Sayisal Analiz

1

Eğri uydurma, ara değer
ve
dış değer bulma yöntemleri

Ders İçeriği

- Sonlu Farklar
- Enterpolasyon
- Lineer Enterpolasyon

Sonlu Farklar :

Belirlenen aralıkta fonksiyonun varlığı kabul edilir. Dolayısıyla sonlu farklar kullanılarak aralığın herhangi bir noktasındaki değeri için iyi bir yaklaşım bulmak mümkündür.

Bilindiği gibi, fonksiyonların analitik olarak verildiği durumlarda, istenilen noktalardaki fonksiyon değerlerini hesaplamak, fonksiyonun belirli noktalarında istenilen mertebeden türevlerini bulmak yada belirli aralıktaki integralini hesaplamak kolaylıkla yapılabilmektedir.

Ancak fonksiyonların bazı ayrık noktalardaki değerleri belli iken bu tür hesaplamalar sonlu farklar aritmetiği kullanılarak yaklaşık olarak bulunabilmektedir. Hatta, analitik çözümlerin belli olduğu durumlarda bile sonlu farklar kullanım kolaylığı açısından tercih edilmektedir.

Sonlu Farklar :

Sonlu farklar hesabı nümerik analizde geniş kullanılma alanına sahiptir.

Matematiksel problemler değişkenlerin sürekli fonksiyonları olarak verilir ve bu fonksiyonlar kapalı bir formülle tanımlanır.

Örnek : $y = f(x) = 3x^2 + 5x - 6$

Bağımsız değişkenlerin verilmiş değerleri için fonksiyonların değerleri hesaplanabilir.
Bir başka şekilde de fonksiyon, bağımsız değişkenlerin her bir değerine $y = f(x)$ karşılık gelen değerlerin bir cümlesi $x_1 , y_1 ;\ x_2 , y_2 ; x_3 , y_3$ olarak tanımlanabilir. Bu durumda süreklilik aralığında herhangi bir noktada formülle tanımlama yoktur.

Sonlu Farklar

İleri Yön Sonlu Farklar

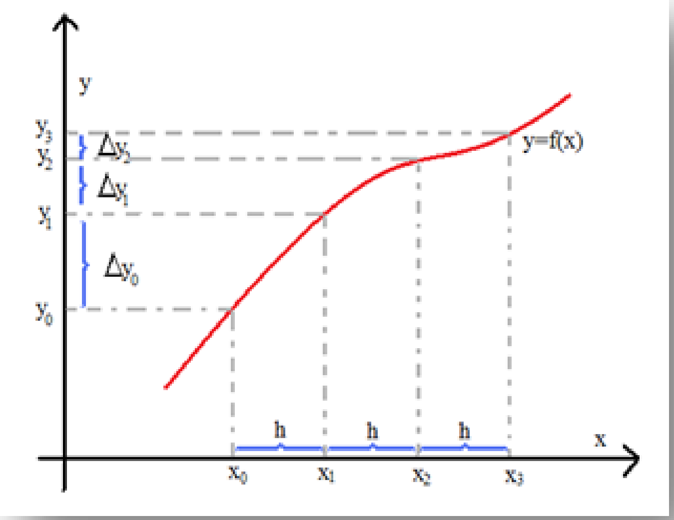
Bir $y = f(x)$ fonksiyonu verildiğinde .

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

şeklinde tanımlanan işlemi yaptıran Δ sembolüne ileri fark operatörü denir. Burada h, “fark aralığı, adım” olarak adlandırılmıştır.

$\Delta f(x)$ yada Δy

İfadesine $f(x)$ fonksiyonunun birinci mertebeden **ileriye farkı** denir.



$f(x)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden **ileriye farkı** , $\Delta^2 f(x)$ şeklinde gösterilir ve

$$\Delta^2 f(x) = \Delta[\Delta f(x)] = \Delta[f(x+h) - f(x)]$$

şeklinde ifade edilir.

En genel halde $f(x) = f_i$ ve $f(x+kh) = f_{i+k}$ ile gösterilmek üzere

$$\Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f_i) = \Delta^{n-1} f_{i+1} - \Delta^{n-1} f_i$$ şeklinde tanımlanır.

