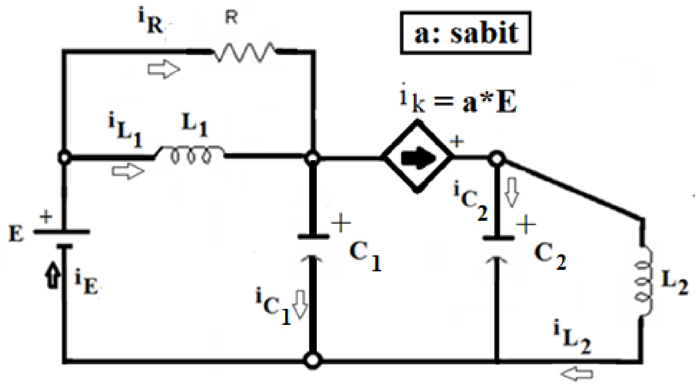
U.Arifoğlu, H.Hızarcı 08/01/2024

**SAÜ MÜH. FAK. ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ**
**DİFERANSİYEL DENKLEMLER FİNAL SINAV SORULARI**

**Soru 1)** Şekil 1'de verilen devrede, durum denklemlerini verilen parametreler cinsinden bulunuz.
**Not:** Durum değişken vektörünü [v1 v2 v3.. i1 i2 i3... ] sırasına göre oluşturunuz.

**(25 P / PÇ1)**




**Şekil 1**

**Soru 2)** Aşağıda verilen denklem sisteminin *tam çözümünü* x(0)=0 ve y(0)=0 ilk koşulları altında bulunuz.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2t + e^{2t} \\ t + 1 \end{bmatrix}$$

Not 1: Homojen çözümde katsayı vektörü içindeki sayıları tam sayı olacak şekilde seçiniz.
Not 2: Özel çözümde BKY yöntemini kullanırsanız, belirsizlik nedeni ile tahmin etmeniz gereken sabit olacaktır (denklem içinde). Bu durumda elinizdeki denklemde büyük olan katsayıyı 1/16 alınız.

**(25 P / PÇ2)**

**Soru 3)** $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = e^{-t}$ ve $x'(0) = 5$ , $x(0) = 4$ diferansiyel denkleminin tam çözümünü *"Laplace yöntemini"* kullanarak bulunuz.

**(25 P / PÇ3)**

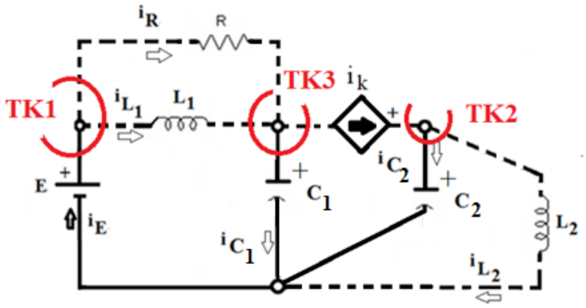
**Soru 4)** $x^2 * y'' + 2 * x * y' - x^2 * y = 0$
diferansiyel denkleminin genel çözümünü *seri yaklaşımı* ile bulunuz.

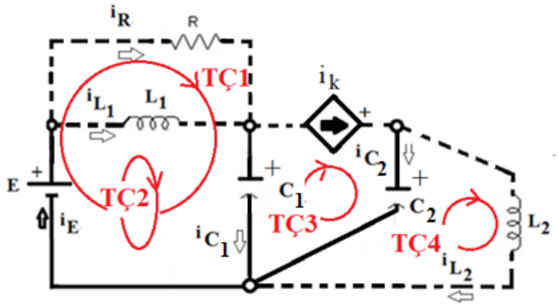
**(25 P / PÇ3)**

**Süre 110 dakikadır.**
*Yalnızca formül barındıran* 2 yapraklık hatırlatma kağıdı serbesttir. Kitap vb. dokümanların kullanılması yasaktır. Soru kağıtları öğrencide kalacaktır. Çözümler SABİS sisteminde ilan edilecektir.

