Методи прийняття рішень із нечіткою вхідною інформацією

- Методи ПР
  - одним експертом
  - групою експертів, що мають вагові коефіцієнти
  - групою експертів, що характеризуються нечітким відошенням нестрогої переваги

Задача ПР з одним експертом

Задано множину альтернатив (можливих рішень)

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

та нечітке відношення нестрогої переваги *R* на множині *U* з функцією належності

$$\mu_R(u_i, u_j) \in [0, 1]$$

R – довільне рефлексивне нечітке відношення на множині *U* :

$$\mu_R(u_i, u_i) = 1, u_i \in U$$

Задача ПР – раціональний вибір найбільш переважних альтернатив з множини *U*,

на якій задане НВ переваги *R*

$\mu_R(u_i, u_j)$ - виражає ступінь переваги "u_i не гірше u_j"

$\mu_R(u_i, u_j) = 0$ - може означати одне з двох:

$$\mu_R(u_j, u_i) > 0$$

$$\mu_R(u_j, u_i) = 0$$

Алгоритм вирішення

1. Побудова НВ строгої переваги R^S, асоційованого з R, що визначається функцією належності

$$\mu_R^S(u_i, u_j) =$$

$$\begin{cases} \mu_R(u_i, u_j) - \mu_R(u_j, u_i), & \mu_R(u_i, u_j) > \mu_R(u_j, u_i); \\ 0, & \mu_R(u_i, u_j) \leqslant \mu_R(u_j, u_i). \end{cases}$$

2. Побудова нечіткої підмножини $U_R^{nd} \subset U$ недомінованих альтернатив, асоційованої з *R*, що визначається функцією належності

$$\mu_R^{nd}(u_i) = \min_{u_j \in U}\{1 - \mu_R^S(u_j, u_i)\} =$$

$$= 1 - \max_{u_j \in U}\{\mu_R^S(u_j, u_i)\}, \quad u_i \in U$$

$\mu_R^{nd}(u_i)$ - ступінь недомінованості альтернативи

$\mu_R^{nd}(u_i) = \alpha$ означає: жодна альтернатива не може бути кращою за u_i зі ступенем домінування більшим за α. Або u_i може домінуватись іншими альтернативами зі ступенем, не вищим за 1- α

Раціональним вважають вибір альтернатив, що мають

по можливості найбільший

ступінь належності множині U_R^{nd}

3. Вибір найкращої альтернативи u^*

$$u^* = \arg\max_{u_i \in U} \mu_R^{nd}(u_i)$$

Приклад 1

На множині $U = \{u_1, \ldots, u_4\}$ задане НВ *R*:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 1 & 1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Визначити найкращу(і) альтернативу(и)

Побудуємо відношення R^S

$$M_R^S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\forall u_i$ визначимо $\max\limits_{u_j \in U}\{\mu_R^S(u_j, u_i)\}$

$$M_R^S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\max\limits_{u_j \in U}\{\mu_R^S(u_j, u_i)\}$	1	0.4	0.3	1

$\forall u_i$ визначимо $\mu_R^{nd}(u_i)$

$$M_R^S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\max\limits_{u_j \in U}\{\mu_R^S(u_j, u_i)\}$	1	0.4	0.3	1
$\mu_R^{nd}(u_i)$	0	0.6	0.7	0

Оскільки

$$\mu_R^{nd}(u_3) = 0.7 = \max \mu_R^{nd}(u_i)$$

то

$$u^* = u_3$$

Приклад 2

На множині $U = \{u_1, \ldots, u_4\}$ задане НВ *R*:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0.6 & 0.9 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Визначити найкращу(і) альтернативу(и)

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0.6 & 0.9 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_R^S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.4 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$m = [0.4; 1; 1; 0.4]$$

$$\nu_R^{nd} = [0.6, 0, 0, 0.6]$$

$u^* \in \{u_1, u_4\}$

Приклад 3

$$\mu_R(x_i,\ x_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0,7 & 0,8 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,2 \\ 0,6 & 1 & 0,9 & 1 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mu_R^s(x_i,\ x_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0,7 & 0,8 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0,2 \\ 0,1 & 1 & 0,9 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Приклад 3

$$\mu_R^s(x_i,\ x_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0,7 & 0,8 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0,2 \\ 0,1 & 1 & 0,9 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\mu_R^{\text{н.д.}}(x) =$	0,9	0	0,1	1	0,4