Sonlu Farklar

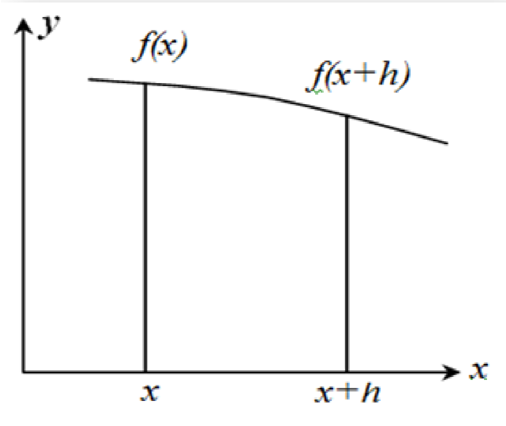
İleri yönlü Sonlu Farklar : $\Delta f(x)$ ifadesi ile gösterimi yapılırsa;

1. Mertebeden $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ (veya $\Delta y_1 = y_1 - y_0$)
2. Mertebeden $\Delta 2\, f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$
3. Mertebeden $\Delta 3 f(x) = \Delta 2 f(x+h) - \Delta 2 f(x) = [f(x+3h) - 2f(x+2h) + f(x+h)] - [f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)]$

$$= f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)$$

....

n. Mertebeden $\Delta n\, f(x) = \Delta n\text{-}1\, f(x+h) - \Delta n\text{-}1\, f(x)$ (veya $\Delta\, y_n = y_n - y_{n-1}$)



a) İleri yönlü sonlu fark

Sonlu Farklar

Örnek : Aşağıdaki tablodan yararlanarak ileri yön sonlu farklar tablosunu hazırlayınız.

x	0	1	2	3	4	5
y	-8	-4	5	24	61	128

Farklar tablosunu hazırlayalım ;

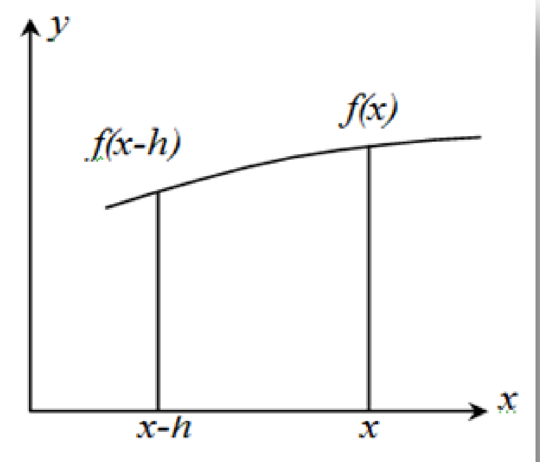
x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	-8	4	5	5	3	1
1	-4	9	10	8	4	
2	**5**	**19**	**18**	**12**		
3	24	37	30			
4	61	67				
5	128					

h

Tablodan (x=2, y=5) noktası örnek olarak alınırsa katsayılar

$\Delta y_2=19$, $\Delta^2 y_2=18$, $\Delta^3 y_2=12$ olur

Sonlu Farklar



b) Geri yönlü sonlu fark

Geri yönlü Sonlu Farklar : $\nabla f(x)$

1. Mertebeden $\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$ (veya $\nabla y_1 = y_1 - y_0$)
2. Mertebeden $\nabla^2 f(x) = \nabla f(x+h) - \nabla f(x) = f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)$
3. Mertebeden $\nabla^3 f(x) = \nabla^2 f(x) - \nabla^2 f(x-h) = [f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)] - [f(x-h) - 2f(x-2h) + f(x-3h)]$

$$= f(x) - 3f(x-h) + 3f(x-2h) + f(x-3h)$$

...

n. Mertebeden $\nabla^n f(x) = \nabla^{n-1} f(x+h) - \nabla^{n-1} f(x)$ (veya $\nabla y_n = y_n - y_{n-1}$)

Sonlu Farklar

Örnek : Aşağıdaki tablodan yararlanarak geri yön sonlu farklar tablosunu hazırlayınız.