Başarılar dileriz. UA-HH

## Çözüm 1)




$TK_1 : i_E - i_R - i_{L1} = 0$ $\qquad$ $TÇ_1 : \ v_R + v_{C1} - E = 0$

$TK_2 : i_{L2} + i_{C2} - i_k = 0$ $\qquad$ $TÇ_2 : \ v_{L1} - E + v_{C1} = 0$

$TK_3 : i_R + i_{L1} - i_k - i_{C1} = 0$ $\qquad$ $TÇ_3 : - v_k - v_{C1} + v_{C2} = 0$

$TÇ_4 : - v_{L2} + v_{C2} = 0$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}[E]$$

$$\frac{dv_{C1}(t)}{dt} = \frac{i_{C1}}{C1} = \frac{i_R + i_{L1} - i_k}{C1} = \frac{G*v_R + i_{L1} - a*E}{C1} = \frac{G*(E - v_{C1}) + i_{L1} - a*E}{C1} = -\frac{G*v_{C1}}{C1} + \frac{(G-a)*E}{C1} + \frac{i_{L1}}{C1}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R*C1} & 0 & \frac{1}{C1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{G-a}{C1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}[E]$$

$$\frac{dv_{C2}(t)}{dt} = \frac{i_{C2}}{C2} = \frac{-i_{L2} + i_k}{C2} = \frac{-i_{L2} + a*E}{C2} = \frac{a*E}{C2} - \frac{i_{L2}}{C2}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R*C1} & 0 & \frac{1}{C1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{G-a}{C1} \\ \frac{a}{C2} \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}[E]$$

$$\frac{di_{L1}(t)}{dt} = \frac{v_{L1}}{L1} = \frac{E - v_{C1}}{L1}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R*C1} & 0 & \frac{1}{C1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C2} \\ \frac{-1}{L1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{G-a}{C1} \\ \frac{a}{C2} \\ \frac{1}{L1} \end{bmatrix} [E]$$

$$\frac{di_{L2}(t)}{dt} = \frac{v_{L2}}{L2} = \frac{v_{C2}}{L2}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R*C1} & 0 & \frac{1}{C1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C2} \\ \frac{-1}{L1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{G-a}{C1} \\ \frac{a}{C2} \\ \frac{1}{L1} \\ 0 \end{bmatrix} [E]$$ (her bir satır 6.25 puan)

**Çözüm 2)**

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2t + e^{2t} \\ t+1 \end{bmatrix}$$

$\det(\alpha I - A) = \alpha^2 - 4 = (\alpha - 2)(\alpha + 2) = 0; \quad \alpha_1 = 2; \quad \alpha_2 = -2$

<u>Homojen çözüm:</u>

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ M \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} N \\ R \end{bmatrix} e^{-2t}$; ifadesi çözüm sağ tarafsız denklemde yerine yazılırsa;

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_h = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-2t}$ (*) (10 puan)

elde edilir. (*) ifadesinin açık formu aşağıda verilmiştir:

$$x = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t}$$

$$y = C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{-2t}$$

*<u>Genel çözüm</u>* ve sonrasında *<u>tam çözüm</u>* hem *BKY* hem de *LSD* yöntemi ile *<u>ayrı ayrı</u>* çözülecektir.

**a)** *BKY* ile çözüm

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} t * e^{2t} + \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} G \\ H \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2Ate^{2t} + Ae^{2t} + 2Ce^{2t} + E \\ 2Bte^{2t} + Be^{2t} + 2De^{2t} + F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ate^{2t} + Ce^{2t} + Et + G \\ Bte^{2t} + De^{2t} + Ft + H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2t + e^{2t} \\ t+1 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki matris denkleminden aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$2A = A + B$ (1) $\rightarrow A = B$

$A + 2C = C + D + 1$ (2) $\rightarrow A = -C + D + 1$

$0 = E + F + 2 \quad (3) \quad \rightarrow E + F = -2$

$E = G + H \quad (4) \quad \rightarrow E = G + H$

$2B = 3A - B \quad (5) \quad \rightarrow B = A$

$B + 2D = 3C - D \quad (6) \quad \rightarrow B = 3C - 3D$

$0 = 3E - F + 1 \quad (7) \quad \rightarrow F = 1 + 3E$

$F = 3G - H + 1 \quad (8) \quad \rightarrow F = 3G - H + 1$

Yukarıda elde edilen 8 adet denklemden (2) ve (6) lineer bağımlıdır. (1) numaralı eşitlikten A ifadesi B cinsinden (2) ve (6) numaralı eşitliklerde yerine yazılırsa;

$C - D = 1/4$ denklemi elde edilir. Buradan $A = B = 3/4$ bulunur. (3) ve (7)'den $E = -3/4$ ve $F = -5/4$ bulunur. (4) ve (8)'den $G = -3/4$ ve $H = 0$ bulunur. Not 2'ye göre $C - D = 1/4$ eşitliğinde büyük olan katsayısı 1/16 olarak alınırsa $C = 1/16$ ve $D = -3/16$ olarak elde edilir.

