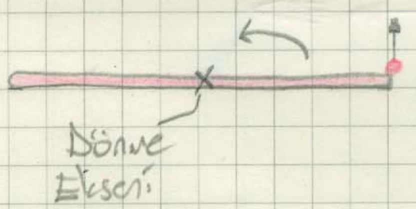
$$\omega = 2{,}546 \text{ rad/s}$$

$$I = \frac{Mr^2}{2} = \frac{2(0{,}18)^2}{2} = 0{,}0324 \text{ kg m}^2$$

$$L = I\omega = (0{,}0324)(2{,}546) = 0{,}082 \text{ kg m}^2/\text{s}$$

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 = (0{,}5)(0{,}0324)(2{,}546)^2 = 0{,}105 \text{ Joule}$$

Örnek. Şekilde, uzunluğu 0,800 m ve kütlesi M olan, merkezinden geçen bir eksene göre yatay olarak 20 rad/s'lik bir açısal hızla dönen doğun bir çubuğun tepeden görünüşüdür. Başlangıçta çubuğun bir ucuna yapışık olan M/3 kütleye sahip bir parçacık, daha sonra oradan, başlangıçta çubuğa dik olarak fırlıyor. Eğer parçacığın sürati v_p, çubuğun fırlatmadan sonra çubuğun ucunun süratinden 6 m/s büyükse, v_p'nin değeri ne olur?



Çözüm

$$I\omega = I_G\,\omega' + m v_p \frac{L}{2} \longrightarrow \omega' = \frac{v'}{\left(\frac{L}{2}\right)} = 2\frac{v'}{L}$$

$$\frac{ML^2}{12} + m\frac{L^2}{4} = \frac{ML^2}{12}\,\omega' + m v_p \frac{L}{2}$$

$$\omega\left(\frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{12}\right) = \frac{ML^{\cancel{2}}}{6\,\cancel{12}}\left(\frac{2v'}{\cancel{L}}\right) + \frac{M}{3}(v'+6)\frac{L}{2}$$

$$\omega\frac{ML^2}{6} = \frac{ML}{6}\left(v' + v' + 6\right)$$

$$\omega L = 2v' + 6 \Rightarrow v' = \frac{\omega L - 6}{2}$$

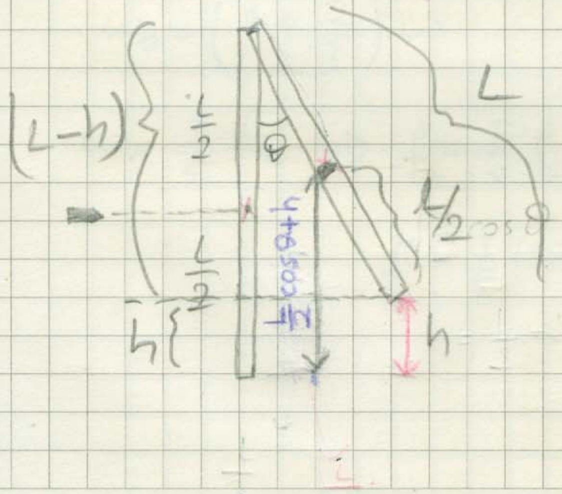
$$v' = \frac{(20)(0,8) - 6}{2} = 5\,m/s$$

$$v_p = v' + 6 = 5 + 6$$

$$\boxed{v_p = 11\,m/s}$$

Örnek. Uzunluğu L kütlesi M olan ince bir çubuk düşey olarak üst ucundan sürtünmesiz bir eksene takılıyor. Yatay yönde v hızı ile giden m kütleli bir parça cam macunu çubuğa kütle merkezinden çarpıyor ve yapışıyor. Çubuğun alt ucu ne kadar yükseğe salınacaktır?

Çözüm



$$\boxed{\cos\theta = \frac{L-h}{L}}$$

Açısal Momentumun Korunumundan;

$$mv\frac{L}{2} = I\omega \qquad I = I_{çubuk} + I_{macun}$$

$$I = \frac{1}{3}ML^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$\boxed{I = \left(\frac{4M+3m}{12}\right)L^2}$$

$$mv\frac{\cancel{L}}{2} = \left(\frac{4M+3m}{12}\right)L^{\cancel{2}}\omega$$

$$\omega = \frac{12mv}{2(4M+3m)L} = \frac{6mv}{(4M+3m)L}$$

Enerjinin Korunumundan;

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + (m+M)g\frac{L}{2} = (m+M)g\left(\frac{L}{2}\cos\theta + h\right) \quad ; \quad \boxed{\cos\theta = \frac{L-h}{L} \text{ bulunur}}$$

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + (m+M)\frac{L}{2}g = (m+M)\left(\frac{\cancel{L}}{2}\left(\frac{L-h}{\cancel{L}}\right)+h\right)g$$

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + (m+M)\frac{L}{2}g = (m+M)\left(\frac{L+h}{2}\right)g$$

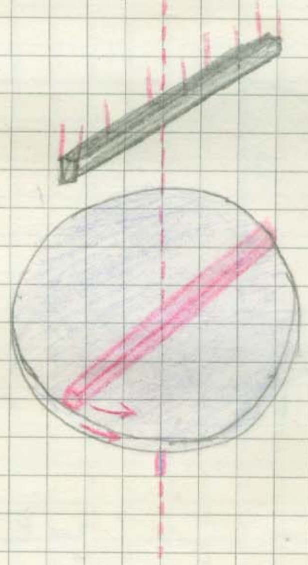
$$\frac{1}{2}\left(\frac{4M+3m}{12}\right)\cancel{L^2}\left(\frac{6^2m^2v^2}{(4M+3m)^2\cancel{L^2}}\right) + \cancel{(m+M)\frac{L}{2}g} = \cancel{(m+M)\frac{L}{2}g} + (m+M)\frac{h}{2}g$$

$$\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\left(\frac{4M+3m}{12}\right)\left(\frac{36m^2v^2}{(4M+3m)^2}\right) = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}(m+M)gh$$

$$\frac{1}{\cancel{12}}\cdot\frac{\cancel{36}m^2v^2}{\cancel{3}(m+\frac{4}{3}M)} = (m+M)gh$$

$$\boxed{h = \frac{m^2v^2}{(m+M)g\left(m+\frac{4}{3}M\right)}}$$

Örnek: Düzgün kütle dağılımına sahip bir disk sürtünmesiz bir mil etrafında 3,7 dev/s hızla dönüyor. Disk ile aynı kütleye sahip ve uzunluğu diskin çapına eşit durgun bir çubuk serbestçe dönen diskin üzerine düşüyor (şekildeki gibi). İki cisim kütle merkezleri çakışacak şekilde beraber dönüyor. Birleşik sistemin dev/s cinsinden açısal frekansı nedir?



Çözüm

$$I\omega_0 = (I + I_{çubuk})\,\omega$$

$$I\omega_0 = \left(I + \frac{1}{12}M(2R)^2\right)\omega$$

$$\frac{MR^2}{2}\omega_0 = \left(\frac{MR^2}{2} + \frac{1}{12}M4R^2\right)\omega$$

$$\omega_0 = \left(1 + \frac{2}{3}\right)\omega$$

$$\omega = \frac{3}{5}\omega_0 \Rightarrow f = \frac{3}{5}f_0$$

$$f = \frac{3}{5}(3,7) = 2,2\ \text{rad/s}$$