SAKARYA ÜNİVERSİTESİ

Ayrık İşlemsel Yapılar

Hafta 6

Prof .Dr. Nilüfer YURTAY

Sayma ve Ayrık Olasılık

6.1 Sayma Teknikleri

Çoğu kombinasyonel problem sayma gerektirmektedir. Problemde ele alınması gereken obje sayısı genellikle çok fazla olduğundan, geçerli obje kümesini listelemeden bunların sayısını bulmamız istenir.

Pascal Üçgeni ve Binom Teoremi

Bazı problemlerde, verilen bir kümenin belli bir sayıda eleman içeren alt kümelerinin sayısı istenir.

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

n, kümedeki eleman sayısı, r alt kümedeki eleman sayısıdır. Örneğin sesli harflerin {a,e,i,o,u} olarak tanımlanan bir kümesinin iki elemanlı alt kümelerinin sayısı $C(5,2)\frac{5!}{2!3!}=\frac{5.4.3!}{2.1.3!}=10$ olarak bulunabilir.

Teorem

r ve n, 1≤r≤n olmak üzere tamsayılar ise C(n,r)=C(n-1,r-1)+C(n-1,r) dir.

n=0					**C(0,0)**					
n=1				**C(1,0)**		**C(1,1)**				
n=2			**C(2,0)**		**C(2,1)**		**C(2,2)**			
n=3		**C(3,0)**		**C(3,1)**		**C(3,2)**		**C(3,3)**		
n=4	**C(4,0)**		**C(4,1)**		**C(4,2)**		**C(4,3)**		**C(4,4)**	

üçgeni Pascal üçgeni olarak bilinir. Bu üçgeni yakından incelersek C(n,0)=C(n,n)=1 olduğundan her satırın ilk ve son elemanları 1'dir. Ayrıca Teorem 'e göre, her satırdaki ilk ve son olmayan elemanların dışındaki elemanlar, bir üst satırda kendine en yakın elemanların toplamına eşittir. Örneğin C(4,2)=C(3,1)+C(3,2) olacaktır. Sonuç olarak Pascal Üçgeni aşağıdaki gibi gösterilebilir.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

Teorem

r ve n, $1 \leq r \leq n$ olmak üzere tamsayılar ise C(n,r)=C(n,n-r) dir.

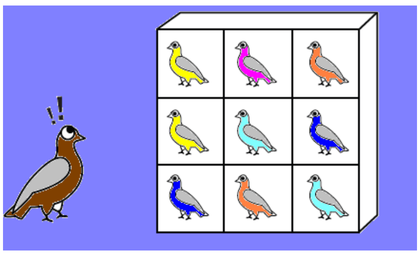
C(n,r) sayıları Binom sabitleri olarak adlandırılırlar. $(x+y)^n$ in açılımında bu sabitler $x^{n-r}y^r$ nin katsayılarıdır. Buna göre $(x+y)^n$ in katsayıları Pascal üçgeninde n.satırın katsayılarıdır.

Örneğin $(x+y)^3=(x+y)(x+y)^2=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ de olduğu gibi.

Pigeonhole Prensibi

İsmini güvercin yuvalarından alan bu prensibe göre yuva sayısından fazla güvercin varsa, ve bütün güvercinler bir yuvaya girecekse, en az bir yuvaya birden fazla güvercin girmek zorundadır. Bu ilke tam olarak şunu der: N ve k pozitif tamsayılar ve N > k olmak üzere N nesne k kutuya yerleştirildiğinde öyle bir kutu vardır ki o kutuda birden çok nesne bulunmak zorundadır. Bu doğru olmasaydı, yani her kutuda en fazla birer nesne olsaydı, k kutuda en fazla k nesne olabilecekti.

n ve m gibi iki doğal sayı için n > m durumunda, eğer n parça m güvercin deliğine koyulacaksa bir güvercin deliği birden fazla parça içermek zorudadır. Diğer bir söylem; m deliğe bir deliğe bir güvercin düşecek şekilde en fazla m güvercin yerleştirilebilir, bir tane daha yerleştirilmesi bir deliğin tekrar kullanılması ile olur.



