

Laboratorio 2. Pendulos Acoplados

Carlos Alberto Dagua Conda, Héctor Fabio Jiménez Saldarriaga,
Juan Camilo Castrillon,*

Marzo 2016

1 Abstract

In this paper we study experimentally The motion of 2 coupled identical pendulums where the deflection angle is assumed small enough ($< 15^\circ$; $\text{sen}(\theta) \approx \theta$, so the equations of motion can be linearized.) and the force between the two pendulums is weak compared to the force of gravity of each pendulum. We answer properly the questions of the analysis part.

2 Introducción

Objetivos

- Identificar y determinar las frecuencias propias de oscilación para un sistema de dos grados de libertad.
- Determinar el valor de aceleración de la gravedad.
- Medir el tiempo de transmisión de energía entre los péndulos.

Un sistema de osciladores acoplados es aquel que consta de muchos osciladores individuales interconectados entre sí. El modelo de osciladores acoplados se puede aplicar tanto a sistemas mecánicos como a modelos atómicos de sólidos. Así como cada sistema oscilatorio tiene asociada una frecuencia característica de oscilación; un sistema con múltiples osciladores acoplados tiene asociado un conjunto de modos de oscilación con frecuencias características definidas. El sistema más simple y básico es el modelado por dos masas y dos resortes: el primer resorte con un extremo fijo y el otro a la primera masa, y otro resorte que une el otro extremo de la primera masa con la segunda masa¹. Para esta practica de péndulos acoplados experimentalmente realizamos un total de 42 medidas, 21 medidas de ellas en fase, y 21 medidas de ellas en contra fase; se realizaron 3 repeticiones por cada variación de l_0

*carlosdaguaco@utp.edu.co, hfjimenez@utp.edu.co, jucacastrillon@utp.edu.co

¹Osciladores Acoplados, Reseñas de Ciencias Física 3.

A continuación presentamos los datos adquiridos durante la practica experimental.

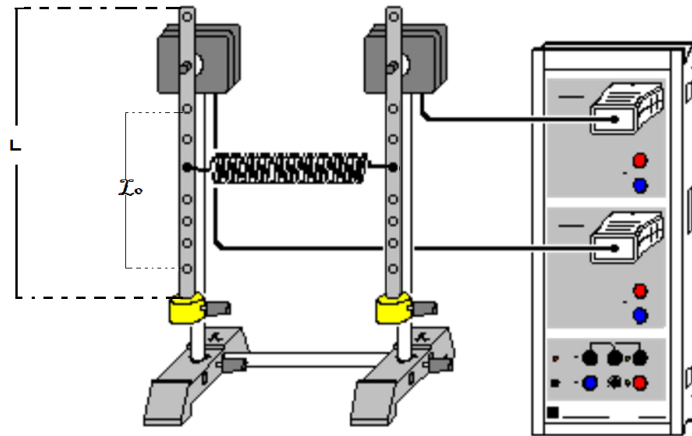


Figure 1: Dispositivo utilizado para la practica experimental con los pendulos.

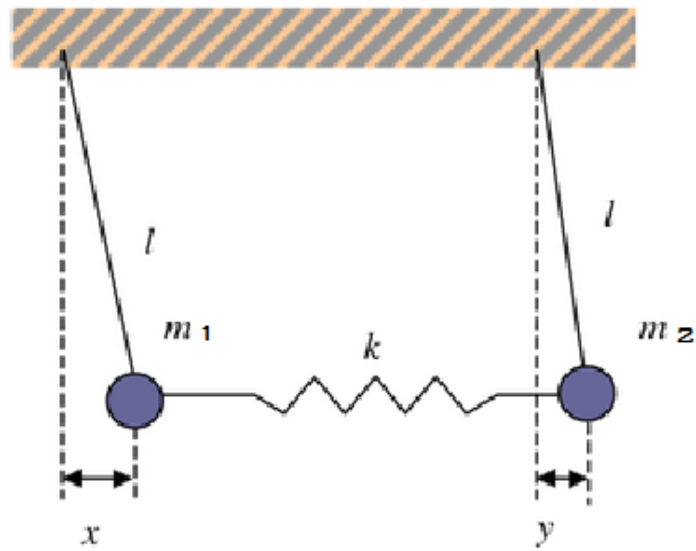


Figure 2: Representación gráfica de los péndulos en fase.