Yukarıdaki sonuçlara göre BKY yönteminde <u>*genel çözüm*</u> aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}_g = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} 3/4 \\ 3/4 \end{bmatrix} t * e^{2t} + \begin{bmatrix} 1/16 \\ -3/16 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} -3/4 \\ -5/4 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -3/4 \\ 0 \end{bmatrix}$$ (10 puan)

$C_1$ ve $C_2$ sabitlerini bulmak için soruda verilen ilk koşullar kullanıldığında aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{0} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{0} + \begin{bmatrix} 3/4 \\ 3/4 \end{bmatrix} 0 * e^{0} + \begin{bmatrix} 1/16 \\ -3/16 \end{bmatrix} e^{0} + \begin{bmatrix} -3/4 \\ -5/4 \end{bmatrix} 0 + \begin{bmatrix} -3/4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki eşitliklerden $C_1 = 9/16$ ve $C_2 = -1/8$ elde edilir. Buna göre *tam çözüm* aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 5/8 \\ 3/8 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} 1/8 \\ -3/8 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} 3/4 \\ 3/4 \end{bmatrix} t * e^{2t} + \begin{bmatrix} -3/4 \\ -5/4 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -3/4 \\ 0 \end{bmatrix}$$ (5 puan)

**b)** *LSD* ile çözüm;

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_h = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

$$x_h = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t}$$

$$y_h = C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{-2t}$$

Yukarıda verilen homojen çözüme ilişkin denklemlere LSD uygulandığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$C_1' e^{2t} - C_2' e^{-2t} = 2t + e^{2t} \quad (1)$

$C_1' e^{2t} + 3C_2' e^{-2t} = t + 1 \quad (2)$

(1) eşitliği - ile çarpılarak (2) eşitliği ile taraf tarafa toplanırsa;

$4C_2'e^{-2t} = -t - e^{2t} + 1$

$C_2' = -\frac{1}{4}te^{2t} - \frac{1}{4}e^{4t} + \frac{1}{4}e^{2t}$ (3)

$C_2(t) = -\frac{1}{8}te^{2t} - \frac{1}{16}e^{4t} + \frac{3}{16}e^{2t} + C2$ (4)

elde edilir. (3) eşitliği (2) eşitliğinde kullanılırsa;

$C_1' = \frac{7}{4}te^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{3}{4}$

$C_1(t) = -\frac{7}{8}te^{-2t} - \frac{9}{16}e^{-2t} + \frac{3}{4}t + C1$ (5)

(4) ve (5) eşitlikleri;

$x_h = C_1e^{2t} - C_2e^{-2t}$

$y_h = C_1e^{2t} + 3C_2e^{-2t}$

eşitliklerinde yerlerine yazılırsa;

$x_g = C_1e^{2t} - C_2\,e^{-2t} + \frac{3}{4}te^{2t} + \frac{1}{16}e^{2t} - \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}$ (genel çözüm)

$y_g = C_1e^{2t} + 3C_2e^{-2t} + \frac{3}{4}te^{2t} - \frac{3}{16}e^{2t} - \frac{5}{4}t$

$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}_g = C_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{2t} + C_2\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}e^{-2t} + \begin{bmatrix} 3/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}t * e^{2t} + \begin{bmatrix} 1/16 \\ -3/16 \end{bmatrix}e^{2t} + \begin{bmatrix} -3/4 \\ -5/4 \end{bmatrix}t + \begin{bmatrix} -3/4 \\ 0 \end{bmatrix}$ (10 puan)

