Нечіткі множини (НМ)

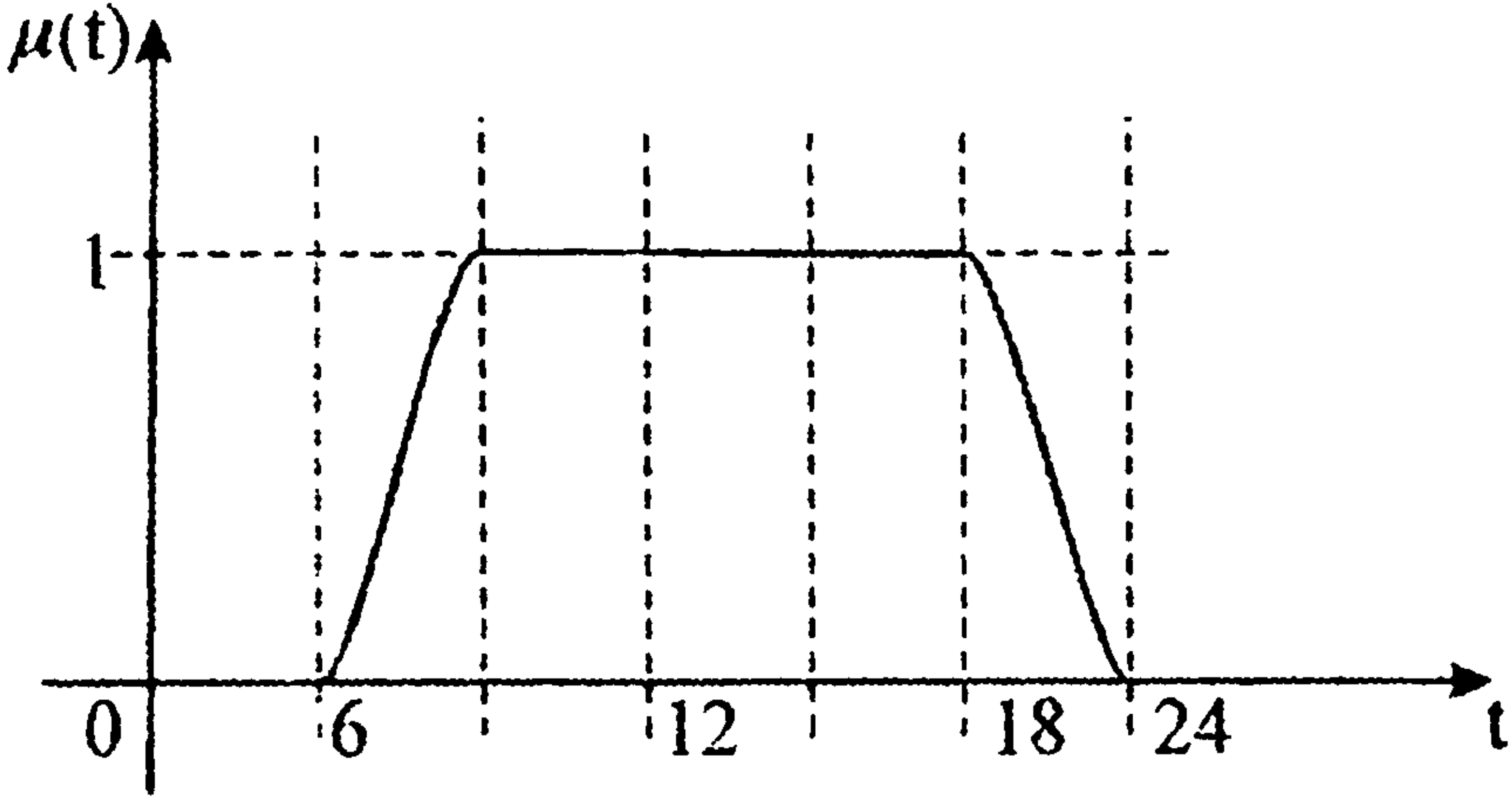
Def 1

Нечітка множина *C* на універсальній множині *X* – це сукупність пар виду *C*$(x,\mu_c(x))$, де $x \in$ *X*,