	Tiempos [s]	$\epsilon = l_0/L$
	T1=1.115s	
	T2=1.150s	$\frac{25.5cm}{40cm} = 0.638cm$
	T3=1.080s	
Tprom1	1.115s	

(a) Periodos Tomados en fase ϕ , distancia $l_0 = 25.5cm$

	Tiempos [s]	$\epsilon = l_0/L$
	T1=1.120s	
	T2=1.165s	$\frac{20.5cm}{40cm} = 0.513cm$
	T3=1.155s	
Tprom3	1.147s	

(c) Periodos Tomados en fase ϕ , distancia $l_0 = 20.5cm$

	Tiempos [s]	$\epsilon = l_0/L$
	T1=1.194s	
	T2=1.189s	$\frac{15.5cm}{40cm} = 0.388cm$
	T3=1.174s	
Tprom5	1.186s	

(e) Periodos Tomados en fase ϕ , distancia $l_0 = 15.5cm$

	Tiempos [s]	$\epsilon = l_0/L$
	T1=1.1795s	
	T2=1.202s	$\frac{10.5cm}{40cm} = 0.263$
	T3=1.169s	
Tprom7	1.183s	

(g) Periodos Tomados en fase ϕ , distancia $l_0 = 10.5cm$

	Tiempos [s]	$\epsilon = l_0/L$
	T1=1.140s	
	T2=1.120s	$\frac{23cm}{40cm} = 0.575cm$
	T3=1.194s	
Tprom2	1.151s	

(b) Periodos Tomados en fase ϕ , distancia $l_0 = 23cm$

	Tiempos [s]	$\epsilon = l_0/L$
	T1=1.154s	
	T2=1.174s	$\frac{18cm}{40cm} = 0.450cm$
	T3=1.219s	
Tprom4	1.182s	

(d) Periodos Tomados en fase ϕ , distancia $l_0 = 18cm$

	Tiempos [s]	$\epsilon = l_0/L$
	T1=1.184s	
	T2=1.219s	$\frac{13cm}{40cm} = 0.325$
	T3=1.174s	
Tprom6	1.192s	

(f) Periodos Tomados en fase ϕ , distancia $l_0 = 13cm$

Table 1: Periodos Tomados en fase ϕ , con sus respectivas distancias l_0 , **Tprom: Tiempos Promedio.**

Los valores adquiridos en contra fase.

Tprom1	Tiempos [s]	$\epsilon = l_0/L$
	T1=0.942s	
	T2=1.001s	$\frac{25.5cm}{40cm} = 0.638cm$
	T3=0.986s	
	0.976s	

(a) Periodos Tomados en contrafase ϕ , distancia $l_0 = 25.5cm$

Tprom2	Tiempos [s]	$\epsilon = l_0/L$
	T1=1.026s	
	T2=0.942s	$\frac{23cm}{40cm} = 0.575cm$
	T3=0.961s	
	0.976s	

(b) Periodos Tomados en contrafase ϕ , distancia $l_0 = 23cm$

Tprom3	Tiempos [s]	$\epsilon = l_0/L$
	T1=0.981s	
	T2=0.961s	$\frac{20.5cm}{40cm} = 0.513cm$
	T3=0.996s	
	0.979s	

(c) Periodos Tomados en contrafase ϕ , distancia $l_0 = 20.5cm$

Tprom4	Tiempos [s]	$\epsilon = l_0/L$
	T1=1.026s	
	T2=0.996s	$\frac{18cm}{40cm} = 0.450cm$
	T3=1.016s	
	1.013s	

