

SAÜ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
METALURJİ VE MALZEME MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERENSİYEL DENKLEMLER DERSİ ARASINAVI

İSLEM YAPILMADAN VERİLEN CEVAPLAR DİKKATE ALINMAYACAKTIR.

1. $y = c_1x^2 + c_2x^{-2}$ eğri ailesini çözüm kabul eden en düşük basamaktan diferensiyel denklemi bulunuz ve bulduğunuz denklemin mertebe, derece ve lineerliğini belirtiniz. (Denklemi en sade şekilde yazınız.)
2. $y' = \frac{y}{x} \left(1 + \ln \frac{y}{x} \right)$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.
3. $y = xp + p^3$ ($p = y'$) denkleminin genel çözümünü ve varsa aykırı çözümünü bulunuz.
4. $y''' + 5y'' + 7y' - 13y = x^2e^x + e^{-3x} \sin 2x + x$ denklemi veriliyor.
 - a) Bu denkleme ilişkin homojen kısma ait y_h çözümünü elde ediniz. (15)
 - b) Belirsiz katsayılar yöntemi yardımıyla y_p özel çözümünün nasıl seçilmesi gerektiğini belirtiniz. (Katsayıları bulmaya çalışmayınız.) (10)

SÜRE: 80 DAKİKADIR.

BAŞARILAR DİLERİZ

$$1) y = c_1 x^2 + c_2 x^{-2} \quad (1)$$

$$y' = 2c_1 x - 2c_2 x^{-3} \quad (2)$$

$$y'' = 2c_1 + 6c_2 x^{-4} \quad (3)$$

(2) ve (3) ten

$$c_2 x^{-2} = \frac{x^2 y'' - x y'}{8}$$

olup

ve

$$c_1 x^2 = \frac{x^2 y'' + 3x y'}{8}$$

(1) de yerlerine yazılırlarsa

$$x^2 y'' + x y' - 4y = 0$$

denklemi elde edilir.

Bu denklem 2. mrt, 1. drc ve lineer bir denk. dir.

$$2) y' = \frac{y}{x} \left(1 + \ln \frac{y}{x} \right) \quad \text{Homojen}$$

$$y = vx$$

$$y' = v'x + v$$

$$\text{ile } v'x = v \ln v \text{ olup}$$

$$\text{buradan } \frac{dv}{v \ln v} = \frac{dx}{x} \quad \text{denklemi elde edilir.}$$

$$\text{Integral yardımıyla } \ln(\ln v) = \ln cx$$

$$\Rightarrow \ln v = cx \Rightarrow \boxed{v = e^{cx}}$$

$$\text{elde edilir. } v = \frac{y}{x} \text{ yerine yazılırsa}$$

genel cözümi elde edilir.

$$\boxed{y = x e^{cx}}$$

3) $y = xp + p^3$ Clairaut
 x' e göre türev alınırsa

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + 3p^2 \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx} (x + 3p^2) = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c \Rightarrow \boxed{y = cx + c^3} \quad \begin{array}{l} \text{Genel} \\ \text{Çözüm} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = xp + p^3 \\ x + 3p^2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{4x^3 + 27y^2 = 0} \quad \begin{array}{l} \text{Aykırı} \\ \text{Çözüm} \end{array}$$

4) $y''' + 5y'' + 7y' - 13y = x^2 e^x + e^{-3x} \sin 2x + x$

a) $y''' + 5y'' + 7y' - 13y = 0 \quad r^3 + 5r^2 + 7r - 13 = 0$

$$(r^2 + 6r + 13)(r - 1) = 0 \Rightarrow r_1 = 1 \quad r_{2,3} = -3 \pm 2i$$

$$\{ e^x, e^{-3x} \cos 2x, e^{-3x} \sin 2x \}$$

$$\boxed{y_h = C_1 e^x + e^{-3x} (C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x)}$$

b) $y_p = x(Ax^2 + Bx + C)e^x + x e^{-3x} (D \cos 2x + E \sin 2x) + Fx + G$