$\mu_c(x)$ – функція належності елемента x НМ-ні *C*, $\mu_c(x) \in [0,1]$

$\mu_c(x)$ визначає ступінь належності елемента x множині *C*

Приклад 1



ФН годин доби множині “день”

Приклад 2

X – множина натуральних чисел;

нечітка підмножина дуже малих чисел:

$$\tilde{M} = \{(1;1), (2;0.8), (3;0.7), (4;0.6), (5;0.5), (6;0.3)\}$$

Def 2

Нечітка множина $\varnothing$ – **порожня**

$$\Updownarrow$$

$$\mu_{\varnothing}(x) = 0 \quad \forall\, x \in X$$

Def 3

Носій нечіткої множини – це підмножина множини X, що містить тільки елементи із значенням функції належності $\mu_A(x) > 0$:

$$supp(A) = \{x \in X | \mu_A(x) > 0\}$$

Def 4

Нечітка множина *A* називається **нормальною**, якщо

$$\sup_{x \in X} \mu_A(x) = 1$$

Інакше НМ *A* - **субнормальна**

Def 5

α-рівень нечіткої множини (α-сат)

$$A(\alpha) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

(або $[A]^{\alpha}$)

Теоретико-множинні операції

Для заданих нечітких множин

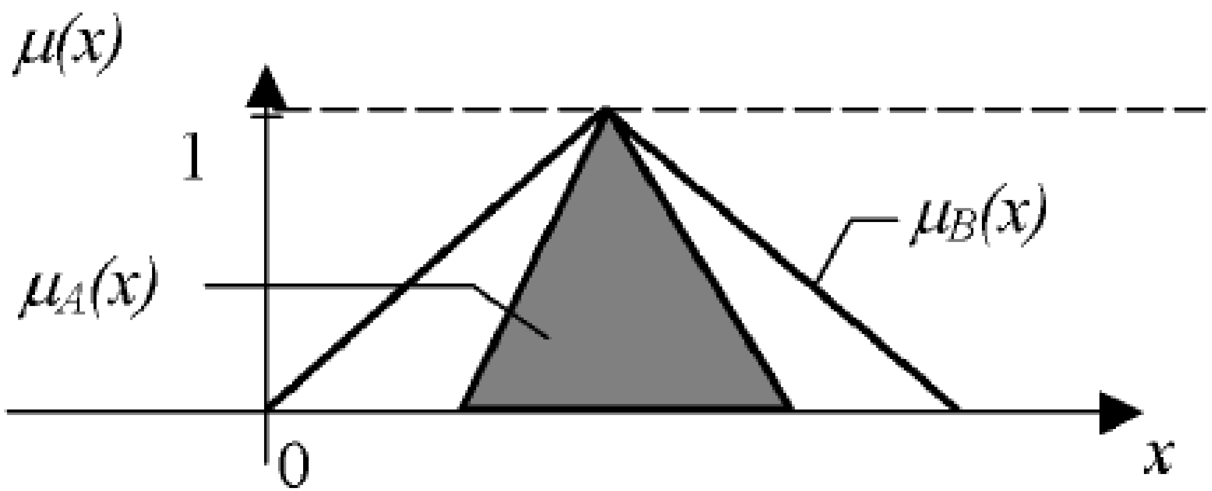
$$\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x))\}, \ \tilde{B} = \{(x, \mu_B(x))\},$$

$$x \in X$$

Def 6 Включення НМ

НМ $\tilde{A}$ є підмножиною НМ $\tilde{B}$ ($\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$), якщо