Prensibi genelleştirirsek; eğer kn+1 veya daha fazla güvercin, n yuvaya konulacaksa, en az bir yuvada k dan fazla güvercin olacaktır. Örneğin bir binada 18 adet oturma salonu ve bu salonlara asılan bir ankete cevap alınacak olsun. Bu anket duyurusunu salonlara asmak için seçilen bir salondan 5 öğrencilik bir grup oluşturulacaktır. Ankete en az kaç kişi cevap vermelidir ki bir bir salon seçilip bu grup oluşturulabilsin. Pigeonhole prensibine göre, k=4 olur ve kn+1=4.18+1=73 cevabı elde edilir.

Örnek 6.1

15 evli çift içinden kaç kişi seçilmelidir ki, seçilenler içinde en az bir evli çift olsun ? Sorunun cevabı 16 kişidir.

Eğer n,m pozitif sayılar iken, m/n 'in tabanı, m/n'e eşit veya küçük en büyük tamsayısıdır ve m/n'in tavanı ise, m/n'eşit veya büyük olan en küçük tamsayısıdır. Örneğig 55/3 için taban 18 taban ise 19 dur.

Teorem

Eğer m güvercin n yuvaya yerleştirilirse, en az bir yuvadaki güvercin sayısı k'dan fazla olur, buradaki k=taban[(m-1)/n] dir.

Eğer, $m=p_1+p_2+p_3+....+p_n-n+1$ (her p_i bir pozitif tamsayı) güvercin, n adet yuvaya yerleştirilecekse, ilk yuvada en az p_1 adet güvercin veya ikincide en az p_2 adet güvercin .....veye n.cisinde p_n adet güvercin bulunur.

Bir çantada 6 kırmızı, 5 beyaz ve 7 mavi top vardır. Seçilen toplar içinden ya en az 3 kırmızı veya en az 4 beyaz veya en az 5 mavi top olması için kaç top seçilmelidir. Burada n=3, p1=3,p2=4 ve p3=5 dir. Buradan da m=(3+4+5)-3+1=10 olarak bulunur.

Teorem

X={1,2,3,...,2n} ve X'in (n-1) elemanlı alt kümesi S verilsin. S de birbirini bölen en az iki sayı vardır.

Teorem

(n^2+1) farklı sayının herhangi sekansı, ya artan ya da azalan sırada olan en az (n+1) elemanlı bir alt sekans içerir.

8,11,9,1,4,6,12,10,5,7 dizisi için yukarıdaki teoremi uygulayalım:

Dizide 10 tane eleman olduğundan $10=3^2+1$ dir (n=3). 1,4,6,12; 1,4,6,7; ve 1,4,5,7 dört elemanlı alt dizilerdir.

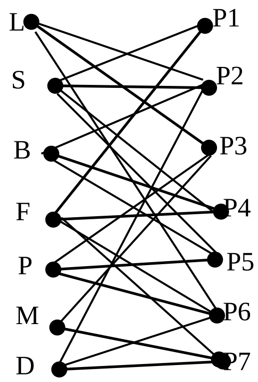
Çarpma Prensibi

Bir prosedürün ardışık k adımdan oluştuğunu varsayalım. Birinci adım n_1 farklı yol, ikinci adım n_2 farklı yolla yapılabilsin. Tüm prosedür, $n_1.n_2......n_i......n_k$ adet farklı yolla yapılabilir.

Örnek 6.2

Bir Japon arabası 6 farklı renkte, 3 farklı motorla, otomatik veya manuel vitesle araba üretilebiliyor. Kaç farklı model araba olabilir ? k=3 n1= 6 n2=3 ve n3=2 olduğuna göre 6.3.2=36 farklı model olacaktır.

