

Resolución Detallada de Ejercicios

Análisis de Modelos Lineales

Melissa Jessica Macedo Ramos

1 Ejercicio 1: Minimización de Costo de Transferencia de Datos

Planteamiento

Modelar el costo diario de transferencia de datos entre San Isidro (x) y Surco (y)

Función objetivo: $C(x, y) = 4x + 6y$ (en soles)

Restricciones:

$$x + y \leq 100 \text{ (límite de capacidad de red)}$$

$$x \geq 10$$

$$y \geq 5$$

$$x, y \geq 0$$

Solución

1. Valores mínimos: $x = 10, y = 5$
2. Verificación: $10 + 5 = 15 \leq 100$
3. Costo: $C(10, 5) = 4(10) + 6(5) = 40 + 30 = 70$

Resultado: Costo mínimo de 70 soles para transferencia de datos.

2 Ejercicio 2: Optimización de Contratación de Analistas

Planteamiento

Función objetivo: $C(x, y) = 1500x + 3000y$ (en soles al mes)

Restricciones:

$$x + y \geq 8 \text{ (total de analistas)}$$

$$y \geq 3 \text{ (analistas senior mínimos)}$$

$$x + y \leq 12 \text{ (capacidad máxima)}$$

$$x, y \geq 0$$

Solución

1. Valores posibles:

- $y \in \{3, 4, 5, \dots\}$
- $\max(8 - y, 0) \leq x \leq 12 - y$

2. Combinaciones que satisfacen restricciones: $(x, y) \in \{(5, 3), (4, 4), (3, 5)\}$

3. Cálculo de costos:

$$C(5, 3) = 1500(5) + 3000(3) = 7500 + 9000 = 16500$$

$$C(4, 4) = 1500(4) + 3000(4) = 6000 + 12000 = 18000$$

$$C(3, 5) = 1500(3) + 3000(5) = 4500 + 15000 = 19500$$

Resultado: Costo mínimo de 16500 soles con 5 analistas junior y 3 senior.

3 Ejercicio 3: Maximización de Cobertura de Drones

Planteamiento

Función objetivo: $S(x, y) = 50x + 65y$ (cobertura en km²)

Restricciones:

$$3x + 4y \leq 200 \text{ (presupuesto en miles de soles)}$$

$$x + y \leq 40 \text{ (tiempo de operación)}$$

$$x, y \geq 0$$

Solución

1. Puntos de vértice:

- $(0, 0)$: $S(0, 0) = 0$
- $(0, 40)$: $S(0, 40) = 65(40) = 2600$
- $(40, 0)$: $S(40, 0) = 50(40) = 2000$
- $(20, 20)$: $S(20, 20) = 50(20) + 65(20) = 2300$

2. Verificación de $(20, 20)$: $3(20) + 4(20) = 140 \leq 200$
 $20 + 20 = 40 \leq 40$

Resultado: Máxima cobertura de 2600 km² con 0 vuelos en Madre de Dios y 40 en Ucayali.

4 Ejercicio 4: Pronóstico de Ventas de Cooperativa Cafetalera

Planteamiento

Sistema de ecuaciones:

$$x + 2y = 40$$

$$3x + y = 70$$

Solución por Cramer

1. Determinante del sistema:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1(1) - 2(3) = -5$$

2. Determinantes auxiliares:

$$D_x = \begin{vmatrix} 40 & 2 \\ 70 & 1 \end{vmatrix} = 40(1) - 2(70) = -100$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 40 \\ 3 & 70 \end{vmatrix} = 1(70) - 40(3) = -50$$

3. Soluciones:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-100}{-5} = 20 \text{ (precio promedio)}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-50}{-5} = 10 \text{ (índice de calidad)}$$

Resultado: Precio promedio de 20 soles/kg, índice de calidad de 10.

5 Ejercicio 5: Calibración de Sensores de Reconocimiento de Especies

Planteamiento

Sistema de ecuaciones:

$$2x + y + 3z = 20$$

$$x + 4y + 2z = 23$$

$$3x + 2y + z = 16$$

Solución por Cramer

1. Determinante del sistema:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -25$$

2. Determinantes auxiliares:

$$D_x = \begin{vmatrix} 20 & 1 & 3 \\ 23 & 4 & 2 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -45$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 20 & 3 \\ 1 & 23 & 2 \\ 3 & 16 & 1 \end{vmatrix} = -77$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 20 \\ 1 & 4 & 23 \\ 3 & 2 & 16 \end{vmatrix} = -111$$

3. Soluciones:

$$x = \frac{D_x}{D} = 1.8 \text{ (luminosidad)}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = 3.08 \text{ (contraste de bordes)}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = 4.44 \text{ (color promedio)}$$

Resultado: Parámetros calibrados para mejora del algoritmo de clasificación.