$$\mu_A(x) \leqslant \mu_B(x), \forall x \in X$$



Def 7 Рівність НМ

НМ рівні: $\tilde{A} = \tilde{B}$, якщо

$$\mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in X$$

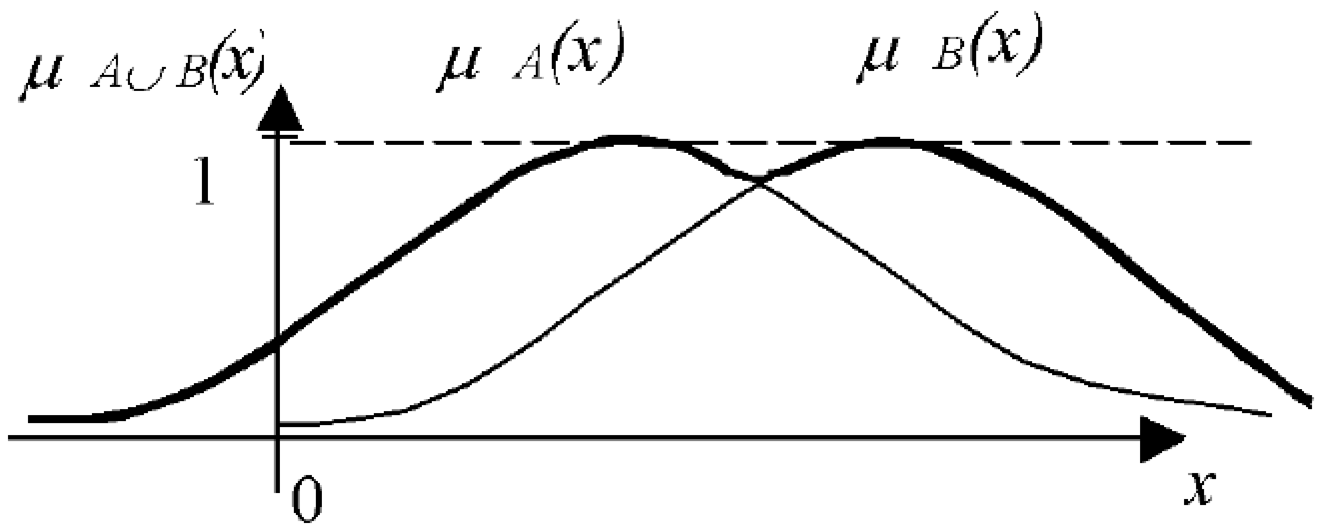
Def 8 Об’єднання НМ

Це множина з ФН

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(x, \mu_{A\cup B}(x))\},\ x \in X$$