Libya : P2 , P3 , P6
Suriye : P1 , P2 , P4 , P5
Brezilya: P2 , P4 , P5
Fransa : P1 , P4 , P6 , P7
Peru : P3 , P5 , P6
Macaristan : P3 , P7
Danimarka : P2 , P6 , P7



Şimdi uçuş problemine geri dönelim. Birinci uçuşu ele alalım. 7 pilot içinden birini seçebiliriz. Yani 7 olasılık vardır. Bunların içinden bir tanesini seçip , ikinci uçuşa geçtiğimizde 6 farklı seçeneğiniz kalacaktır. Bu şekilde devam edersek olası eşlemelerin sayısı 7.6.5.4.3.2.1 olacaktır. Demek ki n adet uçuş ve n adet pilot varsa eşleme sayısı n!=n.(n-1)(n-2)...3.2.1 adettir. Bu işleme permütasyon adını vermekteyiz. n adet objenin farklı biçimde sıralanması işlemine , permütasyon diyoruz. n objenin içinden r objenin tekrarlanmadan seçilebilme sayısı n objenin r adet permütasyonu olup ,

P(n,r) = n !/(n-r) ! olacaktır.

Örneğin 7 uçuştan 2 si iptal edilmesi durumunda olası görevlendirme sayısı;

P(7,5) = 7.6.5.4.3 olacaktır.

Problemin çözümünün gerçekleştirilebilmesini tekrar ele alırsak , 7 uçuş için 7 pilot 7! = 5040 farklı biçimde görevlendirilebilir. Eğer bilgisayar kullanıyorsak, önerilen çözüm yöntemi, yani permütasyonları oluşturup değerlendirme işlemi için bir algoritma geliştirilip programlanabilir. Burada 7 uçuş ve 7 pilot örneğine bakarsak gerçeğe göre çok küçük sayılar olup, örneğin Chicago havaalanına günde 1100 uçuş yapılmaktadır. Sadece 20 uçuş ve 20 pilot alsak 20!= $2.4.10^{18}$ olup bilgisayar gerekmektedir. Varsayalım ki bilgisayar saniyede 10^6 atama yapabilsin ve kaç pilotun isteğine uygun olduğunu kontrol edebilsin. Tüm olası çözümler için bilgisayarın çalışma süresi ;

$2.4.10^{18}/10^{6}=2.4.10^{12}$s= 4. 10^{10} dak= $6.7.10^{8}$ saat=$2.8.10^{7}$gün =$7.6.10^{4}$ yıl

Görülüyor ki bilgisayar kullansak bile çok daha akıllı bir hesaplama yöntemi bulmalıyız. İleriki bölümlerde eşleme problemini çok daha etkin yöntemle çözeceğiz.

Toplama Prensibi

Eleman sayıları $n_1,n_2,...,n_k$ olan k adet küme olsun. Eğer bu kümelerin elemanları ayık ise, yani hiçbir kümenin başka küme ile ortak elemanı yoksa, bu kümelerin birleşimleri ile oluşan kümenin eleman sayısı $n_1+n_2+...+n_k$ dır.

Örnek 6.3

A={1,2,3}, B={4,5,6,7} olsun. A ve B kümelerinin elemanları ortak değil, yani $A\cap B=\emptyset$ dir. O halde $|A\cup B|=|A|+|B|=7$ dir.

Örnek 6.4

1 ile 100 arasında çift veya 5 ile biten kaç sayı olduğunu araştıralım. 1-100 arasında 50 çift sayı vardır. 5 ile biten tüm sayılar tek sayı olup bunlar 15,25,35,45,55,65,75,85,95 olup 10 tanedir. O halde istenen yanıt 50+10=60 olacaktır.