$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = C_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^0 + C_2\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}e^0 + \begin{bmatrix} 3/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}0 * e^0 + \begin{bmatrix} 1/16 \\ -3/16 \end{bmatrix}e^0 + \begin{bmatrix} -3/4 \\ -5/4 \end{bmatrix}0 + \begin{bmatrix} -3/4 \\ 0 \end{bmatrix}$

$C_1 = 9/16$ ve $C_2 = -1/8$ bulunur. Bu iki sabit genel çözümde yerine konulursa;

$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 5/8 \\ 3/8 \end{bmatrix}e^{2t} + \begin{bmatrix} 1/8 \\ -3/8 \end{bmatrix}e^{-2t} + \begin{bmatrix} 3/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}t * e^{2t} + \begin{bmatrix} -3/4 \\ -5/4 \end{bmatrix}t + \begin{bmatrix} -3/4 \\ 0 \end{bmatrix}$ (*) (5 puan)

elde edilir. *BKY* ile bulunan sonuç aşağıda verilmiştir:

$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 5/8 \\ 3/8 \end{bmatrix}e^{2t} + \begin{bmatrix} 1/8 \\ -3/8 \end{bmatrix}e^{-2t} + \begin{bmatrix} 3/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}t * e^{2t} + \begin{bmatrix} -3/4 \\ -5/4 \end{bmatrix}t + \begin{bmatrix} -3/4 \\ 0 \end{bmatrix}$ (**)

(*) ve (**) ifadeleri karşılaştırıldığında, *LSD* ile *BKY* ile elde edilen *tam çözümlerinin* ***örtüştüğü*** görülmektedir.

**Çözüm 3)**

$x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = e^{-t}$ ve $x'(0) = 5$ , $x(0) = 4$

$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$

$\mathcal{L}\{x'(t)\} = sX(s) - x(0) = sX(s) - 4$

$$\mathcal{L}\{x''(t)\} = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) - 4s - 5$$

$$s^2X(s) - 4s - 5 + 3(sX(s) - 4) + 2X(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$X(s)(s^2 + 3s + 2) = \frac{1}{s+1} + 4s + 17 \rightarrow X(s) = \frac{\frac{1}{s+1} + 4s + 17}{s^2 + 3s + 2} = \frac{4s^2 + 21s + 18}{(s+2)(s+1)^2}$$

$$X(s) = \frac{4s^2 + 21s + 18}{(s+2)(s+1)} = \frac{A}{(s+2)} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)}$$

$A = -8$ ; $B = 1$ ; $C = 12$

$$X(s) = -\frac{8}{(s+2)} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{12}{(s+1)}$$ (10 puan)

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8}{(s+2)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{12}{(s+1)}\right\}$$

$$x(t) = -8e^{-2t} + te^{-t} + 12e^{-t}$$ (15 puan)

**Çözüm 4)**

$$x^2 * y'' + 2 * x * y' - x^2 * y = 0$$

$$y'' + \frac{2}{x} * y' - \frac{x^2}{x^2} y = 0 \qquad (1)$$

diferansiyel denkleminin düzgün tekil noktasının bulunması için 3 adımlı test uygulanır. $P_o(x) = x$ ifadesini sıfır yapan kök değeri olan $x = 0$ için (1)'de gösterildiği gibi $R_1(x) = 2$ ve $R_2(x) = -x^2$ fonksiyonlarının tanımlı olduğu görülecektir. $x = 0$'da düzgün tekil noktaya sahip olan diferansiyel denklemin seri yöntemi ile çözülebilmesi mümkündür. (5 puan)

Verilen denklem değişken katsayılı bir diferansiyel denklem olduğundan çözümde (2) eşitliği kullanılacaktır. (2) eşitliğinin 1. ve 2. türevleri sırasıyla (3) ve (4)'teki gibidir.

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+m} \qquad (2)$$

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+m) a_k x^{k+m-1} \qquad (3)$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+m)(k+m-1) a_k x^{k+m-2} \qquad (4)$$

(2-4) eşitlikleri verilen diferansiyel denklemde yerine yazılırsa:

$$x^2\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)(k+m-1)a_k x^{k+m-2}\right) + 2 * x\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)a_k x^{k+m-1}\right) - x^2\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+m}\right) = 0$$

Yukarıdaki ifade düzenlenirse:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)(k+m-1)a_k x^{k+m} + \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+m)a_k x^{k+m} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+m+2} = 0$$

$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+m)(k+m-1)+2(k+m)]a_k x^{k+m} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+m+2} = 0$

$x^{k+m+2}$'li ifade $x^{k+m}$'li ifade cinsinden yazılırsa:

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+m+2} = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k+m}$

$\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)(k+m+1)a_k x^{k+m} - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k+m} = 0$ elde edilir.