(d) Periodos Tomados en contrafase ϕ , distancia $l_0 = 18cm$

Tprom5	Tiempos [s]	$\epsilon = l_0/L$
	T1=1.051s	
	T2=1.036s	$\frac{15.5cm}{40cm} = 0.388cm$
	T3=1.041s	
	1.043s	

(e) Periodos Tomados en contrafase ϕ , distancia $l_0 = 15.5cm$

Tprom6	Tiempos [s]	$\epsilon = l_0/L$
	T1=1.080s	
	T2=1.090s	$\frac{13cm}{40cm} = 0.325$
	T3=1.075s	
	1.082s	

(f) Periodos Tomados en contrafase ϕ , distancia $l_0 = 13cm$

Tprom7	Tiempos [s]	$\epsilon = l_0/L$
	T1=1.0905s	
	T2=1.125s	$\frac{10.5cm}{40cm} = 0.263$
	T3=1.125s	
	1.113s	

(g) Periodos Tomados en contrafase ϕ , distancia $l_0 = 10.5cm$

Table 2: Periodos Tomados en contrafase ϕ , con sus respectivas distancias l_0 , **Tprom**: **Tiempos Promedio**.

El periodo para péndulos en fase ϕ (21 oscilaciones) es:

$$t = \sum_{i=1}^7 T_{prom_i} = 24,470$$

$$\frac{t}{n} = \frac{24,470}{21} = 1,165$$

$$T_{fase} = 1,165s$$

El periodo para péndulos en contra fase ϕ (21 oscilaciones) es:

$$t = \sum_{i=1}^7 T_{prom_i} = 21,547$$

$$\frac{t}{n} = \frac{21,547}{21} = 1,026$$

$$T_{Contrafase} = 1,026s$$

3 Análisis

3.1 (Pregunta 2.7.1)

Con los datos experimentales hallados en los numerales 4, 5 y 6 obtenga ω_1 y ω_2 con sus respectivas incertidumbres.
considerando que por definición tenemos :

$$\omega_1 = \frac{2 * \Pi}{T_{fase}} \quad (1)$$

$$\omega_2 = \frac{2 * \Pi}{T_{contrafase}} \quad (2)$$

sustituyendo en las ecuaciones anteriores, los valores de $T_{fase}, T_{contrafase}$

$$\omega_1 = \frac{2 * \Pi}{1,165s} = 5.393rad/s$$

hallando ω_2 con periodo $T_{contrafase}=1.026s$:

$$\omega_2 = \frac{2 * \Pi}{1,026s} = \mathbf{6.124rad/s}$$

comparando contra :

$$\omega_2^2 = \frac{g}{L} + 2\epsilon^2 \frac{k}{m}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L} + 2\epsilon^2 \frac{k}{m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{9.8}{0.4m} + 2 \frac{25.5^2}{40} \frac{2,9754}{100.9}}$$

$$\omega_2 = \mathbf{5.78 rad/s}$$

Si tomamos los 7 tiempos promedios, y promediamos estos tendremos un Periodo de las primeras 21 oscilaciones,
 $T = \mathbf{1.652s}$ Para un periodo total de fase.

ω_1	ω_2
5,635	6,435
5,457	6,416
5,480	6,416
5,393	6,205
5,299	6,026
5,270	5,809
5,310	5,644

Table 3: Tabla de datos obtenidos al aplicar las ecuaciones, considerando cada tiempo promedio

3.2 (Pregunta 2.7.2)

Con los valores obtenidos, construya una gráfica de ω_2^2 y ϵ^2

Utilizando los siguientes valores se construyo la siguiente grafica

ω_2^2	ϵ^2
0,407	48,469
0,331	42,550
0,263	38,840
0,203	35,555
0,151	32,698
0,106	30,267
0,069	28,262

Table 4: Datos para graficar ω_2^2 vs ϵ^2 .

