Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»
Факультет інформатики та обчислювальної техніки
Кафедра інформаційних систем та технологій

Комп’ютерний практикум №3

з дисципліни

«Теорія прийняття рішень»

на тему

«Відношення переваги при глобальній порівнюваности критеріїв»

1 варіант

Перевірила:

Журaковська О.С.

Виконав:

студент гр. ІС-01
Адамов Д.І.

Київ-2023

Завдання 1

Задано множину з 20 альтернатив, які оцінені за множиною критеріїв K = $\{k_i\}$, i = 1,…,12
У вхідному файлі міститься інформація:
1) оцінки альтернатив за критеріями множини K (20 рядків, j-й рядок – це оцінки альтернативи j)
2) про порівнюваність критеріїв:
   - впорядкування критеріїв за спаданням важливості, яке відповідає відношенню строгого порядку V1 на множині K;
   - впорядкування класів рівноважливих критеріїв за зростанням важливості класів, яке відповідає відношенню квазіпорядку V2 на множині K

Необхідно за інформацією про оцінки альтернатив за критеріями к1-к12 та інформацією про порівнюваність критеріїв побудувати на множині альтернатив **відношення переваги** та визначити **оптимальні альтернативи**, якщо:
1) інформація про порівнюваність критеріїв несуттєва (відн. Парето);
2) критерії рівноважливі (мажоритарне в.);
3) на множині критеріїв задане віднош. строгого порядку V1 (лексикографічне в.);
4) на множині критеріїв задане відношення квазіпорядку V2 (відн. Березовського);
5) для випадку рівноважливих критеріїв побудувати на множині альтернатив відношення Подиновського

Оцінки альтернатив за критеріями

4	6	9	4	6	5	7	10	6	8	8	9
4	6	9	4	6	6	7	10	6	9	8	9
2	6	9	4	6	5	6	10	1	5	8	6
2	8	10	9	6	8	6	10	7	10	8	8
10	8	10	9	7	8	6	10	7	10	8	8
6	6	3	6	7	1	3	5	7	5	2	5
2	6	2	6	6	1	2	5	6	1	2	5
2	2	2	6	2	1	2	4	6	1	2	2
6	8	4	8	7	3	5	5	7	6	5	8
6	4	4	7	3	3	5	1	3	5	3	2
7	6	9	10	6	5	7	10	6	8	8	9
7	6	9	10	9	5	7	10	10	8	8	9
6	2	4	2	3	3	1	1	2	4	3	2
6	1	3	2	3	3	1	1	2	4	3	2
6	1	3	2	3	1	1	1	2	4	2	2
6	1	3	2	3	1	1	1	2	2	2	1
10	10	6	6	4	7	7	5	8	8	9	5
6	4	6	5	4	1	1	5	3	8	9	5
6	4	4	3	3	1	1	1	3	5	3	2
6	10	8	9	3	3	1	8	3	7	9	6

Відношення строгого порядку на множині критеріїв
(впорядкування за спаданням важливості):
k6>k4>k10>k2>k11>k3>k8>k12>k1>k5>k9>k7

Відношення квазіпорядку на множині критеріїв
(класи впорядковані за зростанням важливості):
{k3,k8,k11} < {k4,k5,k12} < {k1,k2,k6,k7,k9,k10}

Відношення Парето

1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1

Оптимальні альтернативи за k-оптимізацією:

k1 max elements: {1, 4, 11, 16, 19}
k1 opt elements: {1, 4, 11, 16, 19}

k2 max elements: {}

k3 max elements: {}

k4 max elements: {}

Для побудови відношення нам необхідно визначити матрицю векторів знаків різниць оцінок.
Для цього нам необхідно для кожної пари альтернатив x, y із заданої множини знайти вектор різниць оцінок за формулою:

$$\Delta^{xy} = (\Delta_1^{xy}, \Delta_2^{xy}, \ldots, \Delta_m^{xy}),$$

де $\Delta_i^{xy} = x_i - y_i$ - різниця оцінок альтернатив x, y за критерієм $k_i, i = \overline{1, m}$

А далі знайти сам вектор знаків.

$$\sigma^{xy} = (\sigma_1^{xy}, \sigma_2^{xy}, \ldots, \sigma_m^{xy}),$$

де

$$\sigma_i^{xy} = Sign(\Delta_i^{xy}) = \begin{cases} 1, \Delta_i^{xy} > 0 \\ 0, \Delta_i^{xy} = 0 \\ -1, \Delta_i^{xy} < 0 \end{cases}, \qquad i = \overline{1, m}$$

До відношення належать лише ті пари, які мають σ, що складається з нулів та одиниць. Якщо зустрічається від'ємне значення, то пара не входить у відношення Парето.

$$xI^0 y \Leftrightarrow \forall i \in M[\sigma_i^{xy} = 0],$$

$$xP^0 y \Leftrightarrow (\forall i \in M[\sigma_i^{xy} \geq 0]) \wedge (\exists i_0 \in M[\sigma_{i_0}^{xy} = 1])$$

$$R^0 = P^0 \cup I^0$$

Наприклад, пара (2, 1)

2 |	4	6	9	4	6	6	7	10	6	9	8	9
1 |	4	6	9	4	6	5	7	10	6	8	8	9

Як бачимо, різниці оцінок будуть невід'ємними, отже пара належить відношенню.