$$\mu_{A\cup B}(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

Def 8 Об’єднання НМ



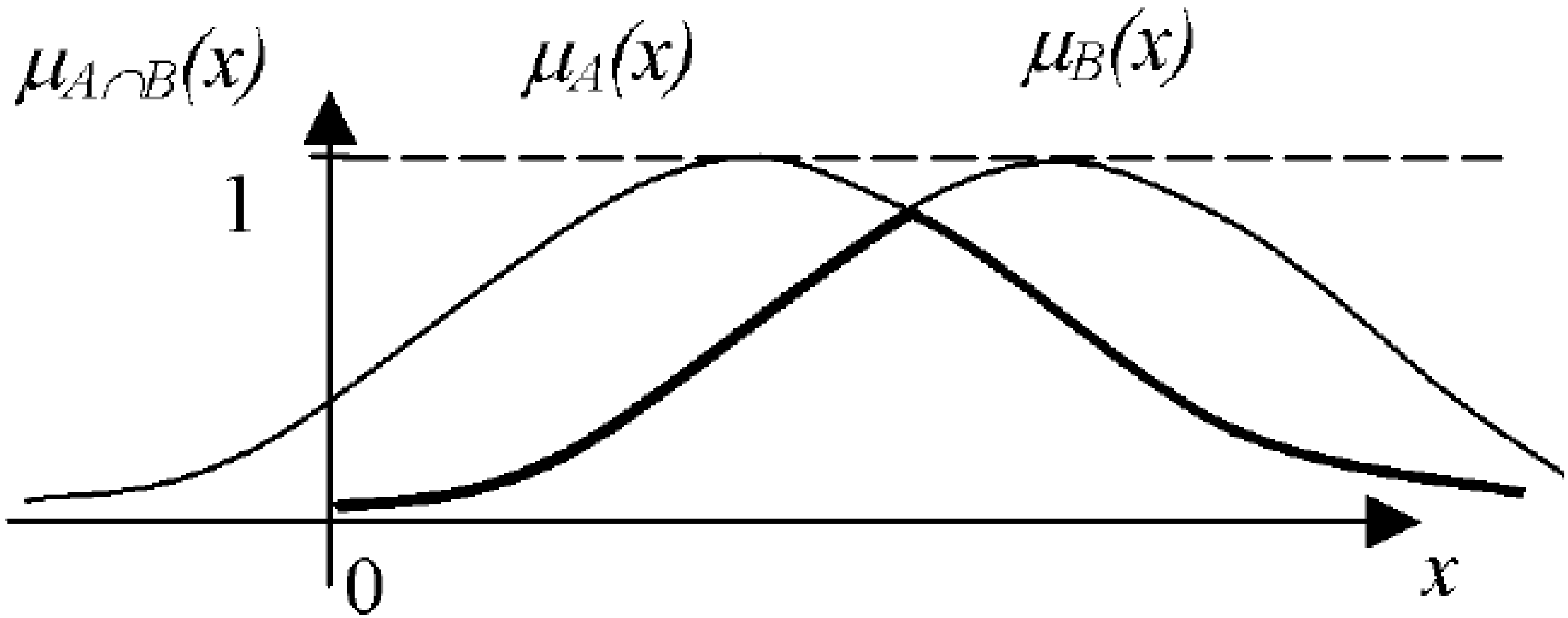
Def 9 Перетин НМ

Це множина з ФН

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(x, \mu_{A \cap B}(x))\},\ x \in X$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