6.2 Olasılık ve Ayrık Olasılık

Bir sistemin davranış veya işleyişinin matematiksel bağlantılarla gösterimine matematiksel model denir. Belirli ya da belirsiz matematik modeller bulunmaktadır. Belirli model; koşullar değişmediği sürece sonucu aynı olan modellerdir. Bırakılan bir cismin yere düşmesi, gezegenlerin hareketleri, hız, ivme ve yol arasındaki ilişkiyi açıklayan modeller örnek olarak verilebilir. Belirsiz model; koşullar aynı olmasına rağmen farklı sonuçlar veren modellerdir. Zar atışı, üretimde hatalı ürün sayısı gibi modeller de belirsiz modellere örnek verilebilir. Rassal deney; sonucu kesin olarak bilinmeyen olgulara ilişkin gözlem yapma ya da veri toplama süreci olarak tanımlanabilir. Örneğin hilesiz bir para 3 kez atılırsa kaç kez tura geleceğini, bir fabrikada üretilen makine parçalarının defoluluk yüzdesini tahmin etmek amacıyla çekilecek 40 adet makine parçasının kaç tanesinin defolu olacağını önceden bilemeyiz. Öyleyse madeni para 3 kez atılıp, kaç kez tura geldiği sayıldığında ya da 40 adet makine parçası kontrol edildiğinde birer rassal deney yapılmış olur. Örnek Uzay; Bir rastlantısal deneyde gerçekleşebilecek tüm mümkün farklı sonuçların oluşturduğu kümedir. Örneğin rassal deney hilesiz bir zarın bir kez atılması ise, deney 6 farklı biçimde sonuçlanabileceği için örnek uzay S= {1,2,3,4,5,6} olacaktır. Zar iki kez atılıyorsa, bu deney 36 farklı şekilde sonuçlanabilir : S= {(1, 1) , (1, 2) , (1, 3) , ..., (4, 6) , (5, 6) , (6, 6) }. Rassal deney bir makine parçasının kontrolü ise, iki farklı sonuç mümkündür; parça defoludur ya da değildir. Öyleyse örnek uzay S={Defolu, Defosuz} olacaktır.

Bir örnek uzayı, elemanları sayılabilir çoklukta ise sonlu, elemanları doğal sayılarla bire-bir eşlenebiliyorsa sayılabilir olarak sonsuz, bu iki durum dışında da sayılamaz durumlarında olabilir.

Örnek 6.5

Bir öğrenci 5 dersten 2 sini rastgele seçmek istiyor. Örnek uzayı bulalım.

A,B,C,D,E dersler olsun. S örnek uzayı;
S={(A,B),(A,C),(A,D),(A,E),(B,C),(B,D),(B,E),(C,D),(C,E),(D,E)} olarak bulunur. S örnek uzayındaki eleman sayısı $C_5^2 = 10$ dur.

Olay; örnek uzayının her alt kümesidir. Bu alt küme bir elemanlı ise basit, birden fazla elemanlı ise bileşik olay olarak isimlendirilir.

Örnek 6.6

3 paranın birlikte atıldığı bir rassal deney için önce örnek uzayı yazalım.

S={(Y,Y,Y),(Y,Y,T),(Y,T,T),(T,T,T),(T,T,Y),(T,Y,Y),(T,Y,T),(Y,T,Y)}

O_1=Birinci para tura,ikinci yazı, üçüncü tura
O_2=En az iki tura olarak belirlenmiş olsun.
O_1={(T,Y,T)}
O_2={(Y,T,T),(T,T,T),(T,T,Y),(T,Y,T)} olarak oluşur.

Olayların çeşitli kombinasyonları da aynı örnek uzayda yeni olayların tanımlanmasını sağlar.

- $O1 \cup O2$: O_1' in veya O_2' nin veya her ikisinin gerçekleşmesi olayıdır.
- $O1 \cap O2$: O_1 ve O_2 olaylarının her ikisinin de Gerçekleşme olayıdır.
- $\overline{O1}$: O_1' in tümleyeni olarak adlandırılan bu olay O_1' in gerçekleşmemesi olayıdır.
- $\cup_i Oi$: En az bir O_i nin ortaya çıkması ile tanımlanan olaydır.
- $\cap_i Oi$: Bütün Oi ilerin ortaya çıkması ile tanımlanan olaydır.

Ayrık olay; birlikte ortaya çıkmayan olaylar olup $O_1 \cap O_2 = \varnothing$ dir. $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_n$ aynı örnek uzayın olayları olmak üzere

$O_i \cap O_j = \varnothing$ (i≠j) tüm i,j için geçerli ise bu olaylar karşılıklı ayrık olaylardır.

