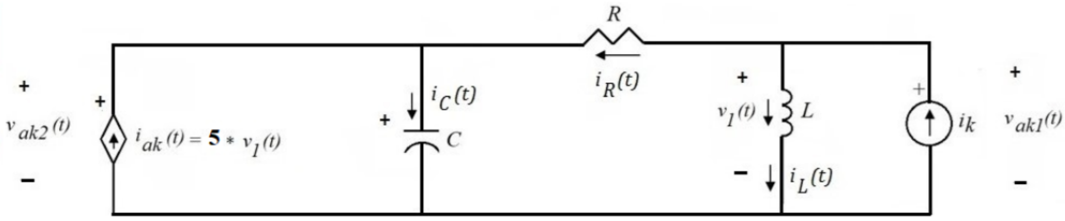
U. Arifoğlu – K. Kalaycı 06/01/2025

SAÜ MÜH. FAK. ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERANSİYEL DENKLEMLER
FİNAL SINAV SORULARI

Soru 1)



Şekil 1

Şekil 1'de verilen devreye ilişkin durum denklemlerini uygun ağaç seçerek elde ediniz. **(25 puan / PÇ1)**

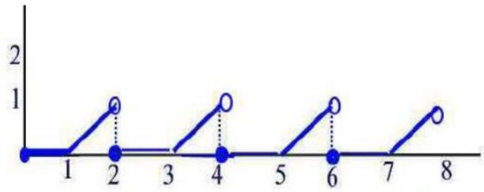
Soru 2) Aşağıda verilen diferansiyel denklem sisteminin;

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2u(t) \\ u(t) - e^t \end{bmatrix} \quad i(0) = 1 \; ve \; v(0) = -2$$

a) *Genel çözümünü* bulunuz **(20 puan)**
b) *Tam çözümünü* bulunuz. **(5 puan)**

Not: Belirsiz katsayılar yöntemi ile çözüm yapılacak ise bağımlı katsayılardan küçük olanı $1/5$ olarak alınız. Katsayıları **kesirli** olarak bırakınız (ör: 5/3 gibi). Homojen, genel ve tam çözüm **matrisel** formda yazılacaktır. Homojen ve genel çözümdeki C sabitleri vektör matrisin dışına yazılacaktır. Homojen çözümdeki sayısal değerleri tam sayı olacak şekilde seçiniz. Örneğin; C1*[1;1/5] yerine C1*[5;1] alınız. Eigen vektöründe kesirli sayı tercih etmeyiniz. **Önemli not:** Çözümlerde *aynı fonksiyon tipi* için *tek vektör matris* kullanılacaktır. Sadeleştirmeler tarafınızdan yapılacak ve aksi durumda ilgili çözümden *not verilmeyecektir*. Kitapta çözümler nasıl verildiyse siz de çözümleri bu şekilde vermeniz gerekmektedir.

Soru 3) **a)** Aşağıda gösterilen F(t) fonksiyonunun *Laplace dönüşümünü* alarak f(s) fonksiyonunu bulunuz. **(15 puan)**



b) $F(t) = e^{-4}e^{2t}u(t-2)$ fonksiyonunun *Laplace dönüşümünü* bulunuz. **(10 puan)**

Not: *a şıkkında fonksiyonun periyodik olduğu görülmelidir.*

Soru 4) $(1 + x^2) * y^{(2)}(x) + x * y'(x) - 2 * y(x) = 0$ **(25 puan / PÇ4)**

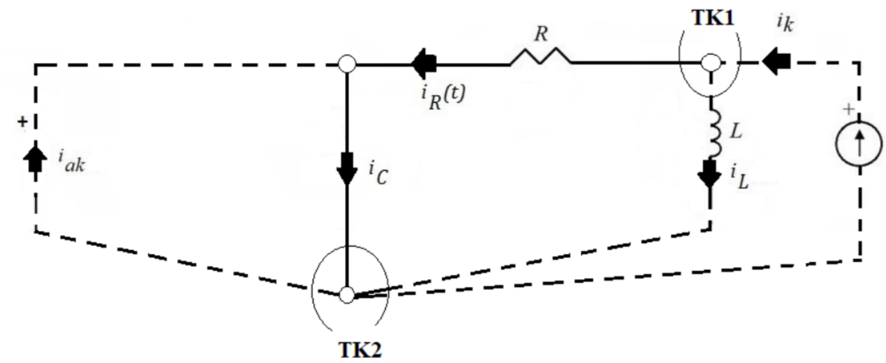
yukarıdaki denklemin *genel çözümünü seri açılımı* (Frobenius) yöntemi bulunuz. $y(x=0) = 1$; $y'(x=0) = 1$ olduğuna göre $y(x)$ ifadesinin seri açılımındaki *ilk 5 terimin toplamını* $x = 2$ değeri için bulunuz.