6 Ejercicio 6: Planificación Energética en Zonas Rurales

Planteamiento

Sistema de ecuaciones:

$$x + 2y + z = 8$$

$$2x - y + 4z = 12$$

$$-x + 3y + 2z = 6$$

Solución por Cramer

1. Determinante del sistema:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -20$$

2. Determinantes auxiliares:

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 12 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -40$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 2 & 12 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 20$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 12 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 40$$

3. Soluciones:

$$x = \frac{D_x}{D} = 2 \text{ (miles de soles)}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = -1 \text{ (MW)}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = -2 \text{ (MW de reserva)}$$

Resultado: Planificación energética con 2 mil soles de inversión.

7 Ejercicio 7: Predicción de Demanda de Tickets de Tren

Planteamiento

Sistema de ecuaciones:

$$x + y = 350$$

$$2x - y = 100$$

Solución por Gauss-Jordan

1. Matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 350 \\ 2 & -1 & 100 \end{bmatrix}$$

2. Operaciones elementales:

$$\bullet F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1:$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 350 \\ 0 & -3 & -600 \end{bmatrix}$$

$$\bullet F_2 \leftarrow \frac{F_2}{-3}:$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 350 \\ 0 & 1 & 200 \end{bmatrix}$$

- $F_1 \leftarrow F_1 - F_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 150 \\ 0 & 1 & 200 \end{bmatrix}$$

3. Soluciones:

$x = 150$ (miles de turistas en Ollantaytambo)

$y = 200$ (miles de turistas en Poroy)

Resultado: Proyección de 150,000 turistas en Ollantaytambo y 200,000 en Poroy.

8 Ejercicio 8: Optimización de Mezcla de Mango

Planteamiento

Sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 70 \\ 80 \\ 60 \end{bmatrix}$$

Solución por Gauss-Jordan

Aplicando operaciones elementales:

- $A = 20$ (toneladas de variedad A)
- $B = 15$ (toneladas de variedad B)
- $C = 15$ (toneladas de variedad C)
- $w = 15$ (toneladas de conservante)

Resultado: Proporción óptima para mezcla diaria de mango.
(Previous content continues...)

9 Ejercicio 9: Optimización de Servidores para Análisis de Redes Sociales

Planteamiento

Función objetivo: Minimizar $C(x, y) = 400x + 700y$

Restricciones:

$$200x + 300y \geq 4000 \text{ (procesamiento mínimo)}$$

$$400x + 700y \leq 7000 \text{ (presupuesto)}$$

$$x, y \geq 0$$

Solución

1. Simplificación de restricciones:

$$2x + 3y \geq 40$$

$$4x + 7y \leq 70$$

2. Puntos de intersección:

- Para $2x + 3y = 40$:
 - Si $x = 0$: $y \approx 13.33$
 - Si $y = 0$: $x = 20$
- Para $4x + 7y = 70$:
 - Si $x = 0$: $y = 10$
 - Si $y = 0$: $x = 17.5$

3. Punto de intersección de restricciones:

$$2x + 3y = 40$$

$$4x + 7y = 70$$

Resolviendo simultáneamente, obtenemos el punto $(5, 10)$

4. Costo en el punto óptimo:

$$C(5, 10) = 400(5) + 700(10) = 2000 + 7000 = 9000$$

Resultado: 5 servidores tipo 1 y 10 servidores tipo 2, con costo total de 9000 soles.

10 Ejercicio 10: Maximización de Ganancias en Comercio Electrónico

Planteamiento

Función objetivo: Maximizar ganancia $G(x, y) = 20x + 15y$

Restricciones:

$$3x + y \leq 120 \text{ (capacidad de almacenamiento)}$$

$$x \geq 10 \text{ (mínimo de software local)}$$

$$x, y \geq 0$$

Solución

1. Punto inicial: $x = 10$ (mínimo de software local)

2. Restricción de capacidad:

$$3(10) + y \leq 120 \implies y \leq 90$$

3. Función objetivo en términos de x :

$$G(x) = 20x + 15(120 - 3x) = 1800 - 25x$$

4. Análisis de la función:

- Coeficiente de x es negativo (-25)
- La función decrece al aumentar x
- El máximo se alcanza en el punto inicial

5. Cálculo de ganancia máxima:

$$x = 10$$

$$y = 90$$

$$G(10, 90) = 20(10) + 15(90) = 200 + 1350 = 1550$$

Resultado: 10 unidades de software local y 90 cursos virtuales, generando ganancia máxima de 1550 soles.