$\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)(k+m+1)a_k x^{k+m}$ ifadesi $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k$ formunda yazılırsa:

$\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)(k+m+1)a_k x^{k+m} = (m)(m+1)a_0 x^m + (m+1)(m+2)a_1 x^{m+1} + \sum_{k=2}^{\infty}(k+m)(k+m+1)a_k x^{k+m}$

$(m)(m+1)a_0 x^m + (m+1)(m+2)a_1 x^{m+1} + \sum_{k=2}^{\infty}[(k+m)(k+m+1)a_k - a_{k-2}]x^{k+m} = 0$

elde edilir.

$(m)(m+1)a_0 = 0 \rightarrow (a_0 \neq 0)$ (*) (2.5 puan) *(karakteristik denklem-indis denklemi)*

$(m+1)(m+2)a_1 = 0 \rightarrow (a_1 = 0)$ (**) (2.5 puan)

2 tane kök olması gerektiğine göre yukarıdaki 2 eşitlikten ancak bir tanesi sağlanmak zorundadır. İlk indis "0" olduğundan ve diğer tüm indisler $a_0$'a göre yazılacağından $a_1 = 0$ olmalıdır.

$(k+m)(k+m+1)a_k - a_{k-2} = 0$ (***) (5 puan) *(indirgeme bağıntısı)*

(*) eşitliğinden $m_1 = 0, m_2 = -1$ bulunur. Kökler birbirinden farklı ve iki kökün arasındaki fark tam sayıdır. Bu tür kök ilişkisinde önce birinci özel çözümde büyük olan kök ($m_1$) kullanılarak $y_1(x)$ bulunur.

(***) ifadesinden faydalanarak katsayılar arasındaki ilişki bulunur.

$$a_k = \frac{1}{(k+m)(k+m+1)} a_{k-2} \quad k = 2,3,4,\ldots$$

$$a_2 = \frac{1}{(m+2)(m+3)} a_0 \quad ;$$

$$a_3 = \frac{1}{(m+3)(m+4)} a_1 = 0$$

$$a_4 = \frac{1}{(m+4)(m+5)} a_2 = \frac{1}{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)} a_0$$

$$a_5 = \frac{1}{(m+5)(m+6)} a_3 = 0$$

$$a_6 = \frac{1}{(m+6)(m+7)} a_4 = \frac{1}{(m+2)(m+3)} \frac{1}{(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)} a_0 \quad ;$$

$$\bar{y}(x) = x^m a_0 \left(1 + \frac{1}{(m+2)(m+3)} x^2 + \frac{1}{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)} x^4 + \frac{1}{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)} x^6 + \cdots\right) \qquad (****)$$

Birinci özel çözüm $y_1(x)$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$y_1(x) = \bar{y}(x)|_{m=0} = a_0\left(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} + \cdots\right) \qquad \text{(5 puan)}$$

İkinci özel çözüm aynı yöntemle bulunmak istenildiğinde, $y_1(x)$ eşitliğinde $m_2 = -1$ kökü için *hiç bir ifadenin paydası sıfır olmadığından belirsizlik yoktur*. Bu nedenle $y_2(x)$ eşitliği (****) ifadesinde $m = -1$ yazarak elde edilebilir:

$$\bar{y}(x) = x^{-1}a_0\left(1 + \frac{1}{1*2}x^2 + \frac{1}{1*2*3*4}x^4 + \frac{1}{1*2*3*4*5*6}x^6 + \cdots\right) \quad \text{(5 puan)}$$

$$y_2(x) = \bar{y}(x)|_{m=-1} = a_0\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^5}{6!} + \cdots\right)$$

Problemde verilen diferansiyel denkleme ilişkin genel çözüm;

$$\bar{y} = y_g = C_1 * y_1(x) + C_2 * y_2(x)$$

olarak elde edilir.