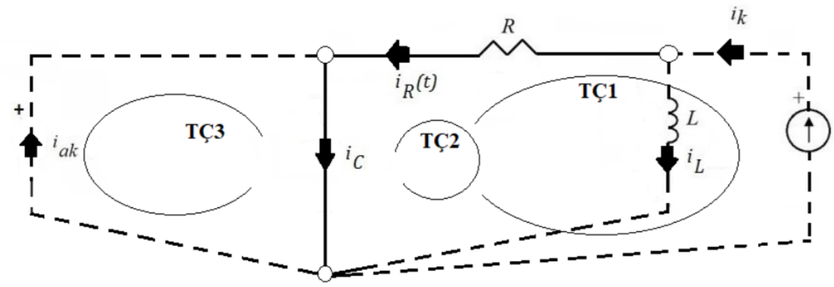
Süre 110 dakikadır.
Yalnızca *formül barındıran* 2 yapraklık hatırlatma kâğıdı serbesttir. Kitap vb. dokümanların kullanılması yasaktır. Hatırlatma kağıdında *konu anlatımı* bulunamaz. ***Hatırlatma kâğıdı sınav sonunda görevliye teslim edilecektir***. Kurala uymayan kâğıt kopya muamelesi görecektir. Soru kağıtları öğrencide kalacaktır. Çözümler SABİS sisteminde ilan edilecektir.

Başarılar dileriz...

ÇÖZÜMLER

Çözüm 1)





TK1: $i_k - i_L - i_R = 0$

TK2: $i_C + i_L = i_k + i_{ak}$

TÇ1: $v_k - v_R - v_C = 0$

TÇ2 : $v_L - v_C - v_R = 0$

TÇ3 : $v_{ak} - v_C = 0$

Problemde verilen devreye ilişkin durum denklemi aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .. & .. \\ .. & .. \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} .. \\ .. \end{bmatrix} i_k(t)$$

Yukarıda verilen 5 adet eşitlikten aşağıdaki denklem üretilir:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{i_C}{C} = \frac{i_k + i_{ak} - i_L}{C} = \frac{i_k + 5 * v_1 - i_L}{C} = \frac{i_k + 5 * v_L - i_L}{C} = \frac{i_k + 5*(v_C + v_R) - i_L}{C} = \frac{i_k + 5*(v_C + R * i_R) - i_L}{C}$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{i_k + 5*(v_C + R * i_R) - i_L}{C} = \frac{i_k + 5*(v_C + R*(i_k - i_L)) - i_L}{C} = \frac{i_k(5*R+1) + 5*v_C - i_L*(5*R+1)}{C}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{C} & -\frac{5*R+1}{C} \\ .. & .. \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5*R+1}{C} \\ .. \end{bmatrix} i_k(t)$$ elde edilir.

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{v_L}{L} = \frac{v_C + v_R}{L} = \frac{v_C + R*i_R}{L} = \frac{v_C + R*(i_k - i_L)}{L}$$

Son ifade durum denklemine yerleştirilirse devreye ilişkin durum denklemi;

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{C} & -\frac{5*R+1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5*R+1}{C} \\ \frac{R}{L} \end{bmatrix} i_k(t)$$

olarak elde edilir. (Her satır 12.5 puan)

Çözüm 2)

a) Eigen denklem kökleri: $\det(A - \alpha I) = \begin{vmatrix} 3-\alpha & -1 \\ -6 & 2-\alpha \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 5$ kökler reel ve farklı

Not: Kökler yanlış hesaplanırsa bu soruya puan verilmez.

Homojen çözüm:

$\begin{bmatrix} i_h(t) \\ v_h(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} e^{5t}$; ifadesi çözüm sağ tarafsız denklemde yerine yazılırsa;

$$\frac{d}{dt}\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} e^{5t}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} e^{5t}\right)$$

Puanlama:

Belirsiz katsayılar yöntemi: kökler 5 puan, homojen 7.5 Puan, Özel 7.5 puan, Tam çözüm 5 puan
LSD yöntemi: kökler 5 puan, homojen 7.5 puan, genel çözüm 7.5 puan, tam çözüm 5 puan

<u>*Belirsiz katsayılar yöntemi ile çözüm:*</u>

Adım 1) Homojen çözüm $i_h(t) = A + Ce^{5t}$; $v_h(t) = -3A + 2Ce^{5t}$

$$i_h(t) = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} e^{5t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} A + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} C\, e^{5t}$$

Adım 2) $\begin{bmatrix} i_p(t) \\ v_p(t) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} K \\ M \end{bmatrix}}^{u(t)} + \overbrace{\begin{bmatrix} N \\ P \end{bmatrix}}^{e^t\ için} e^t$

Not: Özel çözüm tahmininde karakteristik denklemin bir kökü olan $\alpha_1 = 0$ değeri, problemde verilen iki kaynaktan birisi olan u(t) ifadesinde yer alan 0 sayısı ile aynı olduğuna dikkat edilmeli.