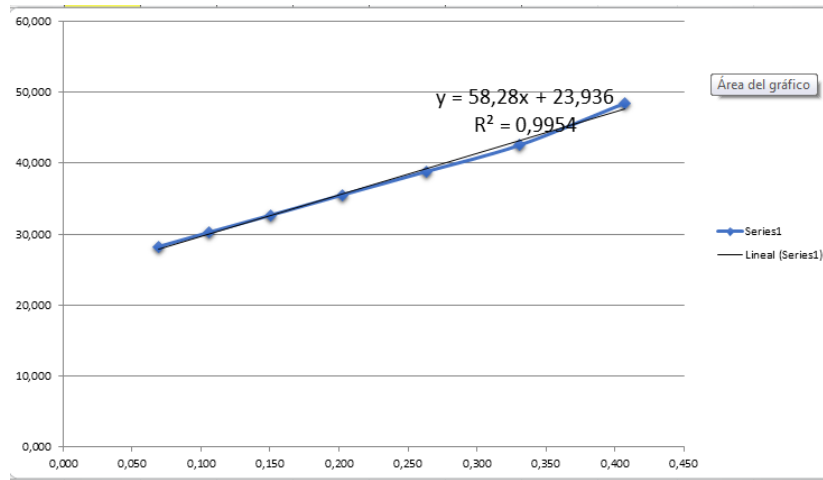


Figure 3: Grafica ω_2^2 vs ϵ^2

3.3 (Pregunta 2.7.3)

Determine la ecuación experimental a partir de su gráfico y por comparación con la ecuación (2.8): determine los valores de g y k

La ecuación (2.8) esta dada por la siguiente expresión:

$$y = Ax + B \quad (3)$$

hallando la ecuación experimental a partir del gráfico obtenemos

$$y = 58,28x + 23,936 \quad (4)$$

$R=0,9954$ en la grafica es nuestro coeficiente de determinación indica que la representación gráfica de la Figure 1 es muy precisa. Si utilizamos los coeficientes **A**, **B** es posible hallar la gravedad experimental **g** y la constante elástica **k**. Para obtener la gravedad experimental sabemos que :

$$g = B * L \quad (5)$$

$$g = 23,936s^{-2} * 0,40m$$

que nos da como resultado:

$$g = 9.574 \frac{m}{s^2}$$

Para obtener la constante elástica **k** por definición:

$$K = \frac{AM}{2} \quad (6)$$

reemplazando los coeficientes correspondientes:

$$k = \frac{58,28 * 0.1kg}{2} = 2.914$$

3.4 (Pregunta 2.7.4)

Compare el valor de g con el valor aceptado. Encuentre su porcentaje de error. Si se conoce el valor teórico para la constante k, halle también su porcentaje de error. Porcentaje de error k.

Para desarrollar este punto utilizaremos la siguiente expresion para determinar los errores:

$$\%Error = \frac{|Valor\ esperado - Valor\ experimental|}{Valoresperado} * 100\% \quad (7)$$

Determinando el error porcentual del valor hallado para la gravedad **g** tenemos:

$$\%Error_{\mathbf{g}} = \frac{|9.8 - 9.574|}{9.8} * 100\% = 2.3\%$$

Determinando el error porcentual para el valor hallado del coeficiente **k** tenemos:

$$\%Error_{\mathbf{k}} = \frac{|2.9754 - 2.914|}{2.9754} * 100\% = 2.06\%$$

3.4.1 Análisis de Incertidumbre,para g, k

De definición matemática:

$$v_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (8)$$

Para medidas con instrumentos Análogos:

$$v_{B1} = \frac{Resolucion}{\sqrt{3}} \quad (9)$$

Para medidas con instrumentos Digitales:

$$v_{B2} = \frac{Resolucion}{2\sqrt{3}} \quad (10)$$

La Incertidumbre combinada esta determinada por la siguiente expresión :

$$U_C = \sqrt{(v_A)^2 + (v_{B1})^2 + (v_{B2})^2} \quad (11)$$

3.4.2 Análisis de Incertidumbre, Constante g

$$\frac{\partial g}{\partial B} = L \quad \frac{\partial g}{\partial L} = B \quad (12)$$