$O_1, O_2, O_3, \ldots, O_n$ karşılıklı ayrık olaylar iken $\bigcup_{i=1}^{n} O_i = S$ ise bu olaylara bütüne tamamlayan olaylar adı verilir.

Klasik olarak şu tanım kullanılır:

S, gerçekleşme şansları eşit (eş olasılıklı) sonuçlarından oluşan bir örnek uzayı ve O ise bu örnek uzayda tanımlı bir olayı göstersin. O olayının gerçekleşme olasılığı P(O), bu yaklaşımda

P (O) = n(O) / n (S)   olarak tanımlanır.

n(O) ilgilenilen sonuç sayısı, n(S) ise karşılaşılabilir sonuç sayısıdır.

$\mathbf{P(O)} = \dfrac{\mathbf{n(O)}}{\mathbf{n(s)}} \leq 1$ ve $\mathbf{n(O)} \geq \mathbf{0}, \mathbf{n(S)} > \mathbf{0} \rightarrow P(\mathbf{O}) \geq 0, \mathbf{P(S)} = 1$ dir.

Örnek 6.6

Hilesiz bir zar bir kez atılırsa 4' ten büyük bir sayı gelme olasılığı nedir? Zarın hilesiz olduğunun belirtilmesi ile zarın yüzlerinin eşit gerçekleşme şansına sahip olması, dolayısıyla klasik tanıma başvurarak olasılığın hesaplanabileceği anlaşılmalıdır.

S={1,2,3,4,5,6} ve O={5,6} olduğuna göre P(O) = 2/6 olacaktır.

Klasik yaklaşımda rassal deney soyut bir kavramdır. Yani deneyin fiziksel olarak gerçekleştirilmesi gerekmez. Paranın hilesiz olduğu var sayılır ve tura gelme olasılığı 0,50 olarak hesaplanır. Hilesiz olduğuna emin olmadığımız bir madeni paranın tura gelme olasılığı ile ilgileniyorsak, bu olasılığı bulmanın bir yolu söz konusu parayı yeterince atmak olabilir. Para n kez atılırsa ve n(O) kez tura gelirse n(O)/n oranını yani tura sayılarının frekans oranını tura gelme olasılığı kabul edebiliriz. Para ne kadar çok atılırsa n(O)/n oranının gerçek olasılığa o kadar çok yaklaşacağını söyleyebiliriz. Bu durumda göreli sıklık tanımı da denilen bu frekans yaklaşımda, bir O olayının olasılığı $\mathrm{P(O)} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{n(O)}}{\mathrm{n}}$

olarak tanımlanabilir. Burada n, rassal deneyin tekrarlanma sayısını, n(O) ise, bu denemelerde O olayının gerçekleşme sayısını (frekansını) göstermektedir. Yine bu tanıma göre de

$0 \leq \mathbf{P(O)} \leq \mathbf{1}, \mathbf{P(S)} = 1$ olduğu açıktır.

Kolmogorov'un tanımı ise şöyledir:

S örnek uzay olmak üzere, bu uzayın her bir O olayı için, P(O) fonksiyonu "O" olayının ortaya çıkma olasılığı olup aşağıdaki özellikleri sağlar:

K1.$\forall O \subset S$ için $P(O) \geq 0$
K2.P(S)=1
K3.Oi ve Oj ayrık olaylar olmak üzere $P(O_i \cup O_j)=P(O_i)+P(O_j)$ dir.
K4. $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_n$ karşılıklı ayrık olaylar iken
$P(O_1 \cup O_2 \cup O_3 \ldots \cup O_n \ldots)=P(\cup_i O_i)=\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P(O_i)}$ dir.

Bu tanıma göre gerçek değerli bir fonksiyon anlamı verilmiştir.