Adım 3) Özel çözüm diferansiyel denklem sisteminde yerine yazılırsa:

$$\frac{d}{dt}\left\{\begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} K \\ M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N \\ P \end{bmatrix} e^t\right\} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} K \\ M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N \\ P \end{bmatrix} e^t\right\} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$e^t \quad \rightarrow \begin{cases} N = 3N + P \\ P = 6N + 2P - 1 \end{cases}$$

$$t \quad \rightarrow \begin{cases} 0 = 3E + F \\ 0 = 6E + 2F \end{cases}$$

$$sabitler \rightarrow \begin{cases} E = 3K + M - 2 \\ F = 6K + 2M + 1 \end{cases}$$

$$-2N = P \rightarrow N = \frac{1}{4} \text{ ve } P = -\frac{1}{2}$$

$E = -1$ ve $F = 3$

$3K + M = 1 \quad \rightarrow K = \frac{1}{5}$ olacağı soruda verilmişti $\quad M = \frac{2}{5}$

Sabitler yerine yazıldığında özel çözüm:

$$\begin{bmatrix} i_p(t) \\ v_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} e^t$$

Adım 4) Genel çözüm: $\begin{bmatrix} i_g(t) \\ v_g(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_h(t) \\ v_h(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_p(t) \\ v_p(t) \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} i_g(t) \\ v_g(t) \end{bmatrix} = \overbrace{A\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + C\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{5t}}^{homojen} + \overbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} e^t}^{özel}$$

Adım 5) Tam çözüm:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + C\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{3}{5} \text{ ve } C = -\frac{1}{20}$$

$$\begin{bmatrix} i_T(t) \\ v_T(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{7}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{20} \\ -\frac{1}{10} \end{bmatrix} e^{5t} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} e^t$$

olarak elde edilir.

<u>*LSD yöntemi ile çözüm:*</u>

Adım 1) a) şıkkında *homojen* çözüm elde edildiği için burada aynı işlemler tekrar yapılmayacaktır.

$i_h = A + Ce^{5t}$ (1)

$v_h = -3A + 2Ce^{5t}$ (2)

Adım 2)

$A' + C'e^{5t} = -2$

$-3A' + 2C'e^{5t} = 1 - e^t$

$C' = -e^{-5t} - \frac{e^{-4t}}{5}$ ve $A' = \frac{e^{t}}{5} - 1$ elde edilir.

$A(t) = -t + \frac{e^{t}}{5} + A$ (3)

$C(t) = \frac{e^{-5t}}{5} + \frac{e^{-4t}}{20} + C$ (4)

Adım 3) $C(t)$ ve $A(t)$ homojen çözümde yerine yazılarak *genel çözüm* aşağıdaki gibi bulunur.

$$i_g(t) = A + Ce^{5t} = -t + \frac{e^{t}}{5} + A + \left(\frac{e^{-5t}}{5} + \frac{e^{-4t}}{20} + C\right) * e^{5t}$$

$$v_g(t) = -3A + 2Ce^{5t} = -3 * \left(-t + \frac{e^{t}}{5} + A\right) + 2 * \left(\frac{e^{-5t}}{5} + \frac{e^{-4t}}{20} + C\right) * e^{5t}$$

Yukarıdaki ifade düzenlenirse;

$$\begin{bmatrix} i_g(t) \\ v_g(t) \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + C\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}e^{5t} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}t + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}e^{t}$$

elde edilir. Genel çözümden tam çözüme geçiş a şıkkında anlatıldığından dolayı burada tekrar hesaplanmayacaktır.

3 a) f(t) eğrisinde T=2 periyot olduğundan;

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \le t < 1 \\ t-1 & ; \quad 1 \le t < 2 \end{cases}$$

$$f(s) = \frac{\int_0^T e^{-st}F(t)dt}{1 - e^{-sT}}$$

$$f(s) = \frac{\int_0^2 e^{-st} * F(t) * dt}{1 - e^{-2s}} = \frac{A(s)}{1 - e^{-2s}}$$

$$A(s) = \int_0^2 e^{-st}F(t)dt = \int_0^1 e^{-st}0dt + \int_1^2 e^{-st}(t-1)dt = \int_1^2 te^{-st}dt - \int_1^2 e^{-st}dt$$

$$A(s) = \left[-\frac{t}{s}e^{-st} - \frac{e^{-st}}{s^2} + \frac{e^{-st}}{s}\right]_1^2 = -\frac{e^{-s}}{s^2}[(1+s)e^{-s} - 1]$$

$$f(s) = \frac{A(s)}{1 - e^{-2s}} = -\frac{1}{1 - e^{-2s}}\left\{\frac{e^{-s}}{s^2}[(1+s)e^{-s} - 1]\right\} = \frac{e^{-s}}{s^2\left(1 - e^{-2s}\right)}[1 - (1+s)e^{-s}]$$ (15 puan)

veya $f(s) = \frac{e^{-s} - e^{-2s}(s+1)}{s^2(1 - e^{-2s})}$

b)