Def 9 Перетин НМ



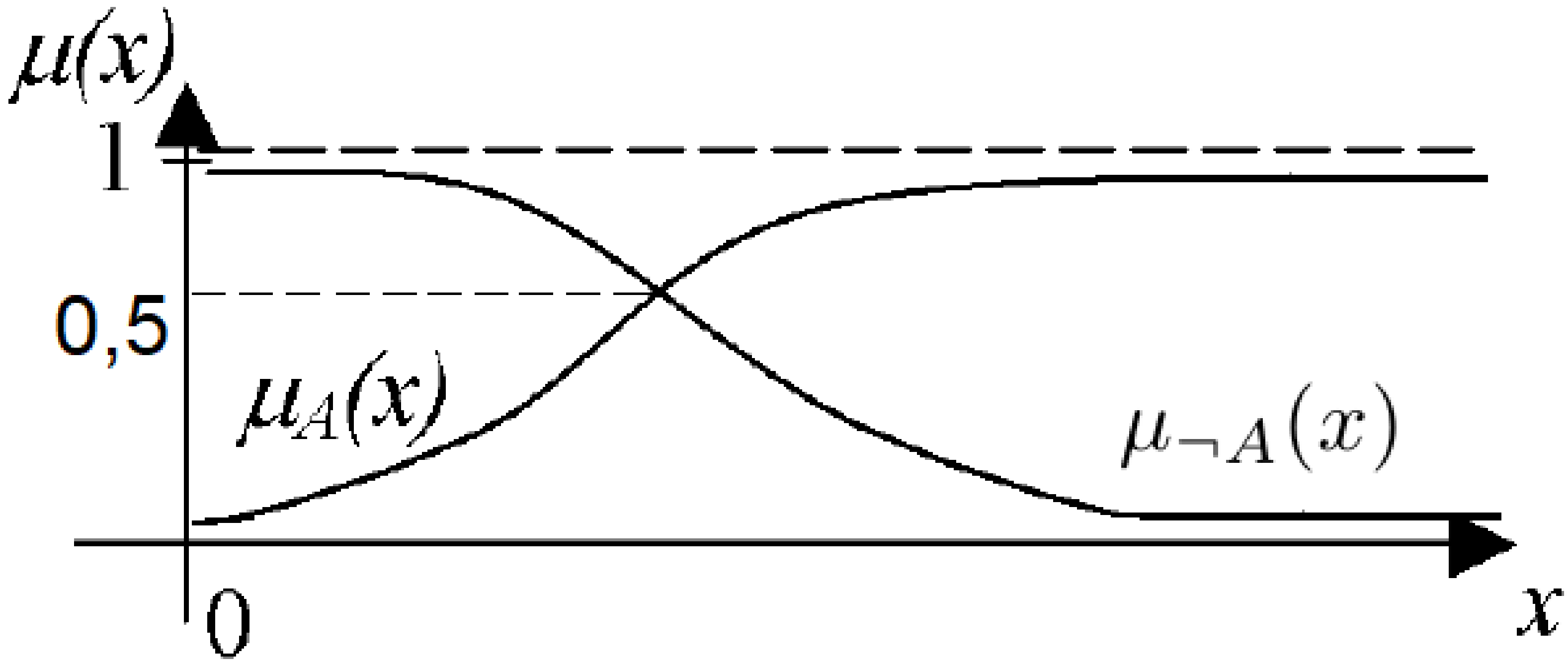
Def 10 Доповнення НМ

Це множина з ФН

$$\neg\tilde{A} = \{(x, \mu_{\neg A}(x))\}, \ x \in X$$

$$\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Def 10 Доповнення НМ



Def 11 Різниця НМ

Різниця НМ $\tilde{A}$ та $\tilde{B}(\tilde{A}\backslash\tilde{B})$- це множина з ФН

$$\tilde{A}\backslash\tilde{B} = \{(x, \mu_{A\backslash \mathrm{B}}(x))\}, x \in X$$

$$\mu_{A\backslash \mathrm{B}}(x) = \begin{cases} \mu_A(x) - \mu_{\mathrm{B}}(x), \text{якщо } \mu_A(x) \geq \mu_{\mathrm{B}}(x) \\ 0, \quad \text{інакше} \end{cases}$$

приклад

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_7\}$$

$$\tilde{A} = \{(x_1; 0.3), (x_3; 0.8), (x_6; 0.4)\}$$

$$\tilde{B} = \{(x_1; 0.9), (x_2; 0.2), (x_3; 0.4), (x_4; 0.5)\}$$

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} =$$

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} =$$

$$\neg \tilde{A} =$$

приклад

$$\tilde{A} = \{(x_1; 0.3), (x_3; 0.8), (x_6; 0.4)\}.$$
$$B = \{(x_1; 0.9), (x_2; 0.2), (x_3; 0.4), (x_4; 0.5)\}.$$
$$\mu_{A \cup B}(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$
$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(x_1; 0.9), (x_2; 0.2), (x_3; 0.4), (x_4; 0.5), (x_6; 0.4)\}.$$
$$\mu_{A \cap B}(x) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$
$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(x_1; 0.3), (x_3; 0.4)\}.$$
$$\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)).$$
$$\neg\tilde{A} = \{(x_1; 0.7), (x_2; 1), (x_3; 0.2), (x_4; 1), (x_5; 1), (x_6; 0.6), (x_7; 1)\}.$$

Основні властивості НМ

1. $\neg(\neg\tilde{A}) = \tilde{A}$

2. $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A},$
$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}$

3. $\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup \tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B} \cup \tilde{C},$
$\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap \tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B} \cap \tilde{C}$

4. $\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C}),$
$\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$

5. $\neg(\tilde{A} \cup \tilde{B}) = \neg\tilde{A} \cap \neg\tilde{B},$
$\neg(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \neg\tilde{A} \cup \neg\tilde{B}$

6. $(\tilde{A} \cup \tilde{B})_\alpha = \tilde{A}_\alpha \cup \tilde{B}_\alpha$
$(\tilde{A} \cap \tilde{B})_\alpha = \tilde{A}_\alpha \cap \tilde{B}_\alpha$