Teorem

$P(\varnothing) = 0$ **dır.**

İspat: $O=O\cup\varnothing$ yazılabilir. $O\cap\varnothing=\varnothing$ (ayrık) olduğundan K3'e göre
$P(O)=P(O\cup\varnothing)=P(O)+P(\varnothing) \Rightarrow P(\varnothing)=0$ olmak zorundadırlar

Teorem

$O1 \subseteq O2$ *ise* $P(O1) \subseteq P(O2)$ ***dir.***

Teorem

O olayı için $P(O) \leq 1$ **dir.**

Teorem

$P(\bar{O}) = 1 - P(O)$

Teorem

O_1 ve O_2, S örnek uzayının iki olayı ise
$P(O1 \cup O2) = P(O1) + P(O2) - P(O1 \cap O2)$ **dir.**

Teorem

$O_1 \neq \varnothing$ ve $O_2 \neq \varnothing$ ise
$P(O1 \setminus O2) = P(O1) - P(O1 \cap O2)$ **dir**

Örnek 6.7

Bir öğrenci 5/8 olasılıkla Bilgisayar Teknolojileri dersinden, 2/3 olasılıkla Algoritmalar dersinden ve 10/24 olasılıkla da her ikisinden başarılı olmaktadır. Bu öğrencinin Bilgisayar Teknolojileri dersini başaramama olasılığını, Bilgisayar Teknolojileri veya Algoritmalar dersini başarma olasılığını bulalım.
Önce olaylarımızı tanımlayalım:

O_1:Öğrencinin Bilgisayar Teknolojileri dersinden başarılı olması
O_2:Öğrencinin Algoritmalar dersinden başarılı olması

Öğrencinin Bilgisayar Teknolojileri dersini başaramaması olasılığı;

$$P(\bar{O}_1) = 1 - P(O_1) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

Öğrencinin Bilgisayar Teknolojileri veya Algoritmalar dersini başarma olasılığı

$$P(O_1 \cup O_2) = P(O_1) + P(O_2) - P(O_1 \cap O_2) = \frac{5}{8} + \frac{2}{3} - \frac{10}{24} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

Olarak bulunur.

O_1 ile O_2, S örnek uzayında iki olay olsun. $P(O_2) > 0$ olmak üzere; O_2 olayının gerçekleşmiş olması halinde O_1 olayının olasılığına, O_1 olayının O_2 olayına bağlı koşullu olasılığı veya kısaca O_1 in O_2 koşullu olasılığı denir ve $P(O_1 / O_2)$ şeklinde gösterilir. Burada O_2 olayı ilgili koşullu olasılığın örnek uzayı olmaktadır.

$$P\left(O_1 / O_2\right) = \frac{P(O_1 \cap O_2)}{P(O_2)}$$ ile hesaplanır.

Örnek 6.8

Bilgisayar Mühendisliği Bölümünde Yüksek Lisans yapan öğrencilerin lisans ve medeni hal durumlarını gösteren veriler aşağıdaki tablodadır.

	Evli	Bekar	Toplam
Bilgisayar Müh.	3	5	8
Elektrik-Elektronik Müh.	12	4	16
Toplam	15	9	24

O1: Evli öğrenciler
O2:Bekar öğrenciler
O3:Bilgisayar Lisanslı öğrenciler
O4: Elektrik-Elektronik lisanslı öğrenciler

$P(O_1) = \frac{15}{24}$ $P(O_2) = \frac{9}{24}$ $P(O_3) = \frac{8}{24}$ $P(O_4) = \frac{16}{24}$

$P(O_1 \cap O_3) = \frac{3}{24}$ $P(O_1 \cap O_4) = \frac{12}{24}$

$P(O_2 \cap O_3) = \frac{5}{24}$ $P(O_2 \cap O_4) = \frac{4}{24}$

$P(O_1 \cap O_3) = \frac{3}{24}$ $P(O_1 \cap O_4) = \frac{12}{24}$

$P(O_2 \cap O_3) = \frac{5}{24}$ $P(O_2 \cap O_4) = \frac{4}{24}$

Olasılıkları mevcuttur. Bilgisayar lisanslı olduğu bilinen bir öğrencinin bekar çıkma olasılığını bulalım.