Respecto de L

$$Ib^2 = \frac{0.400m * 0.00100}{\sqrt{3}}$$

$$Ib^2 = 2.31 * 10^{-4}m$$

$$\delta L = |2.31 * 10^{-4}m| = 2.31 * 10^{-4}m$$

Respecto de B

$$\delta B = |0.01382s^{-2}| = 0.01382s^{-2}$$

Incertidumbre Combinada para g

$$Incertidumbre = [23.936 * 2.31 * 10^{-4}m] + [0.40m * 0.01382]$$

$$Incertidumbre = 11.057 * 10^{-3}$$

El valor de la constante g obtenido fue de :

$$g = (9.574 \pm 11.057 * 10^{-3})N/m$$

3.4.3 Análisis de Incertidumbre, Constante k

$$\frac{\partial k}{\partial A} = \frac{M}{2} \quad \frac{\partial k}{\partial M} = \frac{A}{2} \quad (13)$$

Respecto de A

$$Ib^2 = \frac{58.28s^{-2} * 0.001}{\sqrt{3}}$$

$$Ib^2 = 0,03365s^{-2}$$

$$\delta A = |0,03365s^{-2}| = 0,03365s^{-2}$$

Con Respecto de M

$$Ib^2 = \frac{0.0497kg * 0.001}{\sqrt{3}}$$

$$Ib^2 = 2.86 * 10^{-5}kg$$

$$\delta M = |2.86 * 10^{-5}kg| = 2.86 * 10^{-5}kg$$

Incertidumbre Combinada para K

$$Incertidumbre = \left[\frac{0.1}{2} * 2.86 * 10^{-5} \right] kg + \left[\frac{58.28}{2} * 0.03364 \right]$$

$$Incertidumbre = 0.971$$

El valor de la constante K obtenido fue de :

$$K = (2.914 \pm 0.971)N/m$$

Se puede observar que los valores obtenidos experimentalmente comparados con los puntos teóricos tienen aproximaciones muy cercanas, por lo que podemos afirmar que el procedimiento realizado para obtener los coeficientes **k**, **g** es el correcto.

4 Errores Considerados

Los errores considerados para esta practica según los instrumentos fueron :

- Error en la regla = 0.001 m
- Error del observador = 0.001m
- Error en la balanza = 0.1 gr.
- Error de la calibración del cronometro = 0.01seg
- Error para la medición de la K del resorte
- Existe un error entre el tiempo en que se sueltan los péndulos y el momento en que comienza a contar el cronómetro; este error no tiene un valor exacto.

Si realizamos la sumatoria de los errores, nuestro error estimado total es :

$$E_{total} = \sqrt{0.001gr^2 + 0.001gr^2 + 0.1gr^2 + 0.01gr^2} = \mathbf{0.1005087}$$

4.1 Conclusiones

De la practica experimental, y la teoría conocida podemos concluir:

- Los péndulos acoplados gozan de una transmisión de la energía, en los puntos extremos del periodo, en el sistema.
- Se pudo observar que en esta practica de péndulos acoplados hay varios principios físicos, como la transferencia , conservación y la transformación de energía.
- Se identificaron y determinaron las frecuencias propias de oscilación para un sistema de péndulos acoplados con dos grados de libertad.
- Se determinó el valor de la aceleración de la gravedad.

5 Bibliografia

- [1] Raymond A. Serway Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics.
- [2] Sears and Zemansky's University Physics.
- [3] Resonant Couple Pendulums, www.exploratorium.edu
- [4] Martín del Campo, Javier Miranda. “Evaluación de la incertidumbre en datos experimentales”. Disponible en Google Drive utp.edu.co