x	0	1	2	3	4	5
y	-8	-4	5	24	61	128

Farklar tablosunu hazırlayalım ;

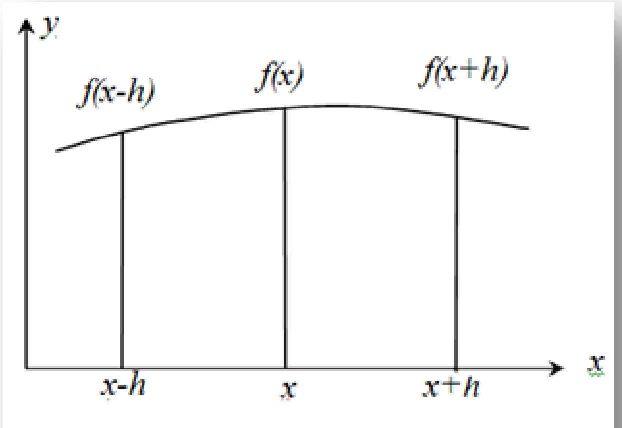
x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$	$\nabla^5 y$
0	-8					
1	-4	4				
2	**5**	**9**	**5**			
3	24	19	10	5		
4	61	37	18	8	3	
5	128	67	30	12	4	1

h

Tablodan (x=2, y=5) noktası örnek olarak alınırsa katsayılar

$\nabla y_2 = 9$, $\nabla^2 y_2 = 5$ olur

Sonlu Farklar



c) Merkezi fark

Merkezi Farklar: $\delta f(x)$

1. Mertebeden $\delta f(x) = f(x+h/2) - f(x-h/2)$
2. Mertebeden $\delta\ 2\ f(x) = \delta f(x+h/2) - \delta f(x/2) = f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)$
3. Mertebeden $\delta\ 3f(x) = \delta\ 2f(x+h/2) - \delta\ 2f(x-h/2)$

$$= [f(x+3h/2) - 2f(x+h/2) + f(x-h/2)] - [f(x+h/2) - 2f(x-h/2) + f(x-3h/2)]$$

$$= f(x+3h/2) - 3f(x+h/2) + 3f(x-h/2) - f(x-3h/2)$$

...

n. Mertebeden $\delta\ n f(x) = \delta\ n\text{-}1f(x+h) - \delta\ n\text{-}1f(x)$

Sonlu Farklar

Örnek : Aşağıdaki tablodan yararlanarak merkezi farklar tablosunu hazırlayınız.

x	0	1	2	3	4	5
y	-8	-4	5	24	61	128

Merkezi farklar tablosunu hazırlayalım ;

x	y	$\delta y_{\pm 1/2}$	$\delta^2 y$	$\delta^3 y_{\pm 1/2}$	$\delta^4 y$	$\delta^5 y_{\pm 1/2}$
0	-8					
		4				
1	-4		5			
		9		5		
2	5		10		3	
		19		8		1
3	24		18		4	
		37		12		
4	61		30			
		67				
5	128					

Tablodan (x=2, y=5) noktası örnek olarak alınırsa katsayılar

$\nabla y_2 = 9$, $\nabla^2 y_2 = 5$ olur

$\delta y_{-1/2} = 9$, $\delta^2 y = 5$, $\delta^3 y_{-1/2} = 5$ veya

$\delta y_{+1/2} = 19$, $\delta^2 y = 10$, $\delta^3 y_{+1/2} = 8$, $\delta^4 y = 3$, $\delta^5 y_{+1/2} = 1$ elde edilir.

Enterpolasyon

Matematiksel problemler değişkenlerin sürekli fonksiyonları olarak ifade edilebilir.

Bu fonksiyonlar kapalı bir formülle tanımlanır ve bağımsız değişkenlerin değerleri için fonksiyonların değerleri hesaplanır.

Fonksiyonlar, bağımsız değişkenlerin her bir değerine karşılık gelen fonksiyon değerlerinin bir cümlesi olarak da tanımlanabilir.

Bu durumda kapalı bir formül verilmemiştir.