$P\left(O_2/O_3 = \frac{P(O_2 \cap O_3)}{P(O_3)} = \frac{\frac{5}{24}}{\frac{8}{24}} = \frac{5}{8}\right)$ elde edilir.

İki ya da daha fazla olayın ortaya çıkması birbirine bağlı değilse bu olaylar bağımsızdır denir.

İki ya da daha fazla olayın ortaya çıkması birbirine bağlı değilse bu olaylar bağımsızdır denir.

$P\,(O_1/O_2) = P(O_1)$ ve $P\,(O_2/O_1) = P(O_2)$ dir.

$P(O_1/O_2) = \frac{P(O_1 \cap O_2)}{P(O_2)}$ eşitliğinde yukarıda elde edilen eşitlikleri kullanırsak;

$P(O_1) = \frac{P(O_1 \cap O_2)}{P(O_2)}$ buradan da $P(O_1 \cap O_2) = P(O_1).P(O_2)$ yazılabilir ki bu eşitlik bağımsızlık için yeterli ve gereklidir.

Örnek 6.9

Bir işyerindeki A ürününün 3 tezgahtan geçerek üretimi yapılmaktadır. Bu tezgahların arızalanma olasılıkları 1-2-3 için sırasıyla 3/4, 1/3, 1/2 dir. Tezgahların arızalanmasının birbirinden bağımsız olduğu varsayımına göre, ürünün hiç arıza olmadan üretilebilme olasılığını ve en çok bir arızalanma ile tamamlanma olasılığını bulalım.

$O1$:Birinci tezgahta arızalanma olasılığı
$O2$:İkinci tezgahta arızalanma olasılığı
$O3$:Üçüncü tezgahta arızalanma olasılığı

$$P(O1) = \frac{3}{4}, P(O2) = \frac{1}{3}, P(O3) = \frac{1}{2}\, dir.$$

$\overline{O1}$:Birinci tezgahta arızalanmama olasılığı
$\overline{O2}$:İkinci tezgahta arızalanmama olasılığı
$\overline{O3}$:Üçüncü tezgahta arızalanmama olasılığı

$$P(\overline{O1}) = \frac{1}{4}, P(\overline{O2}) = \frac{2}{3}, P(\overline{O3}) = \frac{1}{2}\, dir.$$

Ürünün hiç arıza olmadan üretilebilme olasılığını
$P(\overline{O1} \cap \overline{O2} \cap \overline{O3}) = P(\overline{O1}).P(\overline{O2}).P(\overline{O3}) = 1/4.2/3.1/2 = 1/12$ olarak buluruz.

En çok bir arızalanma ile tamamlanma olasılığını da aşağıdaki gibi bulabiliriz.

$(\overline{O1} \cap \overline{O2} \cap \overline{O3}) \cup (O1 \cap \overline{O2} \cap \overline{O3}) \cup (O2 \cap \overline{O1} \cap \overline{O3}) \cup (O3 \cap \overline{O2} \cap \overline{O1})$ olasılığını arayacağız.

$P(\overline{O1}).P(\overline{O2})P(\overline{O3}) + P(O1).P(\overline{O2}).P(\overline{O3}) + P(O2).P(\overline{O1}).P(\overline{O3}) + P(O3).P(\overline{O2}).P(\overline{O1})$
1/4.2/3.1/2+3/4.2/3.1/2+1/4.1/3.1/2+1/4.2/3.1/2=11/24

Bayes Kuralı;

$O_1, O_2, \ldots O_n$ aynı örnek uzaydaki karşılıklı ayrık ve bütüne tamamlayan olaylar olmak üzere, F aynı örnek uzaydaki bir başka olay olsun. Bu durumda

$$P\left(O_k/F\right) = \frac{P(O_k)P\left(F/O_k\right)}{\sum_{i=1}^{n} P(O_i)P\left(F/O_i\right)}$$ dir. Burada $P\left(F/O_i\right)$ önceki olasılıklar, $P\left(O_k/F\right)$ değerlerine de sonraki olasılıklar adı verilir. $\sum P(O_i)=1$ dir.