$x_4\ \left(\mu_R^{\text{н.д.}}(x_4) = 1\right)$

Задача ПР множиною експертів

Задано множину альтернатив (можливих рішень)

$$U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$$

та нечіткі відношення нестрогої переваги R_k на множині U з функціями належності

$$\mu_R(u_i, u_j) \in [0, 1]$$

R_k – результат опитування експерта k, ступінь впливовості якого виражено ваговим коефіцієнтом λ_k :

$$0 \leqslant \lambda_k \leqslant 1, \quad \sum \lambda_k = 1$$

Задача ПР – впорядкування за перевагою альтернатив множини U

Алгоритм вирішення

1. Побудова згортки відношень переваг експертів – отримання нового нечіткого відношення нестрогої переваги *P*:

$$P = \cap R_k(u_i, u_j) = \min\{\mu_{R_k}(u_i, u_j)\}$$

2. Побудова для відношення переваги *P* асоційованого відношення строгої переваги:

$$P^S = P / P^{-1}$$

$$\mu_P^S(u_i, u_j) = \begin{cases} \mu_P(u_i, u_j) - \bar{\mu}_P^{-1}(u_i, u_j), & \text{если } \mu_P(u_i, u_j) > \bar{\mu}_P^{-1}(u_i, u_j); \\ 0, & \text{если } \mu_P(u_i, u_j) \leqslant \bar{\mu}_P^{-1}(u_i, u_j). \end{cases}$$

3. Побудова нечіткої підмножини U_P^{nd} недомінованих альтернатив, асоційованої з *P*, що визначається функцією належності

$$\mu_P^{nd}(u_i) = 1 - \max_{u_j \in P}\{\mu_P^S(u_j, u_i)\},$$

$$u_i \in U$$

4. Побудова опуклої згортки відношень R_k

$$Q = \sum \lambda_k R_k,$$

$$\mu_Q(u_i, u_j) = \sum_k \lambda_k \mu_k(u_i, u_j)$$

5. З отриманим на 4-му кроці новим відношенням переваги *Q* асоціюють відношення строгої переваги

$$Q^S$$

та множину недомінованих альтернатив (аналогічно пп.2,3)

$$U_Q^{nd}$$

6. Побудова перетину отриманих множин недомінованих альтернатив:

$$U^{nd} = U_P^{nd} \cap U_Q^{nd}$$

$$\mu^{nd}(u_i) = \min\{\mu_P^{nd}(u_i), \mu_Q^{nd}(u_i)\}$$

7. Впорядкування альтернатив за значенням $\mu^{nd}(u_i)$

Вибір найкращої альтернативи:

$$u* = \arg\max \mu^{nd}(u_i), \quad u_i \in U$$

Приклад 4

На множині $U = \{u_1, \ldots, u_4\}$

5 експертів задали відношення переваг матрицями:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0.8 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.2 & 0.9 \\ 1 & 1 & 0.9 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.7 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 & 0.9 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0.6 \\ 0.5 & 1 & 1 & 0.8 \\ 1 & 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 1 & 0.6 \\ 0.5 & 1 & 0.3 & 1 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Коефіцієнти важливості експертів: $\lambda_3 = 0.3,$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0.2,\ \lambda_5 = 0.1$

Побудуємо згортки P, Q відношень переваг експертів:

$$M_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_Q = \begin{bmatrix} 1 & 0.34 & 0.49 & 0.62 \\ 0.5 & 1 & 0.67 & 0.71 \\ 0.45 & 0.45 & 1 & 0.39 \\ 0.6 & 0.45 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Побудуємо асоційовані відношення строгої переваги:

$$M_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_Q = \begin{bmatrix} 1 & 0.34 & 0.49 & 0.62 \\ 0.5 & 1 & 0.67 & 0.71 \\ 0.45 & 0.45 & 1 & 0.39 \\ 0.6 & 0.45 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_P^S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_Q^S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.04 & 0.02 \\ 0.16 & 0 & 0.22 & 0.26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.11 & 0 \end{bmatrix}$$

Визначимо множини недомінованих альтернатив U_P^{nd}, U_Q^{nd} :

$$M_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_Q = \begin{bmatrix} 1 & 0.34 & 0.49 & 0.62 \\ 0.5 & 1 & 0.67 & 0.71 \\ 0.45 & 0.45 & 1 & 0.39 \\ 0.6 & 0.45 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_P^S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_Q^S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.04 & 0.02 \\ 0.16 & 0 & 0.22 & 0.26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nu_P^{nd} = [0.5, 1, 0.8, 0.5] \quad \nu_Q^{nd} = [0.84, 1, 0.78, 0.74]$$

$$U^{nd} = U_P^{nd} \cap U_Q^{nd}$$

$$\nu_P^{nd} = [0.5, 1, 0.8, 0.5]$$

$$\nu_Q^{nd} = [0.84, 1, 0.78, 0.74]$$

$$\mu^{nd} = [0.5, 1, 0.78, 0.5]$$

Відповідь: $u* = u_2$