Sonlu farklar kullanılarak, değişkenlerin herhangi bir ara değerine karşılık gelen fonksiyon değerleri için iyi bir yaklaşım bulunabilir.

Pratikte karşılaşılan problemlerin çoğunu kapalı bir formül şeklinde tanımlamak mümkün ise de, ayrık noktalar cümlesinde sonlu farklar kullanılarak çözüm elde etmek daha kolay olduğu için daha fazla tercih edilir.

Enterpolasyon

Veri noktaları arasında ara değer hesabı gereksinim problemi fen ve mühendislikte sıkça karşılaşılır.

Örneğin, bir bina için bilgisayarlı enerji kontrol sistemi dizaynında giriş verisi olarak, her gün binada meydana gelen tipik ısı değişimi gerekebilir.

Örnek ısı değerleri ayrık zaman noktalarında bina içinde ölçülmelidir. Bununla birlikte enerji kontrol sistemi bilgisayar programı için, örnek olarak saatlik artışlarla ısı ölçümleri gerekebilir.
Bu problemi çözmenin bir yolu ölçülen ısı değerlerinin, ölçüm zamanları arasındaki ara değerleri için bir eğri ile tarif edilmesidir.

Katı bir cismin bir sıvı içersinde ilk anda hızlı, daha sonra yavaş çözülmesi olayı gözlemlendiğinde, olayı ifade eden eğriyi bulmak için kullanılacak yöntemler tamamen yaklaşık yöntemlerdir.

Eğrileri, tanımlanmış bilim ve teknikte kullanılan ya da deney sonucunda elde edilen (veya fonksiyona göre çizilen) şeklinde ikiye ayırmak mümkündür.

Enterpolasyon

Deney sonunda elde edilen değerlen den hareketle bulunan eğri veya diyagramların bazıları bir fonksiyonla ifade edilebilir. Deneysel eğriler bir fonksiyonla ifade edilebiliyorsa bu tür fonksiyonlara **empirik fonksiyonlar** adı verilir.

En basit anlamda fonksiyona ait tablo halinde oluşturulmuş değerlerden hareketle, fonksiyona ait belirli aralıktaki değerlerinin hesaplanması işlemine **enterpolasyon** denir.

Belirli bir aralıkta, bir f(x) fonksiyonu ile bir p(x) polinomunun aldığı değerler farkı istenildiği kadar küçük tutulabiliyorsa, p(x) polinomuna, f(x) fonksiyonunun **yaklaşma polinomu** denir.

İstenilen bir noktadaki değeri ile türevleri f(x) fonksiyonu ile aynı olan polinomlara **uyumlu polinomlar** denir.

Enterpolasyon

Enterpolasyon fonksiyonunun seçiminde, başlıca iki teorem kullanılır.

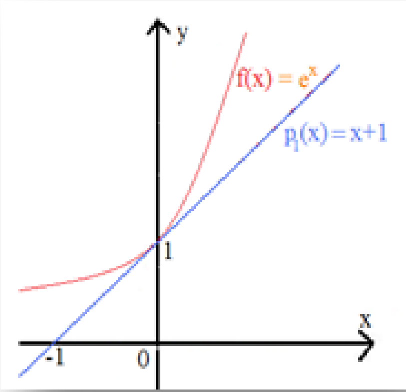
1. Eğer f(x) fonksiyonu [a,b] aralığında sürekli ve türevlenebilir ise enterpolasyon fonksiyonu olarak polinom kullanılabilir. [a,b] aralığında küçük bir ε değeri için
   $|f(x)-P(x)| \leq \varepsilon$ koşulu sağlanabilir.
2. Periyodu 2π olan herhangi bir sürekli fonksiyon için

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx$$

şeklinde sonlu bir trigonometrik seri enterpolasyon fonksiyonu olarak kullanılabilir.

Enterpolasyon algoritmalarının eğrileri, gerçek fonksiyon eğrilerinden farklıdır.

Birinci teorimi $f(x) = e^x$ fonksiyonu ile örneklemek istersek ;



x=0 için $f(x)= e^x \Rightarrow$ **$f(0)=e^0=1$** ve $f'(x)= e^x$ olduğundan **$f'(0)=e^0=1$** dir.