$F(t) = e^{-4}e^{2t}u(t-2) = e^{2(t-2)}u(t-2)$

$\mathcal{L}\{F(t-\tau)u(t-\tau)\} = e^{-s\tau}f(s) \rightarrow \mathcal{L}\{e^{2(t-2)}u(t-2)\} = e^{-2s}\mathcal{L}\{e^{2t}\}$

$\mathcal{L}\{e^{2(t-2)}u(t-2)\} = \frac{e^{-2s}}{s-2}$ (10 puan)

4)

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+m)a_k x^{k+m-1}$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+m)(k+m-1)a_k x^{k+m-2}$$

Yukarıdaki ifadeler soruda yerine konulduğunda aşağıdaki açılım elde edilir:

$\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)*(k+m-1)*a_k*x^{k+m-2} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+m)*(k+m-1)*a_k*x^{k+m} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+m)*(k+m-1)*a_k*x^{k+m-2} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+m)*(k+m-1)*a_k*x^{k+m} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+m)*a_k*x^{k+m} - 2*\sum_{k=0}^{\infty}a_k*x^{k+m} = 0$ (1)

(1) Eşitliği düzenlendiğinde;

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)(k+m-1)\,a_k\,x^{k+m-2}}_{(\mathrm{I})} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)(k+m-1)\,a_k\,x^{k+m}}_{(\mathrm{II})} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)\,a_k\,x^{k+m}}_{(\mathrm{III})} - \underbrace{2\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,x^{k+m}}_{(\mathrm{IV})} = 0 \quad (2)$$

ifadesi elde edilir. (2) eşitliğinden ***indirgeme*** bağıntısı olarak;

$(m)*(m-1)*a_0 + (m+1)*m*a_1 = 0$ (3) (***3 eşitliğinde indisler sıfır olamaz, zira bu durumda indis denklemi sıfır olacaktır***)

elde edilir. (3) eşitliğinden $m = 0$ bulunur (tek kök). **7 puan**

İndislerden birisi sıfırlanırsa, *genel çözümde* tek sabit kalır. Soru 2. mertebeden dif.denklem olduğundan *2 sabit içermelidir.*

(2) eşitliğine ilişkin ***indis denklemi*** ise aşağıdaki gibi olacaktır:

$$a_k = -\frac{(k+m-2)*(k+m-3)+k+m-4}{(k+m)*(k+m-1)} * a_{k-2} \qquad (k = 2,3,4,\ldots\ldots)$$ **8 puan**

$$a_2 = -\frac{(2+m-2)*(2+m-3)+2+m-4}{(2+m)*(2+m-1)} * a_0 = a_0$$

$$a_3 = -\frac{(3+m-2)*(3+m-3)+3+m-4}{(3+m)*(3+m-1)} * a_1 = \frac{a_1}{6}$$

$$a_4 = -\frac{(k+m-2)*(k+m-3)+k+m-4}{(k+m)*(k+m-1)} * a_2 = -\frac{1}{6} * a_2 = -\frac{1}{6} * a_0$$

$$a_5 = -\frac{(k+m-2)*(k+m-3)+k+m-4}{(k+m)*(k+m-1)} * a_3 = -\frac{a_1}{60}$$

$$y = a_0 * x^m + a_1 * x^{m+1} + a_2 * x^{m+2} + a_3 * x^{m+3} + a_4 * x^{m+4} + \cdots.$$

$$y(x) = a_0 + a_1 * x + a_0 * x^2 + \frac{a_1}{6} * x^3 - \frac{1}{6} * a_0 * x^4 + \cdots \ldots$$

$$y(x=0) = 1 \rightarrow a_0 = 1$$

$$y'(x=0) = 1 \rightarrow a_1 = 1$$

$$y_{ilk\_5}(x=2) = 1 + 1*2 + 1*4 + \frac{1}{6}*8 - \frac{1}{6}*16 = \mathbf{5.66}$$ **10 puan**

Sorunun çözümünün **matlab** kodları aşağıda verilmiştir:

```
clear all;clc
syms y(x) C1 C2
Dy=diff(y);
eqn = (1+x^2)*diff(y,2)+x*Dy-2*y == 0;
cond=[y(0)==1,Dy(0)==1];
y_x = dsolve(eqn,cond,'ExpansionPoint',0,'Order',5);
pretty(y_x)
disp('   ')
sonuc=vpa(subs(y_x,x,2))
```