Нечіткі відношення

Def

Нечітке відношення *R* – нечітка підмножина декартового добутку $X \times X$, де X – область завдання НВ.

Належність пари (u,v) нечіткому відношенню *R* визначається функцією належності. Позначається $\mu_R(u,v)$ або $R(u,v)$

$0 \leq R(u,v) \leq 1$

Приклад

Нечітка множина “приблизно дорівнює” на множині {1,2,3}

Функція належності НМ може бути визначена наступним чином:

$$\mu_R(u,v) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } u = v; \\ 0.8, & \text{якщо } |u - v| = 1; \\ 0.3, & \text{якщо } |u - v| = 2. \end{cases}$$

НВ в матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.3 \\ 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0.3 & 0.8 & 1 \end{pmatrix}$$

Порожнє та універсальне відношення

$$\varnothing(x, y) = 0 \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y,$$
$$U(x, y) = \mathrm{I} \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y.$$

Для них виконуються тотожності:

$$R \cap \varnothing = \varnothing, \quad R \cup \varnothing = R,$$
$$R \cap U = R, \quad R \cup U = U.$$

Операції над НВ: об'єднання, перетин, включення, композиція*

$$(R \cup S)(x, y) = R(x, y) \vee S(x, y) \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y$$

$$(R \cap S)(x, y) = R(x, y) \wedge S(x, y) \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y$$

$$R \subseteq S \Leftrightarrow R(x, y) \leqslant S(x, y) \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y$$

$$(R \circ S)(x, z) = \bigvee_{y \in Y} (R(x, y) \wedge S(y, z)) \quad \forall x \in X \quad \forall z \in Z$$

* - операції $\wedge$, $\vee$ - відповідно min та max

(тут і далі)

композиція

$$\mu_A(x, y) = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}8 \end{bmatrix} \qquad \mu_B(x, y) = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{A \circ B}(x, y) = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

Нечітке відношення рівності

$$E(x, y) = \begin{cases} 1, \text{якщо } x = y, \\ 0, \text{інакше} \end{cases}$$

$$E \circ R = R \circ E = R$$

Обернене відношення для НВ

$$R^{-1}(x, y) = R(y, x) \quad \forall x,\ y \in X$$

Властивості нечітких відношень

Рефлексивність

$$E \subseteq R, \quad R(x, x) = \mathbf{I} \quad \forall x \in X$$

Сильна рефлексивність, якщо додатково

$$R(x, y) < \mathbf{I} \quad \forall x, y \in X, \quad x \neq y$$

Слабка рефлексивність:

$$R(x, y) \leqslant R(x, x) \; \forall x, \; y \in X$$

Антирефлексивність

$$R \bigcap E = \varnothing, \quad R(x, x) = \mathbf{0} \quad \forall x \in X$$

Сильна антирефлексивність, якщо додатково

$$\mathbf{0} < R(x, y) \quad \forall x, y \in X, \quad x \neq y$$

Слабка антирефлексивність:

$$R(x, x) \leqslant R(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Симетричність

$$R = R^{-1},$$

$$R(x, y) = R(y, x) \quad \forall x, y \in X$$

Антисиметричність

$$R \bigcap R^{-1} \subseteq E,$$

$$R(x, y) \bigwedge R(y, x) = 0$$

$$\forall x, y \in X, \quad x \neq y$$

Асиметричність

$$R \bigcap R^{-1} = \varnothing,$$

$$R(x, y) \bigwedge R(y, x) = \mathbf{0}$$

$$\forall x, y \in X$$

Повнота (лінійність, зв’язність)

Сильна: $R \bigcup R^{-1} = U,$

$$R(x, y) \bigvee R(y, x) = \mathbf{I} \quad \forall x, y \in X$$

Слабка:

$$R(x, y) \bigvee R(y, x) > \mathbf{0} \quad \forall x, y \in X$$

Транзитивність

$$R \supseteq R \circ R,$$

$$R(x, z) \geqslant R(x, y) \wedge R(y, z)$$

$$\forall x, y, z \in X$$

Транзитивне замикання НВ

$$\widehat{R} = R^1 \cup R^2 \cup \ldots \cup R^k \cup \ldots,$$

де R^k визначаються рекурсивно:

$$R^1 = R, \quad R^k = R^{k-1} \circ R, \quad k = 2,\ 3,\ \ldots$$

Властивість транзитивного замикання НВ

Теорема. Транзитивне замикання нечіткого відношення *R* є транзитивним та є найменшим транзитивним відношенням, що включає *R*

Наслідок. НВ *R* транзитивне тоді і тільки тоді, коли

$$R = \widehat{R}$$

Декомпозиція нечітких відношень

α-рівень нечіткого відношення

$$R_\alpha = \{(x, y) \in X \times X \mid R(x, y) \geqslant \alpha\}$$

$\forall\alpha>0$, або

$$R_\alpha(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } R(x,y) \geq \alpha, \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

властивість α-рівнів

з $\alpha \le \beta$ слідує $R_\alpha \supseteq R_\beta$

тобто α-рівні – це сукупність вкладених одне в одне відношень

нечітке відношення можна розкласти за α-рівнями:

$$R = \bigcup_{\alpha} \alpha R_{\alpha}$$

де відношення αR_{α} визначаються наступним чином:

$$(\alpha R_{\alpha})(x, y) = \begin{cases} \alpha, & \text{якщо } R_{\alpha}(x, y) = 1, \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

Теорема

НВ R рефлексивне (антирефлексивне, симетричне, антисиметричне, асиметричне, повне, транзитивне)

тоді і тільки тоді,

коли рефлексивне (антирефлексивне, симетричне, антисиметричне, асиметричне, повне, транзитивне) R_α

$$\forall \alpha: 0 < \alpha \leq 1$$

Виділення в структурі відношення переваги R

R^S – відношення строгої переваги

$$R^S = R \setminus R^{-1}$$

R^I – відношення байдужості

$$R^I = (X \times X) \setminus (R \cup R^{-1}) \cup (R \cap R^{-1})$$

R^E – відношення квазіеквівалентності

$$R^E = R \bigcap R^{-1}$$

Нечітке відношення байдужості

$$\mu_R^I = \max[\{1 - \max\{\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)\}\};$$

$$\min\{\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)\}]$$

Нечітке відношення квазіеквівалентності (толерантності)

$$\mu_R^E = \min\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\}$$

Нечітке відношення строгої переваги

$$\mu_R^S = \begin{cases} \mu_R(x,y) - \mu_{R^{-1}}(x,y) = \\ = \mu_R(x,y) - \mu_R(y,x), \text{ якщо } \\ \qquad\qquad \mu_R(x,y) > \mu_R(y,x) \\ \\ 0, \quad \text{інакше} \end{cases}$$