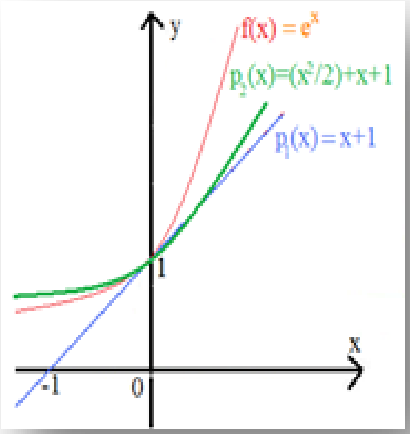
şimdi fonksiyon yerine polinom tanımlayarak işlemi tekrarlarsak ;

$p_1(x)=ax+b \Rightarrow$ **$p_1(0)=b$** ve $P_1'(x)=a$ olduğundan **$p_1'(0)=a$** dır.

Uyumlu polinom tanımından yararlanarak $f(0)=p_1(0)$ ve $f'(0)=p_1'(0)$ eşitlikleri göz önünde alınarak $p_1(x)=x+1$ olduğu görülür.

Enterpolasyon

İkinci dereceden bir polinom ile fonksiyona yaklaşılmak istenseydi, fonksiyon ve polinomun ikinci türevleride alınarak eşitliklerden polinom elde edilecekti.



$P_2(x)$ $=ax^2+bx+c$ olduğu düşünüldüğünde x=0 için benzer işlemler gerçekleştirildiğinde $P_2(x)$ polinomu

$P_2(x) = (x^2/2)+x+1$ olarak bulunur. $P_2(x)$ polinomu A(0,1) komşuluğunda f(x) fonksiyonuna $P_1(x)$ daha yakın olur.

"n. dereceden bir polinom tanımlanması halinde fonksiyona daha da yaklaşılacağı açıktır."

f(x) fonksiyonunun p(x) gibi bir polinom yardımıyla enterpolasyon kullanılarak ifade edilmesine işlemine **polinomiyal enterpolasyon** denir.

P(x) polinomu trigonometrik bir seri olduğunda ise **trigonometrik enterpolasyon** olarak ifade edilir.

Polinom Enterpolasyonu
Lineer (Doğrusal) Enterpolasyon :

Lineer enterpolasyon, belirsiz katsayılar yöntemini örnekleyen en basit ifade şeklidir. Enterpolasyon fonksiyonu düz birçizgiden oluşur. **Lineer enterpolasyon** fonksiyonu,

$$P(x) = a_0 + a_1 x$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu basit ifade de bilinmeyen (a_0, a_1) katsayılarını elde etmek için en az iki adet değişken değeri ve bu değişkenlere karşılık gelen gerçek fonksiyon değerleri bilinmelidir.

Bilinen değişken değerleri x_i ve x_{i+1}, fonksiyon değerleri de sırasıyla $f(x_i)$ ve $f(x_{i+1})$ olsun, denklemde x_i, $f(x_i)$ ve x_{i+1}, $f(x_{i+1})$ değerleri üzerinden;

$$f(x_i) = a_0 + a_1 x_i \qquad f(x_{i+1}) = a_0 + a_1 x_{i+1}$$

elde edilen iki bilinmeyenli iki denklem çözülerek

$$a_0 = f(x_i) - \left[\frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}\right] x_i$$

$$a_1 = \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}$$

denklemin katsayıları bulunarak, düzenleme ile;

$$P(x) = f(x_i) - \left[\frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}\right] x_i + \left[\frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}\right] x$$

elde edilir.

Polinom Enterpolasyonu
Lineer (Doğrusal) Enterpolasyon :

Örnek : $f(x) = x^4$

Fonksiyonuna ait tablo halindeki değerler verilmiştir. **x=2.7** için enterpolasyon fonksiyonunun

değerini bulalım.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	1	16	81	256

Burada x_i ve x_{i+1} için 2 ve 3 değerleri, $f(x_i)$ ve $f(x_{i+1})$ için de 16 ve 81 değerleri tablodan alınır.

$$P(x) = f(x_i) - \left[\frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}\right]x_i + \left[\frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}\right]x$$ denklemi kullanılarak;

$$P(x)=16-\left[\frac{16-81}{2-3}\right]2 + \left[\frac{16-81}{2-3}\right]x$$ olur.