Мажоритарне відношення

0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0

Оптимальні альтернативи за k-оптимізацією:

k1 max elements: {11, 4}
k1 opt elements: {11, 4}

k2 max elements: {11, 4}
k2 opt elements: {11, 4}

k3 max elements: {11, 4}
k3 opt elements: {}

k4 max elements: {11, 4}
k4 opt elements: {}

Мажоритарне відношення формується за таким же принципом, як відношення Парето, з відмінністю у тому, що до уваги беруться не попарні порівняння оцінок за критеріями, а сумарне значення. Якщо сума різниць оцінок додатня, то пара включається у відношення.

$$xP^M y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^{xy} > 0$$

Лексикографічне відношення

0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0

Розв’язок Неймана-Моргенштерна: {4}.

Для лексикографічного відношення задається впорядкування критеріїв за важливістю:

k6>k4>k10>k2>k11>k3>k8>k12>k1>k5>k9>k7

Необхідно впорядкувати оцінки за спаданням важливості критеріїв і обрати такі пари, які задовольняють умову:

$$\forall x, y \in E^m \big| x \neq y \;\; xP^L y \Leftrightarrow [x_1 > y_1] \vee [x_1 = y_1 \wedge x_2 > y_2] \vee \ldots$$

$$\ldots \vee [x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \ldots \wedge x_m > y_m].$$

Відношення Березовського

0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0

Розв’язок Неймана-Моргенштерна: {16, 1, 11, 4}.

Відношення Березовського, є квазіпорядком, у якому критерії розбиті на класи рівноважливих критеріїв, а самі класи впорядковані за зростанням важливости.

1. Побудова системи відношень Парето для кожної групи рівноважливих критеріїв за формулами:

$$xP^{0j}y \Leftrightarrow (\forall k_i \in K_j[\sigma_i^{xy} \geq 0] \wedge (\exists k_{i_0} \in K_j[\sigma_{i_0}^{xy} = 1]),$$

$$xI^{0j}y \Leftrightarrow (\forall k_i \in K_j[\sigma_i^{xy} = 0],$$

$$xN^{0j}y \Leftrightarrow (\exists k_{i_1} \in K_j[\sigma_{i_1}^{xy} = 1]) \wedge (\exists k_{i_2} \in K_j[\sigma_{i_2}^{xy} = -1]).$$

2. Побудова відношення Березовського. Виконується ітераційно за l ітерацій (l - кількість класів рівноважливих критеріїв). Формується система відношень:

$P_{B1} = P_{01}$, $I_{B1} = I_{01}$, $N_{B1} = N_{01}$

$$xP^{B_j}y \Leftrightarrow [(xP^{0_j}y) \wedge \neg(yP^{B_{j-1}}x)] \vee [(xI^{0_j}y) \wedge (xP^{B_{j-1}}y)] =$$
$$= [(xP^{0_j}y) \wedge [(xP^{B_{j-1}}y) \vee (xN^{B_{j-1}}y) \vee (xI^{B_{j-1}}y)]] \vee [(xI^{0_j}y) \wedge (xP^{B_{j-1}}y)],$$
$$xI^{B_j}y \Leftrightarrow (xI^{0_j}y) \wedge (xI^{B_{j-1}}y),$$
$$xN^{B_j}y \Leftrightarrow \neg[(xP^{B_j}y) \vee (yP^{B_j}x) \vee (xI^{B_j}y)].$$

Тобто має місце $xP_{в}y$, якщо для пари (x,y) виконується хоча б одна із умов:

$$xP^{02}y \wedge xP^{01}y;$$
$$xP^{02}y \wedge xN^{01}y;$$
$$xP^{02}y \wedge xI^{01}y;$$
$$xI^{02}y \wedge xP^{01}y.$$

Відношення Подиновського

1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1

Оптимальні альтернативи за k-оптимізацією:

k1 max elements: {11, 4}
k1 opt elements: {11, 4}

k2 max elements: {}

k3 max elements: {}

k4 max elements: {11, 4}
k4 opt elements: {}

Якщо усі критерії є рівноважливими, то виконується:

$$xR^{\Pi}y \Leftrightarrow \Psi(x)\, R^{0}\, \Psi(y),$$

$$xP^{\Pi}y \Leftrightarrow \Psi(x)\, P^{0}\, \Psi(y),$$

$$xI^{\Pi}y \Leftrightarrow \Psi(x)\, I^{0}\, \Psi(y),$$

де $\Psi(x)$ – вектор-функція, що розташовує усі компоненти вектора $x \in E$ m за спаданням значень, R^0 – відношення Парето, P^0 , I^0 – асиметрична та симетрична частини відповідно відношення R^0.

За побудовою на множині векторів Ψ відношення Парето отримуємо відношення Подиновського.