Örnek 6.10

Bir öğretmenin A dersindeki 11 öğrenci başarılı 4 öğrenci başarısız, B dersinden 8 öğrenci başarılı 7 öğrenci başarısız ve C dersinden de 5 öğrenci başarılı 10 öğrenci de başarısıdır. Bütün öğrencilerin aynı ortamda olduğu bilindiğine göre, bu öğretmenin başarılı bir öğrencisinin B dersini alma olasılığını bulalım.

$$P\left(B/\text{Başarılı}\right) = \frac{P(B).P\left(\text{Başarılı}/B\right)}{P(A).P\left(\text{Başarılı}/A\right) + P(B).P\left(\text{Başarılı}/B + P(C).P\left(\text{Başarılı}/C\right)\right)}$$

$$P\left(B/\text{Başarılı}\right) = \frac{p.\frac{8}{15}}{p.\frac{11}{15} + p.\frac{8}{15} + p.\frac{5}{15}} = \frac{1}{3}$$ elde edilir.

Ödev

1. Pigeonhole prensibini bir örnekle açıklayınız.
2. 4 paranın birlikte atıldığı bir rassal deney için örnek uzayı yazınız.
3. Hilesiz bir zar bir kez atılırsa 3 veya daha büyük bir sayı gelme olasılığı nedir?
4. Bayes Kuralının kullanım amacı nedir?
5. O_1 ve O_2 bağımsız olaylar ise O_1 ve $\bar{O}_2$ nin de bağımsız olaylar olduğunu gösteriniz.
6. Bir çift zar atıldığında sayılar toplamının 8 olduğu bilindiğine göre bu sayıların ikisinin de tek olma olasılığı nedir?

Kaynaklar

F.Selçuk,N.Yurtay,N.Yumuşak,Ayrık İşlemsel Yapılar, Sakarya Kitabevi,2005.
İ.Kara, Olasılık, Bilim Teknik Yayınevi, Eskişehir, 2000.
"Soyut Matematik", S.Aktaş,H.Hacısalihoğlu,Z.Özel,A.Sabuncuoğlu, Gazi Ünv.Yayınları,1984,Ankara.
"Applied Combinatorics", Alan Tucker, John Wiley&Sons Inc, 1994.
"Applications of Discrete Mathematics", John G. Michaels, Kenneth H. Rosen, McGraw-Hill International Edition, 1991.
"Discrete Mathematics", Paul F. Dierker and William L.Voxman, Harcourt Brace Jovanovich International Edition, 1986.
"Discrete Mathematic and Its Applications", Kenneth H. Rosen, McGraw-Hill International Editions, 5th Edition, 1999.
"Discrete Mathematics", Richard Johnson Baugh, Prentice Hall, Fifth Edition, 2001.
"Discrete Mathematics with Graph Theory" , Edgar G. Goodaire, Michael M. Parmenter, Prentice Hall, 2nd Edition, 2001.
"Discrete Mathematics Using a Computer", Cordelia Hall and John O'Donnell, Springer, 2000.
"Discrete Mathematics with Combinatorics", James A. Anderson, Prentice Hall, 2000.
"Discrete and Combinatorial Mathematics", Ralph P. Grimaldi, Addison-Wesley, 1998.
"Discrete Mathematics", John A. Dossey, Albert D. Otto, Lawrence E. Spence, C. Vanden Eynden, Pearson Addison Wesley; 4th edition 2001.
"Essence of Discrete Mathematics", Neville Dean, Prentice Hall PTR, 1st Edition, 1996.
"Mathematics:A Discrete Introduction", Edvard R. Schneiderman, Brooks Cole; 1st edition, 2000.
"Mathematics for Computer Science", A.Arnold and I.Guessarian, Prentice Hall, 1996.
"Theory and Problems of Discrete Mathematics", Seymour Lipschuts, Marc. L. Lipson, Shaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, 1997.
"2000 Solved Problems in Discrete Mathematics", Seymour Lipschuts, McGraw- Hill Trade, 1991.