Lineer enterpolasyon fonksiyonu *p(x)=-114+65x* olarak elde edilir. *p(2.7)=61.5*

Enterpolasyon fonksiyonu x=2.7 nin 4. Kuvvetini 61.5 olarak bulunur. Bulunan bu değer 53.1441 gerçek değerinden 8.3559 enterpolasyon hatası ile bulunmuş oldu.

Aynı denklemde x = 4 için enterpolasyon değeri yaklaşık % 28 hata ile 146 olarak hesaplandı.

Polinom Enterpolasyonu
Lineer (Doğrusal) Enterpolasyon :

```
>> Y=[0 1 2 3 4 ]

Y =

     0     1     2     3     4

>> X=[0 1 16 81 256]

X =

     0     1    16    81   256

>> interp1(Y,X,2.7)

ans =

   61.5000
```

Polinom Enterpolasyonu
Lineer (Doğrusal) Enterpolasyon :

Lineer enterpolasyon fonksiyonu elde edilirken daima hesaplanacak değerin arada kaldığı bilinen sınır değerleri kullanılmalıdır.

Sınır değerlerin dışında kalan bölge için hesaplanan fonksiyon değerlerinde hata oranı artabilmektedir.

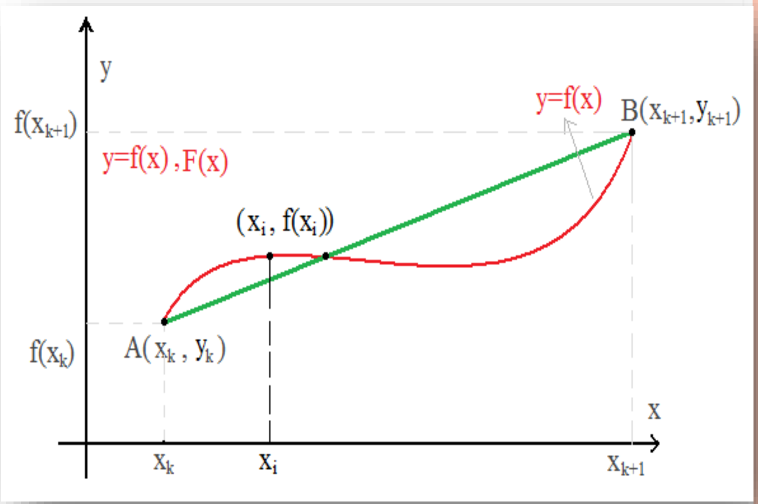
Lineer enterpolasyonu iki noktası belli olan denklem için yorumladığımızda, farklı iki noktadaki değeri biliniyorsa, bu durumda $x \in [x_k, x_{k+1}]$ noktasındaki değerinin hesaplanması bu iki noktadan geçen birinci dereceden bir polinom yardımıyla yapılabilir.

Polinom Enterpolasyonu
Lineer (Doğrusal) Enterpolasyon :

A[x_k,f(x_k)], B[x_{k+1},f(x_{k+1})] noktalarından geçen

doğrunun eğimi $m=\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}$.

O halde doğrunun denklemini yazabiliriz;



$$y-f(x_k)=\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}(x-x_k)$$ olur.

$\Delta y_k= f(x_{k+1})-f(x_k)$ ve $h= x_{k+1}-x_k$ konulursa düzenleme ile ifade;

$$y=y_k+\frac{\Delta y_k}{h}(x-x_k)$$ elde edilir. Fonksiyon yerine iki noktadan geçen doğruyu seçmiş olduk.

Kaynaklar

Sayısal Analiz
(S.Akpınar)
Mühendisler için Sayısal Yöntemler
(Steven C.Chapra&RaymontP.Canale)
Nümerik Analiz
(Schanum’s outlines-Nobel)